

УДК 539.4

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

М.А. КЛЕЙНХОФ, В.П. ПАВЕЛКО, И.В. ПАВЕЛКО

*Авиационный институт Рижского технического
университета, Латвия*

1. Введение

Исследованию закономерностей разрушения волокнистых композиционных материалов посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Исчерпывающую информацию по этой проблеме можно найти в монографиях и научных обзорах [1...3]. Вместе с тем, явление разрушения композитов настолько сложно и многообразно, что построение новых моделей или критический анализ существующих представляется актуальным.

В настоящей работе предпринимается попытка построить некоторую гипотетическую модель плоского изолированного слоя однонаправленного волокнистого композита с регулярной структурой и получить количественные оценки вероятных вариантов развития разрушения. Основное внимание уделено изучению протекания разрушения после разрыва одного волокна, что приводит к резкому перераспределению напряжений. Представляется, что достоинством модели является достаточно строгая формулировка и решение задачи в рамках плоской теории упругости. В сочетании с методами линейной механики разрушения получены оценки, способствующие более глубокому пониманию механики взаимодействия матрицы и волокон, а также процесса разрушения композита.

2. Описание модели плоского изолированного слоя однонаправленного волокнистого композита и основное уравнение

Основу модели представляет упругая пластинка, непрерывно соединенная со стержневыми элементами. Различные аспекты задачи о непрерывном контакте упругой плоскости со стержневым элементом рассматривались во многих работах [4...7]. Для получения точных решений в этих работах использованы различные варианты метода интегральных преобразований. Поэтому анализ решений даже для случая одного стержня весьма затруднен. В связи с этим в настоящей работе реализован другой подход: составляется основное интегродифференциальное уравнение для определения контактного взаимодействия матрицы с системой волокон, а затем это уравнение решается приближенно сведением к системе линейных алгебраических уравнений. Ниже излагается реализация этой схемы.

Рассматривается бесконечная упругая пластинка толщиной δ с упругими константами основного материала (матрицы) E и ν , армированная тонкими прямолинейными волокнами с модулем упругости E_0 и постоянной площадью поперечного сечения A_0 . Волокна бесконечной длины параллельны с расстоянием между ними L (рис. 1).

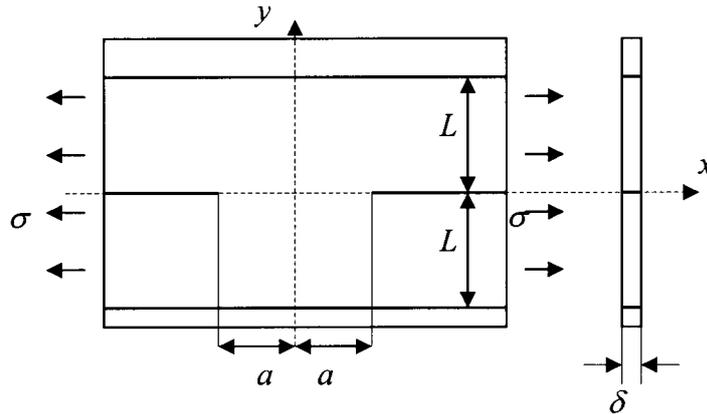


Рис. 1. Расчетная схема плоского слоя волокнистого композита

Для описания деформирования волокон используется теория растяжения идеальных стержней, предполагающая равномерное распределение нормальных напряжений в сечении волокна. В связи с этим волокна можно рассматривать как полосы шириной δ (совпадающей с толщиной слоя) и нулевой толщины, но с конечной площадью поперечного сечения A_0 . Принято также допущение об отсутствии у волокон изгибной жесткости. Предполагается, что одно из волокон в сечении $(0, 0)$ разорвано и на участке $|x| \leq \pm a$ произошло его отслоение от основного материала. Слой нагружается на бесконечности растяжением вдоль волокон, так что в бесконечно удаленной точке имеет место однородное деформированное состояние. Это означает, что напряжения на бесконечности в матрице приняты $\sigma_{x\infty} = \sigma$; $\sigma_{y\infty} = \tau_{xy\infty} = 0$, а волокна в бесконечно удаленной точке растягиваются усилием

$$p_0 = \sigma A_0 \frac{E_0}{E}. \quad (1)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния матрицы и волокон необходимо определить усилия контактного взаимодействия из условия совместности деформации элементов слоя. Это условие сводится к совпадению продольных деформаций матрицы и волокна в любой точке линии контакта. Для определения приращения относительной продольной деформации матрицы использовано фундаментальное решение задачи плоской теории упругости для сосредоточенной силы в бесконечной плоскости.

