

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Информационные технологии»



MaCIST



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

К. С. Курочка, Е. В. Комракова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для студентов специальностей**

**1-40 05 01 «Информационные системы и технологии
(по направлениям)» и 1-40 80 04 «Информатика
и технологии программирования»
дневной и заочной форм обучения**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2021

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
К93

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 5 от 02.12.2019 г.)*

Учебно-методическое пособие выполнено в ходе реализации проекта MaCICT (Modernisation of Master Curriculum in Information Computer Technologies) в рамках Erasmus+ Программы Европейского Союза. В этом проекте представлены лучшие практики вузов-партнеров из Евросоюза для модернизации учебного плана и дисциплин с целью внедрения в учебный процесс изучения гибких навыков, позволяющих повысить конкурентоспособность на рынке труда выпускников ИТ-специальностей.

Рецензент: зав. кафедрой информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации д-р техн. наук, проф. *А. Н. Семенюта*

Курочка, К. С.

К93

Математическое моделирование : учеб.-метод. пособие для студентов специальностей 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-40 80 04 «Информатика и технологии программирования» днев. и заоч. форм обучения / К. С. Курочка, Е. В. Комракова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 270 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-456-8.

Содержит методологию построения и исследования математических моделей разнообразных физических и технических систем с использованием различных численных методов и с помощью современных пакетов конечно-элементного анализа.

Для студентов специальностей 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-40 80 04 «Информатика и технологии программирования» дневной и заочной форм обучения.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

ISBN 978-985-535-456-8

© Курочка К. С., Комракова Е. В., 2021
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	6
Предисловие	7
Глава 1. Основы моделирования процессов и систем.....	9
1.1. Понятие о моделях и моделировании	9
1.2. Определение понятия «модель». Свойства моделей.....	11
1.3. Классификация моделей	14
1.4. Детерминистические модели	23
1.5. Стохастические модели	27
1.6. Имитационные модели.....	30
1.7. Методы исследования моделей	37
1.7.1. Математическое моделирование	37
1.7.2. Численное моделирование	40
1.7.3. Имитационное моделирование	43
Глава 2. Математическое моделирование сложных систем.....	47
2.1. Общие сведения о моделировании физических и технических систем.....	47
2.2. Математическое моделирование физических и технических систем на макроуровне	50
2.2.1. Математическое моделирование простейших типовых элементов	50
2.2.2. Построение математических моделей сложной физической и технической системы на макроуровне	55
2.2.3. Особенности построения макромоделей в различных предметных областях	62
2.3. Математическое моделирование физических и технических систем на микроуровне	73
2.3.1. Основные принципы математического моделирования физических систем на микроуровне.....	73
2.3.2. Математические модели на основе фундаментальных законов сохранения	76
2.4. Математическое моделирование физических и технических систем на метауровне.....	80

Глава 3. Вариационная формулировка задач теории упругости	89
3.1. Общие замечания	89
3.2. Энергия деформируемого тела как функционал	89
3.3. Вариационный принцип Лагранжа	95
3.4. Связь между вариационной и дифференциальной формулировками задач теории упругости	97
3.5. Метод Ритца	100
3.6. Принцип Кастильяно	104
3.7. Применение принципа Кастильяно для приближенного решения задач теории упругости	107
3.8. Понятие о других вариационных принципах	111
Глава 4. Современные численные методы исследования математических моделей	113
4.1. Основы линейной теории упругости	114
4.2. Основы нелинейной теории упругости	120
4.3. Метод конечных разностей	123
4.4. Вариационно-разностный метод	126
4.5. Метод Бубнова–Галеркина	127
4.6. Метод Канторовича–Власова	128
4.7. Метод граничных элементов	128
4.8. Метод моментов	129
4.9. Метод конечных элементов	130
4.10. Особенности решения динамических задач	131
4.10.1. Метод центральных разностей	131
4.10.2. Метод Ньюмарка	135
4.10.3. Разложение по собственным формам	138
4.10.4. Метод продолжения решения по параметру	143
Глава 5. Применение метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных	145
5.1. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений параболического типа	145
5.2. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений гиперболического типа	157
5.3. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений эллиптического типа	163

Глава 6. Основы метода конечных элементов	171
6.1. Основные понятия метода конечных элементов	171
6.1.1. Методы решения математических моделей краевых задач.....	171
6.1.2. Вариационные методы решения	174
6.1.3. Виды конечных элементов и функций формы.....	177
6.1.4. Преобразование из локальной системы координат в глобальную.....	191
6.2. Решение некоторых задач с использованием метода конечных элементов.....	194
6.2.1. Плоская задача теории упругости.....	194
6.2.2. Изгиб стержней.....	198
6.2.3. Изгиб пластин	202
6.2.4. Пространственная задача теории упругости	209
6.2.5. Определение собственных частот и форм колебаний	213
6.3. Компьютерная реализация метода конечных элементов.....	223
6.3.1. Алгоритм применения метода конечных элементов	223
6.3.2. Построение виртуальной физической системы	226
6.3.3. Способы организации и хранения данных в памяти компьютера	229
6.3.4. Методы решения основного уравнения метода конечных элементов	230
6.3.5. Применение метода конечных элементов в распределенных вычислительных системах	237
Глава 7. Представление результатов математического моделирования	238
7.1. Методика проведения вычислительного эксперимента.....	238
7.2. Подбор параметров модели	243
7.3. Точность и верификация математической модели.....	251
7.4. Обработка и анализ результатов моделирования	258
7.5. Представление результатов моделирования	265
Литература	268

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ГЭ – граничные элементы
ДУ – дифференциальное уравнение
ЗНК – закон Кирхгофа для напряжений
ЗТК – закон Кирхгофа для токов
ИМ – имитационное моделирование
МГЭ – метод граничных элементов
МДА – многофакторный дисперсионный анализ
МКР – метод конечных разностей
МКЭ – метод конечных элементов
ММ – математическая модель
ММС – математическая модель системы
ММЭ – математическая модель элементов
ОА – обслуживающий аппарат
ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение
САПР – система автоматизированного проектирования
СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений
СМО – система массового обслуживания
СОДУ – система обыкновенных дифференциальных уравнений
ТО – технический объект
ЭВМ – электронная вычислительная машина
ЭДС – электродвижущая сила

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебно-методическом пособии последовательно излагается материал, посвященный моделированию физических и технических систем, даются сведения об используемом математическом аппарате и рассматривается ряд численно-аналитических моделей и методов их исследования.

Благодаря большому охвату материала, который изучается на нескольких курсах первой и второй ступени получения высшего образования, такой формат учебно-методического пособия позволяет студентам изучать данные дисциплины последовательно и с пониманием того, как одна дисциплина является логическим продолжением другой, что позволяет в конечном итоге сформировать у студентов целостное понимание математического моделирования как мультидисциплинарной науки, состоящей из математического базиса, информационно-алгоритмического инструментария и практико-ориентированной проблематики.

В первой главе приведены основные понятия математического моделирования процессов систем. Выделены иерархические уровни исследуемых систем, рассмотрены различные виды математических моделей и возможные методы их анализа.

Во второй главе даны общие сведения о математическом моделировании сложных систем. Также описаны понятия математического моделирования физических и технических систем на макро-, микро- и метауровнях.

В третьей главе рассмотрено понятие граничной задачи в ее классической постановке на примере дифференциальных уравнений. Описаны вариационные принципы, применяемые в энергетических методах исследования инженерных конструкций.

В четвертой главе приведено краткое описание различных методов численного решения граничных задач – конечных разностей, вариационно-разностный, Бубнова–Галеркина, Канторовича–Власова, граничных элементов, конечных элементов. Также описаны особенности решения динамических задач.

Пятая глава посвящена применению метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Шестая глава содержит теоретические основы метода конечных элементов. Даны сведения по линейной и нелинейной теории упругости, выведены соответствующие расчетные формулы по методу конечных элементов и приведены решения задачи в перемещениях и в напряжениях. Рассмотрены алгоритмы применения метода конечных элементов, вариант разработки компьютерной программы реализации МКЭ. Приведено численное решение основных физических задач: плоской задачи теории упругости, изгиба пластин, пространственной задачи теории упругости.

Седьмая глава посвящена представлениям о результатах математического моделирования, точности и верификации математической модели, обработке и анализу результатов.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первой ступени получения высшего образования по специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и второй ступени получения высшего образования по специальности 1-40 80 04 «Информатика и технологии программирования».

Рассматриваемые в пособии вопросы также могут быть полезны при изучении дисциплин «Численные методы математической физики», «Компьютерное моделирование физических и технических систем», «Компьютерные системы конечно-элементных расчетов».

Учебно-методическое пособие может быть полезно студентам других технических специальностей при выполнении курсовых работ по дисциплине «Теоретическая механика».

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

1.1. Понятие о моделях и моделировании

Задачи, которые решает человек в своей образовательной, научно-исследовательской и профессиональной деятельности, делятся на две категории – вычислительные и функциональные. Цель вычислительных задач – расчет параметров, характеристик, обработка данных. Функциональные задачи требуют решения при реализации функций управления, проектирования. Это, например, управление деятельностью торгового предприятия, планирование выпуска продукции, управление перевозкой грузов и т. п.

Процесс решения задачи средствами моделирования отображает схема, показанная на рис. 1.1. Под реальным объектом подразумевается исследуемый объект (система, явление, процесс).



Рис. 1.1. Схема процедуры решения задачи посредством моделирования

Модель – это материальный или воображаемый объект, который в процессе познания замещает реальный объект, сохраняя при этом его существенные свойства.

Моделирование – это процесс исследования реального объекта с помощью модели. Исходный объект называется при этом прототипом или оригиналом [1], [12].

Моделировать можно не только материальные объекты, но и процессы. Например, конструкторы используют аэродинамическую трубу для воспроизведения на земле условий полета самолета. В дальнейшем термин «объект моделирования» будем понимать в широком смысле: это может быть как некоторый вещественный объект (предмет, система), так и реальный процесс.

Модель повторяет не все свойства реального объекта, а только те, которые требуются для ее будущего применения. Поэтому важнейшим понятием в моделировании является понятие цели.

Цель моделирования – это назначение будущей модели. Цель определяет те свойства объекта-оригинала, которые должны быть воспроизведены в модели. Иначе говоря, модель – это упрощенное подобие реального объекта, который отражает существенные особенности (свойства) изучаемого реального объекта, отвечающие целям моделирования.

К построению модели прибегают в тех случаях, когда использование объекта-оригинала по каким-либо причинам затруднено или невозможно. Такими причинами могут быть, например:

- слишком большой (Солнечная система) или слишком маленький размер объекта (молекула или атом);
 - моделируемый процесс протекает слишком быстро (сгорание топлива в двигателе внутреннего сгорания) или слишком медленно (процесс возникновения жизни на Земле);
 - исследование объекта может оказаться опасным для окружающих (атомный взрыв);
 - объект-оригинал может быть разрушен в процессе исследования (исследование прочностных характеристик конструкции самолета).
- Для одного и того же объекта можно создать множество различных моделей. Какую модель выбрать – зависит от цели моделирования, определяемой в соответствии с решаемой задачей. С другой стороны, одна и та же модель может представлять разные объекты. Например, математические модели процесса распространения инфекционной болезни и процесса радиоактивного распада являются одинаковыми с точки зрения их математического описания.

Существует ряд общих требований к свойствам, которым должны удовлетворять модели [13]:

- адекватность – достаточно точное отображение свойств объекта;
- конечность – модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и свойств;

- полнота (информативность) – предоставление исследователю всей необходимой информации об объекте в рамках гипотез, принятых при построении модели;
- упрощенность – модель отображает только существенные стороны объекта;
- гибкость – возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров;
- приемлемая для имеющегося времени и программных средств трудоемкость разработки модели.

1.2. Определение понятия «модель». **Свойства моделей**

Термин «модель» неоднозначен и охватывает чрезвычайно широкий круг материальных и идеальных объектов. Признаком, объединяющим такие, казалось бы, несопоставимые объекты как система дифференциальных уравнений математической физики и пара дамских туфель, выставленных на витрине, является их информационная сущность. Любая модель – идеальная или материальная, используемая в научных целях, на производстве или в быту – несет информацию о свойствах и характеристиках исходного объекта (объекта-оригинала), существенных для решаемой субъектом задачи. Модели – отражение знаний об окружающем мире.

Пусть имеется некоторая конкретная система. Лишь в единичных случаях мы имеем возможность провести с самой этой системой все интересующие нас исследования. С ростом сложности системы возможности натурального эксперимента резко падают. Он становится дорогим, трудоемким, длительным по времени, в слабой степени вариативным. Тогда предпочтительнее работа с моделью. В ряде же случаев мы вообще не имеем возможности наблюдать систему в интересующем нас состоянии [2]. Например, разбор аварии на техническом объекте приходится вести по ее протокольному описанию.

Рассмотрение вместо самой системы (явления, процесса, объекта) ее модели практически всегда несет идею упрощения. Мы огрубляем представления о реальном мире, так как оперировать категорией модели экономичнее, чем действительностью. Но вопрос выделения и формальной фиксации тех особенностей, которые существенны для целей рассмотрения, весьма непрост. Известно большое количество удачных моделей, составляющих предмет гордости человеческой мысли, –

от конечно-элементной модели в прикладных задачах математической физики до модели генетического кода. Однако велико количество процессов и явлений, для которых на настоящий момент нет удовлетворительного описания. В области техники положение с моделированием можно считать удовлетворительным, но и здесь имеются «узкие» места, связанные с плохо определяемыми параметрами, коэффициентами, а также слишком грубые описания.

Определение. Модель в общем смысле есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, описания знаковыми средствами либо материальной системы), отражающий свойства, характеристики и связи объекта-оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом. Модель есть материально или теоретически сконструированный объект, который заменяет (представляет) объект исследования в процессе познания, находится в отношении сходства с последним (изоморфизм, аналогия, физическое сходство и т. п.) и более удобен для исследования. Как следствие, изучение модели и выполнение над ней операций позволяют получить информацию о реальном объекте исследования.

Заметим, что в настоящее время в качестве объекта-оригинала практически всегда рассматривается некоторая система.

Под системой понимается совокупность объектов, компонентов или элементов произвольной природы, образующая некоторую целостность в том или ином контексте. Определяющим принципом рассмотрения некоторой совокупности объектов как системы является появление у нее новых свойств, которых не имеют составляющие ее элементы. Системы различной физической природы окружают нас повсеместно – это и конкретные предметы, и объекты: Солнечная система, человек, персональный компьютер, автомобиль, самолет, аэропорт. Это и более абстрактные сущности, такие как компьютерная программа, естественный язык, коммерческая фирма, культура, политика, наука, экономика. Наиболее ортодоксальная точка зрения предполагает, что все окружающие нас предметы являются системами.

Непосредственно из структуры принятого определения вытекает ряд общих свойств моделей, которые обычно принимаются во внимание в практике моделирования [19].

1. Модель представляет собой «четырёхместную конструкцию», компонентами которой являются: субъект; задача, решаемая субъектом; объект-оригинал; язык описания или способ воспроизведения

модели. Особую роль в структуре обобщенной модели играет решаемая субъектом задача. Вне контекста задачи или класса задач понятие модели не имеет смысла.

2. Каждому материальному объекту соответствует бесчисленное множество в равной мере адекватных, но различных по существу моделей, связанных с разными задачами.

3. Паре «задача–объект» тоже соответствует множество моделей, содержащих в принципе одну и ту же информацию, но различающихся формами ее представления или воспроизведения.

4. Модель по определению всегда является лишь относительным, приближенным подобием объекта-оригинала и в информационном отношении принципиально беднее последнего. Это ее фундаментальное свойство.

5. Произвольная природа объекта-оригинала, фигурирующая в принятом определении, означает, что этот объект может быть материально-вещественным, может носить чисто информационный характер и, наконец, может представлять собой комплекс разнородных материальных и информационных компонентов. Однако независимо от природы объекта, характера решаемой задачи и способа реализации модель представляет собой информационное образование.

6. Частным, но весьма важным для развитых в теоретическом отношении научных и технических дисциплин является случай, когда роль объекта-моделирования в исследовательской или прикладной задаче играет не фрагмент реального мира, рассматриваемый непосредственно, а некий идеальный конструкт, т. е. по сути дела другая модель, созданная ранее и практически достоверная. Подобное вторичное, а в общем случае n -кратное моделирование может осуществляться теоретическими методами с последующей проверкой получаемых результатов по экспериментальным данным, что характерно для фундаментальных естественных наук. В менее развитых в теоретическом отношении областях знания (биология, некоторые технические дисциплины) вторичная модель обычно включает в себя эмпирическую информацию, которую не охватывают существующие теории.

Свойства любой модели таковы [28]:

- конечность: модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования конечны;
- упрощенность: модель отображает только существенные стороны объекта;
- приближительность: действительность отображается моделью грубо или приближительно;

- адекватность: модель успешно описывает моделируемую систему (правильное соответствие изучаемому объекту относительно выбранной системы его свойств);
- информативность: модель должна содержать достаточную информацию о системе – в рамках гипотез, принятых при построении модели и должна давать возможность получить новую информацию);
- потенциальность: предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемом объекте;
- полнота: в модели должны быть учтены все основные связи и отношения, необходимые для обеспечения цели моделирования;
- адаптивность: модель должна быть приспособлена к изменениям внешней среды и внутренних параметров.

Целями моделирования могут являться:

- осмысление действительности (познание и разработка теории исследуемых систем);
- постановка над моделью экспериментов с последующей интерпретацией их результатов применительно к моделируемой системе;
- прогнозирование будущего поведения системы (выходных данных, ситуаций, состояний системы);
- проектирование систем;
- управление системами;
- общение с другими лицами, общественными группами, устройствами обработки информации;
- обучение и тренаж специалистов.

1.3. Классификация моделей

Каждая модель характеризуется тремя признаками [18]:

- принадлежностью к определенному классу задач (по классам задач);
- указанием класса объектов моделирования (по классам объектов);
- способом реализации (по форме представления и обработки информации).

Рассмотрим более подробно последний вид классификации. По этому признаку модели делятся на материальные и идеальные.

Материальные модели:

- геометрически подобные масштабные, воспроизводящие пространственно-геометрические характеристики оригинала безотносительно его субстрата (макеты зданий и сооружений, учебные муляжи и др.);

– основанные на теории подобия субстратно подобные, воспроизводящие с масштабированием в пространстве и времени свойства и характеристики оригинала той же природы, что и модель (гидродинамические модели судов, продувочные модели летательных аппаратов);

– аналоговые приборные, воспроизводящие исследуемые свойства и характеристики объекта оригинала в моделирующем объекте другой природы на основе некоторой системы прямых аналогий (разновидности электронного аналогового моделирования).

Рассмотрим более подробно два последних пункта. Для парохода правильный выбор обводов, подбор гребного винта и согласование с характеристиками винта и корпуса мощности и скорости вращения вала – проблема № 1. По существу, речь идет о необходимости оптимизировать взаимодействие системы «корпус–винт–двигатель» с обтекающей судно жидкой средой по критерию максимального КПД. Решение проблемы опытным путем невозможно по очевидным экономическим соображениям, не поддается она и теоретическому решению. Выход был найден на пути синтеза теории и масштабного гидродинамического моделирования, т. е. экспериментальное исследование малых геометрически подобных моделей проектируемых судов в специальных бассейнах на основе теории подобия. Теория обеспечивала возможность достоверного переноса данных, полученных на модели, на «натуру», на свойства и характеристики реального, но еще не существующего судна. И сегодня методы масштабного физического моделирования сохраняют свое значение.

Аналоговое моделирование основано на том, что свойства и характеристики некоторого объекта воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы. Целый ряд явлений и процессов существенно различной природы описывается аналогичными по структуре математическими выражениями. Описываемые аналогичными математическими структурами разнородные объекты можно рассматривать как пару моделей, которые с точностью до свойств, учитываемых в математическом описании, взаимно отображают друг друга, причем коэффициенты, связывающие соответственные (сходственные) параметры, являются в этом случае размерными величинами.

Идеальные модели [34]:

– неформализованные модели, т. е. системы представлений об объекте оригинале, сложившиеся в человеческом мозгу;

– частично формализованные;

– вербальные – описание свойств и характеристик оригинала на некотором естественном языке (текстовые материалы проектной документации, словесное описание результатов технического эксперимента);

– графические иконические – черты, свойства и характеристики оригинала, реально или хотя бы теоретически доступные непосредственно зрительному восприятию (художественная графика, технологические карты);

– графические условные – данные наблюдений и экспериментальных исследований в виде графиков, диаграмм, схем;

– вполне формализованные (математические) модели.

Основное отличие этого типа моделей от остальных состоит в вариативности – в кодировании одним знаковым описанием огромного количества конкретных вариантов поведения системы. Так, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами описывают и движение массы на пружине, и изменение тока в колебательном контуре, и измерительную схему системы автоматического регулирования, и ряд других процессов. Однако еще более важно то, что в каждом из этих описаний одни и те же уравнения в буквенном (а вообще говоря, и в числовом) виде соответствуют бесконечному числу комбинаций конкретных значений параметров. Скажем, для процесса механических колебаний – это любые значения массы и жесткости пружины.

В знаковых моделях возможен дедуктивный вывод свойств, количество следствий в них обычно более значительно, чем в моделях других типов. Они отличаются компактной записью, удобством работы, возможностью изучения в форме, абстрагированной от конкретного содержания. Все это позволяет считать знаковые модели наивысшей степенью и рекомендовать стремиться к такой форме моделирования.

В сравнении с натурным экспериментом математическое моделирование имеет следующие преимущества [29]:

1. Экономичность (в частности, сбережение ресурса реальной системы).

2. Возможность моделирования гипотетических (т. е. не реализованных в природе) объектов и процессов.

3. Возможность реализации режимов, опасных или труднопроизводимых в природе (критический режим ядерного реактора, работа системы ПРО).

4. Возможность изменения масштаба времени.

5. Легкость многоаспектного анализа.

6. Сжатие информации и ее единообразное представление, способствующие усмотрению основных закономерностей.

7. Отсутствие погрешностей измерения, которые в реальных условиях могут замаскировать искомый эффект.

8. Наличие строго сформулированных правил, позволяющих:

- вскрыть ложность некоторых предубеждений;
- заменить содержательные рассуждения формальным преобразованием выражений – в частности, выполнить оптимизацию;
- выявить глубинные (сущностные) свойства и отношения, и как следствие, получить большую прогностическую силу и построить разнообразные аналогии.

9. Универсальность технического обеспечения проводимой работы (системы программирования и пакеты прикладных программ специального назначения).

Часто в качестве основания для классификации идеальных моделей берется вид языка, на котором они формулируются:

- содержательная модель формулируется на естественном языке;
- формальная модель воплощается с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий или языков программирования). Если в естественно-научной среде моделирование нередко считают только математическим, то в гуманитарной сфере чаще используют содержательные модели. Чтобы разобраться во взаимоотношениях моделей различного типа, рассмотрим рис. 1.2.

Любая модель является, в конечном счете, моделью объекта, фрагмента реальности (верхний уровень на указанной схеме) [3]. Наблюдая за объектом, индивид формирует в голове некий мысленный образ объекта, который будем называть когнитивной моделью. В данном случае когнитологи используют также термин «ментальная модель», понимая под когнитивной моделью модель взаимодействия с объектом. В ряде работ термин «ментальная модель» относится только к индивиду, а термин «когнитивная модель» используется при описании других видов когнитивных систем.

Формируя когнитивную модель объекта, индивид, как правило, стремится ответить на определенные, конкретные вопросы, поэтому от бесконечно сложной реальности отсекается все ненужное с целью получения более компактного и лаконичного описания объекта. Когнитивная модель объекта формируется на основе «картины мира» индивида – особенностей его восприятия, установок, ценностей, интересов.

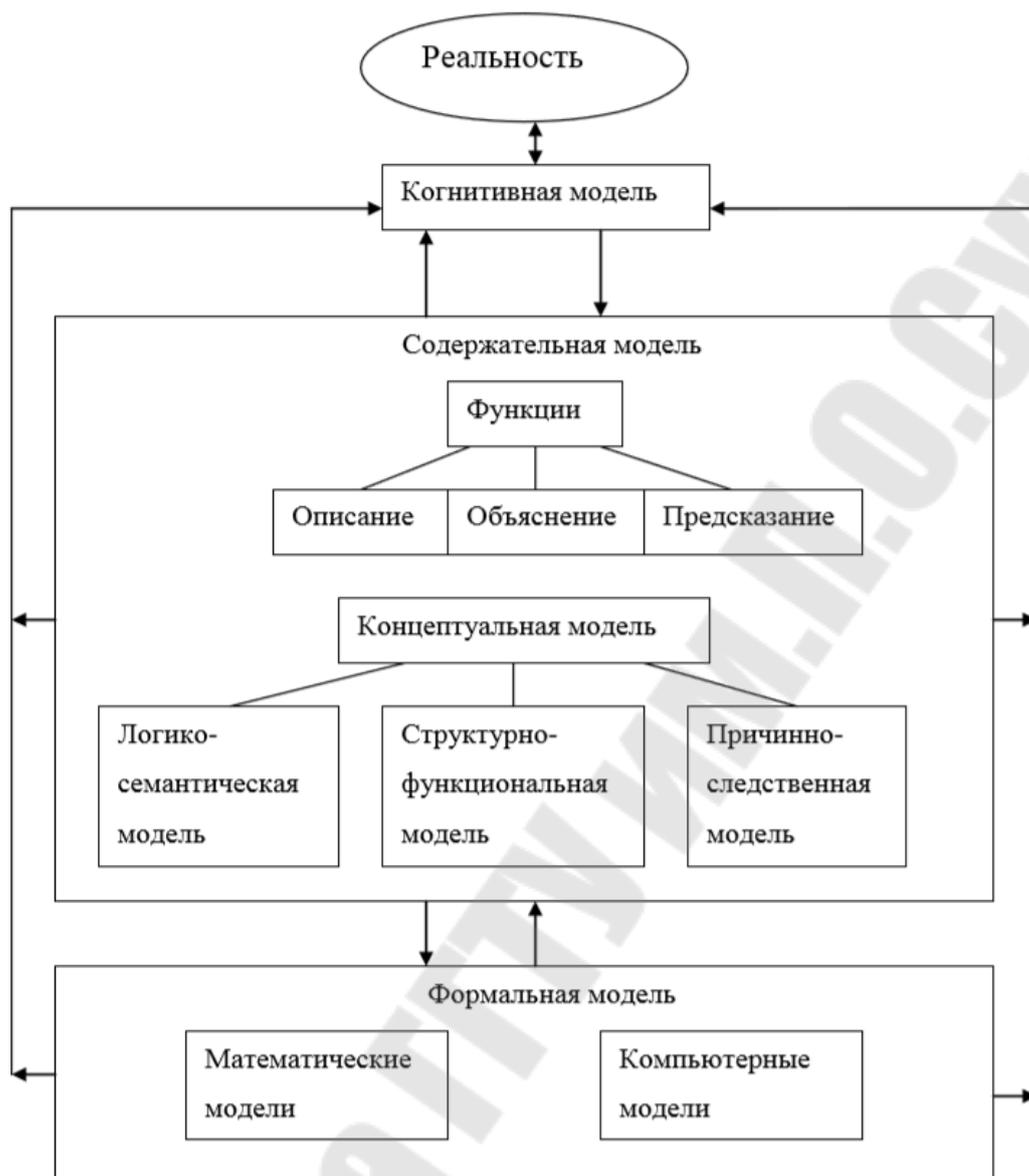


Рис. 1.2. Типы идеальных моделей

Следующий этап моделирования – построение содержательной модели. При этом нельзя утверждать, что эта модель является просто вербализированной копией когнитивной модели. Дело в том, что когнитивная модель может содержать элементы, которые индивид не может или не хочет сформулировать. Возможна и обратная ситуация. Если содержательная модель сформулирована кем-то другим или является продуктом коллективного творчества, то ее интерпретация, уровень понимания, степень доверия по отношению к отдельным элементам модели могут существенно варьироваться.

Построение содержательной модели позволяет получить новую информацию о поведении объекта, выявить взаимосвязи и законо-

мерности, которые не удастся обнаружить при других способах анализа. По функциональному признаку содержательные модели подразделяются на описательные, объяснительные и прогностические.

Описательной моделью можно назвать любое описание объекта. Объяснительные модели призваны ответить на вопрос, почему что-либо происходит. Прогностические модели должны описывать будущее поведение объекта, т. е. отвечать на вопрос, к каким изменениям приводит то или иное воздействие на объект [31]. Заметим, что прогностические модели совсем не обязаны включать в себя объяснительные модели. Нередко удается получить удовлетворительный прогноз на основе эмпирических обобщений, т. е. используя только данные описательной модели.

Концептуальной моделью называется содержательная модель, при формулировке которой используются теоретические концепции и конструкты данной предметной области знания. В более широком смысле под концептуальной моделью понимают содержательную модель, базирующуюся на определенной концепции или точке зрения. Формулировка концептуальной модели нередко представляет собой достижение определенного уровня абстрагирования на пути от предварительного описания объекта к его формальной модели.

Концептуальные модели воплощаются либо в чисто вербальной форме, либо в смешанном вербально-визуальном представлении. Выделяют три вида концептуальных моделей: логико-семантические, структурно-функциональные и причинно-следственные.

Элементами логико-семантической модели являются все утверждения и факты, включенные в вербальное описание объекта. Анализ такой модели осуществляется средствами логики с привлечением знаний, накопленных в данной предметной области.

При построении структурно-функциональных моделей объект обычно рассматривается как целостная система, которую следует расчленить на составные части, компоненты, элементы, подсистемы. Части системы связываются структурными отношениями, описывающими подчиненность, логическую и временную последовательность решения отдельных задач. Структурно-функциональные связи целесообразно визуализировать в виде разного рода схем, карт и диаграмм. С помощью таких схем удобно анализировать служебную роль и назначение отдельных подсистем по отношению к целому, оценивать взаимозависимость отдельных элементов.

Причинно-следственные модели часто используются для объяснения и прогнозирования поведения объекта. В отличие от структурно-функциональных моделей они ориентированы в основном на описание динамики исследуемых процессов, при этом время далеко не всегда учитывается в явном виде. Дело в том, что причинно-следственные отношения, связывающие элементы модели, подразумевают развитие процессов и событий во времени. Элементами таких моделей могут быть понятия, категории, концепты, конструкты, показатели, индикаторы и переменные, описывающие поведение исследуемого объекта. Элемент причинно-следственных содержательных моделей лучше называть фактором (от лат. *factor* – делающий, производящий) – причиной, движущей силой исследуемых процессов и явлений. Термин «фактор» напоминает исследователю, что после расчленения объекта на части и компоненты необходимы следующие операции [15], [22]:

- выявление главных взаимосвязей;
- определение того, как изменение одних факторов влияет на другие компоненты модели;
- понимание того, как будет в целом функционировать собранный механизм, будет ли он адекватно описывать динамику интересующих исследователя параметров.

Нередко говорят об изучении причинно-следственного механизма явления, отбрасывая при этом все лишнее и оставляя только минимальный набор факторов, взаимодействие которых позволяет понять устройство и спрогнозировать поведение изучаемого объекта.

В процессе построения, изучения и совершенствования содержательной модели когнитивная модель непрерывно модифицируется и усложняется. В гуманитарных науках цикл моделирования на этом обычно и заканчивается, но в некоторых случаях модель удается формализовать до такой степени, что становится возможным построение и изучение формальной модели объекта. Формальные модели в свою очередь делятся на две группы: математические и компьютерные.

Создание формальной модели дает возможность постичь сущность исследуемых явлений, выявить основные взаимосвязи и закономерности. Использование формальных средств анализа позволяет изучить поведение модели, получить новые, неочевидные результаты. В любом случае результаты формального моделирования используются для уточнения содержательной и, главное, когнитивной модели.

Введем «прагматическое» определение математической модели, удобное для практических приложений. Для этого используем хорошо известное из кибернетики представление объекта в виде «черного ящика» [11].

Первым шагом к осознанному построению модели во всех случаях является уяснение и четкая формулировка исследования или иной задачи, ради решения которой осуществляется моделирование. Этот шаг базируется на содержательном анализе исходной проблемы, предполагает сбор и осмысление всех уже имеющихся данных, относящихся к задаче. Следующий шаг, с которого начинается процедура собственно моделирования, заключается в определении границ объекта, подлежащего модельному описанию и исследованию с целью решения задачи. Здесь возможен очень широкий диапазон различных ситуаций (зависит от характера задачи, степени сложности и изученности). Будем считать, что в соответствии с имеющейся информацией мы приняли некоторую гипотезу о границах объекта, подлежащего модельному исследованию. Исходя из принципа всеобщей взаимосвязи и взаимозависимости, можно утверждать, что в общем случае выявленный объект, во-первых, подвергается воздействиям со стороны окружающей среды, во-вторых – сам воздействует на эту среду, изменяя ее состояние. Связи «среда–объект» будем именовать, как это принято, входными воздействиями или входами X (часто вводят разделение входных воздействий на управления (U) и возмущения (V)), а воздействия «объект–среда» (Y) – выходными (рис. 1.3).

