

УДК 62-83:681.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО И ТОКОВОГО УПРАВЛЕНИЯ РАЗОМКНУТЫМИ ЭЛЕКТРОПРИВОДАМИ

**С.Н. КУХАРЕНКО, А.И. РОЖКОВ**

Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П.О. Сухого»,  
Республика Беларусь

**Н.Б.А. ФЕРШИШИ**

Тунисский университет Науки и Техники

### 1. Введение

Современные активные силовые полупроводниковые преобразователи позволяют создавать источники электропитания с характеристиками идеальных источников тока или напряжения.

Использование их в замкнутых электроприводах переменного тока нередко дает положительный эффект [1].

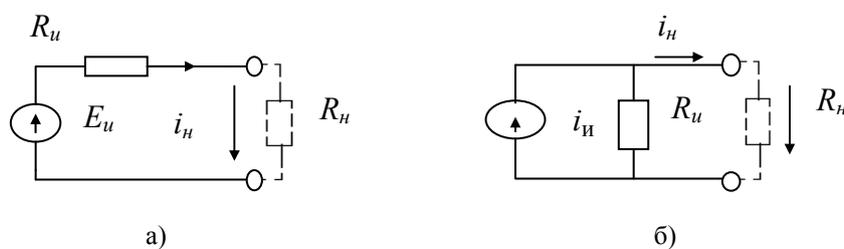
В то же время применение таких источников для электропитания разомкнутых или «бездатчиковых» электроприводов постоянного и переменного тока в ряде случаев приводит к нежелательным режимам: невозможность запуска, пуск с выходом в «разнос», раскачиванием на установившейся скорости.

### 2. Цель работы

Разработать матмодели потенциального и токового управления разомкнутыми электроприводами для выявления принципов построения их рациональных структур при электропитании от реальных и идеальных источников тока или напряжения.

### 3. Метод решения

Разработка моделей электроприводов постоянного и переменного тока при электропитании от реальных и идеальных источников тока и ЭДС, построенных на основе единой методологии. Дифференциальные уравнения записывались по законам Киргофа и Ньютона по общепринятым схемам замещения источников электропитания и электродвигателей, вид которых для электродвигателя независимого возбуждения (ДПТ НВ) представлен на рис. 1 и 2.



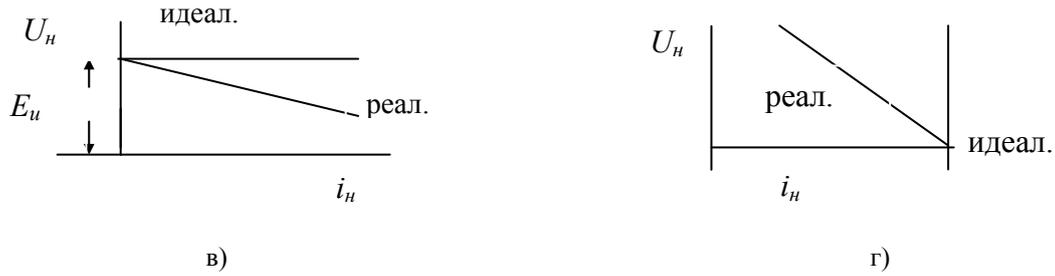


Рис. 1. Схемы замещения (а, б) и внешние характеристики (в, г) источников электрического напряжения (а, в) и тока (б, г)

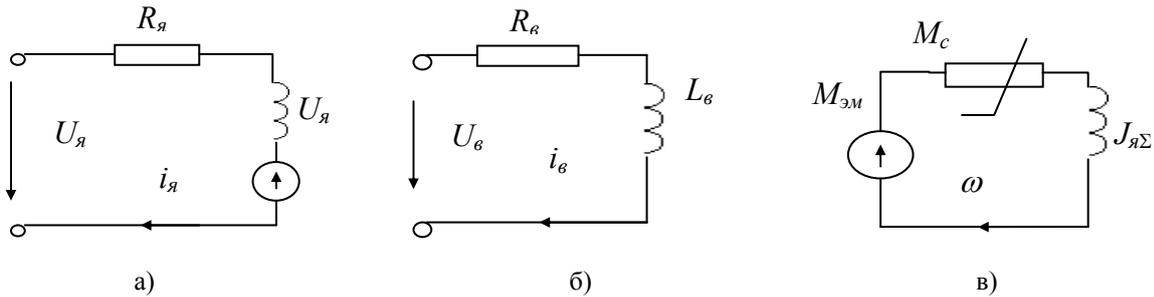


Рис. 2. Схемы замещения якорной обмотки (а), обмотки возбуждения (б) и механической части (в) ДПТ НВ

