https://about.bnef.com/blog/solar-power-will-kill-coal-sooner-than-you-think/. – Дата доступа: 28.02.2021

2. Coupling a supercapacitor with a small energyharvesting source – Электронный ресурс] / Pierre Mars – URL: https://www.researchgate.net/publication/279896126_Coupling_a_supercapacitor_with_a_small_energyharvesting_source. – Дата доступа: 25.02.2021.

В. Ю. Златина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш,** канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель

ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Введение. Вычисление процессов стандартной модели тесно связано с методами математической физики и теорией специальных функций. Это обусловлено тем, что уравнения скалярных, векторных и спинорных частиц являются дифференциальными уравнениями различных порядков [1-4].

В работе проведем вычисление функции Грина для частицы полуцелого $\hbar/2$ спина. Указанные выражения используются не только для описания движения частиц во внешних полях, но и при вычислении квантово-полевых амплитуд в теории рассеяния.

Метод функции Грина. В разделе кратко изложим метод функции Грина, которой представляет собой один из универсальных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$\hat{Q} f(x) = f_0(x), \tag{1}$$

где $\hat{Q}$ – линейный дифференциальный оператор, $f(x)$ – искомая функция а $f_0(x)$ – некоторая заданная функция. Каждой функции $g(x)$ соответствует своё решение. Такое соответствие можно представить в виде операторного соотношения

$$f(x) = \hat{L} f_0(x), \tag{2}$$

в котором $\hat{L}$ есть некоторый оператор, определяемый видом оператора $\hat{Q}$. Для решения поставленной задачи введем функцию $G(x,x')$, являющуюся решением уравнения

$$\hat{Q}\; G(x,x') = \delta(x - x'), \tag{3}$$

где $\delta(x - x')$ – дельта-функция Дирака. Функцию $G(x,x')$ называют функцией Грина [5], соответствующей задаче. С помощью $G(x,x')$ решение уравнения может быть представлено в виде

$$f(x) = \int G(x,x') f_0(x')\; dx'. \tag{4}$$

Действительно, подействуем на соотношение (4) оператором $\hat{Q}$. Учитывая (3) получаем, что

$$\hat{Q}\, f(x) = \int \hat{Q} G(x,x') f_0(x')\; dx' = \int \delta(x - x') f_0(x')\; dx' = f_0(x). \tag{5}$$

Функция Грина для уравнения Дирака. Решим методом функции Грина уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = -e\; \gamma^{\mu} A_{\mu}(x)\;\; \psi(x), \tag{6}$$

где $\gamma^{\mu} = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ – матрицы Дирака, а e – заряд частицы полуцелого спина. Следуя методу, изложенному выше, решим вспомогательную задачу вида

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right) G_F(x,x') = \delta^{(4)}(x - x'). \tag{7}$$

Найдя функцию Грина $G_F(x,x')$ решение уравнения (6) можно записать в виде

$$\psi(x) = -e\int G_F(x,x')\gamma^{\mu} A_{\mu}(x')\;\; \psi(x')\; dx'. \tag{8}$$

Чтобы решить уравнение (6) запишем функцию Грина $G_F(x,x')$ в импульсном пространстве

$$G_F(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(p)\, \mathrm{e}^{-ip(x-x')}\, d^4 p, \tag{9}$$

где $S_F(p)$ – Фурье-образ функции. Представляя дельта-функцию Дирака в импульсном пространстве [4]

$$\delta^{(4)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{e}^{-ip(x-x')} d^4 p, \tag{10}$$

и вводя обозначение $\gamma^\mu p_\mu = \hat{p}$, получаем выражение для $S_F(p)$:

$$(\hat{p}-m)S_F(p) = 1. \tag{11}$$

Используя перестановочные соотношения для матриц Дирака [2] из (11) получаем, что

$$S_F(p) = \frac{1}{(\hat{p}-m)} = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}. \tag{12}$$

С использованием определения скалярного произведения 4-векторов [4] нетрудно показать, что

$$\hat{p}\,\hat{p} = p_\mu\, p_\nu\, \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\mu\, p_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \tag{13}$$

или $\hat{p}\,\hat{p} = p^2$. Чтобы завершить вычисление $S_F(p)$ определим, как обращаться с сингулярностями при

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - (\vec{p}^{\,2} + m^2) = 0. \tag{14}$$

Правило интегрирования вблизи полюсов при $p_0 = \pm E$ получается при наложении подходящих граничных условий. Воспользуемся методом «сдвига» полюсов с оси, оставляя при этом контур интегрирования без изменений. Чтобы сделать это, запишем $S_F(p)$ в виде

$$S_F(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2 \pm i\varepsilon}. \tag{15}$$

Введение $i\varepsilon$ с бесконечно малым положительным ε приводит к сдвигу полюсов при $p_0 = \pm E$ соответственно немного вниз и вверх от оси. Процедура связана с использованием теоремы Коши о вычетах с последующим выбором контура интегрирования, однако подробные вычисления достаточно громоздки (см. [2, 3]).

Использование выражений (9) и (15) приводит к явному виду искомой функции Грина [3]:

$$G_F(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\hat{p}+m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, \mathrm{e}^{-ip(x-x')}\, d^4 p. \tag{16}$$

Полученное выражение (16) и явный вид $A_\mu(x)$ могут быть использованы для решения уравнения (6) движения частиц полуцелого спина во внешнем поле.

Заключение. В работе получен явный вид функции Грина уравнения Дирака. В ходе работы было использованы Фурье-преобразования и методы теории функции комплексного переменного. Полученные выражения могут быть использованы для решения задач теории рассеяния, а также расчета квантово-полевых амплитуд переходов спинорных частиц.

Литература

1. Пескин, М. Е., Шрёдер, Д. В. Введение в квантовую теорию поля / М. Е. Пескин, Д. В. Шрёдер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. – 784 с.
2. Биленький, С. М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С. М. Биленький. – Москва: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
3. Хелзен, Ф. Лептоны и кварки: введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А. Мартин. – Москва: Мир, 1987. – 456 с.
4. Borodulin, V. I. CORE: COmpendium of RElations: Version 3.1/ V. I. Borodulin, R. N. Rogalyov, S. R. Slabospitsky // CORE. [Electronic resource]. Mode of access: http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9507456. – Date of access: 10.08.2020.
5. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Москва: Наука, 1967. – 436 с.