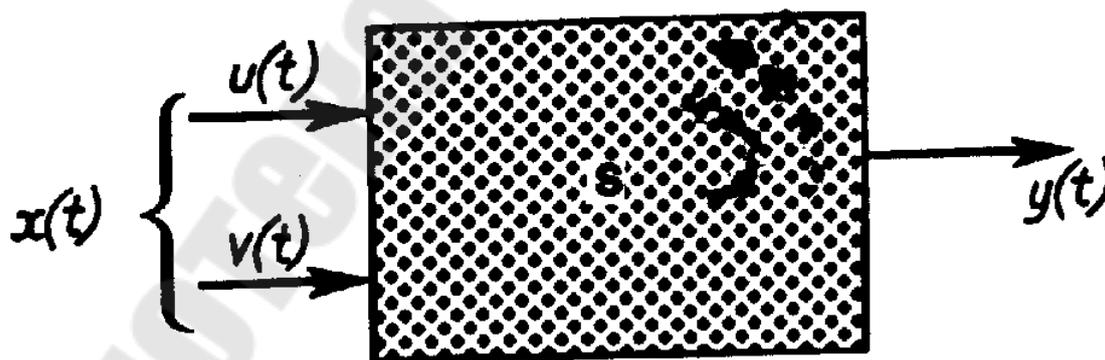


Рис. 1.3. Черный ящик

Очевидно, что достаточно полный (с точки зрения решаемой задачи) учет входных и выходных связей объекта с более широкой системой (средой), компонентом которой он является, есть необходимое условие правомерности выделения объекта из среды. Каждая упу-

ценная исследованием существенная связь создает угрозу того, что состояние и свойства выявленного объекта уже не будут соответствовать тем, которые имели место в исходной реальной системе, и модель, базирующаяся на подобном представлении, окажется заведомо неадекватной. С другой стороны, по практическим соображениям в модели желательно учитывать возможно меньшее число факторов, ибо ее сложность и громоздкость являются не менее серьезными недостатками, чем неполнота. Разрешение данного противоречия, т. е. выбор подлежащих учету в модели существенных входных и выходных воздействий и абстрагирование от прочих, предположительно незначимых, представляет собой весьма ответственный момент при построении любой модели, так как решающим образом влияет на ее качество и эффективность. Здесь необходимо глубокое понимание существа решаемой задачи, тщательное изучение воспроизводимой в модели исходной реальной системы, необходим опыт и эвристические способности. Если моделируемый объект представляет собой реально существующую материальную систему, его связями, очевидно, являются также вполне реальные материальные факторы: силы различной природы, пространственные перемещения с их производными, потоки вещества, потоки энергии, а в некоторых случаях потоки информации. Все они должны быть исследованы и описаны в качественном и количественном отношении, оценены посредством «числа и меры», после чего превращаются в информационные конструкты и приобретают статус переменных модели.

Использование математической модели в современном смысле слова не связано с материальным воспроизведением подлежащих исследованию свойств и характеристик объекта и не предполагает экспериментальных процедур [32]. Объект, описанный на языке математики, представляется некоторой математической структурой (дифференциальными или конечно-разностными уравнениями, передаточной функцией, графом и т. п.) с определенными параметрами, а процесс исследования (так называемое решение математической модели) заключается в применении к этой структуре совокупности математических преобразований и операций в соответствии с некоторым алгоритмом. Результатом вычислительного процесса является новая информация об объекте, разумеется, в той части его свойств, которые нашли отражение в исходном математическом описании. Возможности современных ЭВМ и программных средств позволяют исследовать эти свойства при всевозможных вариациях параметров, входящих в исходную модель,

определять присущие ей вероятностно-статистические характеристики, находить значения параметров, оптимальных по тому или иному критерию и решать множество других самых разнообразных задач.

Под словами «модельное описание» или «модель» понимается математически формализованное описание некоторого явления или объекта в терминах определенной группы его характеристик. Математическая модель сложных управляемых процессов содержит очень много величин различной природы. Все эти величины естественным образом можно разделить на три группы [24]:

- к первой группе относятся величины, которые принято называть эндогенными (внутренними), или фазовыми; они являются искомыми величинами, т. е. подлежат определению, вычислению в силу связей модели;

- ко второй группе относятся так называемые экзогенные (внешние) величины, они полагаются известными в рамках данной модели;

- к третьей группе относятся управления – величины, находящиеся в распоряжении органов управления, с помощью которых можно оказать влияние на течение процесса.

Само слово «модель» означает совокупность связей между всеми этими величинами. Если эта совокупность связей позволяет определить на данном отрезке времени все эндогенные величины при условии, что на нем заданы управления, экзогенные величины, а также начальные для этого отрезка (и, возможно, граничные – в пространственном смысле) значения фазовых переменных, то модель называется замкнутой.

Разделение на внешние и внутренние величины можно выполнить не единственным образом, оно является в известной мере условным и связано со способом использования модели и целями моделирования.

1.4. Детерминистические модели

Детерминированные модели систем имеют ту особенность, что могут исследоваться аналитически, если они являются достаточно простыми. В противоположном случае при использовании значительного числа уравнений и переменных для этой цели могут задействоваться электронно-вычислительные машины. Причем помощь компьютера, как правило, сводится исключительно к их решению и нахождению ответов. Из-за этого приходится менять системы уравнений и использовать другую дискретизацию. А это влечет за собой повышенную

опасность погрешности при расчетах. Все типы детерминированных моделей характеризуются тем, что знание параметров на определенном исследуемом интервале позволяет нам полностью определить динамику развития за границей известных показателей.

Детерминированные математические модели не позволяют одновременно определять влияние множества факторов, а также не учитывают их взаимозаменяемость в системе обратных связей. На чем же выстраивается их функционал? Он базируется на математических закономерностях, которые описывают физико-химические процессы объекта. Благодаря этому достаточно точно предсказывается поведение системы.

Для строительства также используются обобщенные уравнения теплового и материального балансов, определяемых макрокинетикой процесса. Для большей точности прогнозирования детерминированная модель должна обладать максимально возможным количеством исходной информации про прошлое рассматриваемого объекта. Она может быть применена относительно тех технических задач, где допускается по той или иной причине пренебречь реально существующими флуктуациями значений параметров и результатами их измерения. Также одним из показаний к использованию является то, что случайные ошибки могут оказать несущественное влияние на конечный расчет системы уравнений.

Виды детерминированных моделей [8]. Данные модели подразделяются на периодические и непериодические. Оба вида могут быть непрерывными во времени. Также они представляются в виде последовательности дискретных импульсов. Описываться они могут с помощью изображения по Лапласу или благодаря интегралу Фурье.

Детерминированные факторные модели имеют определенные связи между входными и выходными параметрами процесса. Задаются модели посредством логических, дифференциальных и алгебраических уравнений (хотя могут использоваться и их решения, представленные как функция времени). Также в качестве основы для расчетов могут выступать экспериментальные данные, которые были получены в натуральных условиях или при ускоренных коррозионных испытаниях. Любая детерминированная модель предусматривает определенное усреднение характеристик системы.

Рассмотрим практическое применение. Для этого подойдут детерминированные модели управления запасами. Следует отметить, что они формализованы в классе задач линейного программирования.

Так, для расчетов необходимо определить следующие показатели: затраты ресурсов и выпуск продукции с помощью различных способов производства, каждый из которых имеет свою интенсивность; переменные, описывающие все характеристики в происходящих процессах (в том числе и сырье с материалами). Все должно быть проработано. Каждый отдельный ресурс, товар, услуга – все это вносится в материальный баланс.

Также для полноты решений необходимо дать объективную оценку качества принимаемых решений. Таким образом, детерминированные экономические модели идеально подходят для описания процессов, от которых зависит начальное состояние системы. При работе с электронно-вычислительными машинами необходимо учитывать, что компьютеры могут работать только с фиксируемыми факторами.

Построение моделей по способу представления основных параметров происходящих технологических процессов можно разделить на два типа [15]:

1. *Аппроксимационные модели.* В них отдельные производственные единицы представлены как совокупность фиксированных векторов граничных вариантов их функционирования.

2. *Модели с переменными параметрами.* В данном случае устанавливаются определенные диапазоны варьирования, и для соответствия векторам граничных вариантов вводятся дополнительные уравнения.

Эти детерминированные факторные модели позволят применяющему их человеку определить влияние конкретных положений на отдельные характеристики. Но вывести для кривых разделения расчетные выражения не получится. Если же будет просчитываться динамическая оптимизация непрерывных производств, то не следует учитывать вероятностную природу информации о том, как протекают технологические процессы.

Факторное моделирование подразумевает, что выделяются основные положения, для которых необходимо количественное сопоставление. Для выполнения поставленных целей исследованием производят преобразование формы.

Если жестко детерминированная модель имеет больше двух факторов, то она называется многофакторной. Ее анализ может осуществляться посредством различных приемов. В качестве примера приведем математическую статистику. В этом случае она рассматривает поставленные задачи с точки зрения заранее установленных

и проработанных априорных моделей. Выбор среди них осуществляется по содержательному представлению.

Для качественного построения модели необходимо использовать теоретические и экспериментальные исследования сущности технологического процесса и его причинно-следственных связей. Именно в этом и заключается главное преимущество рассматриваемых нами субъектов. Модели детерминированного факторного анализа позволяют осуществлять точное прогнозирование во многих сферах нашей жизни. Благодаря их качественным параметрам и универсальности они и получили такое широкое распространение.

Кибернетические детерминированные модели [15]. Они представляют интерес благодаря основанным на анализе переходным процессам, которые возникают при любых, даже самых ничтожных изменениях агрессивных свойств внешней среды. Для простоты и быстроты расчетов существующее положение дел заменяется упрощенной моделью. Важным является то, чтобы она удовлетворяла всем основным запросам.

От единства всех необходимых параметров зависит работоспособность системы автоматического управления и эффективность принимаемых ею решений. При этом необходимо решить такую задачу: чем больше будет собрано информации, тем выше вероятность ошибки и значительнее срок обработки. Но если ограничить сбор своих данных, то можно рассчитывать на менее надежный результат. Поэтому необходимо найти золотую середину, которая позволит получить информацию достаточной точности, и одновременно это не будет усложнено лишними элементами.

Мультипликативная детерминированная модель. Она строится посредством разделения факторов на их множество. В качестве примера можно рассмотреть процесс формирования объема производимой продукции. Итак, для этого необходимо иметь рабочую силу, материалы и энергию. В таком случае фактор «производимая продукция» можно разбить на множество (рабочая сила; материалы; энергия). Такой вариант отображает мультипликативный вид факторной системы и возможность ее разделения. В этом случае можно использовать следующие методы преобразования: расширение, формальное разложение и удлинение. Первый вариант нашел широкое применение в анализе. Он может использоваться для того, чтобы высчитать эффективность деятельности работника и т. д.

При удлинении одно значение заменяется другими факторами. Но в конечном итоге должно получиться то же самое число. Пример удлинения был рассмотрен нами выше. Осталось только формальное разложение. Оно предусматривает использование удлинения знаменателя исходной факторной модели благодаря замене одного или нескольких параметров. Рассмотрим такой пример: мы рассчитываем рентабельность производства. Для этого сумма прибыли делится на размер затрат. При мультипликации вместо единого значения делим на просуммированные траты на материал, персонал, налоги и т. д.

На практике часто вместе используются детерминированные и вероятностные модели. Как характеризуются последние? Их особенность в том, что они учитывают еще и различные вероятности. Рассмотрим пример. Есть два государства. Отношения между ними очень плохи. Третья сторона решает, инвестировать ли в предприятия одной из стран. Ведь если разгорится война, то прибыль очень пострадает. Или можно привести для примера построение завода в зоне с высокой сейсмической активностью. Здесь ведь действуют природные факторы, которые точно учесть нельзя, можно это сделать только приблизительно.

1.5. Стохастические модели

Стохастические модели – это модели вероятностные. При этом в результате расчетов можно утверждать с достаточной степенью вероятности, каково будет значение анализируемого показателя при изменении фактора. Самое частое применение стохастических моделей – прогнозирование.

Стохастическое моделирование является в определенной степени дополнением и углублением детерминированного факторного анализа. В факторном анализе эти модели используются по трем основным причинам [13]:

- необходимо изучить влияние факторов, по которым нельзя построить жестко детерминированную факторную модель (например, уровень финансового левериджа);

- необходимо изучить влияние сложных факторов, которые не поддаются объединению в одной и той же жестко детерминированной модели;

- необходимо изучить влияние сложных факторов, которые не могут быть выражены одним количественным показателем (например, уровень научно-технического прогресса).

В отличие от жестко детерминированного стохастический подход для реализации требует ряда предпосылок:

- наличие совокупности;
- достаточный объем наблюдений;
- случайность и независимость наблюдений;
- однородность;
- наличие распределения признаков, близкого к нормальному;
- наличие специального математического аппарата.

Построение стохастической модели проводится в несколько этапов:

- качественный анализ (постановка цели анализа, определение совокупности, определение результативных и факторных признаков, выбор периода, за который проводится анализ, выбор метода анализа);
- предварительный анализ моделируемой совокупности (проверка однородности совокупности, исключение аномальных наблюдений, уточнение необходимого объема выборки, установление законов распределения изучаемых показателей);
- построение стохастической (регрессионной) модели (уточнение перечня факторов, расчет оценок параметров уравнения регрессии, перебор конкурирующих вариантов моделей);
- оценка адекватности модели (проверка статистической сущности уравнения в целом и его отдельных параметров, проверка соответствия формальных свойств оценок задачам исследования);
- экономическая интерпретация и практическое использование модели (определение пространственно-временной устойчивости построенной зависимости, оценка практических свойств модели).

Основные понятия корреляционного и регрессионного анализа [19]. Корреляционный анализ – совокупность методов математической статистики, позволяющих оценивать коэффициенты, характеризующие корреляцию между случайными величинами, и проверять гипотезы об их значениях на основе расчета их выборочных аналогов.

Корреляционным анализом называется метод обработки статистических данных, заключающийся в изучении коэффициентов (корреляции) между переменными.

Корреляционная связь (которую также называют неполной, или статистической) проявляется в среднем при массовых наблюдениях, когда заданным значениям зависимой переменной соответствует некоторый ряд вероятных значений независимой переменной. Объяснение тому – сложность взаимосвязей между анализируемыми факторами,

на взаимодействие которых влияют неучтенные случайные величины. Поэтому связь между признаками проявляется лишь в среднем, в массе случаев. При корреляционной связи каждому значению аргумента соответствуют случайно распределенные в некотором интервале значения функции.

В наиболее общем виде задача статистики (и, соответственно, экономического анализа) в области изучения взаимосвязей состоит в количественной оценке их наличия и направления, а также характеристике силы и формы влияния одних факторов на другие. Для ее решения применяются две группы методов, одна из которых включает в себя методы корреляционного анализа, а другая – регрессионный анализ. В то же время ряд исследователей объединяет эти методы в корреляционно-регрессионный анализ, что имеет под собой некоторые основания: наличие целого ряда общих вычислительных процедур, взаимодополнения при интерпретации результатов и др.

Поэтому в данном контексте можно говорить о корреляционном анализе в широком смысле – когда всесторонне характеризуется взаимосвязь. В то же время выделяют корреляционный анализ в узком смысле – когда исследуется сила связи – и регрессионный анализ, в ходе которого оцениваются ее форма и воздействие одних факторов на другие.

Задачи собственно корреляционного анализа сводятся к измерению тесноты связи между варьирующими признаками, определению неизвестных причинных связей и оценке факторов, оказывающих наибольшее влияние на результативный признак.

Задачи регрессионного анализа лежат в сфере установления формы зависимости, определения функции регрессии, использования уравнения для оценки неизвестных значений зависимой переменной.

Решение названных задач опирается на соответствующие приемы, алгоритмы, показатели, что дает основание говорить о статистическом изучении взаимосвязей.

Следует заметить, что традиционные методы корреляции и регрессии широко представлены в разного рода статистических пакетах программ для ЭВМ [35]. Исследователю остается только правильно подготовить информацию, выбрать удовлетворяющий требованиям анализа пакет программ и быть готовым к интерпретации полученных результатов. Алгоритмов вычисления параметров связи существует множество, и в настоящее время вряд ли целесообразно проводить такой сложный вид анализа вручную. Вычислительные процедуры представляют самостоятельный интерес, но знание принципов изуче-

ния взаимосвязей, возможностей и ограничений тех или иных методов интерпретации результатов является обязательным условием исследования.

Методы оценки тесноты связи подразделяются на корреляционные (параметрические) и непараметрические. Параметрические методы основаны на использовании, как правило, оценок нормального распределения и применяются в случаях, когда изучаемая совокупность состоит из величин, которые подчиняются закону нормального распределения. На практике это положение чаще всего принимается априори. Собственно, эти методы – параметрические – и принято называть корреляционными.

Непараметрические методы не накладывают ограничений на закон распределения изучаемых величин. Их преимуществом является и простота вычислений.

Автокорреляция – статистическая взаимосвязь между случайными величинами из одного ряда, но взятых со сдвигом, например, для случайного процесса – со сдвигом по времени.

1.6. Имитационные модели

Имитационные математические модели применяются тогда, когда техническая система особенно сложна и (или) когда необходим высокий уровень детализации представления процессов, протекающих в ней. К таким системам можно отнести экономические и производственные объекты, морские порты, аэропорты, комплексы перекачки нефти и газа, ирригационные системы, программное обеспечение сложных систем управления, вычислительные сети и многие другие. Для таких технических систем ради получения аналитической математической модели исследователь вынужден накладывать жесткие ограничения на модель и прибегать к упрощениям. При этом приходится пренебрегать некоторыми особенностями технической системы, что приводит к тому, что математическая модель перестает быть средством изучения сложной системы. В имитационных моделях моделируемый алгоритм поведения технической системы приближенно воспроизводит сам процесс-оригинал в смысле его функционирования во времени. При этом имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и порядка протекания во времени. Таким образом, реализуется на ЭВМ специальный алгоритм, который воспроизводит формализованный процесс поведения технической системы. Этот алгоритм по исходным данным позво-

ляет получить информацию об изменении во времени t состояний и откликов модели [34]. В этом алгоритме можно выделить три функциональные части: моделирование элементарных подпроцессов; учет их взаимодействия и объединение их в единый процесс; обеспечение согласованной работы отдельных подпроцессов при реализации математической модели на ЭВМ. Влияние случайных факторов на течение процесса имитируется с помощью генераторов случайных чисел с заданными вероятностными характеристиками. В ходе имитации постоянно фиксируется статистика о состояниях системы и изменениях откликов. Эта статистика либо должным образом обрабатывается в ходе имитации, либо накапливается и по окончании заданного интервала моделирования имитационной модели обрабатывается статистическими методами. Как видим, идея имитации привлекательна по своей простоте, но дорога по реализации. Поэтому применяются имитационные модели только в тех случаях, когда другие способы моделирования неэффективны.

Имитационная модель – логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

Такую модель можно использовать любое количество времени как для одного испытания, так и заданного их множества. При этом результаты будут определяться случайным характером процессов. По этим данным можно получить достаточно устойчивую статистику.

Имитационная модель характеризуется наборами входных переменных, наблюдаемых или управляемых переменных, управляющих воздействий, возмущающих воздействий

Состояние системы в любой момент времени и начальные условия $Y(t_0)$, $R(t_0)$, $W(t_0)$ могут быть случайными величинами, заданными соответствующим распределением вероятностей. Соотношения модели определяют распределение вероятностей величин в момент $t + \Delta t$.

Имитационные модели производственных процессов [8]. Вид модели производственного процесса зависит в значительной степени от того, является ли он дискретным или непрерывным. В дискретных моделях переменные изменяются дискретно в определенные моменты имитационного времени. Время может приниматься как непрерывным, так и дискретным в зависимости от того, могут ли дискретные изменения переменных происходить в любой момент имитационного времени или только в определенные моменты. В непрерывных моде-

лях переменные процессы являются непрерывными, а время может быть как непрерывным, так и дискретным в зависимости от того, являются непрерывные переменные доступными в любой момент имитационного времени или только в определенные моменты. В обоих случаях в модели предусматривают блок задания времени, который имитирует продвижение модельного времени, обычно ускоренного относительно реального.

Разработка имитационной модели и проведение моделирующих экспериментов в общем случае могут быть представлены в виде нескольких основных этапов, приведенных на рис. 1.4.



Рис. 1.4. Этапы разработки имитационной модели

Компонента модели, отображающая определенный элемент моделируемой системы, описывается набором характеристик количественного или логического типа. В зависимости от длительности существования различают компоненты условно-постоянные и временные. Условно-постоянные компоненты существуют в течение всего времени эксперимента с моделью, а временные – генерируются и уничто-

жаются в ходе эксперимента. Компоненты имитационной модели делят на классы, внутри которых они имеют одинаковый набор характеристик, но отличаются их значениями.

Состояние компоненты определяется значениями ее характеристик в данный момент модельного времени, а совокупность значений характеристик всех компонент определяет состояние модели в целом.

Изменение значений характеристик, являющееся результатом отображения в модели взаимодействия между элементами моделируемой системы, приводит к изменению состояния модели. Характеристика, значение которой в ходе моделирующего эксперимента изменяется, является переменной, в противном случае это параметр. Значения дискретных переменных не изменяются в течение интервала времени между двумя последовательными особыми состояниями и меняются скачком при переходе от одного состояния к другому.

Моделирующий алгоритм представляет собой описание функциональных взаимодействий между компонентами модели. Для его составления процесс функционирования моделируемой системы разбивается на ряд последовательных событий, каждое из которых отражает изменение состояния системы в результате взаимодействия ее элементов или воздействия на систему внешней среды в виде входных сигналов. Особые состояния возникают в определенные моменты времени, которые планируются заранее, либо определяются в ходе эксперимента с моделью. Наступление событий в модели планируется путем составления расписания событий по временам их свершения либо проводится анализ, выявляющий достижение переменными характеристиками установленных значений.

Для дискретного производства изменение характеристик между особыми состояниями можно также считать дискретным, имея в виду переход условным скачком от исходного материала к заготовке, от заготовки к полуфабрикату, от полуфабриката к детали и т. д. Каждая производственная операция рассматривается как оператор, изменяющий значение характеристик изделия. Для простых моделей последовательность состояний можно принимать детерминированной. Лучше отражают действительность случайные последовательности, которые можно формализовать в виде случайных приращений времени, имеющих заданное распределение, либо случайного потока однородных событий, аналогично потокам заявок в теории массового обслуживания.

На рис. 1.5 представлена структура обобщенной имитационной модели.



Рис. 1.5. Структура обобщенной имитационной модели

При моделировании непрерывных производственных процессов по принципу Δt датчик временных интервалов выдает тактовые импульсы для работы моделирующего алгоритма [17]. Блоки случайных и управляющих воздействий, а также начальных условий служат для ручного ввода условий проведения очередного модельного эксперимента.

Комплекс имитационных функциональных программ по каждому моделируемому объекту определяет условное распределение вероятностей состояний объекта к окончанию каждого момента. При случайном выборе одного из возможных состояний это осуществляется функциональной подпрограммой; при выборе экспериментатором – программой, заложенной в блоке управляющих воздействий, или, при желании осуществлять этот выбор вручную на каждом такте, вводом новых начальных условий исходя из текущего состояния, определяемого с помощью блока индикации.

Функциональная программа определяет параметры технологической установки на каждом такте в зависимости от заданных начальных условий – характеристик сырья, заданного режима, свойств и условий работы установки. Из модели технологической части программным путем могут быть добавлены соотношения весового и объемного баланса.

Координацию и взаимодействие всех блоков и программ осуществляет программа-диспетчер [36].

При моделировании дискретных процессов, при котором обычно используют принцип особых состояний, структура имитационной модели изменяется незначительно. Вместо датчика временных интервалов вводится блок, определяющий наличие особого состояния и выдающий команду на переход к следующему. Функциональная программа имитирует на каждом переходе одну операцию на каждом рабочем месте. Характеристики таких операций могут быть детерминированными во времени, например, при работе станка-автомата, либо случайными с заданными распределениями. Кроме времени могут имитироваться и другие характеристики – наличие или отсутствие брака, отнесение к некоторому сорту или классу и т. п. Аналогично имитируются сборочные операции, с той разницей, что на каждой операции изменяются не характеристики обрабатываемого материала, а вместо одних наименований – детали, узлы – появляются другие – узлы, изделия – с новыми характеристиками. Однако принципиально операции сборки имитируются аналогично операциям обработки – определяются случайные или детерминированные затраты времени на операцию, значения физических и производственных характеристик.

Имитационные модели предприятий и производственных объединений. Для имитации сложных производственных систем требуется создание логико-математической модели исследуемой системы, позволяющей проведение с нею экспериментов на компьютере. Модель реализуют в виде комплекса программ, написанных на одном из универсальных языков программирования высокого уровня либо на специальном языке моделирования. С развитием имитационного моделирования появились системы и языки, сочетающие возможности имитации как непрерывных, так и дискретных систем, что позволяет моделировать сложные системы типа предприятий и производственных объединений.

При построении модели, прежде всего, следует определить ее назначение. В модели должны быть отражены все существенные с точки зрения цели ее построения функции моделируемого объекта и в то же время в ней не должно быть ничего лишнего, иначе она будет слишком громоздкой и малоэффективной.

Основным назначением моделей предприятий и объединений является их исследование с целью совершенствования системы управления либо обучения и повышения квалификации управленческого персонала. При этом моделируется не само производство, а отображение производственного процесса в системе управления.

Некоторые из моделей являются детерминированными – расчет планируемого полного дохода по номенклатуре и количествам в соответствии с планом производства при известных ценах и стоимости упаковки. Модель плана производства является оптимизационной, настраиваемой на один из возможных критериев – максимизацию дохода или использования производственных мощностей; наиболее полное удовлетворение спроса; минимизацию потерь поставляемых материалов и комплектующих изделий и пр. [17]. В свою очередь, модели спроса на продукцию, планируемых производственных мощностей и плана поставок являются вероятностными с различными законами распределения.

Взаимосвязь между моделями, координация их работы и связь с пользователями осуществляется с помощью специальной программы, которая на рис. 1.5 не показана. Эффективная работа пользователей с моделью достигается в режиме диалога.

Построение структурной схемы модели не формализовано и во многом зависит от опыта и интуиции ее разработчика. Здесь важно соблюдать общее правило – лучше на первых этапах составления схемы включить в нее большее число элементов с последующим их постепенным сокращением, чем начать с некоторых, кажущихся основными, блоков, намереваясь в последующем их дополнять и детализировать.

После построения схемы, обсуждения ее с заказчиком и корректировки переходят к построению отдельных моделей. Необходимая для этого информация содержится в системных спецификациях – перечень и характеристики задач, необходимые для их решения исходные данные и выходные результаты и т. д. Если системные спецификации не составлялись, эти сведения берут из материалов обследования, а иногда прибегают к дополнительным обследованиям.

Важнейшими условиями эффективного использования моделей являются проверка их адекватности и достоверность исходных данных. Если проверка адекватности осуществляется известными методами, то достоверность имеет некоторые особенности. Они заключаются в том, что во многих случаях исследование модели и работу с нею лучше проводить не с реальными данными, а со специально подготовленным их набором. При подготовке набора данных руководствуются целью использования модели, выделяя ту ситуацию, которую хотят промоделировать и исследовать.

1.7. Методы исследования моделей

Аналитическое моделирование характеризуется описанием функционирования элементов некоторыми определенными математическими соотношениями. Численное моделирование подразумевает использование какого-либо численного метода (позволяющего свести решение к выполнению конечного числа арифметических действий). Статистическое моделирование позволяет получать статистические данные о процессах в моделируемой системе.

1.7.1. Математическое моделирование

Особую роль в науке играют математические модели, строительный материал и инструменты этих моделей – математические понятия. Они накапливались и совершенствовались в течение тысячелетий. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой – допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и т. д. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями, можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явления, т. е. его математическая модель [15].

Изучение математической модели всегда связано с некоторыми правилами действия над изучаемыми объектами. Эти правила отражают связи между причинами и следствиями.

Построение математической модели – это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение модели – это процедура не формальная. Сильно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и удобной для использования.

Классификация математических моделей. Математические модели могут быть детерминированными и стохастическими.

Детерминированные модели – это модели, в которых установлено взаимно-однозначное соответствие между переменными, описывающими объект или явления.

Такой подход основан на знании механизма функционирования объектов. Часто моделируемый объект сложен, и расшифровка его механизма может оказаться очень трудоемкой и длинной во времени. В этом случае поступают следующим образом: на оригинале проводят эксперименты, обрабатывают полученные результаты и, не вникая в механизм и теорию моделируемого объекта с помощью методов математической статистики и теории вероятности, устанавливают связи между переменными, описывающими объект. В этом случае получают стохастическую модель. В стохастической модели связь между переменными носит случайный характер, иногда это бывает принципиально. Воздействие огромного количества факторов, их сочетание приводит к случайному набору переменных, описывающих объект или явление. По характеру режимов модели бывают статистическими и динамическими.

Статистическая модель включает описание связей между основными переменными моделируемого объекта в установившемся режиме без учета изменения параметров во времени.

В динамической модели описываются связи между основными переменными моделируемого объекта при переходе от одного режима к другому.

Модели бывают дискретными и непрерывными, а также смешанного типа. В непрерывные переменные принимают значения из некоторого промежутка, в дискретные переменные – изолированные значения.

Линейные модели – все функции и отношения, описывающие модель, линейно зависят от переменных.

Требования, предъявляемые к моделям:

- универсальность – характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта;
- адекватность – способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше заданной;
- точность – оценивается степенью совпадения значений характеристик реального объекта и значения этих характеристик, полученных с помощью моделей;

– экономичность – определяется затратами ресурсов ЭВМ памяти и времени на ее реализацию и эксплуатацию.

Основные этапы моделирования [16]:

1. Постановка задачи.

Определение цели анализа и пути ее достижения и выработки общего подхода к исследуемой проблеме. На этом этапе требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Иногда правильно поставить задачу не менее сложно, чем ее решить. Постановка – процесс не формальный, общих правил нет.

2. Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.

На этом этапе подбирается или разрабатывается подходящая теория. Если ее нет, устанавливаются причинно-следственные связи между переменными, описывающими объект. Определяются входные и выходные данные, принимаются упрощающие предположения.

3. Формализация.

Заключается в выборе системы условных обозначений, и с их помощью записываются отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Устанавливается класс задач, к которым может быть отнесена полученная математическая модель объекта. Значения некоторых параметров на этом этапе еще могут быть не конкретизированы.

4. Выбор метода решения.

На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта. Для полученной математической задачи выбирается какой-либо метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика.

5. Реализация модели.

Разработав алгоритм, пишется программа, которая отлаживается, тестируется и получается решение нужной задачи.

6. Анализ полученной информации.

Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

7. Проверка адекватности реальному объекту.

Результаты, полученные по модели, сопоставляются либо с имеющейся об объекте информацией или проводится эксперимент, и его результаты сопоставляются с расчетными.

Процесс моделирования является итеративным. В случае неудовлетворительных результатов этапов 6 или 7 осуществляется возврат к одному из ранних этапов, который мог привести к разработке неудачной модели [19]. Этот этап и все последующие уточняются, и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

1.7.2. Численное моделирование

Численная модель – компьютерный диалект, работающий на отдельном устройстве, суперкомпьютере или множестве взаимодействующих компьютеров (вычислительных узлов), реализующая представление объекта, системы или понятия в форме, отличной от виртуальной, но приближенной к алгоритмическому описанию, включающей идеологизмы ее истории, характеризующих свойства системы и определяющих ее временем.

Численные модели стали обычным инструментом математического моделирования и применяются в физике, астрофизике, механике, химии, биологии, экономике, социологии, метеорологии, других науках и прикладных задачах в различных областях радиоэлектроники, машиностроения, автомобилестроения и др. Численные модели используются для получения новых знаний об объекте или для приближенной оценки поведения систем, слишком сложных для аналитического исследования.

Численное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Численные модели проще и удобнее исследовать в силу их возможности проводить так называемые вычислительные эксперименты в тех случаях, когда реальные эксперименты затруднены из-за финансовых или физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат. Формализованность компьютерных моделей позволяет определить основные факторы, определяющие свойства изучаемого объекта-оригинала (или целого класса объектов), в частности, исследовать отклик моделируемой физической системы на изменения ее параметров и начальных условий.

Построение численной модели базируется на абстрагировании от конкретной природы явлений или изучаемого объекта-оригинала и состоит из двух этапов – сначала создание качественной, а затем и количественной модели. Чем больше значимых свойств будет выявлено и перенесено на компьютерную модель, тем более приближенной она окажется к реальной модели, тем большими возможностями

сможет обладать система, использующая данную модель. Компьютерное же моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта и, при необходимости, последующее уточнение модели и т. д.

Различают аналитическое и имитационное моделирование. При аналитическом моделировании изучаются математические (абстрактные) модели реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений, а также предусматривающих осуществление однозначной вычислительной процедуры, приводящей к их точному решению. При имитационном моделировании исследуются математические модели в виде алгоритма(ов), воспроизводящего функционирование исследуемой системы путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций.

Преимущества численного моделирования. Численное моделирование дает возможность [17]:

- расширить круг исследовательских объектов: становится возможным изучать неповторяющиеся явления, явления прошлого и будущего, объекты, которые не воспроизводятся в реальных условиях;
- визуализировать объекты любой природы, в том числе и абстрактные;
- исследовать явления и процессы в динамике их развертывания;
- управлять временем (ускорять, замедлять и т. д.);
- совершать многократные испытания модели, каждый раз возвращая ее в первичное состояние;
- получать разные характеристики объекта в числовом или графическом виде;
- находить оптимальную конструкцию объекта, не изготавливая его пробных экземпляров;
- проводить эксперименты без риска негативных последствий для здоровья человека или окружающей среды.

Основные этапы компьютерного программирования представлены в табл. 1.1.