Из условия равновесия элементарного участка волокна i следует связь между осевым усилием, касательными напряжениями $\tau(x)$ в плоскости контакта волокна и матрицы:

$$p'_i(x) = \frac{dp_i}{dx} = 2 \delta \tau(x). \quad (2)$$

В итоге после простых преобразований получается интегродифференциальное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\beta \int_{\Gamma} K(x, y, \xi, \eta) \bar{p}'(\xi) d\xi = 1 - \bar{p}(x), \quad (3)$$

где $\beta = \frac{3 - \nu}{4\pi} \frac{E_0}{E} \frac{A_0}{L\delta}$, $\bar{p}(x) = \frac{p(x)}{p_0}$, $\Gamma = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Gamma_i$, причем Γ_i – линия контакта волокна i ,

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{\left[(x - \xi)^2 + \frac{(\kappa - 2)}{\kappa} (y - \eta)^2 \right] (x - \xi)}{\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]^2}. \quad (4)$$

3. Приближенное решение основного уравнения

Уравнение (3) можно решить приближенно заменой его системой линейных алгебраических уравнений. С этой целью линия контакта Γ разбивается на конечное число отрезков γ_j ($j = 1, \dots, n$). После этого уравнение (3) записывается для середины каждого отрезка $x = x_k$.

$$\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} K(x_k, y_k, \xi, \eta) \bar{p}'(\xi) d\xi = \frac{1}{\beta} [1 - \bar{p}(x_k)]. \quad (5)$$

Если $k = j$, то интеграл в уравнении (5) является сингулярным и должен вычисляться в смысле его главного значения.

На двух участках, примыкающих к сечениям $x = \pm a, y = 0$ функция $p(x) \sim \sqrt{s}$ (где $s = |x| - a$), а ее первая производная имеет сингулярность в точках $x = \pm a$. Это означает, что на начальном участке $x \in |a, a + h_1|$ эта функция и ее первая производная полностью определяются значением в конечной точке участка p_1 , т. е.

$$\bar{p}(x) = \bar{p}_1 \sqrt{\frac{x - a}{h_1}}, \quad \bar{p}'(x) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\bar{p}_1}{2\sqrt{(x - a)h_1}}. \quad (6)$$

Здесь h_1 – длина начального участка, которая должна быть выбрана настолько малой, чтобы ее дальнейшее уменьшение не приводило к сколько-нибудь значительному изменению решения.

Используя представление (6) осевой силы у начала «работающей» части волокна, по результатам вычисления значения p_1 можно оценить коэффициент интенсивности напряжений K_{II} у фронта поверхности отслоения. Он определяет поле касательных напряжений на боковых плоскостях соединения волокна и матрицы. Очевидно, что

$$\bar{K}_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma \sqrt{\pi L}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{A_0}{L \delta} \frac{\bar{p}_2}{\sqrt{h_1/L}}. \quad (7)$$

На остальных участках для улучшения сходимости и точности приближенного решения в пределах каждого участка функция $p(x)$ аппроксимирована кубическим сплайном.

К уравнениям совместности деформации надо присоединить следующие условия: на концах волокон в бесконечно удаленной точке $\bar{p}_i(\infty) = 1$, а в плоскости симметрии расчетной схемы для неразрушенных волокон первые производные $\bar{p}'_i(0) = 0$.

4. Некоторые численные результаты

Выполнен расчет распределения усилий для трех волокон, среднее из которых разорвано.

На рис. 3 показано распределение осевого усилия в среднем волокне в зависимости от относительной координаты сечения s/L для отношения $E/E_0 = 0,1$.