#### 4. Математические модели электроприводов постоянного тока

Методику и технику построения матмоделей проиллюстрируем на примере ДПТ НВ, обмотки которого подключены к реальным источникам электрического напряжения. Здесь и далее будем пренебрегать потоками рассеяния, вихревыми токами, сопротивлением щеточно-коллекторного контакта, насыщением магнитной цепи, реакцией якоря, влиянием обдува и нагрева, нагрузкой демпфирования как факторами, имеющими второстепенное влияние на процесс электромеханического преобразования.

В этом случае, записывая уравнения электрического и механического равновесия, в соответствии со схемами замещения, получим математическую модель ДПТ НВ в канонической (не преобразованной) форме

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ия} = i_{я}(R_{ия} + R_{я}) + L_{я} \frac{di_{я}}{dt} + e_{я}, \\ E_{ив} = i_{в}(R_{ив} + R_{в}) + L_{в} \frac{di_{в}}{dt}, \\ M_{эм} = J_{я\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + M_{cm} \text{Sign}(\omega), \\ e_{я} = \kappa i_{в} \omega, \\ M_{эм} = \kappa i_{я} i_{в}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где обозначено:  $E_{ия}$ ,  $E_{ив}$ ,  $R_{ия}$ ,  $R_{ив}$  – ЭДС и внутренние активные сопротивления источников напряжения обмоток якоря и возбуждения;  $i_{я}$ ,  $i_{в}$ ,  $R_{я}$ ,  $R_{в}$ ,  $L_{я}$ ,  $L_{в}$  – токи, активные сопротивления и индуктивности обмоток якоря и возбуждения;  $M_{эм}$ ,  $\omega$  – электромагнитный момент и угловая скорость вращения двигателя;  $e_{я}$  – ЭДС вращения якоря;  $M_{cm}$ ,  $J_{я\Sigma}$  – нагрузочный момент сухого трения и суммарный момент инерции вращающихся частей;  $\kappa$  – константа, зависящая от конструкции электродвигателя, параметров магнитной цепи и числа витков обмотки возбуждения.

Исключая переменные  $e_{я}$  и  $M_{эм}$  и вводя общепринятые относительные переменные [2], получим математическую модель ДПТ НВ для однонаправленного вращения ( $Sign(\omega) = 1$ ) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(e_{ия}^0 - i_{я}^0\omega^0) - \tau_2(1 + \rho_1)i_{я}^0, \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3[e_{и\epsilon}^0 - (1 + \rho_2)i_{\epsilon}^0], \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0), \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\tau_1 = \frac{T_{мех}}{T_{я}}$ ,  $\tau_2 = \frac{T_{эм}}{T_{я}}$ ,  $\tau_3 = \frac{T_{эм}}{T_{\epsilon}}$ ,  $\tau_4 = \frac{T_{эм}}{T_{мех}}$  – относительные постоянные времени;

$\rho_1 = \frac{R_{ия}}{R_{я}}$ ,  $\rho_2 = \frac{R_{и\epsilon}}{R_{\epsilon}}$  – относительные сопротивления;  $T_{я} = \frac{L_{я}}{R_{я}}$ ,  $T_{\epsilon} = \frac{L_{\epsilon}}{R_{\epsilon}}$ ,

$T_{мех} = \frac{J_{я\Sigma}\omega_N}{M_N}$ ,  $T_{эм} = \frac{J_{я\Sigma}R_{я}}{(\kappa I_{\epsilon N})^2}$  – абсолютные постоянные времени обмоток якоря, воз-

буждения, механическая и электромеханическая. Индекс «N» указывает на номинальное значение данной величины.