Основные этапы компьютерного моделирования

Название этапа	Исполнение действий
1. Постановка задачи и ее анализ	1.1. Выяснить, с какой целью создается модель. 1.2. Уточнить, какие исходные результаты и в каком виде следует получить. 1.3. Определить, какие исходные данные нужны для создания модели
2. Построение информационной модели	2.1. Определить параметры модели и выявить взаимосвязь между ними. 2.2. Оценить, какие из параметров влияющие для данной задачи, а какими можно пренебрегать. 2.3. Математически описать зависимость между параметрами модели
3. Разработка метода и алгоритма реализации компьютерной модели	3.1. Выбрать или разработать метод получения исходных результатов. 3.2. Составить алгоритм получения результатов по избранным методам. 3.3. Проверить правильность алгоритма
4. Разработка компьютерной модели	4.1. Выбрать средства программной реализации алгоритма на компьютере. 4.2. Разработать компьютерную модель. 4.3. Проверить правильность созданной компьютерной модели
5. Проведение эксперимента	5.1. Разработать план исследования. 5.2. Провести эксперимент на базе созданной компьютерной модели. 5.3. Проанализировать полученные результаты. 5.4. Сделать выводы насчет свойств прототипа модели

В процессе проведения эксперимента может выясниться, что нужно:

- скорректировать план исследования;
- выбрать другой метод решения задачи;
- усовершенствовать алгоритм получения результатов;
- уточнить информационную модель;
- внести изменения в постановку задачи.

В таком случае происходит возвращение к соответствующему этапу и процесс начинается снова.

Практическое применение. Численное моделирование применяются для широкого круга задач, таких как [17]:

- анализ распространения загрязняющих веществ в атмосфере;
- проектирование шумовых барьеров для борьбы с шумовым загрязнением;
- конструирование транспортных средств;
- симуляция полета на авиационном тренажере для тренировки летчиков;
- прогнозирование погоды;
- эмуляция работы других электронных устройств;
- прогнозирование цен на финансовых рынках;
- исследование поведения зданий, конструкций и деталей под механической нагрузкой;
- прогнозирование прочности конструкций и механизмов их разрушения;
- проектирование производственных процессов, например, химических;
- стратегическое управление организацией;
- исследование поведения гидравлических систем: нефтепроводов, водопровода;
- моделирование роботов и автоматических манипуляторов;
- моделирование сценарных вариантов развития городов;
- моделирование транспортных систем;
- конечно-элементное моделирование краш-тестов;
- моделирование результатов пластических операций.

Различные сферы применения компьютерных моделей предъявляют разные требования к надежности получаемых с их помощью результатов. Для моделирования зданий и деталей самолетов требуется высокая точность и степень достоверности, тогда как модели эволюции городов и социально-экономических систем используются для получения приближенных или качественных результатов.

1.7.3. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование (ИМ) – метод конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью исследовать ее поведение либо оценить различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. При этом

необходимо подать структуру системы (описание элементов и связей между ними) и описать ее поведение с помощью состояний и моментов переходов между этими состояниями. Состояние системы в каждый момент времени можно определить, как множество значений ее параметров в этот момент времени. Изменение значений параметров можно считать переходом в другое состояние. Внешняя среда задается посредством входных данных. При необходимости моделирования вероятностных систем и процессов в ИМ включается и статистическое моделирование (метод Монте–Карло).

Имитационное моделирование (от англ. *simulation*) – это распространенная разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме «имитации», выполнить оптимизацию некоторых его параметров.

Имитационная модель должна отражать большое число параметров, логику закономерности поведения моделируемого объекта во времени (временная динамика) и в пространстве (пространственная динамика). Моделирование объектов экономики связано с понятием финансовой динамики объекта. С точки зрения специалиста (информатика-экономиста, математика-программиста или экономиста-математика) имитационное моделирование контролируемого процесса или управляемого объекта – это высокоуровневая информационная технология, которая обеспечивает два вида действий, выполняемых с помощью компьютера [14]:

- работы по созданию или модификации имитационной модели;
- эксплуатацию имитационной модели и интерпретацию результатов;
- имитационное моделирование экономических процессов обычно применяется в двух случаях:

1) для управления сложным бизнес-процессом, когда имитационная модель управляемого экономического объекта используется в качестве инструментального средства в контуре адаптивной системы управления, создаваемой на основе информационных (компьютерных) технологий;

2) при проведении экспериментов с дискретно-непрерывными моделями сложных экономических объектов для получения и отсле-

живания их динамики в экстренных ситуациях, связанных с рисками, натурное моделирование которых нежелательно или невозможно.

Можно выделить следующие типовые задачи, решаемые средствами имитационного моделирования при управлении экономическими объектами:

- моделирование процессов логистики для определения временных и стоимостных параметров;

- управление процессом реализации инвестиционного проекта на различных этапах его жизненного цикла с учетом возможных рисков тактики выделения денежных сумм;

- анализ клиринговых процессов в работе сети кредитных организаций (в том числе применение к процессам взаимозачетов в условиях российской банковской системы);

- прогнозирование финансовых результатов деятельности предприятия на конкретный период времени (с анализом динамики сальдо на счетах);

- бизнес-реинжиниринг несостоятельного предприятия (изменение структуры и ресурсов предприятия-банкрота, после чего с помощью имитационной модели можно сделать прогноз основных финансовых результатов и дать рекомендации о целесообразности того или иного варианта реконструкции, инвестиций или кредитования производственной деятельности);

- анализ адаптивных свойств и живучести компьютерной региональной банковской информационной системы (например, частично вышедшая из строя в результате природной катастрофы система электронных расчетов и платежей после катастрофического землетрясения 1995 г. на центральных островах Японии продемонстрировала высокую живучесть: операции возобновились через несколько дней);

- оценка параметров надежности и задержек в централизованной экономической информационной системе с коллективным доступом (на примере системы продажи авиабилетов с учетом несовершенства физической организации баз данных и отказов оборудования);

- анализ эксплуатационных параметров распределенной многоуровневой ведомственной информационной управляющей системы с учетом неоднородной структуры, пропускной способности каналов связи и несовершенства физической организации распределенной базы данных в региональных центрах;

- моделирование действий курьерской (фельдъегерской) вертолетной группы в регионе, пострадавшем в результате природной катастрофы или крупной промышленной аварии;

– анализ сетевой модели *PERT (Program Evaluation and Review Technique)* для проектов замены и наладки производственного оборудования с учетом возникновения неисправностей;

– анализ работы автотранспортного предприятия, занимающегося коммерческими перевозками грузов, с учетом специфики товарных и денежных потоков в регионе;

– расчет параметров надежности и задержек обработки информации в банковской информационной системе.

Система имитационного моделирования, обеспечивающая создание моделей для решения перечисленных задач, должна обладать следующими свойствами:

– возможностью применения имитационных программ совместно со специальными экономико-математическими моделями и методами, основанными на теории управления;

– инструментальными методами проведения структурного анализа сложного экономического процесса;

– способностью моделирования материальных, денежных и информационных процессов и потоков в рамках единой модели, в общем модельном времени;

– возможностью введения режима постоянного уточнения при получении выходных данных (основных финансовых показателей, временных и пространственных характеристик, параметров рисков и др.) и проведении экстремального эксперимента.

Имитационное моделирование как научная дисциплина появилась на рубеже 50–60-х гг. XX в. Научные исследования и практическое применение метода начались в США. Сегодня машинная имитация имеет широкое распространение в решении важных научных и народнохозяйственных задач.

Для построения имитационной модели может быть использован практически любой из универсальных языков программирования. Но такое решение проблемы едва ли будет рациональным при моделировании даже сравнительно простой системы. Гораздо более эффективным является использование специализированных систем имитационного моделирования. В настоящее время существует целый ряд таких систем, например, инструмент визуального моделирования *SIMULINK* [9], входящий в состав пакета *MATLAB*. Но для моделирования дискретных систем вот уже на протяжении более полувека (с 1961 г.) наиболее универсальным средством остается система имитационного моделирования общего применения *GPSS* [15].

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

2.1. Общие сведения о моделировании физических и технических систем

Роль математического моделирования в технике. Выбор альтернативы, обеспечивающей наибольшую эффективность работы при выполнении ограничений.

Ограничения возникают вследствие:

- недостаточных возможностей материалов;
- недостаточности достигнутого технологического уровня;
- потребности в точной информации [4].

Способы получения информации:

1. *Натурный эксперимент:*

- точный;
- долгий;
- дорогой;
- часто опасный или просто нереализуемый.

2. *Выполнение проектных расчетов.* Позволяет выполнить лишь очень грубый отбор альтернатив.

3. *Вычислительный эксперимент над математической моделью.*

Преимущество математического моделирования заключается в возможности применения результатов, полученных в результате исследования одних технических систем при проектировании других.

Функционирование различных устройств подчиняется схожим физическим законам.

По форме одна и та же математическая модель

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0,$$

где ∇^2 – дифференциальный оператор Лапласа; $u(M)$ и $f(M)$ – искомая и заданная функции положения точки M в некоторой области V , описывает законы:

- течения жидкости;
- распространения теплоты;
- распределения электрического потенциала;
- деформации мембраны;
- механических напряжений при кручении бруса;
- фильтрации нефти в нефтеносном слое;

- распространения влаги в почве;
- распространения какой-либо примеси в воздухе;
- распространения эпидемии в регионе.

Структура технического объекта характеризуется качественным и количественным составом его элементов и их взаимным расположением или взаимосвязями.

Параметр – это величина, характеризующая свойство или режим работы моделируемого объекта.

Выделяют выходные, внутренние, внешние параметры технического объекта [6].

Выходные параметры определяют качество и эффективность работы моделируемого объекта:

- производительность;
- рабочая скорость;
- грузоподъемность и т. д.

Внутренние параметры характеризуют свойства элементов моделируемого объекта, имеющие непосредственное влияние на выходные параметры:

- сопротивление электротехнических элементов;
- теплопроводность материалов конструкции;
- коэффициенты трения внутренних поверхностей и т. д.

Внешние параметры характеризуют свойства внешней среды, оказывающей влияние на функционирование моделируемого объекта:

- плотность воздуха;
- температура среды;
- относительная влажность.

В сравнительно простом случае математическая модель (ММ) технического объекта (ТО) может представлять собой соотношение:

$$y = f(x, g), \quad x \in R^k, \quad g \in R^m, \quad y \in R^n,$$

где f – векторная функция векторного аргумента.

Функция f обычно заранее не известна и ее предстоит установить. Это наиболее сложная задача идентификации ММ. Эта задача не всегда может быть решена.

В этом случае математическая модель выражается в форме операторного уравнения

$$L(u(z)) = 0,$$

где L – некоторый оператор (в общем случае нелинейный); O – нулевой элемент пространства, в котором действует этот оператор; z – вектор

независимых переменных, в общем случае включающий время и пространственные координаты; u – вектор фазовых переменных.

Фазовые переменные (фазовые координаты) – однозначно характеризуют состояние объекта в процессе его функционирования:

- в механических системах: скорости и силы;
- в гидравлических и пневматических: расходы и давления;
- в тепловых системах: температуры и тепловые потоки;
- в электрических системах: токи и напряжения.

Вектор фазовых координат задает точку в фазовом пространстве.

Базисные координаты – фазовые координаты, значения которых достаточны для однозначной идентификации состояния моделируемого объекта.

Иерархия математических моделей и способы их реализации.

Иерархические уровни математического моделирования отражают степень детализации описания процессов, протекающих в ТО, его блоках или элементах.

Выделяют три основных уровня: микроуровень, макроуровень, метауровень.

Математические модели микроуровня [15]. Аналогичные термины: математические модели систем с распределенными параметрами; математические модели непрерывных систем; математические модели континуальных систем.

Микроуровень – самый высокий уровень детализации.

Объекты моделирования – сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделенные в трехмерном геометрическом пространстве.

Фазовые переменные могут зависеть как от времени, так и от пространственных координат.

Форма представления ММ:

- краевая задача для дифференциальных уравнений с частными производными;
- в интегральной форме;
- в вариационной форме (в виде функционала, который допустимо рассматривать на некотором множестве функций, содержащем искомую функцию).

Математическую модель микроуровня называют одномерной, двумерной, трехмерной, если искомые фазовые переменные зависят от одной, двух или трех пространственных координат соответственно.

Математические модели макроуровня. Аналогичные термины: математические модели систем с сосредоточенными параметрами; математические модели дискретных систем.

Объекты моделирования – сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов (идеализированных объектов моделирования на микроуровне).

Фазовые переменные могут зависеть только от времени.

Форма представления:

- ДУ или их системы вместе с заданными начальными условиями;
- в интегральной форме;
- системы линейных алгебраических уравнений (в случае если моделируемая система не зависит от времени);
- в виде оптимизационной задачи.

Независимая переменная – время, искомая – фазовые переменные, характеризующие состояние ТО:

- перемещения, скорости и ускорения элементов механических устройств, а также приложенные к этим элементам силы и моменты;
- давление и расход жидкости или газа в трубопроводе;
- напряжения и силы тока в электрических цепях и т. п.

Математические модели метауровня. Строятся путем объединения и укрупнения элементов сложного ТО с целью уменьшения числа фазовых переменных.

Формы представления:

- те же, что и для макроуровня;
- системы логических соотношений;
- передаточных функций;
- имитационные ММ;
- ММ массового обслуживания.

2.2. Математическое моделирование физических и технических систем на макроуровне

2.2.1. Математическое моделирование простейших типовых элементов

При всем разнообразии технических объектов, в которых протекают процессы различной физической природы, обычно удается выделить отдельные блоки, агрегаты или узлы, каждый из которых в зависи-

мости от переносимой и преобразуемой физической субстанции можно рассматривать как электрическую, механическую поступательную или вращательную, тепловую, гидравлическую или пневматическую систему. В общем случае эти системы взаимосвязаны, но, используя принцип декомпозиции, их можно представить совокупностью простейших типовых элементов, описываемых сравнительно несложными математическими моделями макроуровня. Среди внешних и выходных параметров, характеризующих состояние каждого такого элемента, удастся выделить величины, имеющие смысл потенциалов и потоков физических субстанций (например, разность электрических потенциалов и сила тока, разность температур и тепловой поток и т. п.). Эти величины будем называть потенциальными и потоковыми соответственно. Связь между этими величинами устанавливается при помощи уравнений состояния элемента, в которые входят также и его внутренние параметры.

Электрические двухполюсники [15]. Несмотря на различие физических процессов, протекающих в типовых элементах разнообразных технических объектов, большинство этих элементов удастся объединить в три группы, каждую из которых удобно охарактеризовать на примере так называемых пассивных электрических двухполюсников: резистора, конденсатора без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Резистор является характерным представителем типового элемента, обладающего свойством оказывать сопротивление переносу некоторой физической субстанции (в данном случае – электрических зарядов). Для прохождения через такой элемент потока этой субстанции необходимо располагать разностью потенциалов на входе в элемент и выходе из него. Конденсатор обладает свойством накапливать эту субстанцию при повышении разности потенциалов, а индуктивная катушка – свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить поток этой субстанции неизменным.

Оказывается, что среди простейших типовых элементов, в которых протекают процессы иной физической природы по сравнению с электрической системой, существуют элементы со свойствами, аналогичными указанным свойствам резистора, конденсатора и индуктивной катушки. Поэтому рассмотрение целесообразно начать с уравнений состояния простейших элементов электрической системы, а затем по аналогии с ними строить ММ типовых элементов, характерных для других технических систем.

Математической моделью резистора, описывающей протекание через него электрического тока, является хорошо известная формула закона Ома

$$\Delta U = IR, \quad (2.1)$$

где ΔU и I – падение электрического напряжения (разность электрических потенциалов) на резисторе и сила тока, измеряемые в вольтах (В) и амперах (А) соответственно (рис. 2.1, а); R – сопротивление резистора, измеряемое в омах (Ом = В/А). Величину $g = 1/R$ называют проводимостью резистора, единицей измерения которой является сименс (См = 1/Ом).

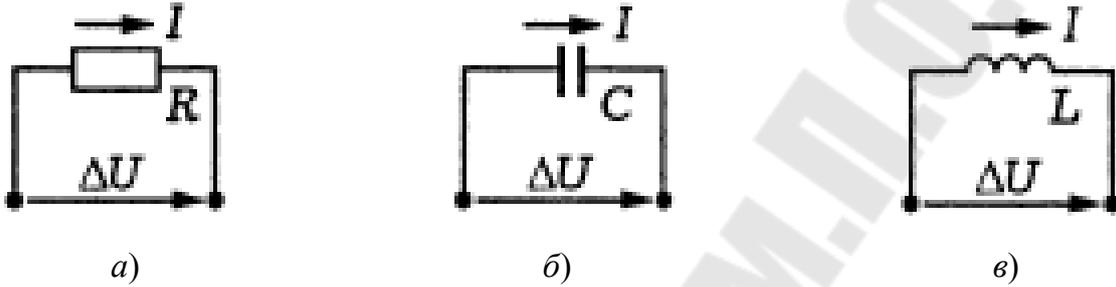


Рис. 2.1. Электрические двухполюсники

Электрическая энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивления при протекании через резистор тока, переходит в тепловую энергию, причем измеряемая в ваттах (Вт = В · А) мощность тепловыделения на резисторе равна [18]:

$$W = I\Delta U = I^2 R = \frac{(\Delta U)^2}{R} = g(\Delta U)^2. \quad (2.2)$$

Электрический конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд Q_e , измеряемый в кулонах (Кл), пропорционально разности потенциалов ΔU на его обкладках, причем $Q_e = C\Delta U$, C – емкость конденсатора, измеряемая в фарадах (Ф). Для идеализированного конденсатора с постоянной емкостью, в котором нет перетекания электрического заряда через разделяющий обкладки диэлектрик, при изменении во времени t в цепи, содержащей последовательно включенный конденсатор (рис. 2.1, б), протекает ток силой

$$I = \frac{dQ_e}{dt},$$

т. е.

$$I = C \frac{d\Delta U}{dt}. \quad (2.3)$$

Энергию электрического поля в конденсаторе, равную $E_e = \frac{Q_e \Delta U}{2} = \frac{C(\Delta U)^2}{2} = Q_e^2 / (2C)$, измеряют в джоулях (Дж).

При изменении во времени силы тока, протекающего через индуктивную катушку, возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая изменению силы тока (рис. 2.1, в). В случае идеализированной (без сопротивления) катушки эту ЭДС можно представить как разность потенциалов на концах катушки:

$$\Delta U = L \frac{dI}{dt}, \quad (2.4)$$

где L – индуктивность катушки, измеряемая в генри (Гн).

При прохождении электрического тока через катушку каждый ее виток пронизывает некоторый магнитный поток. Для катушки индуктивности принимают, что этот поток одинаков для всех витков (говорят, что он «сцеплен с каждым витком») и равен $\Psi = LI$. Величину Ψ называют потокосцеплением и измеряют в веберах (Вб). Энергия магнитного поля катушки, измеряемая в Дж, равна

$$E_m = \frac{\Psi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Таким образом, ММ резистора является алгебраическое уравнение, а для конденсатора и индуктивной катушки ММ имеет форму обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Если считать, что R , C и в (2.1)–(2.4) не зависят от силы тока и напряжения, то эти уравнения устанавливают линейную связь между I и ΔU , что является признаком линейности ММ.

Наряду с пассивными двухполюсниками к типовым элементам электрических цепей относят источники напряжения и тока, условное обозначение которых представлено на рис. 2.2, а и б соответственно. Идеальный источник электрического напряжения является двухполюсником, задающим на своих полюсах изменение во времени t по определенному закону $\Delta U(T)$ разности напряжений, не зависящих от значения $I(t)$ силы тока, протекающего через него. Это означает, что такой источник имеет столь малое внутреннее сопротивление \bar{R} и что падением $I(t)\bar{R}$ напряжения на таком сопротивлении можно пренебречь по сравнению с $\Delta U(t)$.

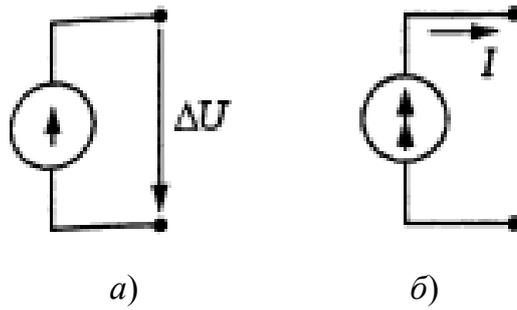


Рис. 2.2. Пассивные двухполюсники

Наоборот, идеальный источник электрического тока – это двухполюсник, обладающий столь большим внутренним сопротивлением \vec{R} , что изменяющаяся по определенному закону $I(t)$ сила проходящего через такой источник тока не зависит от разности $\Delta U(t)$ напряжений на его полюсах, т. е. величиной $\Delta U(t)$ можно пренебречь по сравнению с $I(t)\vec{R}$. Практически источник тока, близкий к идеальному, можно получить последовательным соединением источника достаточно большого напряжения и резистора с сопротивлением R^* , существенно превосходящим сопротивление внешней электрической цепи (рис. 2.3, а). Близким к идеальному источнику напряжения будет двухполюсник, состоящий из параллельно соединенных источника тока и резистора с сопротивлением R^* , существенно меньшим, чем сопротивление внешней цепи (рис. 2.3, б).

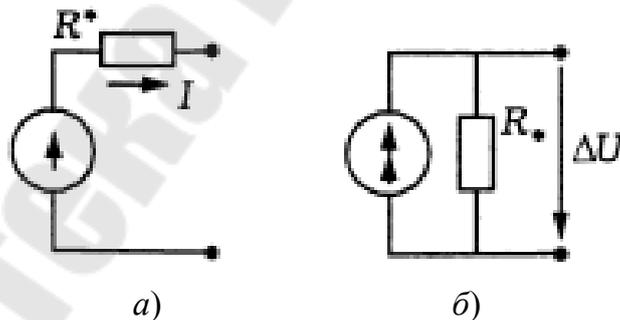


Рис. 2.3. Пассивные двухполюсники, близкие к идеальным

Пусть через резистор течет переменный во времени t ток силой

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

где I_0 – амплитуда колебаний силы тока; ω – угловая частота и φ_0 – начальная фаза колебаний. Величину $\omega t + \varphi_0$ называют фазой коле-

баний. В соответствии с законом Ома для падения напряжения на резисторе с сопротивлением R получим

$$\Delta U_R(t) = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.6)$$

Таким образом, для резистора сила тока и падение напряжения имеют одинаковую начальную фазу колебаний (говорят, что они совпадают по фазе), т. е. эти величины одновременно достигают нулевых, максимальных и минимальных значений (рис. 2.4).

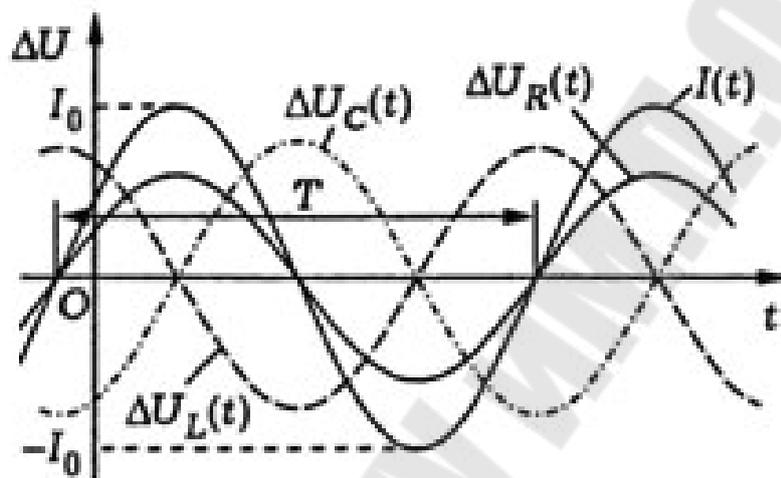


Рис. 2.4. Сила тока и падение напряжения для резистора

В этом случае средняя за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ колебаний силы тока мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = 1/t \int_0^T I(t) \Delta U(t) dt = \frac{I_0^R R}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{I_0^R R}{2},$$

т. е. она вдвое меньше наибольшего мгновенного значения мощности, соответствующего прохождению через тот же резистор постоянного тока силой I_0 .

2.2.2. Построение математических моделей сложной физической и технической системы на макроуровне

Исходное математическое описание процессов в объектах на макроуровне представляется системами обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Аналитические решения таких систем при типичных значениях их порядков в практических задачах получить не удастся, поэтому

в САПР преимущественно используются алгоритмические модели. Рассмотрим обобщенный подход к формированию алгоритмических моделей на макроуровне, справедливый для большинства приложений.

Исходными для формирования математических моделей объектов на макроуровне являются компонентные и топологические уравнения.

Компонентными уравнениями называют уравнения, описывающие свойства элементов (компонентов), другими словами, это уравнения ММЭ.

Топологические уравнения описывают взаимосвязи в составе моделируемой системы [17].

В совокупности компонентные и топологические уравнения конкретной физической системы представляют собой ММС.

Очевидно, что компонентные и топологические уравнения в системах различной физической природы отражают разные физические свойства, но могут иметь одинаковый формальный вид. Одинаковая форма записи математических соотношений позволяет говорить о формальных аналогиях компонентных и топологических уравнений.

Такие аналогии существуют для механических поступательных, механических вращательных, электрических, гидравлических (пневматических), тепловых объектов.

Наличие аналогий приводит к практически важному выводу: значительная часть алгоритмов формирования и исследования моделей в САПР оказывается инвариантной и может быть применена к анализу проектируемых объектов в разных предметных областях.

Единство математического аппарата формирования ММС особенно удобно при анализе систем, состоящих из физически разнородных подсистем.

В САПР компонентные уравнения имеют вид

$$F_k(dV/dt, V, t) = 0;$$

топологические уравнения:

$$F_t(V) = 0,$$

где $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ – вектор фазовых переменных; t – время.

Различают фазовые переменные двух типов, их обобщенные наименования – фазовые переменные типа потенциала (например, электрическое напряжение) и типа потока (например, электрический ток).

Каждое компонентное уравнение характеризует связи между разнотипными фазовыми переменными, относящимися к одному компоненту (например, закон Ома описывает связь между напряжением и током в резисторе), а топологическое уравнение – связи между однотипными фазовыми переменными в разных компонентах.

Модели можно представлять в виде систем уравнений или в графической форме, если между этими формами установлено взаимно однозначное соответствие. В качестве графической формы часто используют эквивалентные схемы.

Электрические системы [32]. В электрических системах фазовыми переменными являются электрические напряжения и токи. Компонентами систем могут быть простые двухполюсные элементы и более сложные двух- и многополюсные компоненты.

К простым двухполюсникам относятся следующие элементы: сопротивление, емкость и индуктивность, характеризуемые одноименными параметрами R , C , L . В эквивалентных схемах эти элементы обозначают в соответствии с рис. 2.5.



Рис. 2.5. Электрические системы

Компонентные уравнения простых двухполюсников:

– для сопротивления

$$U = IR \text{ (закон Ома);} \quad (2.7)$$

– для емкости

$$I = C \frac{dU}{dt}; \quad (2.8)$$

– для индуктивности

$$U = L \frac{dI}{dt}, \quad (2.9)$$

где U – напряжение (точнее, падение напряжения на двухполюснике); I – ток.

Эти модели лежат в основе моделей других возможных более сложных компонентов.

Большая сложность может определяться нелинейностью уравнений (2.7)–(2.9), т. е. зависимостью R , C , L от фазовых переменных, или учетом зависимостей параметров R , C , L от температуры, или наличием более двух полюсов. Однако многополюсные компоненты могут быть сведены к совокупности взаимосвязанных простых элементов.

Топологические уравнения выражают ЗНК и ЗТК. Согласно ЗНК сумма напряжений на компонентах вдоль любого замкнутого контура в эквивалентной схеме равна нулю, а в соответствии с ЗТК сумма токов в любом замкнутом сечении эквивалентной схемы равна нулю:

$$\sum_{k \in K_p} U_k = 0;$$

$$\sum_{j \in J_q} I_j = 0,$$

где K_p – множество номеров элементов p -го контура; J_q – множество номеров элементов, входящих в q -е сечение.

Механические системы [19]. Фазовыми переменными в механических поступательных системах являются силы и скорости. Используют одну из двух возможных электромеханических аналогий. В дальнейшем будем использовать ту из них, в которой скорость относят к фазовым переменным типа потенциала, а силу считают фазовой переменной типа потока. Учитывая формальный характер подобных аналогий, в равной мере можно применять и противоположную терминологию.

Компонентное уравнение, характеризующее инерционные свойства тел, в силу второго закона Ньютона имеет вид

$$F = M \frac{dV}{dt},$$

где F – сила; M – масса; V – поступательная скорость.

Упругие свойства тел описываются компонентным уравнением, которое можно получить из уравнения закона Гука. В одномерном случае (если рассматриваются продольные деформации упругого стержня):

$$G = E\varepsilon,$$

где G – механическое напряжение; E – модуль упругости; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – относительная деформация; Δl – изменение длины l упругого тела под воздействием G .

Учитывая, что $G = \frac{F}{S}$, где F – сила, S – площадь поперечного сечения тела, и дифференцируя, имеем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{SE}{l} \frac{d\Delta l}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dt} = gv,$$

где $g = \frac{SE}{l}$ – жесткость (величину, обратную жесткости, называют гибкостью LM); $v = \frac{d\Delta l}{dt}$ – скорость.

Диссипативные свойства в механических системах твердых тел выражаются соотношениями, характеризующими связь между силой трения и скоростью взаимного перемещения трущихся тел, причем в этих соотношениях производные сил или скоростей не фигурируют, как и в случае описания с помощью закона Ома диссипативных свойств в электрических системах.

Топологические уравнения характеризуют [15]:

– во-первых, закон равновесия сил: сумма сил, приложенных к телу, включая силу инерции, равна нулю (принцип Даламбера);

– во-вторых, закон скоростей, согласно которому *сумма относительной, переносной и абсолютной скоростей равна нулю.*

В механических вращательных системах справедливы компонентные и топологические уравнения поступательных систем с заменой поступательных скоростей на угловые, сил – на вращательные моменты, масс – на моменты инерции, жесткостей – на вращательные жесткости.

Условные обозначения простых элементов механической системы показаны на рис. 2.6.

Нетрудно заметить наличие аналогий между электрической и механической системами.

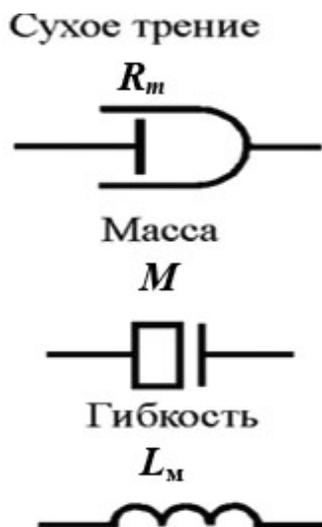


Рис. 2.6. Простые элементы механической системы

Далее параметры C и M будем называть емкостными (емкостного типа), параметры L и L_m – индуктивными (индуктивного типа), а параметры R и $RTP = \frac{dv}{dF}$ – резистивными (резистивного типа).

Имеется и существенное отличие в моделировании электрических и механических систем: первые из них одномерны (на макроуровне), а процессы во вторых часто приходится рассматривать в двумерном или трехмерном (3D) пространстве.

Следовательно, при моделировании механических систем в общем случае в пространстве 3D нужно использовать векторное представление фазовых переменных, каждая из которых имеет шесть составляющих, соответствующих шести степеням свободы.

Однако отмеченные выше аналогии остаются справедливыми, если их относить к проекциям сил и скоростей на каждую пространственную ось, а при графическом представлении моделей использовать шесть эквивалентных схем – три для поступательных составляющих и три для вращательных.

Гидравлические системы [31]. Фазовыми переменными в гидравлических системах являются расходы и давления. Как и в предыдущем случае, компонентные уравнения описывают свойства жидкости рассеивать или накапливать энергию.

Рассмотрим компонентные уравнения для жидкости на линейном участке трубопровода длиной Δl и воспользуемся уравнением Навье–Стокса в следующей его форме (для ламинарного течения жидкости):

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - 2aV,$$

где ρ – плотность жидкости; V – скорость; P – давление; a – коэффициент трения.

Так как $V = \frac{Q}{S}$, где Q – объемный расход; S – площадь поперечного сечения трубопровода, то, заменяя пространственную производную отношением конечных разностей, имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{S\Delta P}{\Delta l\rho} - \frac{2aQ}{\rho}$$

или

$$\Delta P = L_r \frac{dQ}{dt} + R_r Q.$$

Здесь ΔP – падение давления на рассматриваемом участке трубопровода; $L_r = \frac{\Delta l\rho}{s}$ – гидравлическая индуктивность, отражающая инерционные свойства жидкости; $R_r = \frac{2a\Delta l}{S}$ – гидравлическое сопротивление, отражающее вязкое трение.

Явление сжимаемости жидкости описывается компонентным уравнением, вытекающим из закона Гука:

$$\Delta P = \frac{E\Delta l}{l}. \quad (2.10)$$

Дифференцируя (2.10) и учитывая, что объемный расход Q связан со скоростью $V = \frac{d\Delta l}{dt}$ соотношением $Q = US$, получаем:

$$\frac{d\Delta P}{dt} = C_r Q,$$

где $C_r = \frac{E}{Sl}$ – гидравлическая емкость.

Связь подсистем различной физической природы. Используют следующие способы моделирования взаимосвязей подсистем: с помощью трансформаторной, гираторной связей и с помощью зависимости параметров компонентов одной подсистемы от фазовых переменных другой.

В эквивалентных схемах трансформаторные и гираторные связи представлены зависимыми источниками фазовых переменных, показанными на рис. 2.7.



Рис. 2.7. Элементы взаимосвязи подсистем различной физической природы

На данном рисунке n – коэффициент трансформации [15]; g – передаточная проводимость; U_j и I_j – фазовые переменные j -й цепи; $j = 1$ соответствует первичной, а $j = 2$ – вторичной цепи.

2.2.3. Особенности построения макромоделей в различных предметных областях

Модели макроуровня получаются, когда происходит переход от распределенных параметров к сосредоточенным – выделяются крупные элементы объектов и их параметры сосредоточиваются в одной точке: масса балки оказывается сосредоточенной в центре тяжести, поле потенциалов характеризуется величиной одного напряжения, поток электронов моделируется электрическим током и т. п.