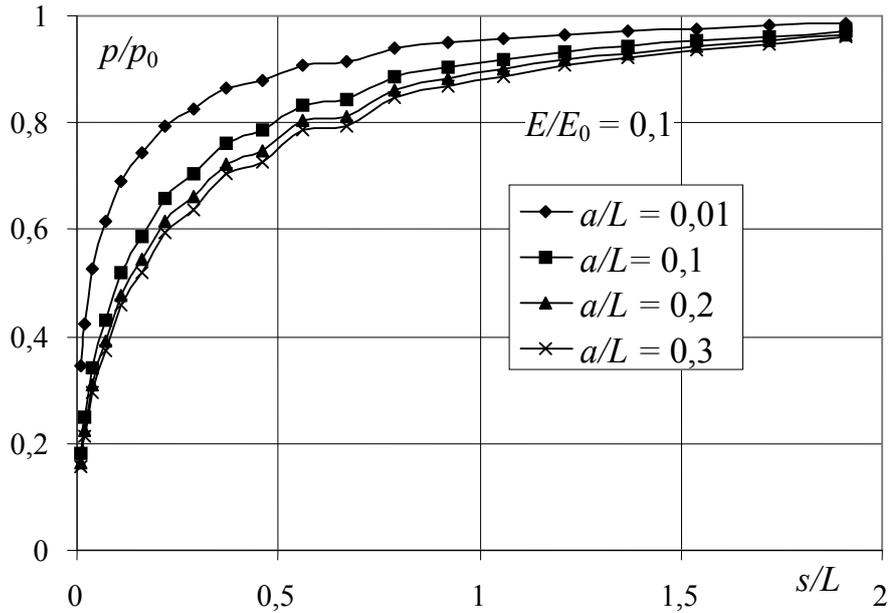


Рис. 3. Распределение осевого усилия по длине разорванного волокна при $E/E_0 = 0,1$

Расчеты выполнены для нескольких значений относительной длины участка отслоения разрушенного волокна от матрицы a/L . Аналогичные зависимости для неразрушенных волокон представлены на рис. 4. Из результатов расчетов следует, что протяженность зоны включения разорванного волокна увеличивается с увеличением участка отслоения волокна от матрицы. Видно также, что из-за разрыва волокна происходит некоторое увеличение нагрузки на соседние волокна, причем сечение с максимумом приращения осевого усилия не совпадает с плоскостью симметрии и смещено по отношению к начальному сечению «работающей» части разорванного волокна примерно на $0,5L$ практически независимо от длины участка отслоения. Величину критических напряжений, определяющих развитие поверхности отслоения, можно найти из условия предельного равновесия.

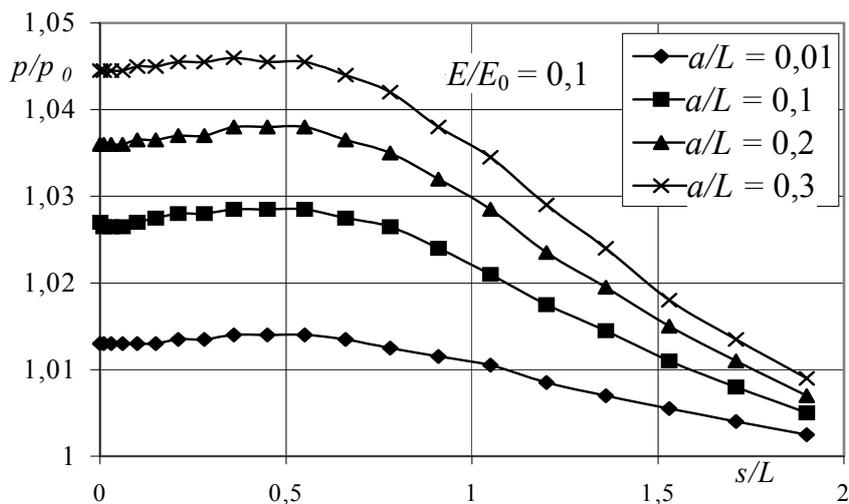


Рис. 4. Распределение осевого усилия по длине неразорванного волокна при $E/E_0 = 0,1$

$$K_{II} = K_{II}^*$$

(8)

где K_{IIc}^* – критический коэффициент интенсивности напряжений при поперечном сдвиге. Это минимальное значение из двух: характеристики трещиностойкости материала матрицы при поперечном сдвиге и характеристики прочности адгезии при сдвиге в поверхностном слое «матрица – волокно».

На рис. 5 представлен характер изменения критического напряжения в зависимости от относительной протяженности участка отслоения a/L . В качестве меры напряжений введена характеристика $\sigma_s = K_{IIc}^* / \sqrt{\pi L}$.

