

УДК 62.001

## **КОНЕЧНОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ УСТАНОВКИ С БИЦИЛИНДРОКОНИЧЕСКИМ БАРАБАНОМ**

**Г.С. ЛЕНЕВСКИЙ, К.В. ОВСЯННИКОВ**

*Могилевский государственный технический  
университет, Республика Беларусь*

При анализе широкого класса промышленных установок (буровые установки, подъемные установки, армирующие манипуляторы и т. д.), содержащих элементы с распределенными параметрами (РП) (тросы, канаты, штанги и другие упругие элементы), возникает необходимость получения конечномерной математической модели. Анализ бесконечномерных моделей сильно затруднен в связи с их трансцендентностью и присутствием в модели двух независимых переменных (как правило, пространственная координата –  $x$  и время –  $t$ ). Данная статья посвящена вопросам получения конечномерных математических моделей, пригодных для целей частотного анализа, синтеза, а также для исследования во временной области. В качестве примера используется промышленная грузоподъемная установка с бицилиндроконическим барабаном (БЦКБ), содержащая распределенно-упругий элемент – канат (рис. 1). Как видно из рисунка, навивка каната осуществляется на бицилиндроконический барабан (4) с переменным радиусом навивки. В установке используются две ветви (2, 3) – сбегаящая (с пустым скипом 5, служит в качестве противовеса) и набегаящая (грузеный скип 6). Канаты движутся по направляющим шкивам 1.

Расчетная схема механической части грузоподъемной установки можно представить в виде двух масс: масса  $m_1$  – якорь электродвигателя и шкив, масса  $m_2$  – подъемный сосуд, которые соединены между собой упругим механическим элементом с распределенными параметрами (рис. 2). При рассмотрении математического описания механической части грузоподъемной установки БЦКБ будем считать, что незагруженный скип расположен вверху, канат, соединяющий его с коренной частью, ввиду малой протяженности является абсолютно жестким и его влияние можно не учитывать.

Пустой скип не оказывает существенного влияния на систему, так как связан со шкивом элементом с наименьшей податливостью и его вес, а также вес каната, соединяющий его с коренной частью, можно добавить к весу коренной части установки. Тогда передаточная функция движущего усилия к скорости перемещения для любого сечения каната [1]:

$$W(p) = \frac{\Delta v(\xi, p)}{\Delta \varphi_\delta(p)} = \frac{\text{ch}(p \cdot \xi) - K(p) \cdot \text{sh}(p \cdot \xi)}{\mu_1 \cdot p + K(p) \cdot \mu_k}, \quad (1)$$

где  $K(p) = \frac{p \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_k \cdot \text{sh}(p)}{p \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_k \cdot \text{ch}(p)}$ ;

$\xi = x/l$  – координата выходной точки в о.е.;

$\mu_i = m_i/m_\Sigma$  –  $i$ -ая сосредоточенная масса в о.е.;

$\mu_k = m_k/m_\Sigma$  – относительная масса каната в о.е.;

$m_\Sigma$  – суммарная приведенная масса установки.