Происходит дискретизация пространства, однако время – по-прежнему непрерывная величина.

Математическими моделями на макроуровне являются обыкновенные дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения.

Поведение (состояние) моделируемых объектов, состоящих из физически однородных элементов, в которых описываются процессы определенной физической природы (механические, электрические, гидравлические, тепловые), можно характеризовать с помощью фазовых переменных двух типов – типа потенциала и типа потока.

Приведем типы фазовых переменных для объектов разной физической природы [23] (табл. 2.1).

Фазовые переменные для различных физических систем

Система	Фазовые переменные	
	типа потенциала	типа потока
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток
Механическая	Скорость	Сила
Механическая вращательная	Угловая скорость	Вращательный момент
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая и пневматическая	Давление	Расход

В большинстве технических объектов можно выделить три типа пассивных простейших элементов: типа R – элемент рассеивания (диссипации) энергии (как правило, преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания); типа C и типа L – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии.

Кроме пассивных элементов, существуют два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Уравнения, описывающие свойства элементов объекта, называют компонентными. В них входят переменные типа потенциала и типа потока. Способ связи элементов отражается с помощью других уравнений, которые называют топологическими.

В них входят переменные одного типа: либо потенциала, либо потока. Топологические уравнения могут выражать законы сохранения, условия непрерывности, равновесия, баланса и т. п.

Математические модели объектов есть совокупность компонентных и топологических уравнений.

Рассмотрим примеры компонентных и топологических уравнений для некоторых разных по своей физической природе объектов.

1. Электрические системы [15].

Основными фазовыми переменными электрических систем являются напряжения и токи в различных элементах систем. Компонентные уравнения элементов имеют вид:

$$U = RL, \quad I = C \frac{dl}{dt}, \quad U = L \frac{dl}{dt},$$

где U – напряжение; I – ток; R – сопротивление; C – емкость; L – индуктивность.

При соединении резисторов, емкостей, индуктивностей между собой образуется схема, соединение элементов в которой отражается топологическими уравнениями. Ими являются законы Кирхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0,$$

где уравнения токов записываются для узлов, а уравнения напряжений для контуров. В электрических системах имеются достаточно сложные элементы, и при их моделировании применяют схемы замещения, состоящие из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

2. Механические системы.

Элементами механических поступательных систем являются:

- элементы механического сопротивления, отражающие потери механической энергии на разные виды трения;
- элементы масс, отражающие свойства инерционности;
- элементы гибкости, отражающие свойства упругости.

Роль фазовых переменных в механических системах выполняют либо силы и скорости, либо силы и перемещения.

Компонентные уравнения имеют вид:

$$V = R_m F, \quad F = m \frac{dV}{dt}, \quad V = L_m \frac{dF}{dt},$$

где V – скорость; F – сила; R – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости; m – масса-аналог электрической емкости; L_m – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности.

Первое выражение в формуле указывает на связь скорости и силы через коэффициент вязкого трения $k_T = \frac{1}{R_T}$.

Второе выражение является вторым законом Ньютона.

Третье выражение получено из уравнения перемещения пружины x под действием силы $F = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины.

После дифференцирования последнего выражения получаем

$$\frac{dF}{dt} = k \frac{dx}{dt} = kV.$$

Если обозначить $L_m = \frac{1}{k}$ (механическая гибкость), то получим третье выражение.

Топологические уравнения механической системы выражают уравнение равновесия сил, являющееся аналогом первого закона Кирхгофа, и уравнение сложения скоростей, в соответствии с которым сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю (аналог второго закона Кирхгофа):

$$\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0.$$

3. Механические вращательные системы.

Для механических вращательных систем наиболее просто выглядит аналогия с механическими поступательными системами. Поступательной скорости V соответствует угловая скорость Ω , силе F – вращательный момент M . Аналогиями параметров m , L_m и R будут соответственно: J – момент инерции относительно оси вращения со скоростью Ω ; $L_{\text{вр}}$ – вращательная гибкость; $R_{\text{вр}}$ – сопротивление вращению.

Компонентные уравнения механической вращательной системы имеют вид [27]:

$$\Omega = R_{\text{вр}} M, \quad M = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \Omega = L_{\text{вр}} \frac{dM}{dt}.$$

Топологические уравнения механической вращательной системы выражают закон равенства суммы моментов сил и закон сложения скоростей вокруг оси вращения:

$$\sum_j M_j = 0, \quad \sum_i \Omega_i = 0.$$

4. Гидравлические и пневматические системы.

Фазовыми переменными гидравлических систем являются поток жидкости (расход) q и давление p – аналоги электрического тока и напряжения соответственно. Компонентные уравнения участков трубопровода и резервуаров гидросистемы связывают фазовые переменные при ламинарном и турбулентном движении жидкости.

Топологические уравнения гидравлической системы близки по своему смыслу и идентичны по форме топологическим уравнениям электрических систем, а именно сумма потоков в любом узле системы и сумма давлений вдоль любого контура системы равны нулю.

Фазовые переменные пневматических систем – потоки газа и давления – аналогичны по смыслу фазовым переменным гидравлических систем. Также одинаковы в гидравлических и пневматических системах компонентные и топологические уравнения.

5. Тепловые системы.

Для этих систем основные фазовые переменные – температура T и тепловой поток g_m .

Однокомпонентное уравнение тепловой системы связывает разность температур на участке элемента и тепловой поток через тепловое сопротивление R_m , которое определяется теплоотдачей посредством теплопроводности, конвекции и лучеиспускания, другое уравнение через теплоемкость C_m связывает тепловой поток и температуру элемента системы. Уравнения с понятием «тепловой гибкости» в тепловых системах нет.

Топологические уравнения для сумм тепловых потоков и разностей температур тепловых систем также аналогичны законам Кирхгофа в электрических системах.

Топологические уравнения для любых из рассмотренных выше систем строго определены только для установившихся режимов.

В тех случаях, когда время распределения возбуждений (изменений фазовых переменных) по ветвям системы соизмеримо с длительностью интервалов времени, на которых ведется исследование, или превышает их, применять такие уравнения в приведенной выше форме нельзя.

Границы применимости топологических уравнений определяются скоростями распространения возбуждений, размерами компонентов системы и частотами изменения фазовых переменных. Например, для электрических систем скорость распространения возбуждений есть скорость света или электромагнитных волн в соответствующей среде, а для механических, гидравлических и пневматических – это скорость распространения звука в соответствующей среде.

Методы и алгоритмы анализа на макроуровне. Выбор методов анализа во временной области [33]. Анализ процессов в проектируемых объектах можно проводить во временной и частотной областях.

Анализ во временной области (динамический анализ) позволяет получить картину переходных процессов, оценить динамические свойства объекта, он является важной процедурой при исследовании как линейных, так и нелинейных систем.

Анализ в частотной области более специфичен, его применяют, как правило, к объектам с линеаризуемыми математическими моделями при исследовании колебательных стационарных процессов, анализе устойчивости, расчете искажений информации, представляемой спектральными составляющими сигналов, и т. п.

Методы анализа во временной области, используемые в универсальных программах анализа в САПР, – это численные методы интегрирования СОДУ:

$$F(dV / dt, V, t) = 0.$$

Другими словами, это методы алгебраизации дифференциальных уравнений.

Формулы интегрирования СОДУ могут входить в математическую модель независимо от компонентных уравнений, как это имеет место в [15], или быть интегрированными в математические модели компонентов, как это выполнено в узловом методе.

От выбора метода решения СОДУ существенно зависят такие характеристики анализа, как точность и вычислительная эффективность. Эти характеристики определяются прежде всего типом и порядком выбранного метода интегрирования СОДУ.

Применяют два типа методов интегрирования – явные (иначе экстраполяционные, или методы, основанные на формулах интегрирования вперед) и неявные (интерполяционные, основанные на формулах интегрирования назад).

Различия между ними можно показать на примере простейших методов первого порядка – методов Эйлера [17].

Формула явного метода Эйлера представляет собой следующую формулу замены производных в точке t_n :

$$dV / dt |_{t_n} = (V_{n+1} - V_n) / h_n.$$

Здесь индекс равен номеру шага интегрирования; $h_n = t_{n+1} - t_n$ – размер шага интегрирования (обычно h_n называют просто шагом интегрирования).

В формуле неявного метода Эйлера использовано дифференцирование назад: $dV / dt |_{t_n} = (V_n - V_{n-1}) / h_n$, где $h_n = t_n - t_{n-1}$.

Выполним сравнительный анализ явных и неявных методов на примере модельной задачи: при ненулевых начальных условиях $V_0 \neq 0$ и при использовании методов Эйлера с постоянным шагом h . Здесь A – постоянная матрица; V – вектор фазовых переменных.

При алгебраизации явным методом имеем

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{h} = AV_n$$

или

$$V_{n+1} = (E + hA)V_n,$$

где E – единичная матрица. Вектор V_{n+1} можно выразить через вектор начальных условий V_0 .

Обозначим:

$$V_{n+1} = (E + hA)^n V_0;$$

$$B = E + hA$$

и применим преобразование подобия для матрицы B :

$$B = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_{bj}\} T.$$

Здесь T – преобразующая матрица; $\text{diag}\{\lambda_{bj}\}$ – диагональная матрица с собственными значениями λ_{bj} матрицы B на диагонали.

Таким образом,

$$B = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_{bj}^n\} T.$$

Из линейной алгебры известно, что собственные значения матриц, связанных арифметическими операциями, оказываются объединенными такими же преобразованиями. Поэтому следует:

$$\lambda_{bj} = 1 + h\lambda_{aj}.$$

Точное решение модельной задачи $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, следовательно, условием устойчивости процесса численного решения можно считать

$$V_{n+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда последовательно получаем

$$(E + hA)^n V_0 \rightarrow 0,$$

так как $V_0 \neq 0$, то $(E + hA)^n \rightarrow 0$, поскольку $T \neq 0$, то $\lambda_{bj}^n \rightarrow 0$, и условие устойчивости

$$-1 < |1 + h\lambda_{Aj}| < 1.$$

Известно, что для физически устойчивых систем собственные значения матрицы коэффициентов в ММС оказываются отрицательными [31].

Если к тому же все λ_{Aj} действительные величины (характер процессов в ММС с моделью апериодический), то естественно определить постоянные времени физической системы как

$$\tau_j = -1/\lambda_{Aj}$$

и это условие конкретизируется следующим образом:

$$-1 < \left| 1 - \frac{h}{\tau_j} \right| < 1 \quad \text{или} \quad 0 < h < 2\tau_{\min},$$

где τ_{\min} – минимальная постоянная времени. Если использовать явные методы более высокого порядка, то может увеличиться коэффициент перед τ_{\min} , но это принципиально не меняет оценки явных методов.

Если нарушено последнее условие, то происходит потеря устойчивости вычислений, а это означает, что в решении задачи возникают ложные колебания с увеличивающейся от шага к шагу амплитудой и быстрым аварийным остановом ЭВМ вследствие переполнения разрядной сетки. Конечно, ни о какой адекватности решения говорить не приходится.

Для соблюдения применяют те или иные алгоритмы автоматического выбора шага. Отметим, что в сложной модели расчет τ_{\min} для непосредственного выбора шага по t_{\min} лишком трудоемок, кроме того, однократный расчет τ_{\min} мало эффективен, так как в нелинейных моделях τ_{\min} может изменяться от шага к шагу.

Условие накладывает жесткие ограничения на шаг интегрирования. В результате вычислительная эффективность явных методов резко падает с ухудшением обусловленности ММС. Действительно, длительность моделируемого процесса должна быть соизмеримой с временем успокоения системы после возбуждающего воздействия, т. е. соизмерима с максимальной постоянной времени τ_{\max} . Требуемое число шагов (Ш) интегрирования равно

$$\text{Ш} = \frac{T_{\text{инт}}}{h} \approx \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}.$$

Отношение $\mathcal{C} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$ называют разбросом постоянных времени,

или числом обусловленности (\mathcal{C}). Чем больше это число, тем хуже обусловленность. Попытки применения явных методов к любым ММС чаще всего приводят к недопустимо низкой вычислительной эффективности, поскольку в реальных моделях $\mathcal{C} > 10^5$ – обычная ситуация. Поэтому в настоящее время в универсальных программах анализа явные методы решения СОДУ не применяют.

Аналогичный анализ числовой устойчивости неявных методов дает следующие результаты. Вместо имеем

$$V_n = (E - hA)^{-n} V_0,$$

и условие числовой устойчивости принимает вид

$$-1 < |1 + h/\tau_j| < 1$$

при любых $h > 0$.

Следовательно, неявный метод Эйлера обладает так называемой A -устойчивостью.

Применение A -устойчивых методов [25] позволяет существенно уменьшить требуемые числа шагов Ш. В этих методах шаг выбирается автоматически не из условий устойчивости, а только из соображений точности решения.

Выбор порядка метода решения СОДУ довольно прост: во-первых, более высокий порядок обеспечивает более высокую точность, во-вторых, среди неявных разностных методов кроме метода Эйлера A -устойчивы также методы второго порядка и среди них – метод трапеций. Поэтому преобладающее распространение в программах анализа получили методы второго порядка – модификации метода трапеций.

Другими словами, блочно-иерархический подход есть декомпозиционный подход (его можно назвать также диакоптическим), который основан на разбиении сложной задачи большой размерности на последовательно и (или) параллельно решаемые группы задач малой размерности, что существенно сокращает требования к используемым вычислительным ресурсам или время решения задач.

Организация вычислительного процесса в универсальных программах анализа на макроуровне. Граф-схема вычислительного процесса при анализе во временной области на макроуровне представ-

лена на рис. 2.10. Алгоритм отражает решение системы алгебро-дифференциальных уравнений

$$\varphi(dV/dt, V, t) = 0.$$

На каждом шаге численного интегрирования решается система нелинейных алгебраических уравнений

$$F(X) = 0$$

методом Ньютона. На каждой итерации выполняется решение системы линейных алгебраических уравнений

$$Y\Delta X = B.$$

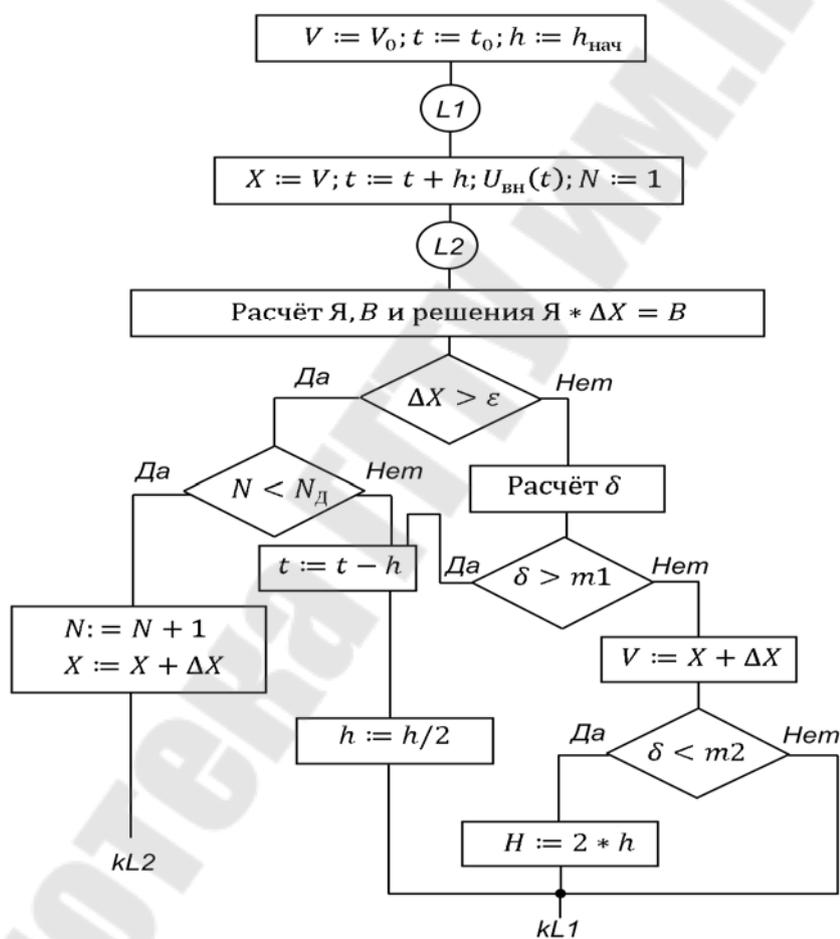


Рис. 2.10. Граф-схема вычислительного процесса анализа на макроуровне

Другие используемые обозначения: V_0 и t_0 – начальные условия; h и $h_{нач}$ – шаг интегрирования и его начальное значение; $U_{вн}(t)$ – вектор внешних воздействий; N и N_d – число ньютоновских итераций

и его максимально допустимое значение; ε – предельно допустимая погрешность решения СЛАУ; δ – погрешность, допущенная на одном шаге интегрирования; $m1$ – максимально допустимое значение погрешности интегрирования на одном шаге; $m2$ – нижняя граница коридора рациональных погрешностей интегрирования.

Из рис. 2.10 ясно, что при $N \geq N_d$ фиксируется несходимость ньютоновских итераций и после дробления шага происходит возврат к интегрированию при тех же начальных для данного шага условиях. При сходимости рассчитывается δ и в зависимости от того, выходит погрешность за пределы диапазона $[m1, m2]$ или нет, шаг изменяется либо сохраняет свое прежнее значение. Параметры $N, m1, m2, \varepsilon, h_{нач}$ задаются по умолчанию и могут настраиваться пользователем.

Матрицу Якоби и вектор правых частей B необходимо рассчитывать по программе, составляемой для каждого нового исследуемого объекта. Составление программы выполняет компилятор, входящий в состав программного комплекса анализа. Общая структура такого комплекса представлена на рис. 2.11 [18].

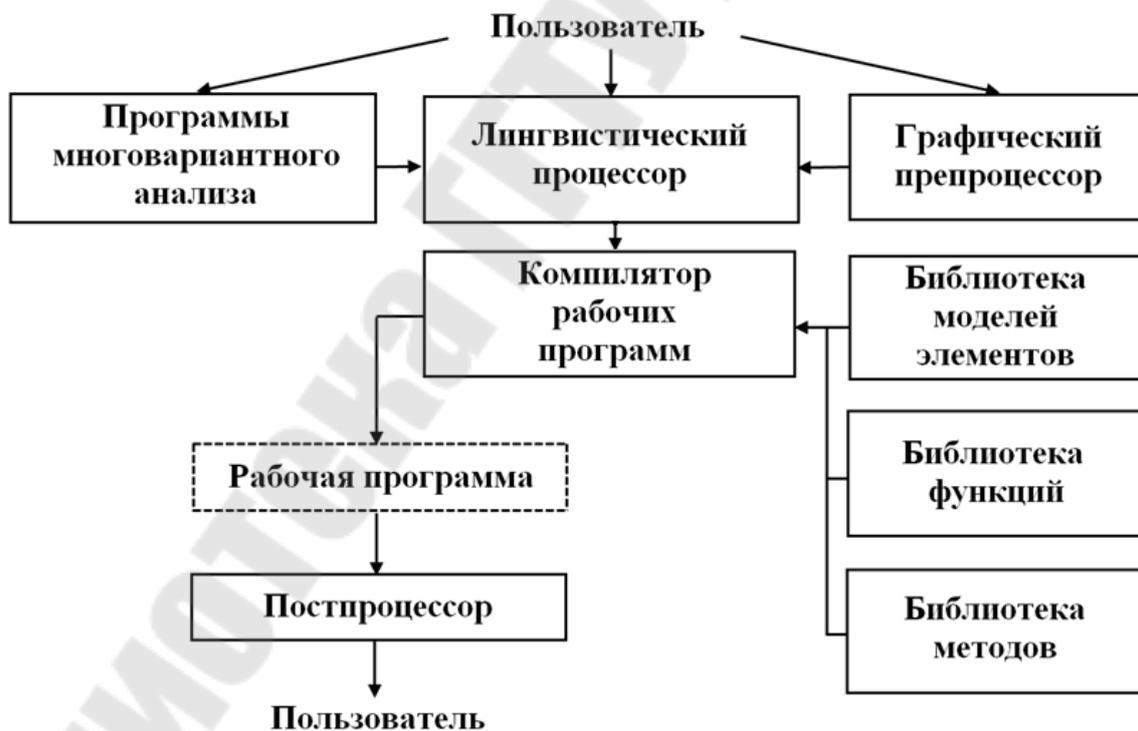


Рис. 2.11. Структура программного комплекса анализа на макроуровне

Исходные данные об объекте можно задавать в графическом виде (в виде эквивалентной схемы) или на входном языке программы анализа. Запись на таком языке обычно представляет собой список компонентов анализируемого объекта с указанием их взаимосвязей. Вводимые данные преобразуются во внутреннее представление с помощью графического и лингвистического препроцессоров, в которых предусмотрена также диагностика нарушений формальных языковых правил. Графическое представление более удобно, особенно для малоопытных пользователей. Задав описание объекта, пользователь может приступить к многовариантному анализу либо по одной из программ такого анализа, либо в интерактивном режиме, изменяя условия моделирования между вариантами с помощью лингвистического препроцессора.

Наиболее сложная часть комплекса – компилятор рабочих программ, именно в нем создаются программы расчета матрицы Якоби и вектора правых частей B , фигурирующих в вычислительном процессе (см. рис. 2.10). Собственно рабочая программа – это и есть программа процесса, показанного на рис. 2.11. Для каждого нового моделируемого объекта составляется своя рабочая программа. При компиляции используются заранее разработанные математические модели типовых компонентов, известные функции для отображения входных воздействий, алгоритмы расчета выходных параметров из соответствующих библиотек.

Постпроцессор представляет результаты анализа в табличной и графической формах: это могут быть зависимости фазовых переменных от времени, значения выходных параметров-функционалов и т. п.

2.3. Математическое моделирование физических и технических систем на микроуровне

2.3.1. Основные принципы математического моделирования физических систем на микроуровне

На микроуровне используют математические модели, описывающие физическое состояние и процессы в сплошных средах. Для моделирования применяют аппарат уравнений математической физики.

Примерами таких уравнений служат дифференциальные уравнения в частных производных – уравнения электродинамики, теплопроводности, упругости, газовой динамики.

Эти уравнения описывают поля электрического потенциала и температуры в полупроводниковых кристаллах интегральных схем, напряженно-деформированное состояние деталей механических конструкций и т. д. (т. е. уравнения описывают процессы в сплошной среде с заданными краевыми условиями).

К типичным фазовым переменным на микроуровне относятся электрические потенциалы, давления, температуры, концентрации частиц плотности токов, механические напряжения и деформации.

Другими словами, на микроуровне используются модели с распределенными параметрами. В качестве независимых переменных в моделях могут фигурировать пространственные переменные x_1 , x_2 , x_3 и время t .

Уравнения, дополненные краевыми условиями, составляют ММ объектов на микроуровне. Анализ таких моделей сводится к решению краевых задач математической физики.

Краевые условия включают в себя начальные условия, характеризующие пространственное распределение зависимых переменных в начальный момент времени, и граничные, задающие значения этих переменных на границах рассматриваемой области в функции времени [15].

На микроуровне объекты математического моделирования рассматриваются как сплошные среды или как системы с распределенными параметрами.

Обычно под моделью сплошной среды понимается некоторое поле, определенное в области геометрического пространства и непрерывно его заполняющее.

Например, в механике имеют дело с полем материала (твердого, жидкого или газообразного), вложенного в это пространство, причем на этом материале обычно рассматриваются и другие поля (например, температурное).

В общем случае рассматривается некоторый процесс в области (возможно, неограниченной) трехмерного евклидова пространства, т. е. на такой области определено физическое поле, которое изменяется со временем.

Соответственно в моделях сплошной среды искомая величина, как правило, непрерывно зависит от нескольких переменных.

Чаще всего такие модели описываются с помощью аппарата дифференциального исчисления, а именно, уравнениями математической физики, которые обычно являются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств объекта на микроуровне:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0, \quad (2.1)$$

где φ – искомая функция (фазовая координата); x_i – пространственные координаты; n – количество пространственных координат; t – время.

Независимыми переменными в этих моделях являются пространственные координаты $x_i, \overline{1, n}$.

Фазовая координата – функция независимых переменных.

Размерность задачи определяется числом пространственных координат: при $n = 1$ – объект одномерный; при $n = 2$ – двумерный; $n = 3$ – трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, модель объекта описывается одним уравнением вида (2.1), если несколько фазовых переменных, т. е. вектор $\overline{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, то системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются функциями времени, задачу анализа объекта на микроуровне называют стационарной. Стационарная задача характеризует статическое состояние объекта или установившийся процесс.

Решение стационарной задачи внутри некоторой сплошной области определяется лишь условиями на границе и не зависит от времени.

Динамические режимы функционирования объекта относятся к нестационарным задачам, и для их оценки требуются исследования переходных процессов.

Нестационарные уравнения в частных производных описывают решение задач с заданными начальными (временными) и граничными условиями. Типичными примерами нестационарных задач могут служить задачи распространения тепла, расчета характеристик свободного колебания, возникшего вследствие некоторого начального возмущения и т. д.

Важно, чтобы задача для уравнения в частных производных была корректно поставлена, т. е. имела бы единственное решение, непрерывно зависящее от начальных и граничных условий (также называемых краевыми условиями) [20].

Начальные условия определяются законом распределения искомой величины внутри области в начальный момент времени и задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

В качестве граничных условий могут быть заданы значения искомой непрерывной функции или ее производной на границах области.

Граничные условия характеризуют взаимодействие объекта с окружающей средой.

Существует несколько стандартных способов задания граничных условий (например, граничные условия первого, второго и третьего рода для тепловых задач).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных (2.1) вместе с краевыми условиями носит название дифференциальной краевой задачи и представляет собой математическую модель объекта с распределенными параметрами.

Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов.

При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструкций, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа теплонапряженного состояния деталей, выбора оптимальных размеров и конфигураций теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризующиеся скоростями и давлениями.

2.3.2. Математические модели на основе фундаментальных законов сохранения

Фундаментальные физические законы сохранения имеют универсальный характер. Все физические явления подчинены одним и тем же законам сохранения. Некоторые законы сохранения верны лишь приблизительно, но иногда оказываются полезными в частном случае.

Формально закон сохранения означает, что существует число, которое остается постоянным вне зависимости от того, когда оно будет подсчитано – в данный момент или через некоторое время.

Общая формулировка закона сохранения: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет вид [31]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\text{div} \bar{J} + G,$$

где ϕ – фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию; \bar{J} – вектор плотности потока фазовой переменной; $\text{div} \bar{J}$ – дивергенция вектора \bar{J} ; G – скорость генерации или уничтожения субстанции.

В трехмерном случае

$$\bar{J} = (J_x, J_y, J_z),$$

$$\text{div} \bar{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}.$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают: масса, энергия, количество движения и др.

Уравнение закона сохранения массы (в гидроаэродинамике – уравнение неразрывности):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div} \bar{J}_\rho,$$

где ρ – плотность массы, кг/м³; $\bar{J}_\rho = \rho \bar{v}$ – вектор плотности потока массы; \bar{v} – вектор скорости переноса массы.

Уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{d(\rho E)}{dt} = -\text{div} \bar{J}_E + G_E,$$

где $E = e + \frac{v^2}{2}$ – полная энергия единицы массы (e – внутренняя энергия единицы массы); ρE – энергия единицы объема, Дж/м³; \bar{J}_ρ – вектор

плотности потока энергии; G_E – скорость генерации или поглощения энергии в единице объема, Дж/(м³ · с).

Уравнение закона сохранения количества движения используют для моделирования движения потока жидкости. Для потока идеальной жидкости (без учета сил трения, обусловленных вязкостью) уравнение имеет вид [28]:

$$\frac{d(p\bar{v})}{dt} = -\bar{v}\operatorname{div}(p\bar{v}) + \operatorname{grad} p,$$

где $p\bar{v}$ – вектор количества движения единицы объема жидкости; p – давление жидкости; $\operatorname{grad} p$ – градиент давления.

В трехмерном случае

$$\operatorname{grad} p = \left(\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz} \right).$$

При учете массовых сил и сил трения уравнение закона сохранения количества движения имеет вид (уравнение Навье–Стокса):

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = G_M - \frac{\left(\operatorname{grad} p - \eta \nabla^2 \bar{v} - \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\bar{v}}{3} \right)}{3},$$

где G_M – напряженность поля массовых сил; η – динамическая вяз-

кость; $\nabla^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \bar{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \bar{j} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \bar{k}$ – оператор Лапласа.

Данные уравнения относятся к классу уравнений в частных производных. Для их решения используются два различных подхода: аналитический и численный.

Аналитический подход способствует получению решения в виде формулы общего характера, однако применимость его ограничена простыми геометрическими формами объекта исследования и не-сложными граничными условиями.

При численном подходе исходная область определения покрывается сеткой узлов, непрерывная математическая модель заменяется дискретной, а затем уже с помощью какого-либо вычислительного алгоритма определяются приближенные числовые значения искомых переменных в узлах расчетной сетки.

Среди численных (сеточных) методов в профессиональных средствах автоматизации инженерного анализа наибольшее распространение получили [17]:

- метод конечных разностей;
- метод конечных элементов;
- методы граничных интегральных уравнений.

Пусть необходимо решить уравнение

$$LV(z) = f(z)$$

с заданными краевыми условиями

$$MV(z) = y(z),$$

где L и M – дифференциальные операторы; $V(z)$ – фазовая переменная; $z = (x_1, x_2, x_3, t)$ – вектор независимых переменных; $f(z)$ и $y(z)$ – заданные функции независимых переменных.

В методе конечных разностей алгебраизация производных по пространственным координатам базируется на аппроксимации производных конечно-разностными выражениями.

При использовании метода нужно выбрать шаги сетки по каждой координате и вид шаблона. Под шаблоном понимают множество узловых точек, значения переменных в которых используются для аппроксимации производной в одной конкретной точке.

Метод конечных элементов основан на аппроксимации не производных, а самого решения $V(z)$. Но поскольку оно не известно, то аппроксимация выполняется выражениями с неопределенными коэффициентами q_i :

$$U(z) = Q^T \varphi(z),$$

где $Q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – вектор-строка неопределенных коэффициентов; $\varphi(z)$ – вектор-столбец координатных (иначе опорных) функций, заданных так, что удовлетворяются граничные условия.

При этом речь идет об аппроксимациях решения в пределах конечных элементов, а с учетом их малых размеров можно говорить об использовании сравнительно простых аппроксимирующих выражений $U(z)$ (например, $\varphi(z)$ – полиномы низких степеней).

В результате подстановки $U(z)$ в исходное дифференциальное уравнение и выполнения операций дифференцирования получаем систему невязок [16]:

$$\nabla(z, Q) = LU(z) - f(z) = L(Q^T \varphi(z)) - f(z),$$

из которой требуется найти вектор Q .

Эту задачу (определение Q) решают одним из следующих методов:

1) метод коллокаций, в котором формируют уравнения с неизвестным вектором Q :

$$L(Q^T \varphi(z_i)) - f(z_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

где n – число неопределенных коэффициентов;

2) метод наименьших квадратов, основанный на минимизации квадратов невязок в n точках или в среднем по рассматриваемой области;

3) метод Галеркина, с помощью которого минимизируются в среднем по области невязки со специально задаваемыми весовыми коэффициентами.

Наибольшее распространение МКЭ получил в САПР машиностроения для анализа прочности объектов. Для этой задачи можно использовать рассмотренный подход, т. е. выполнить алгебраизацию исходного уравнения упругости (уравнения Ламе). Однако более удобным в реализации МКЭ оказался подход, основанный на вариационных принципах механики.

2.4. Математическое моделирование физических и технических систем на метауровне

Математические модели (ММ) на микроуровне учитывали распределенность параметров объекта в пространстве. Переход на макроуровень характеризуется дискретизацией пространства – параметры объекта считаются сосредоточенными в отдельных точках пространства.

Метауровень имеет математические модели, где вводятся еще большие допущения и упрощения, что позволяет получать доступные для исследования математические модели больших объектов и систем.

На метауровне в качестве элементов принимают достаточно сложные совокупности деталей.

Метауровень характеризуется большим разнообразием типов, используемых ММ.

Для многих объектов ММ на метауровне по-прежнему представляются системами ОДУ.

На метауровне рассматривают сложные совокупности деталей как единое целое, что позволяет анализировать объекты на ранних стадиях проектирования при малой степени детализации, т. е. на верхних уровнях детализации структуры или целей проектируемого объекта.

В ОДУ метауровня фигурируют фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям совокупностей деталей, что характерно для теории автоматического управления и теории массового обслуживания [15].

Однако так как в моделях не описываются внутренние фазовые переменные элементы, а фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов, укрупненное представление элементов на метауровне означает получение ММ приемлемой размерности для существенно более сложных объектов, чем размерность ММ на макроуровне.

В ряде предметных областей удастся использовать специфические особенности функционирования объектов для упрощения ММ.

Примером являются электронные устройства цифровой автоматики, в которых возможно применять дискретное представление таких фазовых переменных, как напряжения и токи.

В результате ММ становится системой логических уравнений, описывающих процессы преобразования сигналов. Такие логические модели существенно более экономичны, чем модели электрические, описывающие изменения напряжений и токов как непрерывных функций времени.

Итак, на метауровне используется укрупненное математическое описание объектов.

Одним из наиболее общих подходов к анализу объектов на метауровне является функциональное моделирование, развитое для анализа систем автоматического управления.

В рамках этого подхода принимается ряд упрощающих предположений.

Во-первых, на метауровне, как и на макроуровне, объект представляется в виде совокупности элементов, связанных друг с другом ограниченным числом связей. При этом для каждого элемента связи разделяются на входы и выходы.