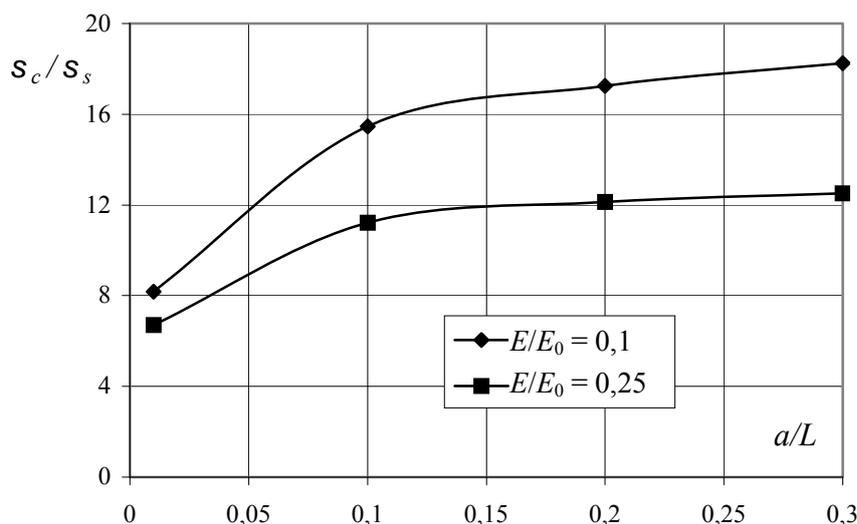


Рис. 5. Изменение критического напряжения в зависимости от относительной длины участка отслоения a/L

5. Обсуждение возможных вариантов развития разрушения слоя

Полученные результаты позволяют высказать определенное суждение о вероятных вариантах развития разрушения слоя. В рамках принятых ограничений последовательность разрушения может быть описана с достаточной точностью, если известны константы материалов. Очевидно, что для неповрежденного слоя начало разрушения определяется соотношением предельных деформаций материалов волокна и матрицы. Если эта деформация меньше у материала волокна, то разрушение начнет развиваться со слабейшего волокна при некотором напряжении $\sigma_{f \min}$, являющимся нижней границей значений прочности волокон.

Простейший вариант соответствует классическим моделям Розена – Паррата [3], базирующихся на предположении об отсутствии других видов частичного разрушения элементов композита вплоть до накопления критического количества разрывов волокон.

Ниже проведен анализ дальнейшего протекания разрушения слоя с учетом возможности других вероятных видов разрушения.

На рис. 6 показан участок слоя, примыкающий к зоне разрушения волокна ($x = 0$, $y = 0$). Без увеличения действующих напряжений это разрушение может повлечь другие разрушения: 1) разрыв соседних волокон; 2) отслоение на участке a по границе «матрица – волокно»; 3) образование трещины нормального отрыва в матрице. Вероятность разрыва соседних волокон тем выше, чем меньше коэффициент вариации предела прочности волокон.

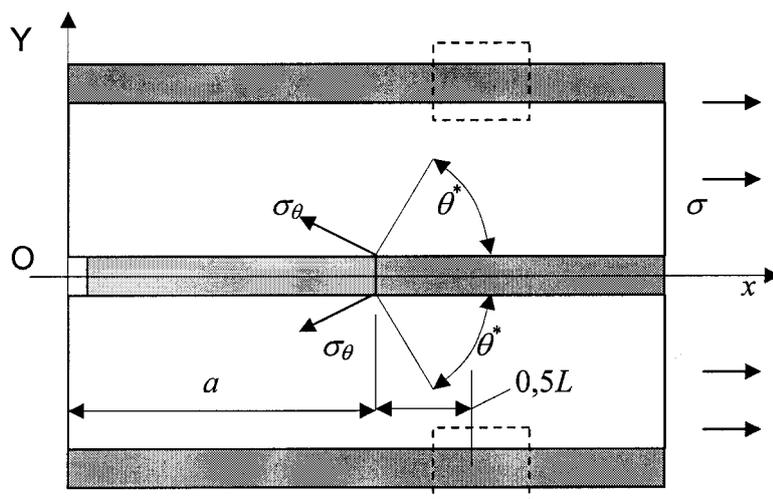


Рис. 6. Схема участка слоя, примыкающего к зоне разрушения волокна

При условии, что разрушение соседних волокон не произошло, размер зоны отслоения по границе «матрица – волокно» поддается количественной оценке на основании сопоставления прочности разрушенного волокна и критических напряжений отслоения. Из условия равенства этих напряжений

$$\sigma_{f \min} = \sigma_c(a). \quad (9)$$

По зависимости типа (рис. 5) может быть определена критическая длина участка отслоения волокна от матрицы. В связи с устойчивостью процесса отслоения после достижения критической длины отслоения этот процесс останавливается и может продолжаться только при увеличении нагрузки.

