УДК 621.01+629.7.017

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Л.А. ГУРЬЕВА
Полоцкий государственный университет, г. Новополоцк, Республика Беларусь

Рассмотрена задача оптимального распределения надежности для конструкции, состоящей из пяти последовательно соединенных элементов – двух сферических днищ, двух распорно-стыковочных шпангоутов и конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки (рис. 1). Конструкция нагружена внутренним давлением q, величина которого случайна и распределена по закону Вейбулла с параметрами β_3, α_3. Материал элементов оболочечной конструкции одинаков, его несущая способность также случайна и распределена по закону Вейбулла с параметрами β_2, α_2. Для элементов конструкции считалась определяющей надежность по прочности.

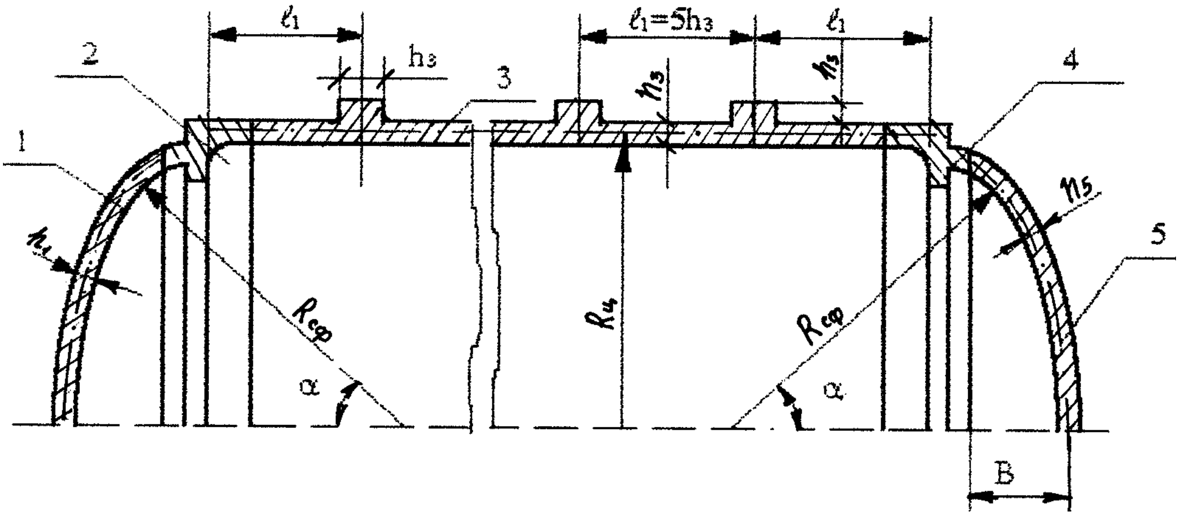

Рис. 1

Выразим массу каждого элемента конструкции через надежность [1].

Для заданного закона распределения нагрузки и несущей способности имеем

$$G_1 = G_5 = \frac{A_1}{K_1} = \frac{\pi R_{сф}^2 B\rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_1}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_1}};$$

$$G_2 = G_4 = \frac{A_2}{K_2} = \frac{2\pi R_ш^2 \cdot \sqrt{1-\left(\dfrac{R_ш}{R_{\_тм}}\right)^2} \cdot \rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_2}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_2}}; \qquad (1)$$

$$G_3 = \frac{2\pi R_ц^2 \ell \rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_3}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_3}}.$$

Здесь $R_{сф}$, $R_ш$, $R_ц$, ℓ – геометрические размеры конструкции; H_i – надежность i-го элемента оболочки.

Задача оптимизации заключалась в следующем:

необходимо минимизировать функцию массы

$$G = 2\frac{\pi R_{сф}^2 B\rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_1}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_1}} + 2\frac{2\pi R_ш^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{R_ш}{R_{сф}}\right)^2} \cdot \rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_2}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_2}} + \tag{2}$$

$$+\frac{2\pi R_ц^2 \ell \rho \cdot \sqrt[\beta]{\alpha_3} \cdot \sqrt[\beta]{H_3}}{\sqrt[\beta]{\alpha_2} \cdot \sqrt[\beta]{1-H_3}}$$

при условии $H_1\, H_2\, H_3\, H_4\, H_5 \geq H_{зад}$; $0<H_i<1$; $H_1 = H_5$; $H_2 = H_4$.