Во-вторых, элементы считаются однонаправленными, т. е. такими, в которых входные сигналы могут передаваться к выходам, но сигналы на выходах не могут влиять на состояние входов через внут-

рение связи элемента. Сигналами при этом называют изменения фазовых переменных.

В-третьих, состояние любого выхода не зависит от нагрузки, т. е. от количества и вида элементов, подключенных к этому выходу.

В-четвертых, состояние любой связи характеризуется не двумя, а одной фазовой переменной (типа потенциала или типа потока), что непосредственно вытекает из предыдущего допущения.

Принятие подобных допущений приводит к упрощению математических моделей элементов и методов получения математических моделей систем.

Функциональное моделирование широко используется для моделирования аналоговой радиоэлектронной аппаратуры; систем автоматического управления и регулирования с элементами не только электрической, но и иной природы; энергетических систем, функционирование которых связано с передачей между частями систем энергии, количества движения, давления и т. п.

На метауровне моделируются, например, процесс развития Вселенной, работа локальных и глобальных вычислительных сетей, городских телефонных сетей, энергосистем, транспортных систем [19].

Моделирование на метауровне позволило наглядно подтвердить справедливость физических законов, сформулированных Исааком Ньютоном и Альбертом Эйнштейном. Исследователи из Дарэмского университета (Великобритания) с помощью компьютерной программы имитировали процесс саморазвития нашего мира, начиная с Большого взрыва.

В качестве законов эволюции использовались современные научные представления теории относительности, гравитации и другие теории. В процессе моделирования первоначально однородная Вселенная начала развиваться и, в конце концов, пришла к тому виду, который мы наблюдаем сейчас.

Существует несколько способов построения математических моделей на метауровне, к ним относятся:

- 1) дискретизация времени, т. е. наряду с введением сосредоточенных параметров переменные и параметры модели считаются не зависящими непрерывно от времени;
- 2) потери энергии в объекте не учитываются;
- 3) переход к факторным моделям;
- 4) переход к функциональным моделям, в которых используется только один вид фазовой переменной – сигнал;

5) эквивалентирование – замена больших систем их упрощенными моделями – эквивалентами, созданными на основе специальных критериев, и др.

Переход к факторным моделям может быть выполнен методами идентификации объектов или с использованием методов планирования эксперимента.

Функциональное моделирование является предметом изучения отдельной дисциплины – теории автоматического регулирования.

Эквивалентирование – это преобразование электрической схемы на основе специальных критериев с целью ее упрощения.

Обычно в сложной ЭС выделяется часть схемы сети, для которой выполняется анализ режимов работы, все остальные преобразуются в эквивалентные схемы.

Таким образом, рассматривая режимы работы отдельной ЭС, все соседние энергосистемы представляют их эквивалентами или в большом энергообъединении сохраняются только мощные высоковольтные линии и подстанции, а сети более низкого напряжения представляются эквивалентами.

Итак, математические модели на метауровне – системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы логических уравнений, имитационные модели систем массового обслуживания.

Для моделирования применяют аппарат анализа систем автоматического управления, математическую логику, теорию конечных автоматов, теорию массового обслуживания.

Модели систем массового обслуживания. Достаточно общим подходом к анализу объектов на метауровне является их представление моделями систем массового обслуживания (СМО).

Основные сведения из теории массового обслуживания. Объектами проектирования являются такие сложные системы, как производственные предприятия, транспортные системы, вычислительные системы и сети, автоматизированные системы проектирования и управления и т. п.

В этих приложениях анализ процессов функционирования систем связан с исследованием прохождения через систему потока заявок (иначе называемых требованиями или транзактами).

Разработчиков подобных сложных систем интересуют прежде всего такие параметры, как производительность (пропускная способность) проектируемой системы, продолжительность обслуживания (задержки) заявок в системе, эффективность используемого в системе оборудования.

Заявками могут быть заказы на производство изделий, задачи, решаемые в вычислительной системе, клиенты в банках, грузы, поступающие на транспортировку, и др.

Очевидно, что параметры заявок, поступающих в систему, являются случайными величинами и при проектировании могут быть известны лишь их законы распределения и числовые характеристики этих распределений. Поэтому анализ функционирования на метаяуровне, как правило, носит статистический характер.

В качестве математического аппарата моделирования удобно принять теорию массового обслуживания, а в качестве моделей систем на этом уровне использовать СМО.

Типичными выходными параметрами в СМО являются числовые характеристики таких величин, как время обслуживания заявок в системе, длины очередей заявок на входах, время ожидания обслуживания в очередях, загрузка устройств системы, а также вероятность обслуживания в заданные сроки и т. п.

В простейшем случае СМО представляет собой некоторое средство (устройство), называемое обслуживающий аппарат (ОА) [21], вместе с очередями заявок на входах.

Более сложные СМО состоят из многих взаимосвязанных ОА. Обслуживающие аппараты СМО в совокупности образуют статические объекты СМО, иначе называемые ресурсами.

Например, в вычислительных сетях ресурсы представлены аппаратными и программными средствами.

В СМО кроме статических объектов фигурируют динамические объекты – транзакты. Например, в вычислительных сетях динамическими объектами являются решаемые задачи и запросы на информационные услуги.

Состояние СМО характеризуется состояниями составляющих ее объектов. Например, состояния ОА выражаются булевыми величинами, значения которых интерпретируются как *true* (занято) и *false* (свободно), и длинами очередей на входах ОА, принимающими неотрицательные целочисленные значения.

Переменные, характеризующие состояние СМО, будем называть переменными состояния или фазовыми переменными.

Правило, согласно которому заявки выбирают из очередей на обслуживание, называют дисциплиной обслуживания, а величину, выражающую преимущественное право на обслуживание, – приоритетом.

В беспriorитетных дисциплинах все транзакты имеют одинаковые приоритеты. Среди беспriorитетных дисциплин наиболее популярны дисциплины FIFO (первым пришел – первым обслужен), LIFO (последним пришел – первым обслужен) и со случайным выбором заявок из очередей.

В приоритетных дисциплинах для заявок каждого приоритета на входе ОА выделяется своя очередь.

Заявка из очереди с низким приоритетом поступает на обслуживание, если пусты очереди с более высокими приоритетами.

Различают приоритеты абсолютные, относительные и динамические.

Заявка из очереди с более высоким абсолютным приоритетом, поступая на вход занятого ОА, прерывает уже начатое обслуживание заявки более низкого приоритета.

В случае относительного приоритета прерывания не происходит, более высокоприоритетная заявка ждет окончания уже начатого обслуживания. Динамические приоритеты могут изменяться во время нахождения заявки в СМО.

Модели СМО применимы во всех тех случаях, когда исследуемый объект предназначен для обслуживания многих заявок, поступающих в СМО в нерегулярные моменты времени. Особенностью моделей СМО является наличие в них элементов двух различных типов: обслуживающих аппаратов, иначе называемых ресурсами, и заявок, называемых также транзактами.

Поток заявок характеризуется временами поступления заявок. В общем случае поток можно рассматривать как случайный процесс, задаваемый функцией распределения промежутков времени между моментами поступления двух соседних заявок.

Основной характеристикой потока заявок является интенсивность I , равная среднему числу заявок, поступающих в единицу времени ($I/s = T$ – средний интервал времени между поступлениями двух соседних заявок).

Работа обслуживающего аппарата характеризуется длительностью обслуживания заявок – промежутком времени, необходимым для обслуживания.

В общем случае это случайная величина, характеризуемая некоторым законом распределения.

Математическое ожидание этого закона распределения – среднее время обслуживания заявки.

Законы распределения случайных величин при моделировании СМО могут быть произвольными, но наиболее часто используются распределения экспоненциальное, δ -распределения Эрланга, нормальное. Моделирование последовательности случайных чисел (в СМО это интервалы времени между поступлениями заявок и времени обслуживания), распределенных по заданному закону, выполняется на основе программного датчика чисел с равномерным распределением в интервале от 0 до 1.

Модели СМО должны описывать процессы прохождения заявок через СМО [14].

Состояние системы в каждый момент времени выражается совокупностью переменных (аналогов фазовых переменных), имеющих преимущественно дискретный характер.

Так, состояние обслуживающего аппарата описывается переменной k , которая может принимать одно из двух возможных значений – «свободен», «занят», а также длинами очередей на входах обслуживающего аппарата.

Очередей может быть несколько, если в СМО фигурируют заявки нескольких различных типов (приоритетов). Состояние каждой заявки описывается переменной, значениями которой могут быть «обслуживание», «ожидание».

Результатом анализа СМО должны быть значения выходных параметров (типичными выходными параметрами являются производительность СМО, среднее и максимальное время обслуживания заявок, средние длины очередей и коэффициенты загрузки обслуживающих аппаратов, вероятности обслуживания заявок за время не выше заданного и т. п.).

Исходные данные при моделировании выражаются параметрами обслуживающих аппаратов и параметрами источников заявок.

Обычно модели обслуживающих аппаратов и источников заявок представляют собой законы распределения таких величин, как время обслуживания заявки, интервал времени между появлениями заявок.

Поэтому внутренними и внешними параметрами, значения которых указываются в выходных данных, являются параметры этих законов распределения. Получение исходных данных и обеспечение их достоверности – важная проблема анализа объектов на метауровне.

Математические модели СМО могут быть аналитическими и имитационными.

Аналитическая модель СМО представляет собой совокупность явных зависимостей выходных параметров от параметров внутренних и внешних. Однако получение аналитических моделей оказывается возможным лишь в отдельных случаях сравнительно простых СМО.

Аналитические модели удобны в использовании, поскольку для аналитического моделирования не требуются сколько-нибудь значительные затраты вычислительных ресурсов, часто без постановки специальных вычислительных экспериментов разработчик может оценить характер влияния аргументов на выходные параметры, выявить те или иные общие закономерности в поведении системы.

Но, к сожалению, аналитическое исследование удается реализовать только для частных случаев сравнительно несложных СМО.

Для сложных СМО аналитические модели если и удается получить, то только при принятии упрощающих допущений, ставящих под сомнение адекватность модели.

Поэтому основным подходом к анализу САПР на системном уровне проектирования считают имитационное моделирование, а аналитическое исследование используют при предварительной оценке различных предлагаемых вариантов систем.

Некоторые компоненты СМО характеризуются более чем одним входным и (или) выходным потоками заявок.

В общем случае используются имитационные модели, несмотря на значительные затраты вычислительных ресурсов, связанных с их реализацией.

Имитационная модель СМО представляет собой алгоритм, описывающий изменения переменных состояния на моделируемом отрезке времени.

Предполагается, что изменение состояния любой переменной, называемое событием, происходит мгновенно в некоторый момент времени.

Имитационное моделирование СМО – воспроизведение последовательности событий в системе при вероятностном характере параметров системы. Имитация функционирования системы при совершении большого числа событий позволяет произвести статистическую обработку накопленных результатов и оценить значения выходных параметров.

Алгоритм имитационного моделирования СМО можно кратко описать следующим образом.

Опрашиваются входные источники заявок, в результате определяются моменты появления заявок на входах СМО. Сведения об этих событиях заносятся в список событий, который упорядочен по моментам наступления событий. Далее процесс имитации управляется списком событий. Из этого списка выбирается ближайшее по времени совершения событие и имитируется продвижение в СМО заявки, связанной с этим событием.

Продвижение имитируется до тех пор, пока заявка не окажется задержанной в некотором обслуживающем аппарате. Если при этом заявка входит в состояние обслуживания, то по математической модели обслуживающего аппарата определяется длительность обслуживания и, следовательно, становится предвидимым момент наступления очередного события, связанного с этой заявкой.

Сведения об этом будущем событии заносятся в список событий. Далее аналогичным образом выбирается ближайшее событие из списка событий и производится имитация поведения заявки, связанной с этим событием, и т. п. В процессе прохождения заявок по СМО накапливаются данные, необходимые для последующего расчета выходных параметров.

В настоящее время в системах автоматизации проектирования все более широкое применение находят различные типы мультипроцессорных систем. Особенностью таких систем является наличие нескольких вычислительных процессоров, которые, как правило, имеют общую оперативную память и общие внешние устройства.

Мультипроцессорные системы применяются в том случае, когда целесообразно распараллелить процесс вычисления или использовать одни и те же вычислительные ресурсы разными задачами.

При оценке эффективности организации САПР рассматривается как система массового обслуживания.

Правила выбора одного из возможных направлений движения заявок входят в соответствующие модели компонентов.

Зачастую такие правила относятся к исходным данным (например, выбор направления по вероятности), но в некоторых случаях желательно найти оптимальное управление потоками в узлах разветвления.

Тогда задача моделирования становится более сложной задачей синтеза, характерными примерами являются маршрутизация заявок или синтез расписаний и планов.

ГЛАВА 3. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

3.1. Общие замечания

Рассмотренные в предыдущей главе уравнения механики деформируемого тела вместе с условиями на поверхности образуют законченную формулировку задачи теории упругости в дифференциальной форме. Однако это не единственная возможная формулировка задачи об отыскании напряженно-деформированного состояния тела. Оказывается, задачу определения функций $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ и \bar{u} , характеризующих это состояние, можно свести к определенному интегралу того или иного вида от этих функций, называемому *функционалом*, а сами функции, отражающие действительное состояние тела, найти из условия экстремума этого функционала. Математический аппарат такого подхода изучается в разделе математики, называемом вариационным исчислением. Поэтому положения, формулирующие свойства таких функционалов в теории упругости, получили название вариационных принципов.

В данной главе прежде всего познакомимся с двумя основными принципами – Лагранжа и Кастильяно, а также с некоторыми другими принципами. Укажем на связь этих принципов и вариационной формулировки задачи теории упругости с дифференциальной формой этой задачи.

На основе вариационных принципов и механики твердых деформируемых тел строятся в настоящее время мощные приближенные методы анализа работы деформируемых тел и систем таких тел. Вариационные принципы широко используются в строительной механике.

3.2. Энергия деформируемого тела как функционал

Под функционалом понимается скалярная величина, зависящая от некоторой функции или нескольких функций как от аргументов. Она определяется выбором функций-аргументов из некоторого заданного класса, совместимых с условиями задачи. Функционал можно трактовать как функцию, зависящую от бесконечного числа аргументов. Эти аргументы оказываются заданными, как только выбраны функции-аргументы.

В разделе математики, называемом вариационное исчисление, изучаются условия, при которых функционалы обладают свойством локальной экстремальности (стационарности), т. е. при произвольном бесконечно малом изменении функций-аргументов значение функционала не изменяется. Такие функции-аргументы, при которых функционал стационарен, называются *экстремальями данного функционала* [19].

Напомним сначала некоторые классические задачи об отыскании экстремалей функционалов (рис. 3.1).

На рис. 3.1, *а* заштрихована площадь A , которую охватывает кривая $y(x)$, имеющая фиксированную длину L между точками B и C .

Функционал

$$A = \int_B^C y(x) dx \quad (3.1)$$

имеет максимум, если кривая $y(x)$ очерчена по окружности, т. е. из всей кривой длины L , проходящей через точки B и C , экстремалью является часть окружности длины L . Решение этой задачи было известно еще в древности.

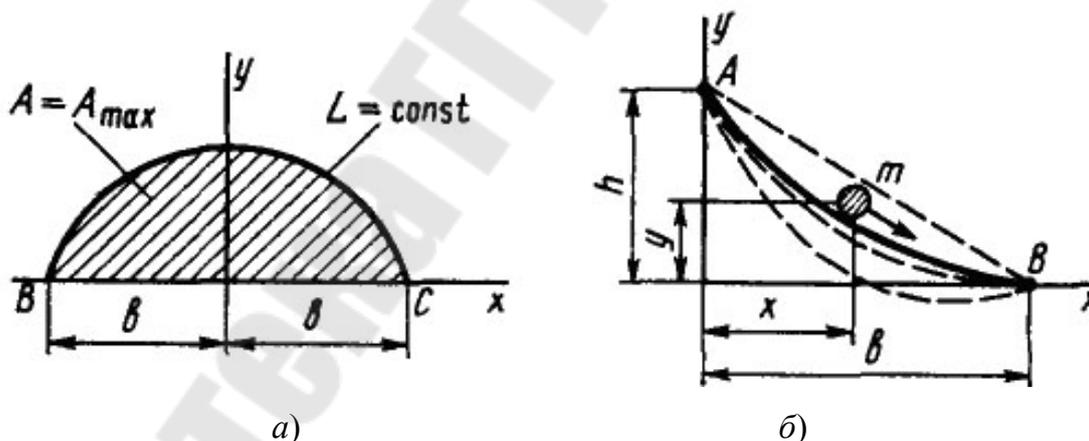


Рис. 3.1. Классические задачи об отыскании функционала

На рис. 3.1, *б* изображена схема другой известной задачи о так называемой брахистохроне – кривой $y(x)$, обеспечивающей кратчайшее время соскальзывания под действием силы тяжести точечной массы m (без трения) из точки A в точку B . Вертикальная скорость массы $v = \sqrt{2g(h - y)}$, поэтому ее горизонтальная скорость будет

$dx/dt = v \cos \alpha = \sqrt{2g(h-y)}/\sqrt{1+y'^2}$. Отсюда найдем dt и время движения $T = \int dt$ в виде функционала, зависящего от кривой $y(x)$:

$$T = \int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}} dx. \quad (3.2)$$

Эта задача, поставленная еще Г. Галилеем, была решена различными методами Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и др. Экстремалью в данном случае является циклоида, образованная качением круга по горизонтальной прямой $y = h$. Радиус этого круга зависит от отношения b/h . Интересно, что при $b/h > \pi$ и кривая наискорейшего спуска происходит частично несколько ниже оси x (нижняя пунктирная линия на рис. 3.1, б).

Обратимся теперь к функционалу, имеющему важное значение в механике твердого деформируемого тела, – функционалу, выражающему полную потенциальную энергию деформированного тела и действующей на него нагрузки (рис. 3.2, б). Полная энергия \mathcal{E} состоит из потенциальной энергии деформации тела (потенциал внутренних сил) U и энергии внешних сил (потенциал внешних сил) Π :

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (3.3)$$

Условно будем считать, что в начальном недеформированном состоянии $\mathcal{E}_0 = 0$ (рис. 3.2, а). Следовательно, полная энергия \mathcal{E} представляет собой изменение энергии внутренних и внешних сил при переходе тела из начального в деформированное состояние.

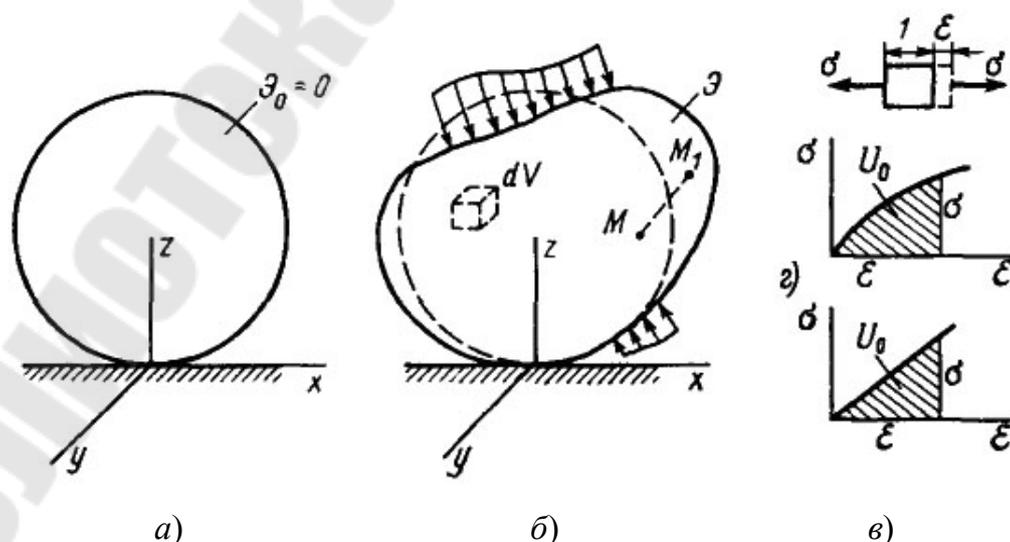


Рис. 3.2. Нахождение энергии функционала

Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при переводе системы из рассматриваемого состояния в начальное, нулевое, состояние, где принято $\mathcal{E}_0 = 0$. Поэтому при составлении выражения (3.3) будем вычислять энергию как работу внутренних сил упругости (для U) и внешних сил (для Π) при мысленном переводе тела из деформированного в начальное недеформированное состояние.

Составим вначале выражение для потенциала внутренних сил U . Так как деформации по объему тела распределены неравномерно, то и энергия деформации в объеме тела распределена также неравномерно. Введем понятие плотности энергии деформации U_0 или удельной потенциальной энергии деформации согласно выражению

$$U_0 = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}. \quad (3.4)$$

Оно показывает, что U_0 – это предел отношения энергии ΔU , накопленной в объеме ΔV , к объему ΔV , стремящемуся к нулю. Для однородного деформированного состояния U_0 выражает энергию, накопленную в единице объема материала.

В случае линейного напряженного состояния плотность энергии деформации выражается площадью диаграммы деформирования материала (рис. 3.2, ν – нелинейно-упругий материал, рис. 3.2, ε – линейно-упругий). В последнем случае $U_0 = 0,5\sigma\varepsilon$. Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (3.5)$$

или в сокращенной форме, используя обозначения векторов $\vec{\sigma}$ и $\vec{\varepsilon}$ [31], [18], запишем (3.5) в виде

$$U_0 = \frac{1}{2} \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Во всем объеме V энергию деформации U найдем путем интегрирования по объему

$$U = \iiint_V U_0 dV. \quad (3.7)$$

Подчеркнем, что при вычислении U_0 как работы следует вычислять работу именно внутренних напряжений σ' в отличие от напряже-

ний σ , приложенных к граням кубика материала и являющихся для него внешним воздействием (рис. 3.3). На рисунке показано, что материал элемента условно удален и заменен внутренними («стягивающими») напряжениями σ' . При уменьшении деформации от ε до нуля напряжения σ' совершает положительную работу, равную U_0 . Вообще, упругие силы, стремясь восстановить первоначальную форму деформированного тела, будут давать положительную энергию деформации (3.7) и создавать положительный вклад в общий баланс энергии Э.

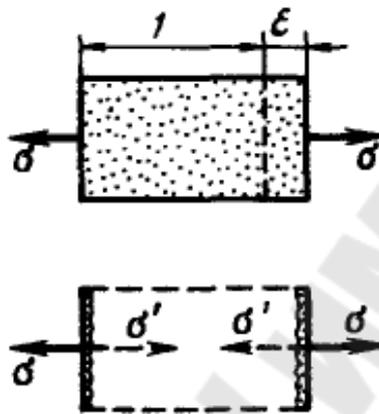


Рис. 3.3. Замена материала элемента внутренними напряжениями

Теперь составим выражение для потенциала внешних сил Π . Будем считать, что значение этих сил не зависит от перемещения точки приложения силы (весовая нагрузка, давление жидкости или газа и т. п.). На рис. 3.4 показаны элементарные поверхностные силы $p_x dS$, $p_y dS$ и $p_z dS$, действующие на площадку dS в деформированном состоянии.

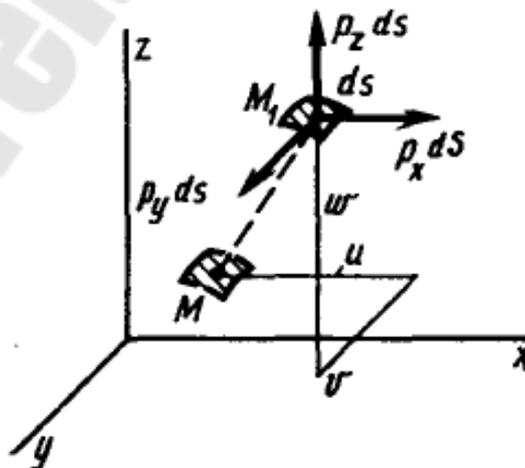


Рис. 3.4. Элементарные поверхностные силы

При переводе тела в недеформированное состояние точка M_1 перейдет в положение M и указанные силы совершат отрицательную работу на перемещениях, соответственно u , v и w . Следовательно, $d\Pi = -(p_x u + p_y v + p_z w) dS$. Аналогично, для объемной нагрузки получим $d\Pi = -(Xu + Yv + Zw) dV$. Интегрируя по поверхности тела S и по объему V , найдем потенциал внешних сил в виде

$$\Pi = -\iint_S (p_x u + p_y v + p_z w) dS - \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV \quad (3.8)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\Pi = -\iint_S \vec{p}^T \vec{u} ds - \iiint_V \vec{g}^T \vec{u} dV. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что величина энергии U , также как и Π , вполне определяется заданием функций перемещений u , v и w . Действительно, используя закон [12] и уравнения Коши [17], выражению (3.6) для U_0 можно придать вид

$$U_0 = \frac{1}{2} (D\bar{\varepsilon})^T \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T D\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (A^T u^T D(A^T \vec{u})). \quad (3.10)$$

Следовательно, полная энергия тела (3.3) является функционалом, зависящим от выбора трех функций-аргументов и $\vec{u} = [u, v, w]^T$, т. е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$, или в развернутой форме

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_V \left[(A^T \vec{u})^T D(A^T \vec{u}) \right] dV - \iint_S \vec{p}^T \vec{u} dS - \iiint_V \vec{g}^T \vec{u} dV, \quad (3.11)$$

где D – матрица закона Гука и A – матрица оператора дифференцирования.

Приведем пример составления функционала (3.11). Составим выражение полной энергии \mathcal{E} для балки (рис. 3.5), считая, как это делается обычно в сопротивлении материалов, справедливой гипотезу плоских сечений и пренебрегая влиянием на ее деформации напряжений σ_y , σ_x и касательных напряжений τ . Таким образом, при определении энергии упругой деформации U будем учитывать только напряжения σ_z . В этом случае $U_0 = 0,5\sigma_z \varepsilon_z = 0,5E\varepsilon_z^2$. Перемещение w точки сечения за счет его поворота на угол v' будет $w = -v'y$; следовательно, $\varepsilon_z = \partial w / \partial z = -v''y$, а $U_0 = 0,5E(v'')^2 y^2$.

Здесь и далее штрихом отмечаем дифференцирование по z . Интегрируя по объему балки, найдем

$$U = \iiint_V 0,5E(v'')^2 y^2 dx dy dz = \int_0^l 0,5EJ_x (v'')^2 dz. \quad (3.12)$$

В выражении для U интеграл $\iint y^2 dx dy$, вычисляемый по площади сечения A , заменен на момент инерции этого сечения J_x .

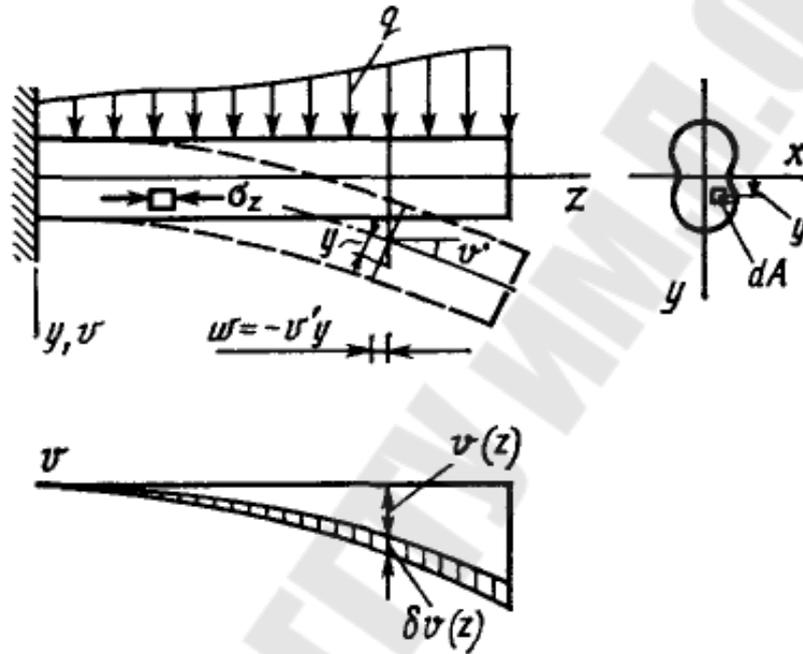


Рис. 3.5. Балка

Потенциал нагрузки q найдем в виде $\Pi = -\int_0^l qvdz$. Окончательно функционал полной энергии (3.12) получит вид

$$\Theta = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x (v'')^2 dz - \int_0^l qvdz. \quad (3.13)$$

3.3. Вариационный принцип Лагранжа

Применим к деформированному телу принцип возможных перемещений Лагранжа. Он выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Согласно этому принципу, если \vec{u} – истинные перемещения точек тела, при которых имеет место равно-

весие упомянутых систем сил, то работа этих сил на произвольном бесконечно малом изменении перемещений $\delta\vec{u}^T = [\delta u, \delta v, \delta w]$, допускаемом связями тела, должна быть равна нулю. Бесконечно малые функции $\delta u, \delta v, \delta w$ называются вариациями функций u, v, w . Функция прогибов $v = v(z)$ и ее вариация $\delta v = \delta v(z)$ показаны на рис. 3.5 в нижней части.

Итак,

$$\Delta A = \Delta A^{\text{внутр}} + \Delta A^{\text{внеш}} = 0. \quad (3.14)$$

Но приращения работы внутренних $A^{\text{внутр}}$ и внешних сил $A^{\text{внеш}}$ с точностью до знака представляют приращения соответствующих потенциалов ΔU и $\Delta\Pi$. Поэтому $\Delta A = -\Delta U - \Delta\Pi = -\Delta\mathcal{E}$, откуда следует, что для истинных перемещений \vec{u} изменение полной энергии $\Delta\mathcal{E}$, вызванное вариациями $\delta\vec{u}$, должно быть равно нулю:

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(\vec{u} + \delta\vec{u}) - \mathcal{E}(\vec{u}) = 0. \quad (3.15)$$

Левая часть (3.15) в общем случае сложно зависит от приращения перемещений $\delta\vec{u}$, поэтому представим ее в виде суммы, в которой каждое слагаемое зависит от соответствующей степени $\delta\vec{u}$:

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_1(\delta\vec{u}) + \Delta\mathcal{E}_2(\delta\vec{u}^2) + \dots = 0. \quad (3.16)$$

Здесь первое слагаемое, линейно зависящее от $\delta\vec{u}$, называется первой вариацией функционала $\Delta\mathcal{E}_1(\delta\vec{u}) = \delta\mathcal{E}$, второе слагаемое есть вторая вариация $\delta^2\mathcal{E}$ и т. д. Устремляя в (3.16) $\delta\vec{u}$ к нулю и отбрасывая все слагаемые, кроме первого, как бесконечно малые более высокого порядка малости, приходим к равенству

$$\delta\mathcal{E} = 0. \quad (3.17)$$

Из курса математики известно, что равенство нулю первой вариации функционала (3.17) является необходимым условием локального экстремума этого функционала. Оно выражает тот факт, что в локальной зоне изменения функций-аргументов функционал с точностью до бесконечно малых первого порядка сохраняет неизменное (стационарное) значение.

Существует теорема Лежен–Дирихле, согласно которой:

– при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} > 0$ полная энергия деформированного тела минимальна и его равновесие устойчиво;

– при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} < 0$ эта энергия максимальна и равновесие системы внутренних и внешних сил неустойчиво;

– при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} = 0$ энергия стационарна, а тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Принцип вариации перемещений (принцип Лагранжа) может быть сформулирован так: для истинных перемещений u, v, w функционал полной энергии деформированного тела имеет экстремальное (стационарное) значение, т. е. его первая вариация равна нулю (3.17).

Таким образом, при заданной нагрузке на тело надо найти такие функции u, v, w , при которых выполняется условие $\delta\mathcal{E} = 0$. Тем самым будут найдены истинные перемещения тела и решена задача теории упругости (в перемещениях). В этом и состоит вариационная формулировка задачи теории упругости с помощью принципа Лагранжа. Механически оно в интегральной форме выражает условия равновесия деформированного тела.

3.4. Связь между вариационной и дифференциальной формулировками задач теории упругости

Эта связь в математике выражается в том, что каждой вариационной формулировке типа $\delta\mathcal{E}(\bar{u}) = 0$ может быть поставлена в соответствие формулировка в форме дифференциальных уравнений относительно разыскиваемых функций \bar{u} , называемых уравнениями Эйлера для функционала \mathcal{E} . Покажем эту связь и процесс получения уравнений Эйлера на простом примере.

Запишем функционал полной энергии для балки, лежащей на винклеровом основании с коэффициентом жесткости c (рис. 3.6):

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} (EJ(v'')^2 + cv^2) - qv \right] dz - [Qv]_0^l + [Mv']_0^l. \quad (3.18)$$

Здесь в выражении для энергии обычной балки (3.13) введены члены, учитывающие энергию деформации упругого основания с плотностью $0,5rv = 0,5cv^2$ и энергию концевых нагрузок при $z = 0$ и $z = l$. Запись $[Qv]_0^l$ означает $Q_l v_l - Q_0 v_0$.