Условия образования трещины в матрице могут быть оценены на основании исследования особенности напряжений у фронта зоны отслоения (сечение $x = a, y = 0$), которая в данной модели представляет собой трещину поперечного сдвига (второй вид). Известно, что для такой трещины окружающие нормальные напряжения σ_θ (см. рис. 6) имеют особенность в окрестности фронта следующего вида:

$$\sigma_\theta = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3}{4} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right). \quad (10)$$

Максимальная величина этих напряжений достигается при значении угла θ^* , который является решением уравнения

$$\cos \frac{\theta^*}{2} + 3 \cos \frac{3\theta^*}{2} = 0. \quad (11)$$

Значение этого угла составляет примерно $70,5^\circ$, а значение коэффициента интенсивности напряжений $1,154 K_{II}$. Если принять, что рост трещины в матрице произойдет при достижении предельной интенсивности окружающих нормальных напряжений, то условие предельного равновесия можно записать в виде

$$1,154 K_{II} = K_{Ic}, \quad (12)$$

где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений для случая разрушения при нормальном отрыве.

Из формулы (12) следует, что развитие трещины нормального отрыва в матрице может иметь место, если между константами K_{Ic} и K_{IIc}^* существует следующее соотношение:

$$K_{Ic} \leq 1,154K_{IIc}^* . \quad (13)$$

Таким образом, если условие (13) не выполняется, то образование трещины нормального отрыва в матрице как в момент разрыва волокна, так и при дальнейшем развитии процесса отслоения исключено. Можно предполагать, что при использовании других критериев образования трещины нормального отрыва количественные оценки будут другими, но это отличие вряд ли будет значительным.

Необходимо заметить, что по прямым оценкам напряженного состояния в окрестности разрыва, выполненным в работе Г.П. Черепанова [2] для волокна круглого сечения, образование трещины в матрице возможно при условии $K_{Ic} \leq K_{IIc}^*$. Это условие остается в силе и для волокна прямоугольного сечения. Но во всех случаях оно справедливо только при нулевой длине участка отслоения.

Если трещина в матрице при разрыве волокна не образуется, то дальнейшее протекание разрушения в рассматриваемой зоне будет проходить при увеличении внешней нагрузки. Это вызовет устойчивый рост размера зоны отслоения, который может быть определен из (9) после замены $\sigma_{f \min}$ на текущее значение приложенных внешних напряжений. Изменение характера этого процесса в данной зоне может быть связано только с разрушением волокон. Причем наиболее вероятно, что разрыв одного из соседних волокон произойдет в зоне наибольшей концентрации усилия (на рис. 6 эти зоны показаны штриховыми прямоугольниками). Следует напомнить, что согласно данным расчетов эта зона смещается вправо вместе с фронтом зоны отслоения на границе «матрица – волокно» по мере его продвижения с увеличением нагрузки.

Если произойдет разрыв одного или обоих боковых волокон, то легко видеть, что сразу же должно произойти и отслоение концов волокна по обе стороны от сечения разрыва по меньшей мере на участках длиной a . Таким образом, на участке вдоль оси абсцисс от $+0,5L$ до a оба разрушенных волокна будут полностью выключены из работы. При дальнейшем увеличении нагрузки вместе с увеличением длины зон отслоения на границе «матрица – волокно» следует ожидать разрушения волокон, ближайших к разрушившимся. Аналогичная картина развития разрушения может наблюдаться в симметричной относительно оси Oy зоне.

В заключение можно сделать замечание относительно границ применимости модели хрупкого разрушения Розена [3]. Достаточными условиями применимости этой модели являются: условие $K_{Ic} > 1,154K_{IIc}^*$, предупреждающее рост трещины нормального отрыва в матрице и $\sigma_{f \max} < \sigma_c(a)$. Последнее условие означает, что разрушение наиболее прочного волокна произойдет до начала отслоения по границе «матрица – волокно». Это весьма сильные ограничения. Но вопрос о целесообразности проектирования композита, удовлетворяющего этим условиям, требует дополнительного анализа.

Литература

1. Композиционные материалы: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1990. – 512 с.

2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. – Москва: Наука, 1983. – 296 с.
3. Fracture //Edited by H. Libowitz. Volume 7: Fracture of Nonmetals and Composites. – Academic Press · New York and London, 1972.
4. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. – Ing. Archiv, 1932, Bd. 3, № 2. – S. 123-129.
5. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. – Quart.J.Mech. and Appl. Math., 1955, Vol. 8, Nr. 2, p. 164-178.
6. Brown E.H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet. – Proc. Roy. Soc., Math. And Phys. Sci., 1957, Ser. A, Vol. 239, Nr. 1218, p. 296-310.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1965. – 707 с.

Получено 11.10.2002 г.