Аналогичным образом можно построить математические модели ДПТ параллельного и последовательного возбуждения. В таблице 1 приводится сводка всех математических моделей рассмотренных электродвигателей постоянного тока, в которых дополнительно к указанным в экспликациях к (2) введены обозначения:

$$\rho_3 = R_{иN}/R_{\epsilon}; \alpha_1 = I_{\epsilon N}/I_{яN}; \alpha_2 = E_{яN}/U_{\epsilon N}; \alpha_3 = U_{яN}/U_{\epsilon N}; \lambda_1 = L_{\epsilon}/L_{я}; \tau_5 = \tau_2 \frac{1 + \tau_1}{\tau_1}.$$

Таблица 1

Математические модели электродвигателей постоянного тока

	Тип электро-двигателя	Тип источника электро-питания	Математическая модель
1	ДПТ с независимым возбуждением	Реальный источник напряжения: $\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0$ , $e_{ия}^0 = u_{я}^0 + \rho_1\tau_4 i_{я}^0 - const$ , $e_{и\epsilon}^0 = u_{\epsilon}^0 + \rho_2 i_{\epsilon}^0 - const$ , $i_{ия}^0 = i_{я}^0 - var$ , $i_{и\epsilon}^0 = i_{\epsilon}^0 - var$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(e_{ия}^0 - i_{я}^0\omega^0) - \tau_2(1 + \rho_1)i_{я}^0, \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3[e_{и\epsilon}^0 - (1 + \rho_2)i_{\epsilon}^0], \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0) \end{array} \right.$
		Идеальный источник напряжения: $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$ $e_{ия}^0 = u_{я}^0 - const$ , $e_{и\epsilon}^0 = u_{\epsilon}^0 - const$ , $i_{ия}^0 = i_{я}^0 - var$ , $i_{и\epsilon}^0 = i_{\epsilon}^0 - var$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(e_{ия}^0 - i_{я}^0\omega^0) - \tau_2 i_{я}^0, \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3(e_{и\epsilon}^0 - i_{\epsilon}^0), \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0 - M_{cm}^0) \end{array} \right.$

Продолжение табл. 1

	Тип электродвигателя	Тип источника электропитания	Математическая модель
1	ДПТ с независимым возбуждением	Реальный источник тока $\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0,$ $i_{ия}^0 = i_{я}^0 + \frac{u_{я}^0}{\rho_1 \tau_4} - const,$ $i_{ув}^0 = i_{\epsilon}^0 + \frac{u_{\epsilon}^0}{\rho_2} - const,$ $u_{ия}^0 = u_{я}^0 - var,$ $u_{ув}^0 = u_{\epsilon}^0 - var$	$\begin{cases} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(\rho_1 \tau_4 i_{ия}^0 - i_{\epsilon}^0 \omega^0) - \tau_2(1 + \rho_1)i_{я}^0, \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3[\rho_2 i_{ув}^0 - (1 + \rho_2)i_{\epsilon}^0], \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0 i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$
		Идеальный источник тока: $\rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty,$ $i_{ия}^0 = i_{я}^0 - const,$ $i_{ув}^0 = i_{\epsilon}^0 - const,$ $u_{ия}^0 = u_{я}^0 = \tau_4 i_{ия}^0 + \omega^0 i_{ув}^0 - var,$ $u_{ув}^0 = u_{\epsilon}^0 = i_{ув}^0 - const$	$\frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{ия}^0 i_{ув}^0 - M_{cm}^0)$
2	ДПТ с параллельным возбуждением	Реальный источник напряжения: $\rho_1 \neq 0, \rho_3 \neq 0,$ $e_{ия}^0 = u_{я}^0 + \rho_1 \tau_4 i_{я}^0 - const,$ $i_{ия}^0 = i_{я}^0 + \alpha_1 i_{\epsilon}^0 - var,$ $u_{\epsilon}^0 = \alpha_2 u_{я}^0 - var$	$\begin{cases} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(e_{ия}^0 - \omega^0 i_{\epsilon}^0) - \\ - \tau_2[(1 + \rho_1)i_{я}^0 - \alpha_1 \rho_1 i_{\epsilon}^0], \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3[\alpha_2 e_{ия}^0 - (1 + \rho_3)i_{\epsilon}^0 - \frac{\rho_3}{\alpha_1} i_{я}^0], \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0 i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$
		Идеальный источник напряжения: $\rho_1 = 0, \rho_3 = 0,$ $e_{ия}^0 = u_{я}^0 - const,$ $i_{ия}^0 = i_{я}^0 + \alpha_1 i_{\epsilon}^0 - var,$ $u_{\epsilon}^0 = \alpha_2 u_{я}^0 - const$	$\begin{cases} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(e_{ия}^0 - \omega^0 i_{\epsilon}^0) - \tau_2 i_{я}^0, \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3(\alpha_2 e_{ия}^0 - i_{\epsilon}^0), \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0 i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$
		Реальный источник тока: $\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0,$ $i_{ия}^0 = i_{я}^0 + \frac{u_{я}^0}{\rho_1 \tau_4} + \alpha_1 i_{\epsilon}^0 - const,$ $u_{ия}^0 = u_{я}^0 = \frac{u_{\epsilon}^0}{\alpha_2} - var$	$\begin{cases} \frac{di_{я}^0}{d\tau} = \tau_1(\rho_1 \tau_4 i_{ия}^0 - \omega^0 i_{\epsilon}^0) - \\ - \tau_2[(1 + \rho_1)i_{я}^0 - \alpha_1 \rho_1 i_{\epsilon}^0], \\ \frac{di_{\epsilon}^0}{d\tau} = \tau_3[\rho_1 \alpha_2 \tau_4 i_{ия}^0 - \\ - (1 + \rho_3)i_{\epsilon}^0 - \frac{\rho_3}{\alpha_1} i_{я}^0], \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4(i_{я}^0 i_{\epsilon}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$