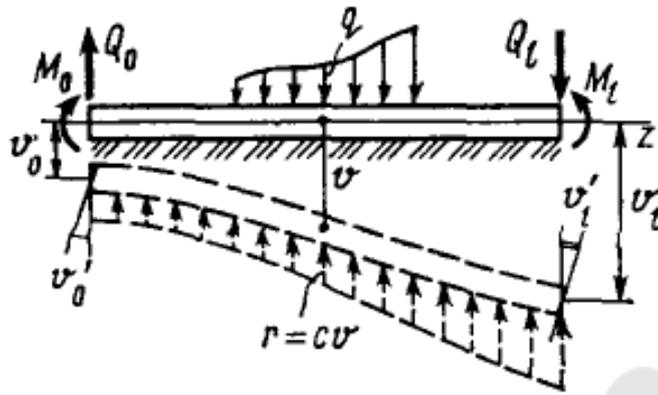


Рис. 3.6. Балка, лежащая на винклеровом основании

Функционал (3.18) относится к виду

$$\mathcal{E} = \int_0^l F(v, v', v'') dz + [Av]_0^l + [Bv']_0^l. \quad (3.19)$$

Операция варьирования аналогична операции дифференцирования. При получении вариации $\delta\mathcal{E}$ будем рассматривать выражение F как сложную функцию от v . В результате получим

$$\delta\mathcal{E} = \int_0^l F'_v \delta v dz + \int_0^l F'_{v'} \delta v' dz + \int_0^l F'_{v''} \delta v'' dz + [A\delta v]_0^l + [B\delta v']_0^l. \quad (3.20)$$

Здесь штрихом при F отмечается частная производная выражения $F(v, v', v'')$ по аргументу, указанному в нижнем индексе. Условием $\delta\mathcal{E} = 0$ в форме (3.20) пользоваться для определения $v = v(z)$ неудобно, так как оно содержит не только произвольную функцию δv , но и ее производные. Поэтому преобразуем (3.20) так, чтобы из-под интегралов были исключены производные $\delta v'$ и $\delta v''$. Для этого интегрируем второе слагаемое по частям один раз, а третье – два раза. Имеем:

$$\delta\mathcal{E} = \int_0^l \left[F'_v - \frac{d}{dz}(F'_{v'}) + \frac{d^2}{dz^2}(F'_{v''}) \right] \delta v dz + \left[A - \frac{d}{dz}(F'_{v''}) \right] \delta v \Big|_0^l + [B + F'_{v''}] \delta v' \Big|_0^l. \quad (3.21)$$

Теперь на условия $\delta\mathcal{E} = 0$ ввиду произвольности функции δv следует равенство нулю выражения в прямых скобках под интегралом, а именно:

$$F'_v - \frac{d}{dz}(F'_{v'}) + \frac{d^2}{dz^2}(F'_{v''}) = 0. \quad (3.22)$$

Кроме того, если при $Z = 0, l$ перемещения δv и $\delta v'$ также произвольны, то должны быть равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} A - \frac{d}{dz}(F'_{v''}) &= 0; \\ B + F'_{v''} &= 0; \end{aligned} \right\} z = 0, l. \quad (3.23)$$

Равенство (3.22) и является дифференциальным уравнением Эйлера для функционала (3.19), а (3.23) – его граничными условиями.

Применительно к балке на упругом основании (3.18) имеем $F = 0,5[EJ(v'')^2 + cv^2] - qv$; $A = -Q$; $B = M$. Тогда $F'_v = -q + cv$; $F'_{v'} = 0$; $F'_{v''} = -q + cv$; $\frac{d^2}{dz^2}(F'_{v''}) = (EJv'')''$ и уравнение (3.22) и условия (3.23) принимают вид:

$$(EJv'')'' + cv = q; \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} (EJv'')' &= -Q; \\ EJv'' &= -M; \end{aligned} \right\} z = 0, l. \quad (3.25)$$

Таким образом, вариационное уравнение $\delta \mathcal{E} = 0$, в интегральной форме выражающее условия равновесия деформированного тела, эквивалентно и включает в себя соответствующие дифференциальные уравнения равновесия теории упругости вместе с условиями равновесия на поверхности тела (граничными условиями). Указанные дифференциальные уравнения служат уравнениями Эйлера функционала \mathcal{E} . При этом если последний будет выражен только через три функции перемещений $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$, то следуя по пути, показанному в примере, мы придем к уравнениям Эйлера в форме уравнений Ламе [18], т. е. уравнений равновесия, записанных в перемещениях. Отметим, что в этом случае при исключении из уравнения $\delta \mathcal{E} = 0$ частных производных функций δu , δv , δw потребуются операция, аналогичная интегрированию по частям – переход от интеграла по объему к интегралу по поверхности по формуле Грина. На этих преобразованиях останавливаться не будем.

Вариационная формулировка задачи теории упругости используется главным образом в двух случаях. В первом на основе уравнения $\delta \mathcal{E} = 0$ строятся численные методы решения этой задачи (метод Ритца, метод конечных элементов и т. п.). Все эти методы относят к классу прямых методов решения задач теории упругости, не требующих в явной форме использования дифференциальных уравнений.

Второй характерный случай применения вариационного подхода – это получение дифференциальных уравнений и граничных условий рассматриваемой задачи как уравнений Эйлера соответствующего функционала. Такой путь оказывается оправданным для тел сложной формы и структуры (например, многослойные оболочки и др.), а также при переходе от одной системы координат к другой (от декартовой системы к полярной, криволинейной и другим системам).

3.5. Метод Ритца

Условие стационарности функционала $\delta\mathcal{E} = 0$ формулирует континуальную вариационную задачу с бесконечным числом компонент перемещений, определяющих разыскиваемые функции-экстремали. Идея метода, предложенного еще в начале XX века немецким ученым Ритцем, состоит в том, чтобы от континуальной формулировки перейти к дискретной, когда функционал $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$ заменяется функцией $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), зависящей от конечного числа аргументов α_i . После этого задача определения экстремалей функционала перейдет в стандартную задачу исследования указанной функции дискретного числа аргументов на экстремум. Другими словами, от континуальной задачи с бесконечным числом степеней свободы в отношении формы деформирования тела мы переходим к задаче для системы с конечным числом степеней свободы.

В общем случае трехмерного тела для перемещений u, v, w зададимся выражением в виде суммы:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \begin{bmatrix} f_{ui}(x, y, z) \\ f_{vi}(x, y, z) \\ f_{wi}(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – неизвестные числа (обобщенные перемещения), подлежащие определению: f_1, \dots, f_n – базисные функции, которыми мы задаемся так, чтобы они удовлетворяли условиям закрепления тела.

Подставляя (3.26) в функционал (3.11) для линейно деформируемых систем, после вычисления определенных интегралов от функций f_i и их производных получим его в виде квадратичной формы

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \alpha_j \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_{iP} \alpha_i. \quad (3.27)$$

Если тело является нелинейно деформируемым, то функционал \mathcal{E} от α_i будет зависеть более сложно, чем квадратичная форма (3.27), и система уравнений (3.28) будет нелинейной относительно α_i . Проиллюстрируем вышеизложенное характерным примером.

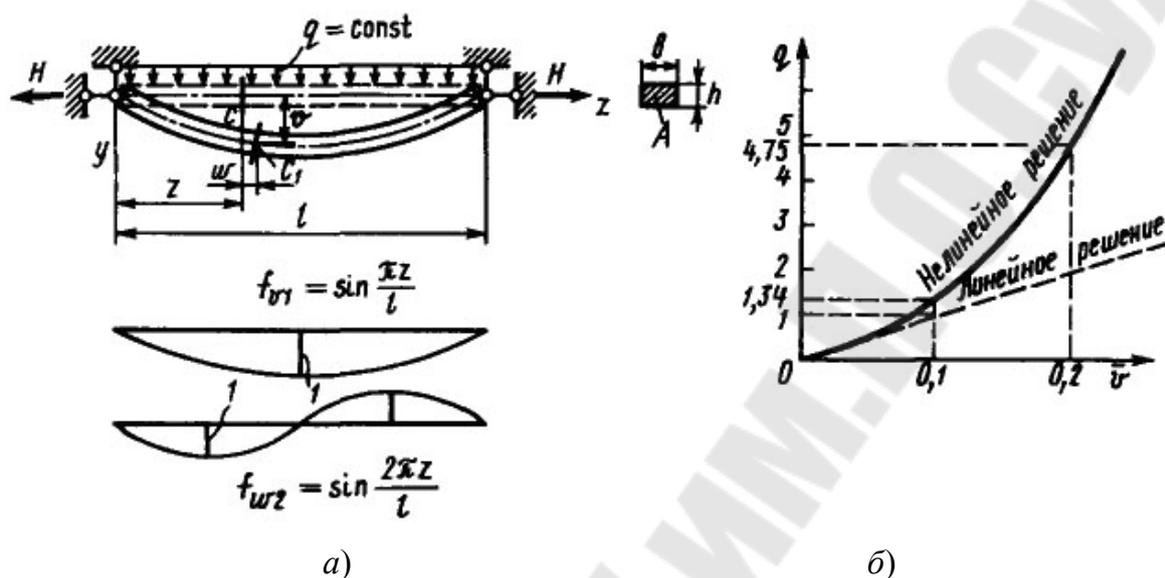


Рис. 3.7. Балка, имеющая на концах шарнирно-неподвижные опоры

На рис. 3.7, а показана балка, имеющая на концах шарнирно неподвижные опоры. При ее искривлении длина оси увеличивается и балка работает как на изгиб, так и на растяжение, а в горизонтальных связях возникают растягивающие силы H . Получим зависимость между нагрузкой q и прогибами v такой системы.

На осевые продольные деформации будет ε_z влиять не только продольное перемещение ω , но и поперечное перемещение v . По аналогии с этими уравнениями имеет зависимость для осевой деформации $\varepsilon_z = \omega' + 0,5(v')^2$, а также для продольной силы $N = \varepsilon_z EA = EA[\omega' + 0,5(v')^2]$. Как видим, данная система относится к разряду геометрических нелинейных систем. Плотность энергии деформации растяжения балки (на единицу длины) будет

$$U_0^{\text{раст}} = 0,5 N \varepsilon_z = 0,5 EA [\omega' + 0,5(v')^2]^2.$$

Функционал полной энергии с учетом деформации изгиба и растяжения получит вид

$$\mathfrak{E} = \int_0^l U_0^{\text{изг}} dz + \int_0^l U_0^{\text{раст}} dz + \int_0^l qv dz$$

или

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(v'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l 0,5EA[\omega' + 0,5(v')^2]^2 dz + \int_0^l qv dz.$$

Применим метод Ритца, приняв в качестве базисных функций кривые, изображенные на рис. 3.7, а (внизу). Приблизительно зададим перемещения

$$v = a_1 \sin \frac{\pi z}{l}; \quad \omega = a_2 \sin \frac{2\pi z}{l}.$$

Подставив эти перемещения в выражения для энергии \mathfrak{E} и проведя интегрирование, получим такую функцию аргументов a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(v, \omega) = & a_1^2 \pi^4 EJ / (4l^3) + \\ & + EA[a_2^2 \pi^2 / l + a_2 a_1^2 \pi^3 / (8l^2) + a_1^4 3\pi^4 / (64l^3)] - a_1 2ql / \pi. \end{aligned}$$

Уравнения [22] $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_1} = 0$ и $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_2} = 0$ оказываются нелинейными и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} a_1 + \frac{\pi^3 EA}{4l^2} a_1 a_2 + \frac{3\pi^4 EA}{16l^3} a_1^3 - \frac{2ql}{\pi} &= 0; \\ \frac{2\pi^2 EA}{l} a_2 + \frac{\pi^3 EA}{8l^2} a_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выразив a_2 через a_1 из второго уравнения $a_2 = \frac{-\pi a_1^2}{16l}$ и подставив его в первое уравнение, получим искомую зависимость

$$\bar{q} = \beta \bar{v} + (11/32) \bar{v}^3,$$

где $\bar{q} = \frac{4ql}{10^3 \pi^5 EA}$ – безразмерная нагрузка; $\bar{v} = \frac{a_1}{l} = \frac{v_{\max}}{l}$ – безразмерный (относительный) прогиб в середине пролета; $\beta = \frac{EJ}{l^2 EA}$.

На рис. 3.7 сплошной линией показана кривая для балки прямоугольного сечения при $\frac{h}{l} = 0,1$, для которой $\beta = \frac{h^2}{l^2}$. Там же пунктиром изображен результат линейного решения, когда учитывается только деформация изгиба. Как видим, при прогибе, имеющем порядок высоты сечения балки $v_{\max} \sim h$, т. е. $\bar{v} \sim 0,1$ и более, неучет нелинейной работы системы приводит к существенным погрешностям. Этот вывод в еще большей мере характерен также для гибких пластин и оболочек.

Отметим, что рассмотренные выше основы метода Ритца имеют в основном принципиальное значение. В то же время технически он реализуется в большинстве случаев в одной из форм так называемого метода конечных элементов (МКЭ). Преимущества последнего состоят в том, что окончательные разрешающие уравнения Ритца (3.28) удается составлять, минуя операцию явного получения выражения полной энергии системы и его дифференцирования.

3.6. Принцип Кастильяно

В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние деформированного тела характеризуется функциями перемещений, в принципе Кастильяно состояние тела характеризуется функциями напряжений $\vec{\sigma} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T$, которые заведомо удовлетворяют условиям равновесия тела при данной внешней нагрузке $\vec{p}_{S_1} = [p_x p_y p_z]^T$ на поверхности S_1 и заданным перемещениям $\vec{u} = \vec{u}_{S_1}$ на поверхности тела S_2 (рис. 3.8, а).

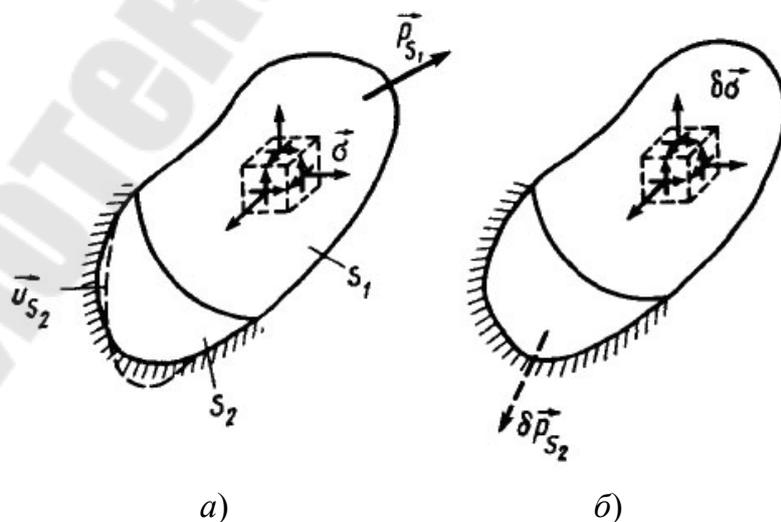


Рис. 3.8. Деформируемое тело

Указанные напряжения называют *статически возможными или равновесными системами напряжений*. Но в каждой задаче теории упругости таких систем напряжения существуют бесконечно много, поскольку эта задача статически неопределима. Действительно, в три уравнения равновесия (2.3) входят шесть неизвестных функций $\vec{\sigma}_1$, поэтому число функций $\vec{\sigma}$, удовлетворяющих этим уравнениям и условиям на поверхности, бесконечно велико.

Принцип Кастильяно из всех систем статически возможных напряжений выделяет такие, которые обеспечивают не только равновесие, но и совместимость деформаций тела и, таким образом, являются искомыми единственным решением задачи теории упругости.

Для его формулировки рассмотрим два состояния тела: первое – с истинными напряжениями $\vec{\sigma}$ и второе – с напряжениями $\vec{\sigma} + \delta\vec{\sigma}$. Те и другие напряжения статически возможные и, следовательно, уравнивают внешнюю нагрузку \vec{p}_{S_1} . Представив себе разность этих состояний, приходим к выводу о том, что напряжение $\delta\vec{\sigma}$ отвечает за отсутствие нагрузки на поверхности S_1 , т. е. система напряжений $\delta\vec{\sigma}$ должна быть самоуравновешенной.

На рис. 3.8, б показано рассматриваемое тело, испытывающее самоуравновешенные напряжения $\delta\vec{\sigma} = [\delta\sigma_x \dots \delta\tau_{zx}]^T$, являющиеся вариациями истинных напряжений $\vec{\sigma}$. На поверхности S_2 как реактивные усилия в этом состоянии возникают поверхностные нагрузки $\delta\vec{p}_{S_2}$. Поскольку эта система напряжений и сил равновесна, ее работа δA на возможных перемещениях равна нулю.

В деформируемом теле в качестве возможных могут быть приняты любые малые перемещения и пропорциональные им деформации, которые не нарушают его сплошности внутри тела и непрерывной связи с опорными закреплениями. Если перемещения и деформации, отвечающие истинным напряжениям, удовлетворяют этим условиям, то они могут быть приняты в качестве возможных для напряжений $\delta\vec{\sigma}$ и нагрузок $\delta\vec{p}_{S_2}$. Запишем как условие совместимости деформаций равенство нулю работы напряжений $\delta\vec{\sigma}$ и нагрузок $\delta\vec{p}_{S_2}$ на истинных деформациях $\vec{\varepsilon}$ и перемещениях \vec{u}_{S_1} :

$$\delta A = -\iiint_V \vec{\varepsilon}^T \delta\vec{\sigma} dx dy dz + \iint_{S_2} \vec{u}_{S_2}^T \delta\vec{p}_{S_2} dS_2 = 0. \quad (3.32)$$

Под знаком тройного интеграла здесь стоит вариация плотности дополнительной энергии деформации $U_0^{\text{доп}}$. На рис. 3.9, а это показано для случая одноосного напряженного состояния и нелинейно-упругого материала. Произведение $\varepsilon \delta \sigma = \delta U_0^{\text{доп}}$, где $U_0^{\text{доп}} = \sigma \varepsilon - U_0$, выражается площадью диаграммы деформирования материала, заштрихованной на рис. 3.9. В общем случае

$$U_0^{\text{доп}} + U_0 = \overline{\varepsilon^T \sigma}.$$

Второе слагаемое (3.32) равно вариации потенциала сил $\overline{p_{S_1}}$ на поверхности S_2 (с обратным знаком). Этот потенциал обозначим $\tilde{\Pi}$. Умножая (3.32) на -1 , левую часть этого равенства запишем в виде

$$\delta \mathcal{E}_K = \delta(U^{\text{доп}} + \tilde{\Pi}) = 0, \quad (3.33)$$

где $U^{\text{доп}} = -\iiint_V U^{\text{доп}}$; $\tilde{\Pi} = -\iint_{S_2} \overline{u_{S_2}^T p_{S_2}} dS_2$; $\mathcal{E}_K = U^{\text{доп}} + \tilde{\Pi}$.

Величина \mathcal{E}_K , равная сумме дополнительной энергии деформации тела и потенциала реактивных сил на поверхности S_2 , испытывающей принудительно перемещения, называется *функционалом Кастильяно* или *дополнительной энергией деформируемого тела*.

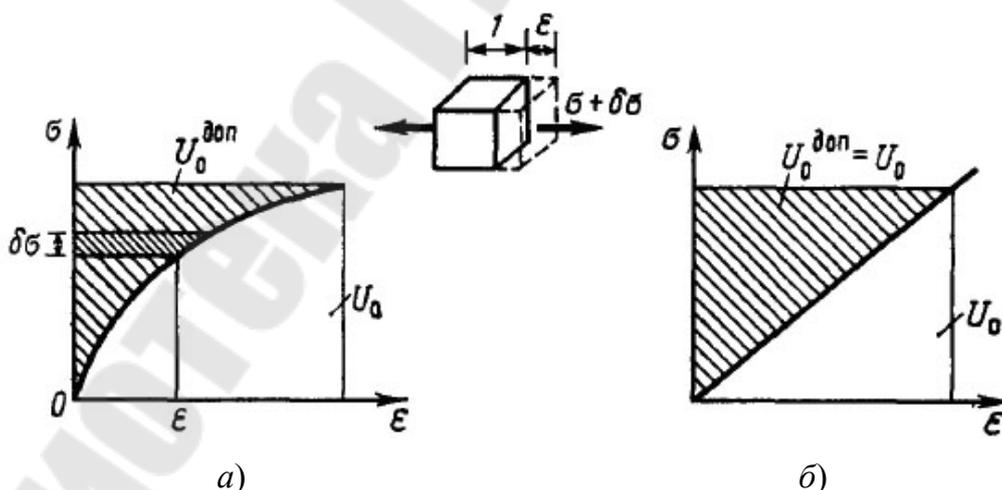


Рис. 3.9. Диаграмма деформирования материала

Равенство (3.33) выражает принцип Кастильяно: истинные напряжения сообщают дополнительной энергии тела стационарное значение.

В частном случае линейно-упругого тела и отсутствия заданных смещений $\overline{u_{S_2}} = 0$, когда $\tilde{\Pi} = 0$, имеет $U^{\text{доп}} = U$ (рис. 3.9, б) и принцип Кастильяно получает вид

$$\delta U = 0. \quad (3.34)$$

Равенство (3.34) показывает, что для истинных напряжений (или внутренних усилий) линейно-упругая система имеет потенциальную энергию деформации стационарной (для устойчивого равновесия минимальной). Поскольку энергия U численно равна работе внутренних сил, которая, в свою очередь, равна работе внешних сил деформированного тела, это положение часто называют принципом наименьшей работы.

3.7. Применение принципа Кастильяно для приближенного решения задач теории упругости

Принцип Кастильяно в интегральной форме выражает условия совместимости деформаций тела. Если функционал Кастильяно выразить только через напряжения $\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K(\vec{\sigma})$, то отвечающие ему уравнения Эйлера дадут для постоянных объемных сил уже знакомые нам уравнения Бельтрами [16] – условия совместимости деформации, выраженные через напряжения.

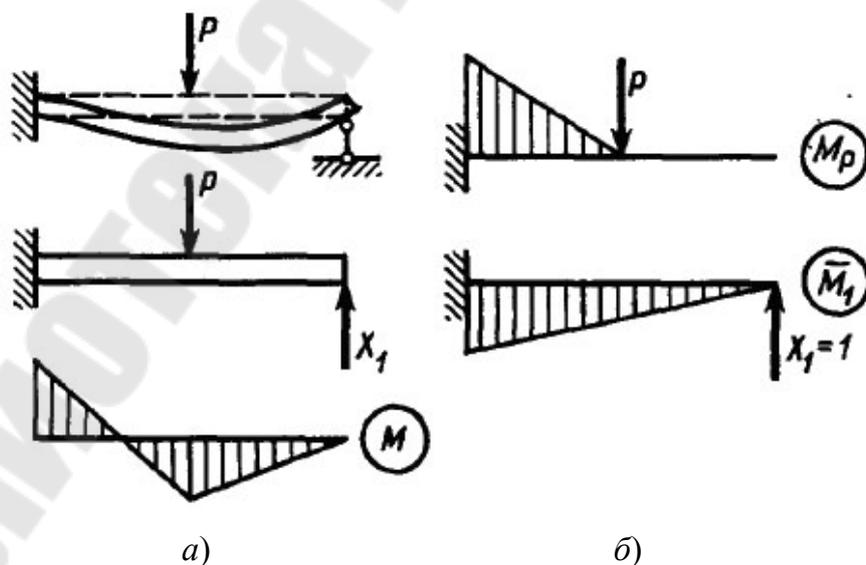


Рис. 3.10. Равновесные эпюры изгибающих моментов для статически неопределимой балки

Проиллюстрируем вышеизложенное. Существует бесконечное множество равновесных эпюр изгибающих моментов для статически неопределимой балки (рис. 3.10, а), задаваемых равенством

$$M = M_p + X_1 \overline{M}_1, \quad (3.35)$$

где M_p и \overline{M}_1 – эпюры, изображенные на рис. 3.10, б; X_1 – произвольно варьируемая величина опорной реакции. Найдем X_1 , используя принцип наименьшей работы. Энергия деформации (с учетом только изгибающих моментов) будет

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 ds}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(M_p + X_1 \overline{M}_1)^2 ds}{EJ}.$$

Условие минимума энергии деформации U дает

$$\frac{dU}{dX_1} = \left(\int_0^l \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds \right) X_1 + \left(\int_0^l \frac{M_p \overline{M}_1}{EJ} ds \right) = 0 \quad (3.36)$$

или

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

где $\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2 ds}{EJ}$; $\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_p \overline{M}_1}{EJ} ds$.

Полученное уравнение хорошо известно в методе сил и выражает условие равенства нулю прогиба у шарнирной опоры. Оно является условием совместности деформации данной простейшей статически неопределимой системы.

Как видим, непосредственное использование принципа Кастильяно позволяет получать уравнения совместности деформаций для статически неопределимых систем без обращения к геометрической трактовке этих условий.

По аналогии с методом Ритца можно обобщить этот подход на задачи теории упругости. Опишем его на примере линейно-упругого тела с заданной поверхностной нагрузкой \vec{p} . Представим вектор напряжений в теле в виде суммы:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_P + \sum_{i=1}^{i=n} X_i \vec{\sigma}_i, \quad (3.37)$$

где $\Omega = 2\omega$ – удвоенная площадь, ограниченная контуром срединной линии. Напряжения (3.41) уравнивают внешнюю нагрузку в виде момента M , но не обеспечивают совместность деформации контура и перегородки (по депланации). Поэтому введем самоуравновешенную систему напряжений τ_1 , τ_2 и τ_3 , отвечающую действию двух моментов X_1 (рис. 3.11, в). Эти напряжения определяются аналогично (3.41):

$$\tau_1 = \frac{X_1}{\Omega_1 h_1}; \quad \tau_2 = \frac{X_2}{\Omega_2 h_2}; \quad \tau_3 = \frac{X_1}{\Omega_1 h_3} + \frac{X_1}{\Omega_2 h_3}, \quad (3.42)$$

где $\Omega_1 = 2\omega_1$; $\Omega_2 = 2\omega_2$; h_1 , h_2 , h_3 – толщина стенки левого участка контура, правого его участка и перегородки, соответственно. Они могут быть переменными по длине контура.

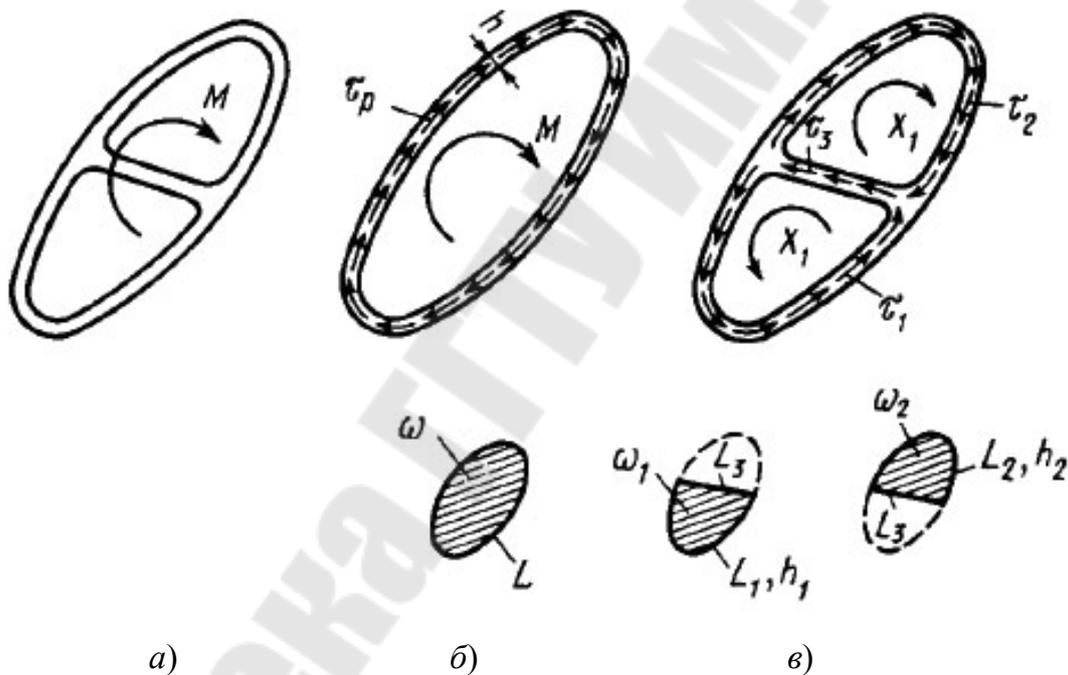


Рис. 3.11. Одноконтурное сечение

Суммарные напряжения будут: на левом участке контура – $(\tau_p - \tau_1)$; на правом – $(\tau_p - \tau_2)$ и в перегородке – τ_3 . Потенциальная энергия деформации единицы длины стержня будет

$$U = \frac{1}{2} \int_{L_1} \frac{h_1 (\tau_p - \tau_1)^2}{G} ds + \frac{1}{2} \int_{L_2} \frac{h_2 (\tau_p - \tau_2)^2}{G} ds + \frac{1}{2} \int_{L_3} \frac{h_3 \tau_3^2}{G} ds. \quad (3.43)$$

Подставив сюда выражение напряжений (3.41) и (3.42) и дифференцируя по X_1 , получим уравнение для определения X_1 :

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (3.44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{G\Omega_1^2} \int_{L_1} \frac{ds}{h_1} + \frac{1}{G\Omega_2^2} \int_{L_2} \frac{ds}{h_2} + \frac{1}{G(\Omega_2 + \Omega_2)^2} \int_{L_3} \frac{ds}{h_3}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{M}{G\Omega} \left[-\frac{1}{\Omega_1} \int_{L_1} \frac{ds}{h_1} + \frac{1}{\Omega_2} \int_{L_2} \frac{ds}{h_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Здесь интегралы вдоль линий L_1 , L_2 , L_3 вычисляются соответственно для левой части контура сечения, правой его части и перегородки.

3.8. Понятие о других вариационных принципах

Формулировка вариационного принципа зависит от того, какими величинами (функциями) характеризуется состояние деформированного тела. В принципе Лагранжа такими функциями служат перемещения \vec{u} , а в принципе Кастильяно – напряжения $\vec{\sigma}$. Именно эти принимаемые за основные функции подлежат варьированию (бесконечно малым изменениям) для того, чтобы получить вариационное уравнение. Все прочие функции считаются связанными с основными соответствующими зависимостями, приведенными в главе 2.

Помимо рассмотренных принципов Лагранжа и Кастильяно в теории упругости известно еще несколько вариационных принципов, отличающихся выбором варьируемых функций. Все они могут быть получены, если идти по некоторому формальному пути [30]. В основе его лежит следующее тождество, выражающее переход от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности, доказываемое с применением формулы Гаусса–Остроградского:

$$\iiint_V (A^T \vec{a}) \vec{b} dV = \iint_S (\vec{a})^T L \vec{b} ds - \iiint_V \vec{a}^T A \vec{b} dV. \quad (3.46)$$

Здесь A – матрица-оператор дифференцирования, фигурирующая в основных уравнениях теории упругости; L – матрица направляющих косинусов нормали в точках поверхности тела [22].

Векторы \vec{a} и \vec{b} – это векторы, в качестве которых могут использоваться \vec{u} , ε , $\vec{\sigma}$ или их вариации соответствующей мерности (\vec{a} – третьего порядка, \vec{b} – шестого).

Соотношение (3.46) преобразует интеграл от производных компонент \vec{a} к интегралу от производных вектора \vec{b} и, по сути, является обобщением формулы интегрирования по частям применительно к телу произвольной формы и основному оператору дифференцирования A .

Для примера возьмем в качестве варьируемых функций \vec{u} и $\vec{\sigma}$. Соответствующий функционал, называемый *функционалом Рейсснера*, относится к разряду смешанных функционалов. Чтобы получить его, подставим в (3.46) $\vec{a} = \vec{u} + \delta\vec{u}$ и $\vec{b} = \vec{\sigma} + \delta\vec{\sigma}$. После отбрасывания членов второго порядка малости и некоторых дополнительных преобразований придем к равенству

$$\delta\mathcal{E}_R = 0, \quad (3.47)$$

где функционал Рейсснера имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R = \mathcal{E}_{R_1}(\vec{\sigma}, \vec{u}) = \\ \iiint_V [\vec{\sigma}^T (A^T \vec{u}) - 0,5 \vec{\sigma}^T C \vec{\sigma}] dV - \iiint_V \vec{u}^T \vec{g} dV - \iint_{S_1} \vec{u}^T \vec{p}_{S_1} dS - \iint_{S_2} (\vec{u} - \vec{u}_{S_2})^T L \vec{\sigma} dS. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Функционалу (3.43) можно придать и несколько иной вид, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{R_2}(\vec{\sigma}, \vec{u}) = \\ = -\frac{1}{2} \iiint_V \vec{\sigma}^T C \vec{\sigma} dV - \iiint_V \vec{u}^T (A \vec{\sigma} + \vec{g}) dV - \iint_{S_1} \vec{u}^T (L \vec{\sigma} - \vec{p}_{S_1}) dS - \iint_{S_2} \vec{u}_{S_2}^T L \vec{\sigma} dS. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ему также отвечает условие $\delta\mathcal{E}_{R_2} = 0$ для истинных функций \vec{u} и $\vec{\sigma}$. Здесь C – матрица закона Гука.

Функционалы Рейсснера часто используются для построения численных приближенных методов, в которых неизвестные перемещения \vec{u} и напряжения $\vec{\sigma}$ независимо представляются суммами типа (3.26) и (3.37) с неизвестными обобщенными перемещениями и усилиями.

Если в качестве независимо варьируемых функций принять перемещения \vec{u} , напряжения $\vec{\sigma}$ и деформации $\vec{\varepsilon}$ (15 функций), то с помощью (3.46) придем к наиболее общему функционалу, предложенному учеными Ху и Вашицу. Одна из форм записи функционала Ху–Вашицу следующая:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Х-В}}(\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{\varepsilon}) = & 0,5 \iiint_V \vec{\varepsilon}^T D \vec{\varepsilon} dV + \iiint_V \vec{\sigma}^T (A^T \vec{u} - \vec{\varepsilon}) dV - \\ & - \iiint_V \vec{u}^T \vec{g} dV - \iint_{S_1} \vec{u}^T \vec{p} dS - \iint_{S_2} (\vec{u} - \vec{u}_{S_2})^T L \vec{\sigma} dS, \end{aligned} \quad (3.50)$$

а соответствующего вариационного уравнения –

$$\delta \mathcal{E}_{\text{Х-В}} = 0. \quad (3.51)$$

Пятнадцать уравнений теории упругости [12] и условия на поверхности тела [25] являются уравнениями Эйлера этого функционала и их граничными условиями.