Здесь $R_{сф}$, B, $R_ш$, $R_ц$, ℓ – геометрические параметры конструкции; ρ – объемный вес материала конструкции; H_i – надежность i-го элемента конструкции; $H_{зад}$ – заданная надежность конструкции.

Для решения поставленной задачи может быть использован метод неопределенных множителей Лагранжа, применение которого приводит к системе нелинейных уравнений.

Вышеизложенная методика иллюстрирована числовым примером.

Пусть $H_{зад} = 0{,}99$; $R_{сф} = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$; $R_ц = R_ш = R_{сф} \cdot sin 60^\circ = 0{,}866$ м; $B = 0{,}5$ м; $\ell = 3$м; $\beta_3 = 3$; $\alpha_3 = 0{,}08^3$МПа^3; $\beta_2 = 3$; $\alpha_2 = 447{,}7^3$МПа^3; $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$кг/м^3, тогда

$$G_1 = G_5 = \frac{2{,}19\sqrt[3]{H_1}}{\sqrt[3]{1-H_1}} = \frac{2{,}19\sqrt[3]{H_5}}{\sqrt[3]{1-H_5}};$$

$$G_2 = G_4 = \frac{3{,}28\sqrt[3]{H_2}}{\sqrt[3]{1-H_2}} = \frac{3{,}28\sqrt[3]{H_4}}{\sqrt[3]{1-H_4}};$$

$$G_3 = \frac{19{,}69\sqrt[3]{H_3}}{\sqrt[3]{1-H_3}}$$

и оптимизационная система (2) запишется следующим образом:

минимизировать функцию массы

$$G = \frac{2{,}19\sqrt[3]{H_1}}{\sqrt[3]{1-H_1}} + \frac{3{,}28\sqrt[3]{H_2}}{\sqrt[3]{1-H_2}} + \frac{19{,}69\sqrt[3]{H_3}}{\sqrt[3]{1-H_3}} + \frac{3{,}28\sqrt[3]{H_4}}{\sqrt[3]{1-H_4}} + \frac{2{,}19\sqrt[3]{H_5}}{\sqrt[3]{1-H_5}}$$

при условии $H_1\, H_2\, H_3\, H_4\, H_5 \geq 0{,}99$; $0< H_i<1$; $H_1 = H_5$; $H_2 = H_4$. (3)

Для решения поставленной задачи использован метод неопределенных множителей Лагранжа, применение которого приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{1{,}09H_2}{\sqrt[3]{(1-H_2)^4 H_2^2}} - \frac{0{,}73H_1}{\sqrt[3]{(1-H_1)^4 H_1^2}} = 0\,;$$

$$\frac{6{,}56H_3}{\sqrt[3]{(1-H_3)^4 H_3^2}} - \frac{0{,}73H_1}{\sqrt[3]{(1-H_1)^4 H_1^2}} = 0\,; \qquad (4)$$

$$H_1^2 H_2^2 H_3 = 0{,}99\,.$$

Нахождение оптимальных значений H_i из решения системы уравнений (4) сопряжено с некоторыми вычислительными трудностями.

Аппроксимировав функции $G(H_1)$, $G(H_2)$ и $G(H_3)$ в окрестностях точек $H_1 = 0{,}999$; $H_2 = 0{,}998649$; $H_3 = 0{,}9948$ прямыми линиями и использовав формулу (2)

$$H_i = H_{зад}^{\theta_i}\,,$$

где

$$\theta_i = \frac{1}{\ln H_{зад}}\left[\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\ln\gamma_i + \ln H_{зад}\right) - \ln\gamma_i\right],$$