Продолжение табл. 1

	Тип электро-двигателя	Тип источника электропитания	Математическая модель
		Идеальный источник тока: $\rho_1 = \infty, \rho_3 = \infty,$ $\rho_1/\rho_3 = R_e/R_r,$ $i_{ия}^0 = i_r^0 + \alpha_1 i_e^0 - const,$ $u_{ия}^0 = u_r^0 = \frac{u_e^0}{\alpha_2} - var,$ $u_e^0 = \frac{1}{\tau_3} \frac{di_e^0}{d\tau} + i_e^0$	$\begin{cases} \frac{di_r^0}{d\tau} = \tau_5 [i_{ия}^0 - \alpha_2 (i_{ия}^0 - i_r^0) \omega^0] - \tau_5 \frac{\rho_3}{\rho_1} i_r^0, \\ \frac{d\omega}{d\tau} = \tau_4 [i_r^0 (i_{ия}^0 - i_r^0) \frac{1}{\alpha_1} - M_{cm}^0] \end{cases}$
3	ДПТ с последовательным возбуждением	Реальный источник напряжения: $\rho_1 \neq 0, \rho_3 \neq 0,$ $e_{ия}^0 = \rho_1 \tau_4 i_r^0 + \frac{1}{\alpha_2} u_e^0 + u_r^0 - const,$ $i_{ия}^0 = i_r^0 - var,$ $u_e^0 = i_r^0 + \frac{1}{\tau_3} \frac{di_r^0}{d\tau} - var$	$\begin{cases} \frac{di_r^0}{d\tau} = \frac{\tau_1}{1 + \lambda_1} (e_{ия}^0 - i_r^0 \omega^0) - \frac{\tau_2}{1 + \lambda_1} \times \\ \times (1 + \rho_1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}) i_r^0, \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4 (i_r^0 i_{ия}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$
		Идеальный источник напряжения: $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{R_e}{R_r},$ $e_{ия}^0 = u_r^0 + \frac{1}{\alpha_2} u_e^0 - const,$ $i_{ия}^0 = i_r^0 - var,$ $u_e^0 = \frac{1}{\tau_3} \frac{di_r^0}{dt} + i_r^0 - var$	$\begin{cases} \frac{di_r^0}{d\tau} = \frac{\tau_1}{1 + \lambda_1} (e_{ия}^0 - i_r^0 \omega^0) - \\ - \frac{\tau_2}{1 + \lambda_1} (1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}) i_r^0, \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4 (i_r^0 i_{ия}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$
		Реальный источник тока: $\rho_1 \neq 0, \rho_3 \neq 0,$ $i_{ия}^0 = i_r^0 + \frac{u_{ия}^0}{\rho_1 \tau_4} - const,$ $u_{ия}^0 = u_r^0 + \frac{1}{\alpha_2} u_e^0 - var,$ $u_e^0 = \frac{1}{\tau_3} \frac{di_r^0}{d\tau} + i_r^0 - var$	$\begin{cases} \frac{di_r^0}{d\tau} = \frac{\tau_1}{1 + \lambda_1} (\rho_1 \tau_4 i_{ия}^0 - i_r^0 \omega^0) - \\ - \frac{\tau_2}{1 + \lambda_1} (1 + \rho_1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}) i_r^0, \\ \frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4 (i_r^0 i_{ия}^0 - M_{cm}^0) \end{cases}$