Вводя какие-либо зависимости между 15 указанными функциями, можно перейти к другим функционалам. Например, считая, что деформации связаны с напряжениями законом Гука $\vec{\varepsilon} = C \vec{\sigma}$, от функционала Ху–Вашицу перейдем к функционалу Рейсснера (3.48). В этом смысле функционал Ху–Вашицу рассматривается как общий, а все остальные – как частные функционалы.

ГЛАВА 4. СОВРЕМЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Аналитическое решение граничных задач возможно только в некоторых частных случаях. Моделирование большинства реальных физических и технических систем приводит к необходимости численного (приближенного) решения дифференциальных уравнений или их систем.

В настоящее время существует два основных подхода к приближенному решению дифференциальных уравнений. Первый основан на решении уравнений в их дифференциальной форме, а второй – в интегральной форме. При этом интегральная форма может быть получена как на основе вариационных принципов, так и с использованием интегрально-дифференциальных преобразований, основанных на минимизации погрешности приближенного решения или отыскания стационарных точек энергетического функционала [1], [19], [29], [35].

4.1. Основы линейной теории упругости

Теория упругости изучает вопросы деформирования и напряжения различных упругих тел, возникающих под действием внешних сил. Величины внешних, т. е. поверхностных нагрузок, а также внутренних сил характеризуются их интенсивностью, т. е. величиной усилия, приходящегося на единицу площади поверхности, на которую они действуют. При рассмотрении внутренних усилий эту интенсивность обычно называют напряжением. Это название можно сохранить и для внешних нагрузок, если они распределены на рассматриваемой области сплошным образом.

Если ΔP обозначим усилие, приходящееся на рассматриваемую элементарную площадку ΔS , то указанное выше напряжение вычисляется следующим образом:

$$P_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (4.1)$$

Заметим, что такая формулировка понятия напряжения непременно предполагает тело сплошным, непрерывным. Внешнюю силу, произвольно ориентированную в пространстве в декартовой системе координат, можно представить в виде составляющих P_x , P_y , P_z , имеющих ориентацию по осям координат. При обозначении напряжения одного индекса недостаточно, так как кроме направления действия составляющей необходимо еще определить и площадку, на которую она действует. Напряжения представляют в виде двух составляющих: нормальное σ и касательное τ напряжения. Индекс нормального напряжения указывает ту ось, параллельно которой направлена составляющая. Касательные напряжения имеют два индекса: первый индекс соответствует оси, параллельно которой действует составляющая, а второй индекс указывает на направление нормали к площадке, на ко-

торую действует составляющая. На рис. 4.1 представлены составляющие напряжения в декартовой системе координат. Для составляющих напряжения принимается следующее правило знаков: нормальное напряжение считается положительным, когда оно вызывает растяжение, и отрицательным, когда оно вызывает сжатие. Для касательных напряжений положительным направлением будет то, которое совпадает с направлением координатной оси. Под деформацией понимают изменение линейных размеров тела. Деформация любого элементарного объема может быть представлена состоящей из ряда отдельных простейших деформаций, т. е. разложена на составляющие. В случае элементарного параллелепипеда имеется шесть составляющих деформации: три ее линейные составляющие (удлинение ребер) и три угловые составляющие (сдвиги) [1], [12], [14].

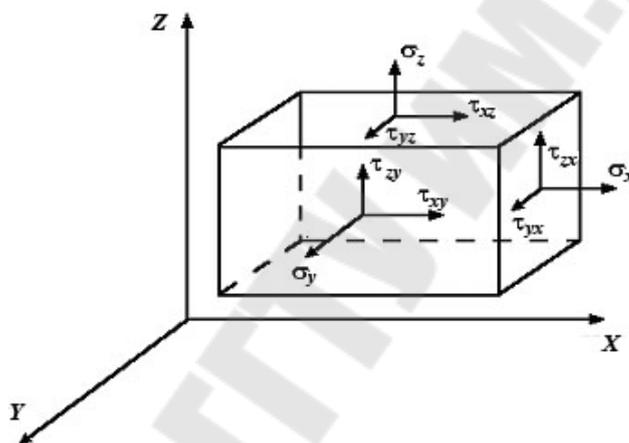


Рис. 4.1. Составляющие напряжения в декартовой системе координат

Относительные удлинения ребер обозначим ε с индексом, указывающим направление удлинения (рис. 4.2). Положительными линейными деформациями считаем удлинения, отрицательными – укорочения. Считается, что положительному сдвигу соответствует уменьшение угла между положительными направлениями осей, отрицательному – увеличение тех же углов. Углы сдвига, проектирующиеся на плоскость xu , обозначим γ_{xy} (или γ_{yx}). Соответственно для остальных плоскостей углы сдвига γ_{yz} (или γ_{zy}) и γ_{zx} (или γ_{xz}).

При элементарных деформациях первого рода (удлинение ребер) меняется объем параллелепипеда и его форма, а при деформациях второго рода (сдвиги) объем остается неизменным, изменяется лишь форма.

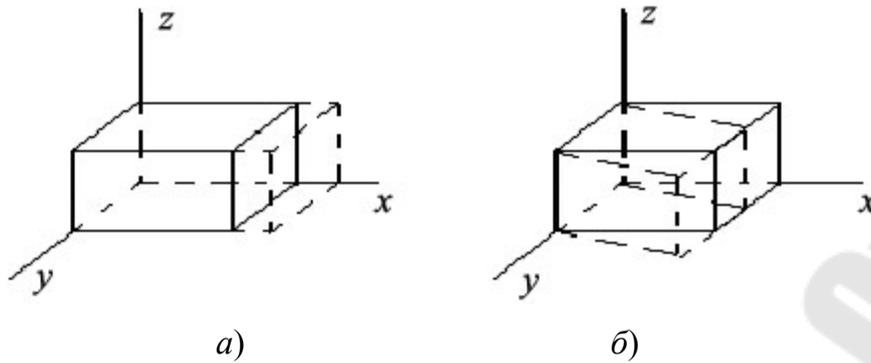


Рис. 4.2. Виды деформаций:
a – удлинение ребер; *б* – сдвиг

Рассмотрим сплошное твердое тело, прикрепленное к опорам таким образом, что оно не может перемещаться. Тогда перемещения любой точки этого тела могут произойти только в результате деформации этого тела. Обозначим u , v , w проекции полного перемещения некоторой точки на оси координат Ox , Oy , Oz и назовем их компонентами смещения. Компоненты смещения различны для различных точек и являются функциями координат точки: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Полное смещение точки определяется выражением

$$s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \varphi(x, y, z).$$

Запишем дифференциальные уравнения равновесия в статическом (динамическом) виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где ρ – плотность вещества; X , Y , Z – проекции на соответствующие оси объемной силы, отнесенной к единице массы.

Выражения в скобках для правой части используются в случае движения. Геометрические уравнения дифференциальных зависимостей для относительных удлинений ε и относительных сдвигов γ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Эти уравнения также называют уравнениями Коши [1], [12], [14].

Компоненты тензора малой деформации в окрестности любой точки в пределах каждого малого объема и в пределах всего объема самой среды (независимо от того, упругая она или неупругая, линейная или нелинейная) должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Уравнения (4.4) называют уравнениями (условиями) совместности, или неразрывности, деформаций.

Наличие всех компонентов напряжений, показанных на рис. 4.1, определяет следующие составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Часто бывает необходимо иметь обратные зависимости, т. е. напряжения, выраженные через деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{\text{чн}} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}; \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$.

Выражения (4.6) можно переписать в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\},$$

$$\text{где } [E] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} \text{ – постоянная}$$

Ляме.

В виде (4.5) обычно выражается закон упругости для изотропного тела. Его можно сформулировать так: компоненты тензора деформаций в данной точке находятся в линейной зависимости от компонентов тензора напряжений той же точки.

Тензор напряжений имеет вид:

$$T_{\text{H}} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Соответственно тензор деформаций можно выразить в виде:

$$T_{\text{деф}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}.$$

Закон упругого изменения объема можно представить в виде:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{3(1-2\mu)}\theta, \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (4.7)$$

т. е. среднее напряжение в точке пропорционально объемной деформации в окрестности той же точки. Используя закон изменения объема и понятие о шаровых тензорах, можно записать:

$$T_{\text{н}}^0 = E_0 T_{\text{деф}}^0, \quad (4.8)$$

т. е. шаровой тензор напряжений пропорционален шаровому тензору деформаций. Коэффициент пропорциональности (объемный модуль упругости) выражается в виде $E_0 = \frac{E}{1-2\mu}$ и определяет сопротивление материала при изменении объема, которое не сопровождается изменением формы.

Систему зависимостей

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \tau_{xy} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

запишем в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{Bmatrix} = 2G \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}} \end{Bmatrix}. \quad (4.10)$$

Левую матрицу, составленную из компонентов напряжений, называют девиатором напряжений D_n , а правую матрицу – соответственно девиатором деформации $D_{\text{деф}}$. В связи с этим обобщенный закон упругости можно представить в виде

$$D_n = 2GD_{\text{деф}} \quad (4.11)$$

и сформулировать так: девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций. Выражения (4.10) и (4.11) называют законом изменения формы [1], [12], [14].

4.2. Основы нелинейной теории упругости

В основе классической теории упругости лежит представление об упругом и линейно деформируемом теле. Для такого тела принимают наиболее простую, а именно линейную, зависимость между слагающими деформациями и возникающими при этом напряжениями. Диаграмма «растяжение–сжатие» для такого материала в обычных координатах «напряжение–деформация» представляется прямой линией, выходящей из начала координат. Если для материала не применим закон Гука или рассматриваемое состояние деформации перешло за предельно упругое и, стало быть, в изучаемом диапазоне деформаций диаграмма растяжений материала представляется явно выраженным отрезком кривой (рис. 4.3), то в этих случаях в качестве физического закона необходимо принять уравнение этой кривой, т. е. $\sigma = f(\varepsilon)$ [1], [9], [12], [29].

Допустим, что процесс медленной разгрузки происходит по кривой BAO , причем в обратном порядке наблюдаются те же состояния, что и при нагрузке по OAB . Если процесс OAB окажется обратимым, такое тело назовем нелинейно-упругим. Теорию, устанавливающую законы деформации в таком теле, назовем нелинейной теорией упругости.

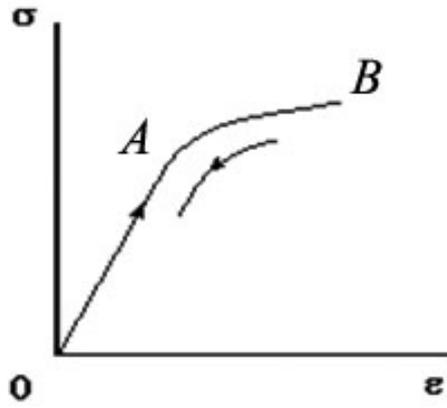


Рис. 4.3. Диаграмма растяжения для нелинейно-упругого материала

Основную предпосылку нелинейной теории упругости можно сформулировать следующим образом: при сложном напряженном состоянии зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для каждой точки тела принимается такой же, как зависимость напряжения с удлинением при простом растяжении того же тела. Зависимость между напряжением и деформацией в точке для нелинейно-упругого тела в напряженном состоянии, используя понятия интенсивности напряжения и интенсивности деформации, можно представить в виде

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i, \quad (4.12)$$

где σ_i – интенсивность напряжений; E' – секущий модуль деформации первого рода, зависящий от степени деформации, т. е. $E' = f(\varepsilon)$; ε_i – интенсивность деформаций.

Если результаты испытания на простое растяжение за пределом упругости для какого-либо материала обработаны в виде

$$\sigma = E(1 - \omega)\varepsilon,$$

где E – обычный модуль упругости материала, а ω – некоторая аналитическая функция относительного удлинения (отличная от нуля только за пределом упругости), т. е. $\omega = \Psi(\varepsilon)$, то в случае сложного напряженного состояния для того же материала применяется закон деформации в виде

$$\sigma_i = E(1 - \omega)\varepsilon_i,$$

где $\omega = \Psi(\varepsilon_i)$ – функция интенсивности деформации, отличная от нуля только за пределом упругости.

Используя выражение (4.12) и зависимость $G' = \frac{E'}{3} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$, мож-

но получить уравнения для нелинейно-упругого тела:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}}); \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\text{где } \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Уравнения (4.13) для нелинейно-упругого тела и уравнения (4.9) для линейно-упругого тела можно обобщить. Тогда, используя понятия о девиаторах напряжений и деформаций, законы упругих и пластических деформаций можно сформулировать следующим образом.

Первый основной закон – закон изменения объема. При упругих и пластических, при пассивных и активных деформациях твердого тела относительное изменение объема элемента этого тела прямо пропорционально среднему напряжению, причем модуль объемной деформации остается постоянной величиной как в пределах, так и за пределами упругости:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_{\text{ср}},$$

где E – модуль упругости и μ – коэффициент Пуассона, принимаемые постоянными независимо от масштаба деформации.

Второй основной закон – закон изменения формы при активной деформации. При упругих и пластических деформациях, соответствующих случаю простого нагружения для каждой точки тела, девиатор напряжения прямо пропорционален девиатору деформации:

$$D_n = 2G'D_{\text{деф}},$$

где G' – модуль упругости деформации второго рода, имеющий для каждой точки изотропного тела определенное значение, зависящее от величины обобщенного напряжения для этой точки.

Третий основной закон – закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией при активном нагружении. Обобщенное напряжение, возникающее в теле при любой активной деформации, для каждого материала есть определенная функция обобщенной деформации:

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Вид функции Φ зависит только от материала тела. Величина σ_i зависит только от величины ε_i и от физических свойств данного материала [1], [12], [29].

4.3. Метод конечных разностей

Сущность данного метода заключается в том, что рассматриваемый дифференциальный оператор заменяется разностным. При этом рассматриваемая область как в пространстве, так и по времени покрывается сеткой, в узлах которой вычисляются значения разностных производных [1], [18].

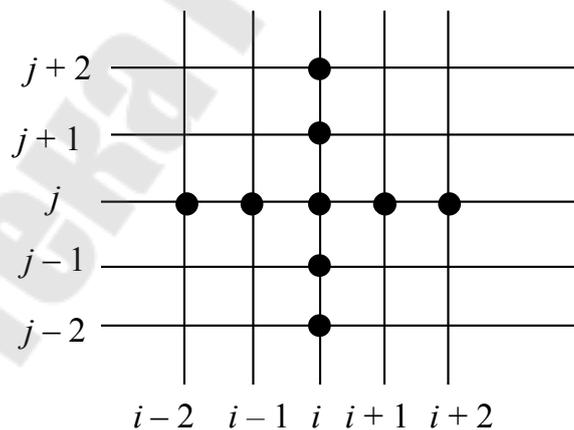


Рис. 4.4. Конечно-разностная сетка

Согласно определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим часть области, представленной на рис. 4.4. В этом случае для первой производной по одной из переменных в точке (i, j) будем иметь:

$$f'_{ij} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{f_{ij} - f_{i-1j}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_{ij} - f_{i+1j}}{x_i - x_{i+1}}. \quad (4.15)$$

Учитывая, что шаг сетки постоянный, складываем два последних тождества в (4.14):

$$f'_{ij} \approx \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta x}. \quad (4.16)$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, можно оценить погрешность найденных значений разностных производных.

Для нахождения разностных производных второго порядка положим:

$$\varphi = f',$$

тогда, воспользовавшись одним из выражений (4.15)–(4.16), найдем значение первой производной для φ . Например, воспользовавшись (4.16), а затем (4.15), получаем:

$$\varphi'_{ij} \approx \frac{\varphi_{i+1j} - \varphi_{i-1j}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1j} - f_{ij}}{\Delta x} - \frac{f_{ij} - f_{i-1j}}{\Delta x} \right) = \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta x^2}$$

или

$$f''_{ij} \approx \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta x^2}. \quad (4.17)$$

Аналогично рассуждая, можно получить производные более высоких порядков и смешанные:

$$f'''_{ij} \approx \frac{-f_{i-2j} + 2f_{i-1j} - 2f_{i+1j} + f_{i+2j}}{2\Delta x^3}; \quad (4.18)$$

$$f^{IV}_{ij} \approx \frac{f_{i-2j} - 4f_{i-1j} + 6f_{ij} - 4f_{i+1j} + f_{i+2j}}{\Delta x^4}; \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1j+1} - f_{ij+1} - f_{i+1j} + f_{ij}}{\Delta x \Delta y}; \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^4 f_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \frac{f_{i-1j-1} - 2f_{ij-1} + f_{i+1j-1} - 2(f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j}) + f_{i-1j+1} - 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}. \quad (4.21)$$

Воспользовавшись формулами (4.15), (4.16) в другом порядке, можно получить нецентральные выражения для разностных производных высокого порядка. В частности, нецентральные разностные производные используются при аппроксимации дифференциальных операторов на границах.

Кроме того, воспользовавшись вышеизложенным, несложно получить разностные выражения и для нерегулярного шага сетки.

Найденные значения разностных производных подставляются в исходное дифференциальное уравнение и граничные и (или) начальные условия. В итоге будет получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции в узловых точках.

Рассмотрим применение метода конечных разностей для решения уравнений параболического типа на примере уравнения теплопроводности для стержня [25], [35]:

$$c\rho \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} + Q(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.22)$$

$$T(0, x) = \phi(x), \quad x \in \Omega,$$

$$T(t, x) = \psi(t), \quad x \in \Gamma,$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала стержня; $Q(t, x)$ – источник тепла внутри тела; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала стержня.

Подставим (4.15) и (4.17) в (4.22), получаем:

$$c\rho \frac{T_{ij} - T_{ij-1}}{\Delta t} = \lambda \frac{T_{i+1j} - 2T_{ij} + T_{i-1j}}{2\Delta x^2} + Q_{ij}, \quad (4.23)$$

$$T_{i0} = \phi_i,$$

$$T_{oj} = \psi 1_j, \quad T_{nj} = \psi 2_j, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Проведя необходимые преобразования, получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволит найти неизвестную температуру стержня на заданном временном интервале.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости [1], [12], [14]. Как известно, решение плоской задачи теории упругости сводится к решению уравнения совместности деформаций в виде бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (4.24)$$

где φ – функция напряжений Эри.

Подставляя (4.19) и (4.21) в (4.24), учитывая граничные условия, приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим краевую задачу определения прогибов тонкой прямоугольной пластинки [1], [12] [14]. Данная задача описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка Софи–Жермен:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (4.25)$$

где ω – функция прогибов; q – нагрузка; D – цилиндрическая жесткость.

4.4. Вариационно-разностный метод

Сущность данного метода заключается в том, что рассматривается вариационная формулировка исследуемой задачи, куда и осуществляется подстановка разностных производных [1], [10], [22].

Рассмотрим уравнения параболического типа на примере уравнения теплопроводности для стержня. Как известно, данное уравнение имеет вид (4.22). Функционал полной энергии для данной задачи будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = \int_V \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \left(Q - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right] dS. \quad (4.26)$$

Согласно вариационному принципу Лагранжа истинная функция удовлетворяет уравнению

$$\delta \mathcal{E}(T) = 0$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \{T\}} = 0. \quad (4.27)$$

Подставив выражения для разностных производных (4.15)–(4.17) в (4.26) и выполнив численно интегрирование, получим, что полная энергия зависит от $T_{ij}: \mathcal{E}(T_{ij})$, следовательно, вариационный принцип (4.27) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_{ij}} = 0. \quad (4.28)$$

4.5. Метод Бубнова–Галеркина

Данный метод используется для решения краевых задач и позволяет найти приближенное аналитическое решение [1], [17].

Запишем произвольное дифференциальное уравнение в виде

$$L(w) = 0, \quad (4.29)$$

где L – произвольный дифференциальный оператор.

Сущность метода заключается в том, что искомую функцию представляем в виде линейной комбинации нескольких базисных функций с произвольными постоянными коэффициентами, например

$$w \approx \omega(x, y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j(x, y), \quad (4.30)$$

где α_j – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению; $f_j(x, y)$ – базисные функции, которые задаются так, чтобы они удовлетворяли всем (кинематическим и силовым) граничным условиям.

Подставим (4.30) в исходное дифференциальное уравнение (4.29) и вычислим невязку – функцию, определяющую, насколько полученные соотношения отличаются от тождества

$$N(x, y) = L(\omega) \neq 0.$$

Потребуем, чтобы невязка была ортогональной базисным функциям, т. е.

$$\iint_{\Omega} N(x, y) f_j(x, y) = 0. \quad (4.31)$$

Соотношения (4.41) представляют собой систему из N линейных алгебраических уравнений относительно α_j , решая которую находим искомую функцию (4.50).

4.6. Метод Канторовича–Власова

Основная идея данного метода заключается в понижении размерности исходной задачи за счет увеличения числа дифференциальных уравнений [1], [18].

Искомую функцию представляем в виде линейной комбинации нескольких базисных функций с произвольными неизвестными функциями, например

$$w \approx \omega(x, y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(y) f_j(x), \quad (4.32)$$

где $\varphi_j(y)$ – N неизвестных функций, подлежащих определению.

Далее поступаем аналогично, как и в методе Бубнова–Галеркина.

4.7. Метод граничных элементов

В методе граничных элементов (МГЭ) исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду, содержащему только значения переменных на границах области [6], [8], [21].

Схема дискретизации требует разбиения лишь границы, а не всей области (отсюда и название метода). Очевидно, что дискретизация границы порождает меньшую систему общих уравнений задачи, чем дискретизация всего тела. Таким образом, МГЭ уменьшает размерность исходной задачи на единицу, т. е. для трехмерных задач получаются двумерные граничные элементы на поверхности. Применение МГЭ обычно приводит к плотно заполненным матрицам. Это означает, что требования к ресурсам памяти и время вычисления будут расти пропорционально квадрату размера задачи. Пользуясь принципом суперпозиции и функциями влияния (функциями Грина) в МГЭ, находят такие нагрузки, прикладываемые в бесконечной области на воображаемой границе тела, которые обеспечивают удовлетворение граничных условий заданного ограниченного тела.

Граница тела дискретизируется отдельными элементами, называемыми граничными (ГЭ). Тело условно продолжается за границы

так, чтобы оно превратилось в часть бесконечной области (или конечной, но такой, для которой могут быть получены функции влияния). Каждый ГЭ загрузим некоторой распределенной нагрузкой. Она может приниматься равномерно распределенной, изменяться в пределах ГЭ по линейному или более сложному закону. Путем интегрирования функций влияния по области ГЭ выразим напряжения и перемещения, вызываемые нагрузкой на единичном ГЭ, в любой точке области.

4.8. Метод моментов

При неизвестных параметрах $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2 \dots \theta_M)^T$ начальные моменты распределения являются функциями $\bar{\theta}$:

$$m_k(\bar{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w(y/\bar{\theta}) dy.$$

Вместе с тем, на основе наблюдений y_1, y_2, \dots, y_n могут быть найдены выборочные начальные моменты k -го порядка

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^k,$$

которые служат состоятельными оценками моментов распределения $m_k(\bar{\theta})$.

Метод моментов заключается в приравнивании M выборочных моментов к соответствующим моментам распределения и нахождении оценок неизвестных параметров из системы уравнений:

$$m_k(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_M) = \hat{m}_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Кроме начальных моментов, для оценок параметров могут использоваться центральные моменты распределения и выборочные центральные моменты

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_1)^k.$$

Для некоторых распределений, например, нормального или экспоненциального, оценки параметров, найденные с помощью метода моментов, совпадают с соответствующими оценками максимального правдоподобия. Вместе с тем имеются многочисленные задачи, в которых метод моментов приводит к худшим по точности оценкам, чем

метод максимального правдоподобия. Характерным примером является оценка параметра θ равномерного распределения $w(y_i / \theta) = 1/\theta$, $0 \leq y_i \leq \theta$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для нахождения этой оценки на основе метода моментов приравняем математическое ожидание (первый начальный момент) $m_1(\theta) = \theta/2$ и выборочное среднее $m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. В результате

получаем несмещенную оценку $\hat{\theta}(\bar{y}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ с дисперсией

$$M\{(\hat{\theta}(\bar{y}) - \theta)^2\} = \theta^2 / 3n.$$

Заметим, что найденное значение в $(n+2)/3$ раз больше дисперсии оценки максимального правдоподобия. Приведенный результат подчеркивает целесообразность поиска эффективных оценок с помощью метода максимального правдоподобия. Однако встречаются примеры, где решение уравнений правдоподобия найти не удастся, но можно получить хорошие оценки по методу моментов.

Пусть требуется оценить параметры α и β гамма-распределения. Приравняв моменты распределения $m_1(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ и $m_2(\alpha, \beta) = \alpha(\alpha+1)\beta^2$ к первому $\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ и второму $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$ выборочным моментам, получаем следующие оценки параметров по методу моментов:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_1}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}.$$

Полученные оценки могут использоваться, например, при построении классификатора типа помех в радиолокационном приемнике, поскольку распределение Вейбулла описывает широкий класс возможных помех в виде собственного шума приемника, отражений от местных предметов, гидрометеоров и др.

4.9. Метод конечных элементов

Наиболее часто применяемым численным методом исследования реальных физических систем стал метод конечных элементов (МКЭ) [11], [16], [28], [30], [31]. Суть метода заключается в том, что сплошное тело рассматривают как состоящее из конечного числа отдельных

элементов, вплотную прилегающих друг к другу и шарнирно скрепленных между собой в вершинах этих элементов. Форма и размеры тела остаются неизменными. В случае полупространства или полуплоскости выделяется область, ограниченная на некотором расстоянии от приложенных нагрузок, где значениями напряжений или перемещений, возникающих от этих нагрузок, можно пренебречь. Форма элементов может быть различной и зависит от формы рассматриваемой области или ее участков. Для плоской задачи наиболее простые решения получаются при треугольной или прямоугольной форме элементов. Для пространственной задачи элементы могут выбираться в форме параллелепипедов, тетраэдров или иметь более сложную форму.

Сплошное тело, разделенное на элементы, казалось бы, обладает большей податливостью, что приведет к искажению напряжения и деформаций. Для того чтобы этого не произошло, необходимо ввести определенные условия, приводящие к идентификации напряженно деформируемого состояния тела. Это достигается требованиями выполнения условий сплошности, в частности, на границах между элементами, т. е. разделение сплошной среды на элементы в МКЭ не сопровождается ее разрезом, элементы не являются отдельными кусками, а лишь выделяются из сплошной среды. В общем случае среда может быть неоднородной по своим механическим свойствам. Однако разбиение на элементы следует производить так, чтобы в пределах одного элемента участок среды можно было бы рассматривать как однородный. Причем любой другой элемент, оставаясь также однородным, может характеризоваться показателями механических свойств, отличными от соседних элементов. Таким образом, система элементов будет в целом представлять однородную среду.

4.10. Особенности решения динамических задач

4.10.1. Метод центральных разностей

В методе центральных разностей ускорения и скорости представляются следующими конечно-разностными выражениями:

$$\ddot{z} = \frac{z_{k-1} - 2z_k + z_{k+1}}{\tau^2}; \quad (4.33)$$

$$\dot{z} = \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{2\tau}, \quad (4.34)$$

где τ – шаг по времени. Порядок аппроксимации производных в формулах (4.33) и (4.34) составляет $O(\tau^2)$. Уравнение [11] для шага по времени с номером k запишется в виде:

$$M\ddot{z} + C\dot{z}_k + Rz_k = P_k. \quad (4.35)$$

Подставляя (4.33) и (4.34) в (4.35), получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{\tau^2}M + \frac{1}{2\tau}C\right)z_{k+1} = P_k - \left(R - \frac{2}{\tau^2}M\right)z_k - \left(\frac{1}{\tau^2}M - \frac{1}{2\tau}C\right)z_{k-1}. \quad (4.36)$$

Для реализации уравнения (4.36) при $k=0$ необходимо значение z_{-1} . Поскольку в качестве начальных условий задаются значения \dot{z}_0 и \ddot{z}_0 , то для определения z_{-1} можно разложить $z(t)$ в ряд Тейлора:

$$z_{-1} = z_0 - \tau\dot{z}_0 + \frac{\tau^2}{2}\ddot{z}_0.$$

Алгоритм решения динамической задачи методом центральных разностей состоит из следующих этапов:

1. Формирование матриц R , M , C .
2. Задание начальных условий z_0 , \dot{z}_0 и \ddot{z}_0 .
3. Вычисление вектора

$$z_{-1} = z_0 - \tau\dot{z}_0 + \frac{\tau^2}{2}\ddot{z}_0.$$

4. Формирование матрицы

$$M = \frac{1}{\tau^2}M + \frac{1}{2\tau}C.$$

5. Формирование вектора нагрузки

$$\tilde{P}_k = P_k - \left(R - \frac{2}{\tau^2}M\right)z_k - \left(\frac{1}{\tau^2}M - \frac{1}{2\tau}C\right)z_{k-1}.$$

6. Решение системы уравнений

$$\tilde{M} z_{k+1} = \tilde{P}_k.$$

7. Определение ускорения и скорости:

$$\ddot{z}_k = \frac{1}{\tau^2}(z_{k-1} - 2z_k + z_{k+1});$$

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\tau}(z_{k+1} - z_{k-1}).$$

8. Переход на п. 4.

Если демпфирование отсутствует, т. е. $C = 0$, а матрица масс M диагональна, то для решения системы (4.36) не требуется использовать метод Гаусса. Значения узловых перемещений легко находятся по формуле

$$z_{k+1}^{(i)} = \tilde{P}_k^{(i)} \frac{\tau^2}{m_{ii}}. \quad (4.37)$$

В формуле (4.37) $z_{k+1}^{(i)}$ – i -я компонента вектора z_{k+1} ; $\tilde{P}_k^{(i)}$ – i -я компонента вектора P_k ; m_{ii} – i -й диагональный элемент матрицы масс. В данном случае нет необходимости формировать матрицу жесткости всей системы. Решение может быть выполнено на уровне матриц жесткости конечных элементов.

К недостатку метода центральных разностей относится то, что шаг интегрирования τ должен быть меньше некоторого значения τ_{\max} , определяемого механическими свойствами конструкции:

$$\tau \leq \tau_{\max} = \frac{T_{\min}}{\pi}, \quad (4.38)$$

где T_{\min} – минимальный период собственных колебаний конструкции. Такая схема интегрирования, накладывающая ограничения на величину шага, называется условно устойчивой.

Пример 4.1 [31]. Рассмотрим простую систему, для которой заданы уравнения [4]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Периоды собственных колебаний имеют следующие значения: $T_1 = 4,45$; $T_2 = 2,8$. Метод центральных разностей используется для двух случаев: $\tau = \frac{T_2}{10}$ и $\tau = 10T_2$. Заданы начальные условия: $z_0 = 0$ и $\dot{z}_0 = 0$.

Из уравнения (4.34) вычисляется вектор \ddot{z}_0 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{z}_0 + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с описанным выше алгоритмом:

$$z_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,28 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,0392 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,392 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{M} = 12,8 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1,79 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{P}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 45 & 2 \\ 2 & 21,5 \end{bmatrix} z_k - \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix} z_{k-1}.$$

На каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix} z_{k+1} = \tilde{R}_k.$$

Поскольку матрица системы уравнений диагональная, то решение легко находится по формуле (4.37).

Полученные результаты хорошо согласуются с точным решением задачи [4]. График зависимости перемещения z_1 от времени t показан на рис. 4.5.

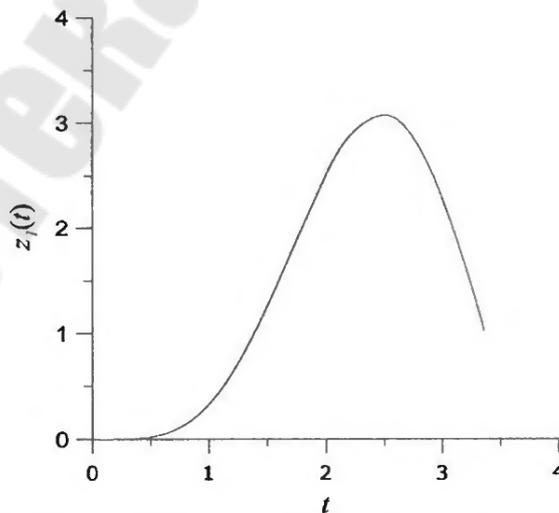


Рис. 4.5. К решению динамической задачи методом центральных разностей

Для шага $\tau = 10T_2$ перемещения, получаемые методом центральных разностей, быстро увеличиваются от шага к шагу, что является проявлением неустойчивости данной схемы интегрирования. Как уже отмечалось выше, для обеспечения устойчивости вычислительного процесса шаг по времени необходимо выбирать в соответствии с условием (4.38), которое в данном случае не выполняется.

