5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ

В. П. Кудин

Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный институт трудовых и социальных отношений» Гомельский филиал

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПЛОСКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ИМПЕДАНСОМ

Введение. Задача о возбуждении плоскости с переменным импедансом представляет интерес в ряде задач излучения и распространения радиоволн, а также в теории синтеза антенн и отражающих структур [1], [2]. В [3] предложен итерационный метод расчета поля, рассеянного плоской поверхностью с переменным импедансом. Метод проиллюстрирован на примере решения двумерной задачи.

В данной работе предлагаются варианты итерационного метода для решения трехмерной задачи.

Постановка задачи. В полупространстве $z > 0$ находится заданная система сторонних источников. На плоскости $z = 0$ ставится импедансное граничное условие $\mathbf{E} = \mathbf{Z}[\mathbf{H}, \mathbf{n}]$, где единичный вектор $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ представляет собой внешнюю нормаль к области $z > 0$, а $\mathbf{Z}$ есть квадратная матрица, элементы которой в общем случае зависят от переменных x и y.

Требуется определить токи на поверхности $z = 0$, а с их помощью поле в верхнем полупространстве или поле в дальней зоне.

Вывод интегральных уравнений. Поле при $z > 0$ состоит из двух слагаемых: стороннего поля и поля эквивалентных поверхностных источников $\mathbf{J}^{э}\rangle$ и $\mathbf{J}^{м}\rangle$ [1]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{ст} + \frac{I}{ikW}\left(k^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\mathbf{A}^{м} + \operatorname{rot}\mathbf{A}^{э} \cdot \qquad (1)$$

Для поперечных компонентов поля из (1) будем иметь

$$\mathbf{H}\rangle = \mathbf{H}^{ст}\rangle + \frac{I}{W}\mathbf{M}\mathbf{A}^{м}\rangle - \Pi\frac{\partial \mathbf{A}^{э}\rangle}{\partial z}, \qquad (2)$$

где дифференциальный оператор М есть

$$\mathbf{M} = \frac{1}{ik}\begin{pmatrix} k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

В уравнении (2) опустим точку наблюдения на плоскость z = 0. Тогда, учитывая свойства функции Грина, после несложных преобразований будем иметь

$$\Pi \mathbf{J}^{э}\rangle = 2\mathbf{H}^{ст}\rangle + \frac{2}{W}\mathbf{M}\mathbf{A}^{м}\rangle. \qquad (3)$$

Введем двумерное прямое и обратное преобразование Фурье формулами:

$$F(f) = \tilde{f}(\kappa_1, \kappa_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y) exp(i\kappa_1 x + i\kappa_2 y) dxdy,$$

$$F^{-1}(\tilde{f}) = f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\kappa_1, \kappa_2)\exp(-i\kappa_1 x - i\kappa_2 y) d\kappa_1 d\kappa_2.$$

Поскольку выражение

$$\mathbf{M}\mathbf{A}^{м}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M} G \mathbf{J}^{м}\rangle dx' dy'$$

представляет собой свертку функций, то, применив преобразование Фурье к уравнению (3), получим

$$\Pi \tilde{\mathbf{J}}^{э}\rangle = 2\tilde{\mathbf{H}}^{ст}\rangle - \frac{1}{W}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{J}}^{м}\rangle, \qquad (4)$$

где введена квадратная матрица

$$\mathbf{N} = \frac{1}{-ik\gamma}\begin{pmatrix} k^2 - \kappa_1^2 & -\kappa_1\kappa_2 \\ -\kappa_1\kappa_2 & k^2 - \kappa_2^2 \end{pmatrix}.$$

Не ограничивая общности последующих рассуждений, матричную функцию Z(x, y) представим в виде суммы переменной и постоянной составляющих:

$$\mathbf{Z}(x, y) = \mathbf{Z}_1(x, y) + \mathbf{Z}_0.$$

В качестве постоянной составляющей $\mathbf{Z}_0$ может, например, выступить предел $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}\mathbf{Z}(x,y) = \mathbf{Z}_0$ или некая другая величина, которая вводится для упрощения или облегчения решения задачи.

В дальнейшем при решении уравнения (4) необходимо определиться с выбором функции, подлежащей нахождению. В работе [3] в качестве искомой функции использовался поверхностный ток электрического типа.

Выведем аналогичное уравнение для трехмерной задачи. Для этого, исключая с помощью граничного условия из уравнения (4) ток $\mathbf{J}^{\text{м}}\rangle$, получим

$$\Pi\widetilde{\mathbf{J}}^{\text{э}}\rangle = 2\widetilde{\mathbf{H}}^{\text{ст}}\rangle - \mathbf{N}\Pi\frac{\mathbf{Z}_0}{W}\widetilde{\mathbf{J}}^{\text{э}}\rangle - \mathbf{N}\Pi F\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{W}\mathbf{J}^{\text{э}}\rangle\right),$$

откуда после перегруппировки членов и преобразований будем иметь

$$\mathbf{D}\Pi\widetilde{\mathbf{J}}^{\text{э}}\rangle = 2\widetilde{\mathbf{H}}^{\text{ст}}\rangle - \mathbf{N}F\left(\Pi\frac{\mathbf{Z}_1}{W}\Pi^T\Pi\mathbf{J}^{\text{э}}\rangle\right). \qquad (5)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathbf{D} = \mathbf{1} + \mathbf{N}\Pi\frac{\mathbf{Z}_0}{W}\Pi^T,$$

а $\mathbf{1}$ есть единичная матрица второго порядка.

В качестве неизвестной функции в (5) естественно использовать

$$\widetilde{\mathbf{J}}_1^{\text{э}}\rangle = \mathrm{P}\,\widetilde{\mathbf{J}}^{\text{э}}\rangle.$$

Окончательно искомое уравнение выглядит следующим образом

$$\widetilde{\mathbf{J}}_1^{\text{э}}\rangle = 2\mathbf{D}^{-1}\widetilde{\mathbf{H}}^{\text{ст}}\rangle - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}F\left(\mathrm{P}\,\frac{\mathbf{Z}_1}{W}\mathrm{P}^T\mathbf{J}_1^{\text{э}}\rangle\right). \qquad (6)$$

Решение интегральных уравнений. Для решения уравнения (6) целесообразно использовать итерационную схему, применяя хорошо развитые в настоящее время алгоритмы дискретного преобразования Фурье для численной реализации процедуры прямого и обратного интегрального преобразований Фурье. Для двумерной задачи итерационная схема относительно поверхностного электрического тока развита в работе [3], там же проведена и оценка сходимости процесса. Установлено, что сходимость итерационного процесса зависит от постоянной части поверхностного импеданса или поверхностной проводимости и, следовательно, может быть улучшена с помощью соответствующего выбора данных величин.

Разумеется, для решения уравнения (6) может быть применена и прямая процедура, основанная на методе моментов [4]. При этом, однако, для матричных элементов получаются двукратные интегралы в бесконечных пределах, которые также могут быть найдены численными методами.

Литература

1. Марков, Г. Т. Возбуждение электромагнитных волн. – 2-е изд., перераб. и доп. / Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин. – Москва : Радио и связь, 1983.

2. Фейнберг, Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности / Е. Л. Фейнберг. – Москва : Изд. АН СССР, 1961.

3. Кудин, В. П. Итерационный метод расчета поля, рассеянного плоской поверхностью с переменным импедансом / В. П. Кудин, Ю. С. Ушаков // Изв. вузов, сер. Радиоэлектроника, 1981. – Т. 24. – № 2.

4. Harrington R. F. Field computation by moment methods. N. Y.: Machmillan, 1968.