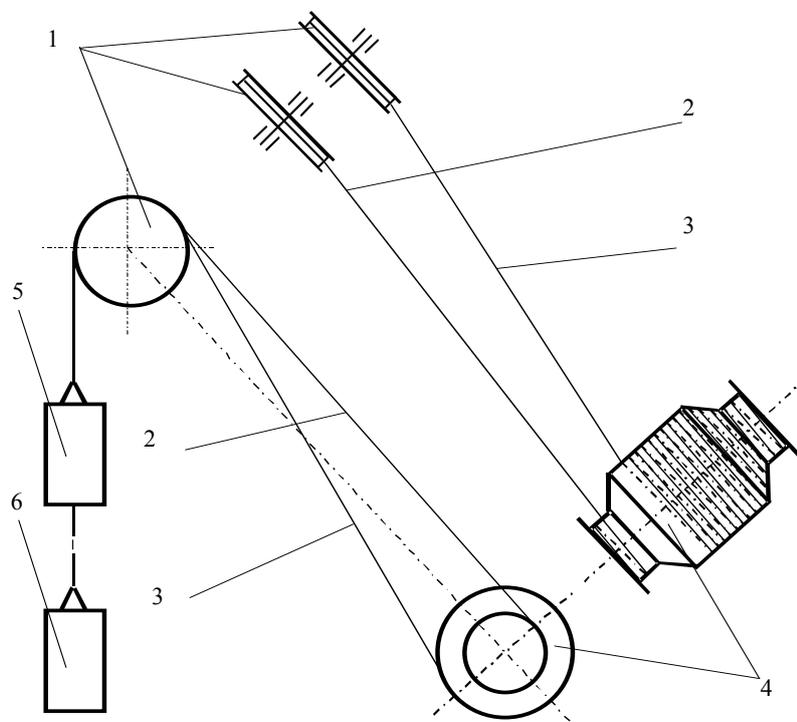


Рис. 1. Установка с бицилиндроконическим барабаном: 1 – шкив; 2, 3 – набегающая и сбегающая ветвь каната; 4 – бицилиндроконический барабан; 5 – сип 1; 6 – сип 2

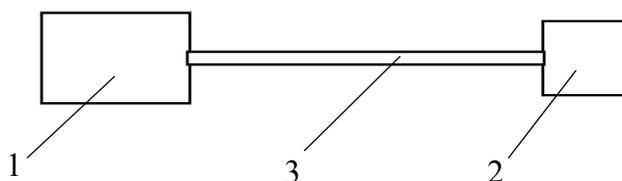


Рис. 2. Расчетная схема механической части: 1 – масса двигателя, барабана, навитого каната, не грузенного сипа и его каната; 2 – масса сипа с грузом; 3 – канат

Получение конечномерной математической модели чаще всего в литературе называется аппроксимацией. Существует много способов аппроксимации передаточных функций. Наиболее часто применяются следующие:

- 1) разложение в цепные дроби;
- 2) разложение на простейшие дроби;
- 3) разложение по бесконечным произведениям;
- 4) разложение по собственным функциям;
- 5) разложение с помощью рядов Тейлора.

Одним из наиболее перспективных методов [1] является метод разложения на простейшие дроби. Кратко изложим основные положения, на которых базируется этот метод.

Если  $h(p) = L[h(t)]$  – преобразование Лапласа входного воздействия на объект с РП с передаточной функцией  $W(p)$  со стороны подсистемы с сосредоточенными параметрами, а  $W^*(p)$  – передаточная функция сосредоточенной модели, то погрешность воспроизведения откликов исходного объекта с РП и аппроксимирующей модели определяется выражением [1]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [W(p) - W^*(p)] \cdot h(p) \cdot e^{pt} \cdot dp = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon(p, t) \cdot dp \quad (2)$$

с интегрированием по прямой  $Re p = c$ , лежащей правее всех полюсов подынтегральной функции.

При достаточно широких предположениях относительно  $W(p)$ ,  $h(p)$  и  $W^*(p)$  интеграл (2) можно вычислять следующим образом.

Рассматривается последовательность расширяющихся контуров  $c_n$  так, что они проходят между полюсами подынтегрального выражения, и соответствующую последовательность интегралов

$$J_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_{c_n} \varepsilon(p, t) dp. \quad (3)$$

Подынтегральная передаточная функция может быть представлена так:

$$W(p) = Q^N(p) / R^M(p), \quad (4)$$

где  $Q^N$  и  $R^M$  – полиномы степени  $N$  и  $M$ , соответственно, причем для любой физической системы  $M > N$ .

Ошибка аппроксимации представляется в виде бесконечного функционального ряда, который всюду сходится. Поэтому его члены стремятся к нулю достаточно быстро. Очевидно, что основной вклад вносят полюса, лежащие близко к началу координат. Поэтому, чтобы сделать погрешность  $\varepsilon(t)$  малой для широкого класса входных воздействий  $h(t)$ , необходимо совпадение полюсов  $W^*(p)$  с полюсами  $W(p)$ , ближайшими к началу координат, и равенство между собой вычетов функций  $W^*(p)$  и  $W(p)$  в данных полюсах. В этом случае:

$$\sum_{|p_k|} \text{Res}[\varepsilon(p, t); p_k] = 0. \quad (5)$$

Таким образом, предлагается следующий принцип аппроксимации передаточных функций объектов с РП: аппроксимирующая модель с передаточной функцией  $W^*(p)$  должна в области  $|p| < \Omega$  иметь те же полюса, что и передаточная функция объекта с РП  $W(p)$ , и главные части  $W(p)$  и  $W^*(p)$  в этих полюсах должны совпадать. Аппроксимирующая модель в этом случае может быть реализована представлением  $W^*(p)$  в виде отрезка ряда разложения по простейшим дробям передаточной функции  $W(p)$ , т. е.:

$$W(p) = \sum_{n=-N}^N \frac{\text{Res } W(p_n)}{p - p_n}. \quad (6)$$

При такой аппроксимации ошибка воспроизведения сигнала будет тем меньше, чем уже его спектр. Величину  $\Omega$  следует выбрать так, чтобы основная часть спектра типичных входных воздействий лежала в области  $\omega < \Omega$ . Вся информация о поведении  $W(p)$  на всей комплексной плоскости заключена в ее полюсах. Она может быть представлена рядом, равномерно сходящимся в каждой ограниченной области, в которой  $W(p)$  аналитична.

В связи с тем, что в электроприводе гашение механических колебаний объекта регулирования осуществляется системой управления электроприводом, объект с РП можно рассматривать как звено без затухания. При этом для всех полюсов  $\text{Re } p_k = 0$  и полюса с  $\text{Im } p_k \neq 0$  обязательно входят в  $W(p)$  парами комплексно-сопряженных чисел  $p_k$  и  $p_{\bar{k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а полюс второго порядка  $p_o = 0$  соответствует возможности свободного движения по координате  $x$ .

Аппроксимация  $W(p)$  рациональной функцией  $W^*(p)$  получается при обрывании ряда на члене, соответствующем  $n = N - 1$ .

Улучшение аппроксимации путем добавления нового члена не меняет ранее вычисленных коэффициентов, что очень важно при исследовании моделей ЭП во временной области. Приводя слагаемые в выражении к общему знаменателю, получаем рациональную передаточную функцию аппроксимирующей модели.

В стационарной системе с РП вычеты в полюсах передаточной функции зависят от пространственной координаты, в то время как спектр собственных частот постоянен для любой точки системы. Таким образом, передаточная функция системы с закрепленной точкой входа представляется как

$$W(p, \lambda) = \sum_{n=-N}^N \frac{A_n(\lambda)}{p - p_n}. \quad (7)$$

Определение резонансных частот непосредственно по частотной характеристике не представляет сложности. Таким образом, фактически неизвестными в модели оказываются лишь значения вычетов в полюсах.

Определение вычетов является основным этапом аппроксимации. При этом используется ключевое свойство модели, позволяющее принципиально уменьшить трудоемкость расчетов, – ярко выраженное влияние вычетов на частотные свойства аппроксимируемой модели. Действительно, частотная чувствительность по параметру  $A_n$

$$|S(A_n)| = \left| \frac{dW(j\omega)}{dA_n} \right| = \frac{2\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (8)$$

убывает обратно пропорционально квадрату отклонения частоты от частоты  $n$ -го резонанса. Практически влияние  $A_n$  сказывается лишь в частотном диапазоне  $(n-1)$ -го и  $(n+1)$ -го полюсов.

Отмеченное свойство модели позволяет рассматривать нахождение каждого вычета как, в определенной степени, независимую задачу небольшой размерности, решаемую в соответствующем частотном диапазоне.

Покажем нахождение передаточной функции для конкретного объекта – грузоподъемной установки БЦКБ, используя при этом следующую методику:

- 1) определяются парциальные параметры установки (массы, жесткость упругого элемента, масса упругого элемента);
  - 2) определяются относительные массы элементов установки и упругого элемента (для установки БЦКБ –  $\mu_1 = 0,878$ ,  $\mu_2 = 0,091$  и  $\mu_k = 0,029$ );
  - 3) определяется полоса пропускания системы (для установки БЦКБ –  $\omega_{cp} = 16$  Гц);
  - 4) строится ЛАЧХ бесконечномерной (исходной) модели;
  - 5) определяются полюса функции (в заданном частотном диапазоне);
  - 6) определяются значения вычетов в полюсах;
  - 7) по (6) находится конечномерная передаточная функция.
- В формуле (1) приведем слагаемые к общему знаменателю. Тогда:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{\text{ch}(p \cdot \xi) \cdot (p \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_k \cdot \text{ch}(p)) - \text{sh}(p \cdot \xi) \cdot (p \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_k \cdot \text{sh}(p))}{\mu_1 \cdot p^2 \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_1 \cdot p \cdot \mu_k \cdot \text{ch}(p) + \mu_k \cdot p \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_k^2 \cdot \text{sh}(p)}. \quad (9)$$