γ_i – коэффициенты линейной аппроксимации $G(H_i)$, получим $H_1 = H_5 = 0{,}99805608$; $H_2 = H_4 = 0{,}99805608$ и $H_3 = 0{,}99773603$ при $\gamma_1 = 7304{,}1975$; $\gamma_2 = 7304{,}1975$ и $\gamma_3 = 7306{,}5398$. Зная все H_i, легко найти размеры поперечного сечения элементов и их массу.

$$K_1 = K_5 = \frac{\sqrt[\beta]{\alpha_2}\sqrt[\beta]{1-H_1}}{\sqrt[\beta]{\alpha_3}\sqrt[\beta]{H_1}} = \frac{\sqrt[3]{447{,}7^3}\sqrt[3]{1-0{,}99805608}}{\sqrt[3]{0{,}08^3}\sqrt[3]{0{,}99805608}} = 698{,}8958\,;$$

$$K_1 = K_5 = \frac{R_{сф}}{2h_1} = \frac{R_{сф}}{2h_5}\,;\; h_1 = h_5 = \frac{R_{сф}}{2K_1} = \frac{1}{2\cdot 698{,}8958} = 0{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$G_1 = G_5 = \frac{2{,}19\sqrt[3]{H_1}}{\sqrt[3]{1-H_1}} = \frac{2{,}19\sqrt[3]{0{,}99805608}}{\sqrt[3]{1-0{,}99805608}} = 17{,}536\ \text{кг};$$

$$K_2 = K_4 = \frac{\sqrt[3]{\alpha_2}\sqrt[3]{1-H_2}}{\sqrt[3]{\alpha_3}\sqrt[3]{H_2}} = 698{,}8958\,;\; K_2 = K_4 = \frac{R_ш}{F_{шп}}\sqrt{1-\left(\frac{R_ш}{R_{сф}}\right)^2}\,;$$

$$F_{шп} = \frac{R_ш\sqrt{1-\left(\frac{R_ш}{R_{сф}}\right)^2}}{K_2} = \frac{0{,}866\sqrt{1-\left(\frac{0{,}866}{1}\right)^2}}{698{,}8958} = 6{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2;$$

$$G_2 = G_4 = \frac{3{,}28\sqrt[3]{H_2}}{\sqrt[3]{1-H_2}} = \frac{3{,}28\sqrt[3]{0{,}99805608}}{\sqrt[3]{1-0{,}99805608}} = 26{,}264\ \text{кг};$$

$$K_3 = \frac{\sqrt[\beta]{\alpha_2}\sqrt[\beta]{1-H_3}}{\sqrt[\beta]{\alpha_3}\sqrt[\beta]{H_3}} = 5596{,}25\frac{\sqrt[3]{1-0{,}99773603}}{\sqrt[3]{0{,}99773603}} = 735{,}4040\,;$$

$$h_{np} = \frac{R_{ц}}{K_3} = \frac{0,866}{735,4040} = 1,18 \cdot 10^{-3}\ \text{м};\ h_{np} = h_3 + \frac{h_3^2}{5h_3} = 1,2h_3;$$

$$h_3 = \frac{h_{np}}{1,2} = \frac{1,18 \cdot 10^{-3}}{1,2} = 0,98 \cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$G_3 = \frac{19,69\sqrt[3]{H_3}}{\sqrt[3]{1-H_3}} = \frac{19,69\sqrt[3]{0,99773603}}{\sqrt[3]{1-0,99773603}} = 149,836\ \text{кг}.$$

В приведенных выше формулах $h_1 = h_5$ – толщина днища; $F_{шп}$ – площадь поперечного сечения распорно-стыковочного шпангоута; h_3 – толщина цилиндрической оболочки; h_{np} – приведенная толщина конструктивно ортотропной оболочки.

Полученная конструкция будет, обладая нужной надежностью, иметь наименьшую массу

$$\sum_{i=1}^{5} G_i = 2 \cdot 17,536 + 2 \cdot 26,264 + 149,836 = 237,436\ \text{кг}.$$

Литература

1. Арасланов А.М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.
2. Червоный А.А., Лукьященко В.И., Котин Л.В. Надежность сложных систем. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.

Получено 11.10.2002 г.