Окончание табл. 1

	Тип электро-двигателя	Тип источника электропитания	Математическая модель
		Идеальный источник тока: $\rho_1 = \infty, \rho_2 = \infty$ $\frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{R_\epsilon}{R_\gamma}$ , $i_{\text{ия}}^0 = i_\gamma^0 - \text{const}$ , $u_{\text{ия}}^0 = u_\gamma^0 + \frac{1}{\alpha_2} u_\epsilon^0 - \text{var}$ , $u_\epsilon^0 = i_\gamma^0 - \text{const}$ , $u_\gamma^0 = \tau_4 i_\gamma^0 + i_\gamma^0 \omega^0 - \text{var}$	$\frac{d\omega^0}{d\tau} = \tau_4 (i_{\text{ия}}^0 i_{\text{ия}}^0 - M_{\text{cm}}^0)$

### 5. Математическая модель электропривода переменного тока

Поскольку в последнее время достаточно широкое применение нашел асинхронный привод с частотно-токовым управлением [3], то дополнительно к представленным матмоделям построим, на основе той же методологии, математическую модель АД при электропитании от идеального источника тока. Поскольку в этом случае модуль пространственного вектора статорного тока  $I_s - \text{const}$ , то в пространственных векторах математическая модель АД при использовании синхронно вращающейся системы координат [4] может быть записана в виде:

$$\begin{cases} 0 = R_r \bar{I}_r + \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} + j(\omega_1 - \omega) \bar{\Psi}_r, \\ J \frac{d\omega}{dt} + M_{\text{cm}} \text{Sign} \omega = \frac{3X_m}{2X_r} [\bar{I}_s \times \bar{\Psi}_r], \\ \bar{\Psi}_r = \frac{X_m}{\omega_{1N}} \bar{I}_s + \frac{X_r}{\omega_{1N}} \bar{I}_r, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\bar{U}_s, \bar{I}_s, \bar{\Psi}_s, \bar{I}_r, \bar{\Psi}_r$  – пространственные векторы напряжений, токов, потокосцеплений обмоток статора и ротора;  $R_s, X_s, R_r, X_r, X_m$  – параметры схемы замещения обмоток статора и ротора, приведенного к статору;  $\omega_1, \omega_{1N}$  – текущая и номинальная синхронные частоты вращения;  $\omega$  – частота вращения ротора;  $J, M_{\text{cm}}$  – момент инерции вращающихся частей и момент сухого трения на валу (нагрузка).