По (9) строится логарифмическая амплитудно-частотная характеристика. Координату  $\xi$  принимаем равной 1, что соответствует наиболее тяжелому случаю.

График логарифмической амплитудно-частотной характеристики (9) (сплошная линия) представлен на рисунке 3.

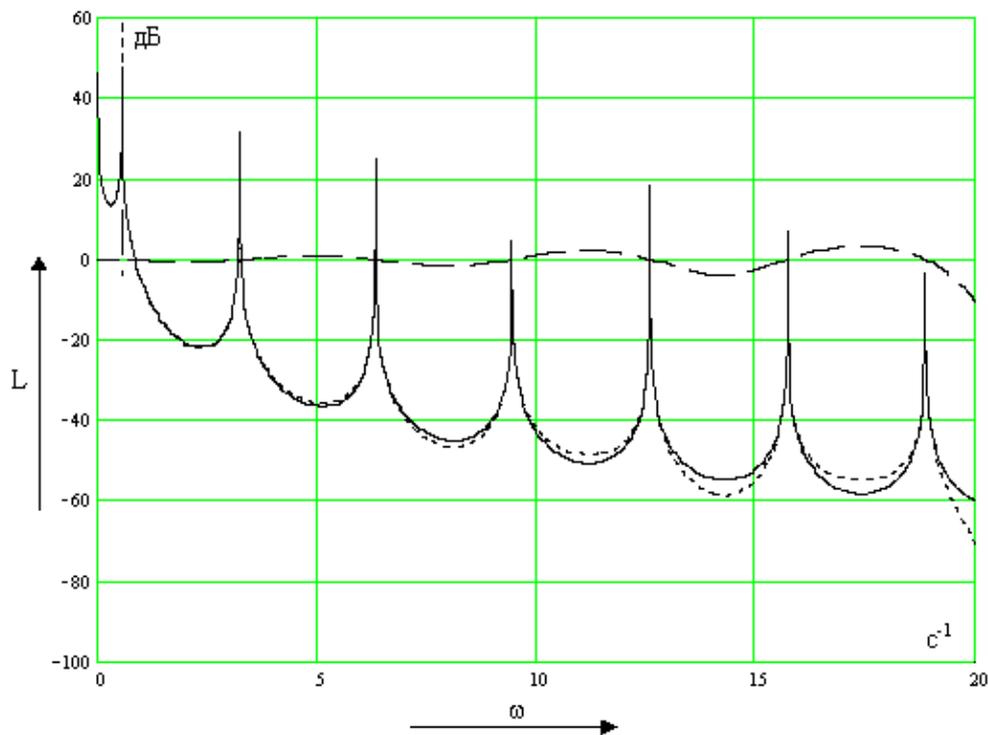


Рис. 3. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики

В математическом пакете MathCad7pro определяем полюса функций, а затем по формуле

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q'(p)} = \frac{\text{ch}(p \cdot \xi) \cdot (p \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_k \cdot \text{ch}(p)) - \text{sh}(p \cdot \xi) \cdot (p \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_k \cdot \text{sh}(p))}{2 \cdot \mu_1 \cdot p \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_1 \cdot p^2 \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_1 \cdot \mu_k \cdot \text{ch}(p) + \mu_1 \cdot p \cdot \mu_k \cdot \text{sh}(p) + \mu_k \cdot \mu_2 \cdot \text{ch}(p) + \mu_k \cdot p \cdot \mu_2 \cdot \text{sh}(p) + \mu_k^2 \cdot \text{ch}(p)} \rightarrow \quad (10)$$

определяем значения вычетов в полюсах.

Данные расчета приведены в таблице 1.

По формуле (7) находится аппроксимированная передаточная функция:

$$W(p) = \frac{1}{p} + 2 \cdot p \cdot \left( \frac{-0,52069}{p^2 + 0,57534^2} + \frac{0,03354}{p^2 + 3,25079^2} + \frac{-0,00907}{p^2 + 6,33934^2} + \frac{0,00409}{p^2 + 9,46251^2} + \frac{-0,00231}{p^2 + 12,59472^2} + \frac{0,00148}{p^2 + 15,73067^2} + \frac{-0,00103}{p^2 + 18,86849^2} \right). \quad (11)$$

Таблица 1

Данные расчета передаточной функции

<i>P</i>	-18,86 <i>i</i>	-15,73 <i>i</i>	-12,59 <i>i</i>	-9,46 <i>i</i>	-6,33 <i>i</i>	-3,25 <i>i</i>	-0,57 <i>i</i>	0
<i>Res</i>	-0,0010	0,0014	-0,0023	0,0040	-0,009	0,033	-0,520	1
<i>P</i>	0,57 <i>i</i>	3,25 <i>i</i>	6,33 <i>i</i>	9,46 <i>i</i>	12,59 <i>i</i>	15,73 <i>i</i>	18,86 <i>i</i>	-
<i>Res</i>	-0,520	0,033	-0,009	0,0040	-0,0023	0,0014	-0,0010	-

Приведя к общему знаменателю, получаем передаточную функцию в каноническом виде:

$$W(p) = \frac{0,012 \cdot p^{14} + 11,217 \cdot p^{12} + 3736,2 \cdot p^{10} + 5,576 \cdot 10^5 \cdot p^8 +}{p^{15} + 902,73 \cdot p^{13} + 2,96 \cdot 10^5 \cdot p^{11} + 4,369 \cdot 10^7 \cdot p^9 +} \rightarrow \rightarrow \frac{+ 3,726 \cdot 10^7 \cdot p^6 + 1,014 \cdot 10^9 \cdot p^4 + 4,361 \cdot 10^9 \cdot p^2 + 1,789 \cdot 10^{11}}{+ 2,918 \cdot 10^9 \cdot p^7 + 7,74 \cdot 10^{10} \cdot p^5 + 5,567 \cdot 10^{11} \cdot p^3 + 1,759 \cdot 10^{11} \cdot p} \quad (12)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика аппроксимированной передаточной функции представлена на рисунке 3 (штриховая линия). Результаты аппроксимации соответствуют общепринятым при инженерных расчетах точностям

$$\left( \sigma = \frac{A - A_{an}}{A} \cdot 100\% = \frac{-58,26 - (-54,84)}{-58,26} = 5,8\% \right) \text{ – наибольшее расхождение амплитуд),}$$

что наблюдается лишь на верхних частотах, что отражено на графике погрешности аппроксимации на рисунке 3 (крупный пунктир).

Полученные передаточные функции (11) и (12) пригодны для численного исследования во временной области. Математический пакет MatLab5 позволяет использовать формулу (12) без каких-либо изменений.

### Выводы

Задачи синтеза замкнутых высококачественных систем управления предъявляют повышенные требования к степени адекватности математической модели, что связано с ярко выраженным различием локальных свойств таких систем как в пространственной, так и во временной или частотной областях. Неточность в определении значений собственных частот может повлечь не только ухудшение качества системы, но и потерю устойчивости, и как предельный случай – разрушение механической части электромеханической системы. Предложенный метод позволяет с достаточной точностью (до 4-6 %) аппроксимировать бесконечномерные модели и получить адекватные конечномерные модели.

**Литература**

1. Киселев Н.В. Электроприводы с распределенными параметрами /Н.В. Киселев, В.Н. Мядзель, Л.Н. Рассудов //Л.: Судостроение, 1985. – 220 с.
2. Змеу К.В. Передаточные функции волновых одномерных точечно-неоднородных кольцевых объектов /К.В. Змеу, Л.Н. Рассудов //Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 5. – С. 52-57.
3. Рассудов Л.Н. Исследование динамики ЭП с РП /Л.Н. Рассудов, К.В. Змеу //Изв. ЛЭТИ. – 1983. – № 331. – С. 19-24.

*Получено 27.02.2002 г.*