Исключим в системе (3) неизвестную  $\bar{I}_r$  и получим в форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} = -j(\omega_1 - \omega) \bar{\Psi}_r - R_r \frac{\omega_{1N}}{X_r} (\bar{\Psi}_r - \frac{X_m}{\omega_{1N}} \bar{I}_s), \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{3X_m}{2JX_r} [\bar{I}_s \times \bar{\Psi}_r] - \frac{1}{J} M_{\text{cm}} \text{Sign} \omega. \end{cases} \quad (4)$$

Совмещая вектор  $\bar{\Psi}_r$  с пространственной осью координат ОХ и учитывая, что  $i_s = \sqrt{i_{sx}^2 + i_{sy}^2} = const$ , запишем систему (4) в проекциях пространственных векторов через относительные переменные [2] следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_{rx}^0}{d\tau} = -\tau_2 \Psi_{rx}^0 + \tau_2 \sqrt{(1 + \kappa_r^2 \beta_N^2)(i_s^0)^2 - \kappa_r^2 (\omega_1^0 - \nu_N \omega^0)^2 (\Psi_{rx}^0)^2}, \\ \frac{d\omega^0}{dt} = \left(\frac{1}{\nu_N} \omega_1^0 - \omega^0\right) (\Psi_{rx}^0)^2 - \tau_4 M_{cm}^0 \text{Sign} \omega^0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь, в отличие от предыдущего, обозначено:  $T_r = \frac{X_r}{\omega_N R_r}$  – постоянная времени ротора;  $T_{эм} = \frac{2 R_r J}{3 \Psi_{rxN}^2} = \frac{J \Delta \omega_N}{M_N}$  – электромеханическая постоянная времени;  $T_{мех} = \frac{\omega_N J}{M_N}$  – механическая постоянная времени;  $\Delta \omega_N = \omega_{1N} - \omega_N$  – номинальное абсолютное скольжение;  $\Psi_{rxN} = \sqrt{\frac{2 R_r M_N}{3 \Delta \omega_N}} = \frac{X_m I_{sN}}{\Delta \omega_N} (1 + \kappa_r^2 \beta_N^2)^{-0,5}$  – номинальное токосцепление ротора по оси Х;  $\tau_2 = \frac{T_{эм}}{T_r}$ ,  $\tau_4 = \frac{T_{эм}}{T_{мех}} = \frac{\Delta \omega_N}{\omega_N} = \frac{\beta_N}{\nu_N}$  – относительные постоянные времени;  $\nu_N = \frac{\omega_N}{\omega_N}$ ,  $\beta_N = \frac{\Delta \omega_N}{\omega_N}$  – номинальные относительные угловая скорость и скольжение.

Полученные математические модели (табл. 1, (5)) позволяют исследовать поведение разомкнутых или «бездатчиковых» электроприводов постоянного и переменного тока с позиции единой методологии в режимах пуска, реверса, торможения, регулирования параметров движения.

Так, например, аналитическое и численное исследования матмоделей для случая прямого пуска электроприводов позволили подтвердить известные и установить новые факты.

Было подтверждено, что пуск электродвигателей постоянного тока со всеми видами возбуждения от реального источника напряжения всегда возможен при выполнении условий пуска и заканчивается режимом установившегося вращения.

При питании же от идеальных источников токов пуск ДПТ с независимым и последовательным возбуждением при выполнении условий пуска, хотя и возможен, но приводит к непрерывному росту скорости и якорного тока. Пуск ДПТ с параллельным возбуждением в этих условиях неоднозначен, так как его скорость может установиться на двух различных уровнях, в зависимости от постоянных времени якорной цепи и цепи возбуждения.

Частотный пуск АД от реального источника тока, идеального и реального источника напряжения тоже всегда возможен и заканчивается установившимся режимом.

Пуск же его от идеального источника тока заканчивается автоколебаниями скорости около установившегося положения.

Все это позволило сделать важный вывод – электропривод постоянного или переменного тока, подключенный к идеальному источнику тока, следует обязательно снабжать быстросрабатывающей обратной связью по нагрузочному моменту.

**Литература**

1. Ефимов А.А., Шрейнер Р.Т. Активные преобразователи в регулируемых электроприводах переменного тока. – Новоуральск: Изд-во НГТИ, 2001. – 250 с.
2. Гаррис М., Лауренсон П., Стеренсон Дж. Системы относительных единиц в теории электрических машин. – М.: Энергия, 1975. – 120 с.
3. Кривицкий С.О., Эпштейн И.И. Динамика частотно-регулируемых электроприводов с автономными инверторами. – М.: Энергия, 1970. – 149 с.
4. Ковач К.П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 744 с.

*Получено 11.10.2002 г.*