4.10.2. Метод Ньюмарка

В методе Ньюмарка предполагается, что ускорение в пределах шага 1 по времени остается постоянным. Выражения для перемещения и скорости записываются в виде:

$$z_{k+1} = z_k + \dot{z}_k \tau + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{z}_k + \alpha \ddot{z}_{k+1} \right) \tau^2; \quad (4.39)$$

$$\dot{z}_{k+1} = \dot{z}_k + \left((1 - \delta) \ddot{z}_k + \delta \ddot{z}_{k+1} \right) \tau, \quad (4.40)$$

где δ и α – параметры разностной схемы. При $\delta = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{4}$ получается безусловно устойчивая схема постоянного среднего ускорения:

$$z_{k+1} = z_k + \dot{z}_k \tau + \frac{1}{4} (\ddot{z}_k + \alpha \ddot{z}_{k+1}) \tau^2; \quad (4.41)$$

$$\dot{z}_{k+1} = \dot{z}_k + \frac{1}{2} (\ddot{z}_k + \delta \ddot{z}_{k+1}) \tau. \quad (4.42)$$

Уравнение (4.35) записывается для шага $k+1$:

$$M \ddot{z}_{k+1} + C \dot{z}_{k+1} + R z_{k+1} = P_{k+1}. \quad (4.43)$$

Из уравнения (4.41):

$$\ddot{z}_{k+1} = \frac{4}{\tau^2} (z_{k+1} - z_k - \dot{z}_k \tau) - \ddot{z}_k. \quad (4.44)$$

Подставляя (4.44) в выражение для скорости (4.43), получим

$$\dot{z}_{k+1} = \frac{2}{\tau} (z_{k+1} - z_k) - \dot{z}_k. \quad (4.45)$$

Уравнение (4.43), после подстановки в него выражений для ускорения и скорости по формулам (4.44) и (4.45), преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{\tau^2} M + \frac{2}{\tau} C + R \right) z_{k+1} = \\ & = M\ddot{z}_k + \left(\frac{4}{\tau^2} M + C \right) \dot{z}_k + \left(\frac{4}{\tau^2} M + \frac{2}{\tau} C \right) z_k + P_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Алгоритм метода Ньюмарка состоит из следующих этапов [17]:

- формирование матриц R , M , C ;
- задание начальных условий z_0 , \dot{z}_0 и \ddot{z}_0 ;
- решение системы уравнений (4.46) и определение z_{k+1} ;
- определение \ddot{z}_{k+1} по формуле (4.44) и \dot{z}_{k+1} по формуле (4.45);
- переход на п. 3.

Пример 4.2. Рассмотрим систему из примера 4.1, для которой заданы уравнения (4.43). Периоды собственных колебаний имеют следующие значения: $T_1 = 4,45$; $T_2 = 2,8$. Используется безусловно устойчивая схема метода Ньюмарка при $\beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{4}$. Заданы начальные условия:

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ddot{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

В первом варианте $\tau = \frac{T_2}{10} = 0,28$.

В соответствии с алгоритмом метода Ньюмарка вычисляется матрица жесткости:

$$\tilde{R} = \frac{4}{\tau^2} M + \frac{2}{\tau} C + R = 51 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}.$$

Далее на каждом шаге определяется вектор правой части:

$$\tilde{P}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (51,0z_k + 14,3\dot{z}_k + 1,0\ddot{z}_k);$$

решается система уравнений:

$$\tilde{R}z_{k+1} = \tilde{P}_{k+1};$$

определяются ускорение и скорость:

$$\ddot{z}_{k+1} = 51,0(z_{k+1} - z_k) - 14,3\dot{z}_k + 1,0\ddot{z}_k;$$

$$\dot{z}_{k+1} = \dot{z}_k + 0,14\ddot{z}_k + 1,0\dot{z}_{k+1}.$$

Полученные результаты хорошо согласуются с точным решением задачи [4]. График зависимости перемещения z_1 от времени t для случая $\tau = 0,28$ показан на рис. 4.6.

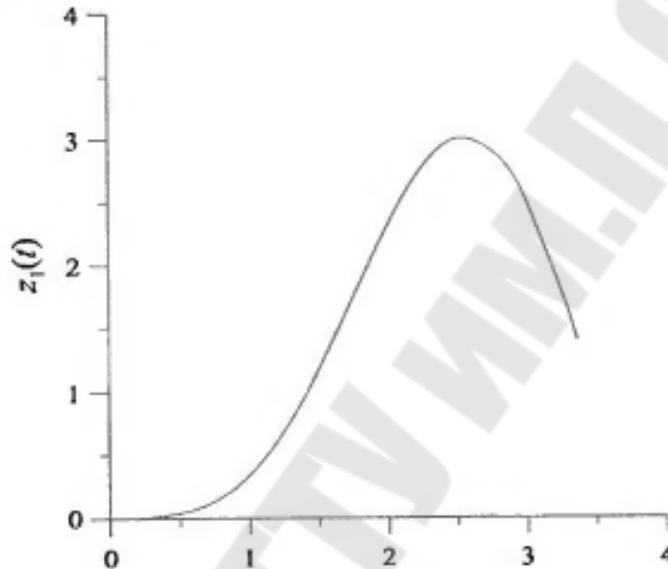


Рис. 4.6. Решение динамической задачи методом Ньюмарка для $\tau = 0,28$

Во втором варианте $\tau = 10T_2 = 2,8$.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{4}{\tau^2}M + \frac{2}{\tau}C + R = 0,0051 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6,0102 & -2,0000 \\ -2,0000 & 4,0051 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

График зависимости перемещения z_1 от времени t для случая $\tau = 2,8$ показан на рис. 4.7.

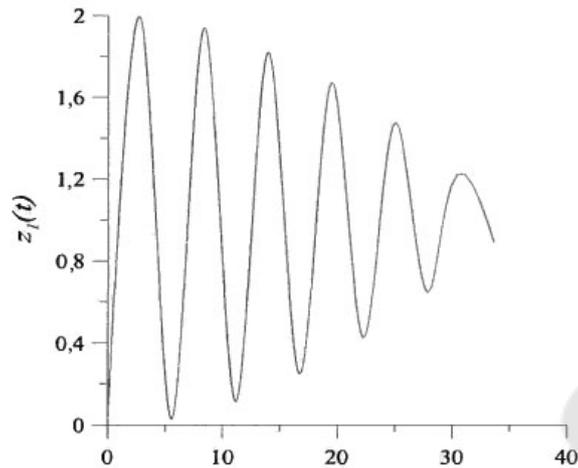


Рис. 4.7. Решение динамической задачи методом Ньюмарка для $\tau = 2,8$

Как показано в работах [4], [25], метод Ньюмарка устойчив при любых значениях шага τ .

4.10.3. Разложение по собственным формам

Методы прямого интегрирования наиболее эффективны при решении тех задач динамики, где имеет место кратковременное воздействие и где не требуется исследовать поведение системы на большом временном промежутке. В отличие от методов прямого интегрирования, в методе разложения по собственным формам исходные уравнения движения преобразуются к виду, для которого пошаговая процедура решения требует меньшего количества арифметических операций, приходящихся на один шаг.

Для системы без учета демпфирования уравнения движения, как и раньше, имеют вид

$$M\ddot{z} + Rz = 0$$

и допускают решение типа

$$z(t) = \varphi \sin(\omega t),$$

которое, после подстановки в уравнения движения, приводит к обобщенной проблеме собственных значений

$$R\varphi = \omega^2 M\varphi$$

или, после введения обозначения $\lambda = \omega^2$,

$$R\varphi = \lambda M\varphi.$$

Решение проблемы собственных значений содержит n собственных чисел ω_i и собственных векторов φ_i . Если ввести матрицы Φ и Λ

$$\Phi = (\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$$

и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

то получим

$$R\Phi = M\Phi\Lambda. \quad (4.47)$$

Умножим обе части уравнения (4.47) на Φ^T :

$$\Phi^T R\Phi = \Phi^T M\Phi\Lambda. \quad (4.48)$$

Учитывая, что собственные векторы M -ортогональны, т. е.

$$\Phi^T R\Phi = E, \quad (4.49)$$

из (4.47) следует, что

$$\Phi^T R\Phi = \Lambda. \quad (4.50)$$

Если вектор $z(t)$ выбрать в виде

$$z(t) = \Phi X(t), \quad (4.51)$$

то после подстановки его в исходное уравнение движения будем иметь:

$$M\Phi\ddot{X}(t) + R\Phi X(t) = P(t).$$

Умножая обе части полученного уравнения на Φ^T и учитывая соотношения (4.46) и (4.47), приходим к окончательному виду уравнений движения [19]:

$$\ddot{X}(t) + \Lambda X(t) = \Phi^T P(t), \quad (4.52)$$

т. е. к n уравнениям вида

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \varphi_i^T P(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.53)$$

Каждое i -е уравнение в (4.53) представляет собой уравнение движения системы с одной степенью свободы и массой, равной единице.

Начальные условия для $x(t)$ в уравнении (4.53) получаются из условия М-ортогональности матрицы Φ (4.48) и представления вектора $z(t)$ в виде (4.41). Они имеют вид:

$$\begin{aligned} X(0) &= \Phi^T Mz(0); \\ \dot{X}(0) &= \Phi^T M\dot{z}(0). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Для уравнений (4.53) из (4.54) получим:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= \varphi_i^T Mz(0); \\ \dot{x}_i(0) &= \varphi_i^T M\dot{z}(0). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Решение уравнений (4.53) с начальными условиями (4.55) может быть получено с помощью описанных выше методов прямого интегрирования, интеграла Дюамеля [2] или стандартной процедуры численного решения дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты.

В итоге вектор узловых перемещений для каждого временного шага вычисляется по формуле (4.51):

$$z(t) = \varphi_1 x_1(t) + \varphi_2 x_2(t) + \dots + \varphi_n x_n(t) = \Phi X(t), \quad (4.56)$$

где φ_i – вектор i -й собственной формы колебаний; $x_i(t)$ – обобщенное перемещение по i -й форме.

Как правило, вклад в решение различных форм колебаний уменьшается с ростом частоты i и поэтому в практических расчетах обычно используется 3–5 слагаемых в разложении (4.56).

По найденным значениям узловых перемещений могут быть определены усилия в элементах на каждом временном шаге.

Пример 4.3 [25]. Требуется построить вектор $z(t)$ при заданных матрицах R , M и векторе P [4]:

$$R = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Обобщенная проблема собственных значений в данном случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \varphi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi. \quad (4.57)$$

Решение задачи (4.57) дает значения собственных чисел и собственные векторы:

$$\lambda_1 = 2; \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T;$$

$$\lambda_2 = 5; \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}^T.$$

Тогда

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Используя представление

$$z(t) = \Phi X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

получим следующие уравнения:

$$\ddot{X}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

или

$$\ddot{X}_1 + 2X_1 = \frac{10}{\sqrt{3}};$$

$$\ddot{X}_2 + 5X_2 = -10\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4.58)$$

Если начальные условия заданы в виде $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$, то по формулам (4.55):

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0; & \dot{X}_1(0) &= 0; \\ X_2(0) &= 0; & \dot{X}_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Решая уравнения (4.58) с начальными условиями (4.59), получим:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos \sqrt{2}t); \\ X_2 &= 2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1 + \cos \sqrt{5}t). \end{aligned}$$

Окончательно

$$z(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos \sqrt{2}t) \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1 + \cos \sqrt{5}t) \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

На рис. 4.8 и 4.9 показаны перемещения системы, вычисленные по формуле (4.49) для первых 12-ти шагов при $\tau = 0,28$.

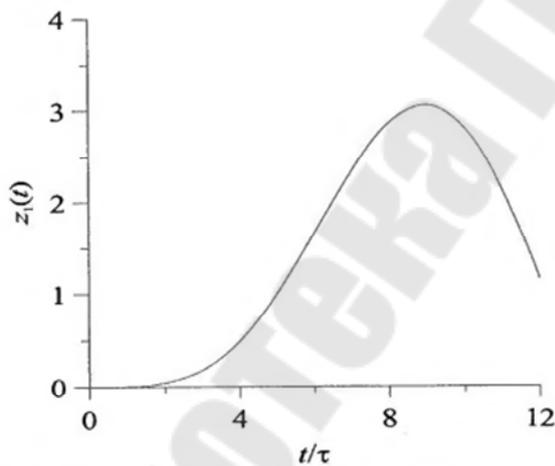


Рис. 4.8. Перемещение $z_1(t)$, полученное методом разложения по собственным формам

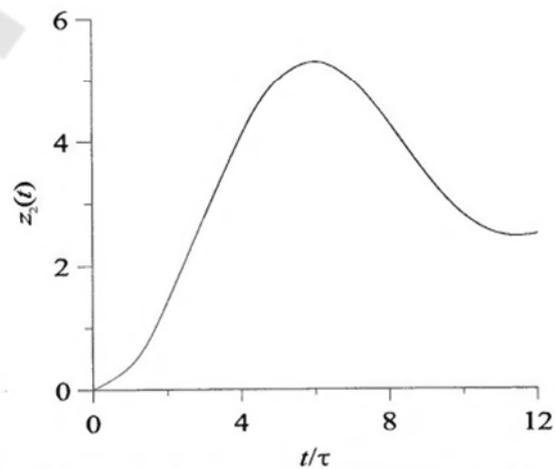


Рис. 4.9. Перемещение $z_2(t)$, полученное методом разложения по собственным формам

4.10.4. Метод продолжения решения по параметру

Обозначив $x_1 = z$ и $x_2 = \dot{z}$, преобразуем уравнение (4.39) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2; \\ x_2 &= -M^{-1}(Rx_1 + Cx_2 - P(t)), \end{aligned} \right\}$$

или

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (4.61)$$

Считая, что узловые перемещения и время зависят от некоторого параметра s , введем в систему (4.61) дополнительное уравнение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t); \\ \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Умножая первое уравнение системы (4.62) на $\frac{dt}{ds}$, получим

$$\frac{dt}{ds} = f(x, t) \frac{dt}{ds}. \quad (4.63)$$

Подставив (4.63) во второе уравнение системы (4.61), будем иметь

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 (f, f) = 1$$

или

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(f, f)}}. \quad (4.64)$$

Подставив (4.64) в (4.63), получим окончательно систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{f}{\sqrt{(f, f)}}; \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{(f, f)}}; \\ x(0) &= x_0; \\ t(0) &= t_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Для решения задачи Коши (4.65) могут быть использованы методы Рунге–Кутты или Эйлера [9]. Схема метода Эйлера имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \Delta s \frac{f_k}{\sqrt{(f_k, f_k)}}; \\t_{k+1} &= t_k + \Delta s \frac{f_k}{\sqrt{(f_k, f_k)}}.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Решение задачи по схеме (4.55) дает возможность найти компоненты вектора перемещений z и параметра времени t на каждом шаге по ведущему параметру s .

Пример 4.4. Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Для уравнения вынужденных колебаний с учетом затухания

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (4.67)$$

система типа (4.61) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P(t) \end{pmatrix}.$$

Численное решение задачи Коши выполним методом Эйлера [12] при начальных условиях $z_1(0) = A = 2$, $z_2(0) = 0$, $t(0) = 0$ и значениях параметров $k = 1$, $m = 1$, $c = 0,2$, $n = \frac{c}{2m} = 0,1$, $\omega_0 = 1$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = 0,995$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,315$, $\omega_0 = 0,05$. Нагрузку, фигурирующую в правой части уравнения (4.67), зададим в виде

$$P(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } 0 \leq t < 2; \\ 4 & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

Перемещение при статическом нагружении для $P = 4$ зададим значением $z_{\text{ст}} = 4$. Результаты решения задачи приведены на рис. 4.10.

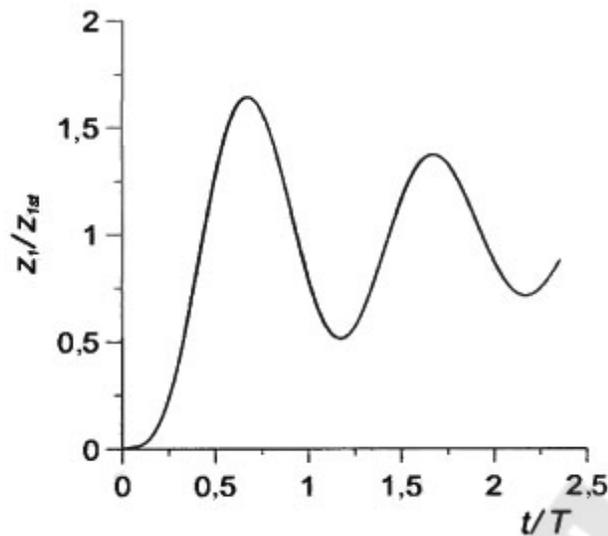


Рис. 4.10. Решение динамической задачи методом продолжения решения по параметру

По горизонтали откладывается безразмерная величина t/T , равная отношению времени t к периоду колебаний T , а по вертикали отношение перемещения z_1 к перемещению при статическом нагружении $z_{1ст}$.

ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений параболического типа

Постановка задач для уравнений параболического типа. Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид [12]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{a^2 d^2 u}{dx^2}, 0 < x < l, t > 0. \quad (5.1)$$

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения искомой функции $u(x, t)$ в виде:

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5.2)$$

$$u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (5.3)$$

т. е. граничные условия первого рода, и, кроме того, заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (5.4)$$

то задачу (5.1)–(5.4) называют первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (5.1).

В терминах теории теплообмена $u(x, t)$ – распределение температуры в пространственно-временной области, $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\}$, a^2 – коэффициент температуропроводности, а (5.2), (5.3) с помощью функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$ задают температуру на границах $x = 0$ и $x = l$.

Если на границах $x = 0$ и $x = l$ заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной:

$$\frac{du(0, t)}{dx} = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5.5)$$

$$\frac{du(l, t)}{dx} = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (5.6)$$

т. е. граничные условия второго рода, то задачу (5.1), (5.4)–(5.6) называют второй начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (5.1). В терминах теории теплообмена на границах в этом случае заданы тепловые потоки [11].

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной:

$$\frac{adu(0, t)}{dt} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5.7)$$

$$\frac{\gamma du(l, t)}{dt} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

т. е. граничные условия третьего рода, то задачу (5.1), (5.4), (5.7), (5.8) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (5.1). В терминах теории теплообмена граничные

условия (5.7), (5.8) задают теплообмен между газообразной или жидкой средой и границами расчетной области с неизвестными температурами $u(0, t)$, $u(l, t)$.

Для пространственных задач теплопроводности в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ первая начально-краевая задача имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \right), M(x, y, z) \in \Omega, t > 0; \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(M, t) = \varphi(M, t), M(x, y, z) \in \Gamma, t > 0; \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(M, 0) = \psi(M, t), M(x, y, z) \in \overline{\Omega}, t > 0. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Аналогично ставится вторая и третья начально-краевые задачи для пространственного уравнения задачи (5.9)–(5.11).

На практике часто ставятся начально-краевые задачи теплопроводности со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются граничные условия различных родов.

Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа. Основные определения, связанные с методом конечных разностей, рассмотрим на примере конечно-разностного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (5.1)–(5.4). Нанесем на пространственно-временную область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ конечно-разностную сетку ω_{ht} :

$$\omega_{ht} = \{x_i = jh, j = \overline{0, N}; t^k = kt, l = \overline{0, K}\} \quad (5.12)$$

с пространственным шагом $h = l/N$ и шагом по времени $\tau = T/K$ (рис. 5.1).

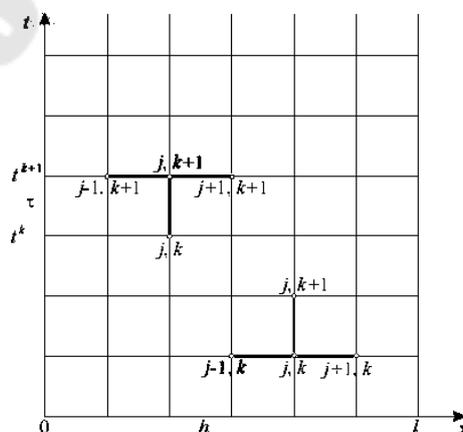


Рис. 5.1. Конечно-разностная сетка

Сеточной функцией задачи (5.1)–(5.4) (обозначение u_j^k) назовем однозначное отображение целых аргументов (j, k) в значения функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$ [31].

На введенной сетке (5.12) из рис. 5.1 введем сеточные функции u_j^k , u_j^{k+1} , первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в задаче (5.1)–(5.4) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей, получим:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau); \quad (5.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau). \quad (5.14)$$

Подставляя (5.13), (5.14) в задачу (5.1)–(5.4), получим явную конечно-разностную схему для этой задачи в форме:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^k = \varphi_0(t^k), \quad u_N^k = \varphi_l(t^k), \quad k = \overline{0, K}, \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (5.15)$$

где для каждого j -го уравнения все значения сеточной функции известны, за исключением одного – u_j^k , которое может быть определено явно из соотношений (5.15). В соотношения (5.15) краевые условия ($j = 0, j = N$) входят при значениях $j = 1, j = N + 1$, а начальное условие – при $k = 0$. Если в (5.14) дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (5.16)$$

то после подстановки (5.13), (5.16) в задачу (5.1)–(5.4) получим неявную конечно-разностную схему для этой задачи:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1}), \quad k = \overline{0, K}, \quad u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}. \quad (5.17)$$

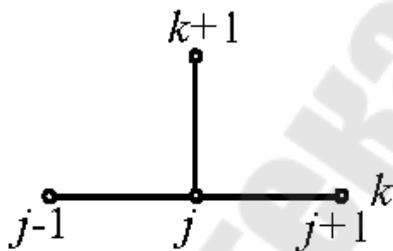
Теперь сеточную функцию u_j^{k+1} на верхнем временном слое можно получить из решения СЛАУ [11] (5.17) с трехдиагональной матрицей. Эта СЛАУ в форме, пригодной для использования метода прогонки, имеет вид:

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1; \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = \overline{2, N-2}; \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + c_N u_{N+1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1, \end{cases}$$

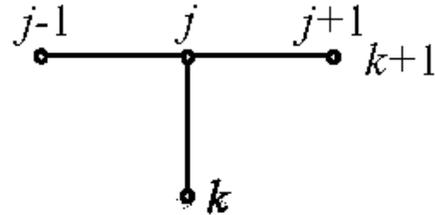
где $a_j = \sigma$, $j = \overline{2, N-1}$; $b_j = -(1 + 2\sigma)$, $j = \overline{1, N-1}$; $c_j = \sigma$, $j = \overline{1, N-2}$; $d_j = -u_j^k$, $j = \overline{2, N-2}$; $d_1 = -(u_1^k + \sigma\varphi(t^{k+1}))$; $d_{N-1} = -u_{N-1}^k + \sigma\varphi(t^{k+1})$; $\sigma = a^2 t / h^2$.

Шаблонном конечно-разностной схемы называют ее геометрическую интерпретацию на конечно-разностной сетке.

На рис. 5.2 приведены шаблоны для явной (5.15) и неявной (5.17) конечно-разностных схем при аппроксимации задачи (5.1)–(5.4).



шаблон явной схемы



шаблон неявной схемы

Рис. 5.2. Шаблоны явной и неявной конечно-разностных схем для уравнения теплопроводности

Явная конечно-разностная схема (5.15), записанная в форме

$$u_j^{k+1} = \sigma u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{at}{h}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

обладает тем *достоинством*, что решение на верхнем временном слое t^{k+1} получается сразу (без решения СЛАУ) по значениям сеточных функций на нижнем временном слое t^k , где решение известно (при $k = 0$ значения сеточной функции формируются из начального условия (5.4)). Но эта же схема обладает существенным *недостатком*, поскольку она является условно устойчивой с условием $\sigma = a^2 t / h^2$, накладываемым на сеточные характеристики t и h .

С другой стороны, неявная конечно-разностная схема (5.17), записанная в форме

$$a_j u_j^{k+1} + b u_j^{k+1} + c u_{j+1}^{k+1} = d_j, j = \overline{1, N-1}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.19)$$

приводит к необходимости решать СЛАУ, но зато эта схема абсолютно устойчива.

Проанализируем схемы (5.18), (5.19). Пусть точное решение, которое не известно, возрастает по времени, т. е. $u_j^{k+1} > u_j^k$. Тогда, в соответствии с явной схемой (5.18) разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, так как u_j^{k+1} определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени.

Для неявной схемы (5.19) на возрастающем решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое.

На убывающем решении картина изменяется противоположным образом: явная конечно-разностная схема завышает решения, а неявная – занижает (рис. 5.3).

На основе этого анализа возникла идея о построении более точной неявно-явной конечно-разностной схемы с весами при пространственных конечно-разностных операторах, причем при измельчении шагов τ и h точное (неизвестное) решение может быть взято в «вилку» сколь угодно узкую, так как если явная и неявная схемы аппроксимируют дифференциальную задачу и эти схемы устойчивы, то при стремлении сеточных характеристик τ и h к нулю решения по явной и неявной схемам стремятся к точному решению с разных сторон [12].

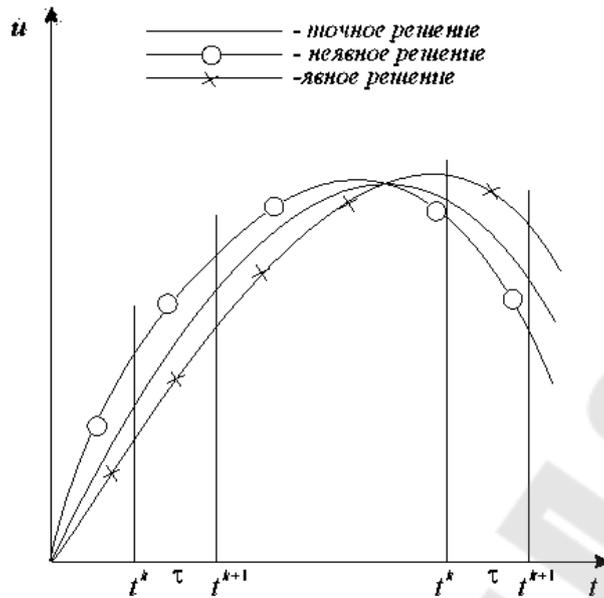


Рис. 5.3. Двусторонний метод аппроксимации

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (5.20)$$

где θ – вес неявной части конечно-разностной схемы; $1-\theta$ – вес для явной части, причем $0 \leq \theta \leq 1$. При $\theta = 0$ имеем полностью неявную схему, при $\theta = 0$ – полностью явную схему и при $\theta = 1/2$ – схему Кранка–Николсона. Для схемы Кранка–Николсона ($\theta = 1/2$) порядок аппроксимации составляет $O(\tau^2 + h^2)$, т. е. на один порядок по времени выше, чем обычные явная или неявная схемы.

Неявно-явная схема с весами (5.20) абсолютно устойчива при $1/2 \leq \theta \leq 1$ и условно устойчива с условием $b \leq 1/2$ при $1/2 \leq \theta \leq 1$.

Таким образом, схема Кранка–Николсона (5.20) при $\theta = 1/2$ абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной x .

Аппроксимация граничных условий, содержащих производные.

В задачах математической физики вообще, и в задачах теплопроводности в частности, граничные условия 1-го рода аппроксимируются точно в узлах на границе расчетной области. Граничные условия 2-го и 3-го рода отличаются тем, что в них присутствует производная первого порядка искомой функции по пространственной переменной. Поэтому для замыкания конечно-разностной схемы необходима их

аппроксимация. Простейшим вариантом является аппроксимация производных направленными разностями первого порядка:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h).$$

Тогда в общем случае граничных условий 3-го рода (5.7), (5.8) уравнения, связывающие значения искомой функции в двух крайних узлах разностной сетки, выглядят следующим образом:

$$\frac{a(u_1^{k+1} - u_0^{k+1})}{h} + \beta u^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1}) + O(h);$$

$$\frac{\gamma(u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1})}{h} + \delta u^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}) + O(h).$$

Дополняя полученными уравнениями явную конечно-разностную аппроксимацию во внутренних узлах, получим явную разностную схему для третьей начально-краевой задачи (5.1), (5.4), (5.7), (5.8):

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1});$$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{t} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, k = \overline{0, K-1};$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}).$$

В результате алгоритм перехода на новый временной слой t^{k+1} с использованием явной схемы можно представить в следующем виде:

$$u_j^{k+1} = \sigma u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + \sigma u_{j-1}^k; \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}; \quad j = \overline{1, N-1};$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\frac{a}{h}}{\beta - \frac{a}{h}} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \frac{a}{h}};$$

$$u_N^{k+1} = -\frac{\frac{\gamma}{h}}{\delta - \frac{\gamma}{h}} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta - \frac{\gamma}{h}}.$$

То есть сначала рассчитываются значения искомой функции во всех внутренних узлах на новом временном слое, а затем определяются значения на границах.

При использовании неявной конечно-разностной схемы получаем следующий разностный аналог дифференциальной задачи:

$$\begin{aligned} b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} &= d_0; \\ a_j u_{j+1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} &= d_j, j = \overline{1, N-1}; \\ b_N u_{N-1}^{k+1} + c_N u_N^{k+1} &= d_N, \end{aligned}$$

где $b_0 = \beta - \alpha/h$; $c_0 = \alpha/h$; $d_0 = \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha/h}$; $a_N = -\gamma/h$; $b_N = \delta + \gamma/h$;

$d_N = \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta + \gamma/h}$; $a_j = \sigma$; $b_j = -(1 + 2\sigma)$; $c_j = \sigma$; $d_j = -u_j^k$; $j = \overline{1, N-1}$;

$$\sigma = \frac{a^2 t}{h^2}.$$

В результате для получения решения на новом временном слое t^{k+1} решается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Аналогичная картина имеет место и при использовании неявно-явной схемы с весами.

Принципиальной особенностью рассмотренного выше подхода является первый порядок аппроксимации граничных условий. То есть порядок аппроксимации в граничных узлах ниже порядка аппроксимации во внутренних узлах расчетной области. При этом глобальный порядок аппроксимации (во всей расчетной области) равен наименьшему относительно всех узлов сетки порядку аппроксимации.

Одним из способов повышения порядка аппроксимации граничных условий является использование формул численного дифференцирования второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t^{k+1}) = \frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} + O(h^2);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t^{k+1}) = \frac{u_{N-2}^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + 3u_N^{k+1}}{2h} + O(h^2).$$

В случае явной схемы алгоритм вычисления решения на новом временном слое при такой аппроксимации граничных условий не при-

обретает принципиальных изменений. Если же используется неявная схема, то получающаяся при этом СЛАУ теряет трехдиагональный вид (первое и последнее уравнение содержат три неизвестных). Этот недостаток легко устраним, так как путем линейной комбинации первого уравнения со вторым (последнего с предпоследним) можно добиться исключения третьего неизвестного из соответствующего уравнения. Однако при этом возможно нарушение диагонального преобладания матрицы и, следовательно, нарушение условий применимости метода прогонки.

Более эффективным является подход, позволяющий повысить порядок аппроксимации граничных условий без увеличения числа узлов в аппроксимационных соотношениях. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим следующий пример.

Пример 5.1. Решить третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, содержащего как конвективные члены (пропорциональные производной $\partial u / \partial x$), так и источники члены, содержащие искомую функцию $u(x, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + gu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \end{array} \right. \quad (5.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \end{array} \right. \quad (5.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \end{array} \right. \quad (5.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Решение. Во внутренних узлах конечно-разностной сетки неявная конечно-разностная схема для уравнения (5.21) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{t} &= \frac{a^2}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + \frac{b}{2h} (u_{j-1}^{k+1} - u_{j+1}^{k+1}) + \\ &+ gu_j^{k+1} + O(t + h^2), \quad j = 1, N-1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Если производные первого порядка в граничных условиях (5.22) и (5.23) аппроксимировать по следующей схеме (с помощью отношения конечных разностей справа и слева):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h),$$

то граничные условия аппроксимируются с первым порядком, и глобальный порядок будет равен первому порядку несмотря на то, что во всех остальных узлах порядок аппроксимации по пространственным переменным равен двум. Для сохранения порядка аппроксимации, равного двум, в граничных узлах разложим на точном решении значение u_1^{k+1} в окрестности точки $x=0$ в ряд Тейлора по переменной x до третьей производной включительно, а u_{N-1}^{k+1} – в аналогичный ряд в окрестности точки $x=l$, получим (в предположении, что функция $u(x,t)$ в граничных узлах имеет первые производные по времени и вторые по x):

$$u_1^{k+1} = (O + h, t^{k+1}) = u_0^{k+1} + \left. \frac{du}{dx} \right|_0^{k+1} h + \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3); \quad (5.26)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = (l + h, t^{k+1}) = u_N^{k+1} + \left. \frac{du}{dx} \right|_N^{k+1} h + \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (5.27)$$

Далее, подставим сюда значения второй производной в граничных узлах, полученные из дифференциального уравнения (5.21):

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{j=0,N}^{k+1} = \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{a^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{a^2} u \right)_{j=0,N}^{k+1},$$

и найдем из полученных выражений (5.26), (5.27) значения первой

производной $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{j=0,N}^{k+1}$ в граничных узлах с порядком $O(\tau + h^2)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} (u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2a^2 - bh} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} + \frac{gh}{2a^2 - bh} u_0^{k+1} + O_1(h^2);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)} (u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}) + \frac{h}{2a^2 - bh} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_N^{k+1} - \frac{gh}{2a^2 - bh} u_N^{k+1} + O_2(h^2).$$

Подставляя в $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^{k+1}$ (5.22), а $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_N^{k+1}$ в (5.23) и аппроксимируя полученные соотношения в соответствующих граничных узлах (при этом $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} = \frac{u_0^{k+1} - u_0^k}{\tau} + O(\tau)$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_0^{k+1} = \frac{u_0^{k+1} - u_0^k}{\tau} + O(\tau)$), получим алгебраические уравнения для граничных узлов, в каждом из которых два неизвестных:

$$\begin{aligned} b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} &= d_0; \quad j = 0; \\ a_0 &= 0; \quad b_0 = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{t} - gh - \frac{\beta}{a}(2a^2 - bh); \quad c_0 = -\frac{2a^2}{h}; \\ d_0 &= \frac{h}{t} u_0^k - \varphi_0(t^{k+1}) \frac{2a^2 - bh}{a}; \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} a_N u_{N-1}^{k+1} + b_N u_N^{k+1} &= d_N; \quad j = N; \\ a_N &= -\frac{2a^2}{h}; \quad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{t} = gh + \frac{\delta}{\gamma}(2a^2 - bh); \quad c_N = 0; \\ d_N &= \frac{h}{t} u_N^k + \varphi_1(t^{k+1}) \frac{2a^2 + bh}{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Таким образом, (5.28) – конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (5.22) на левой границе $x = 0$, а (5.29) – конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (5.23) на правой границе $x = l$, которые сохраняют тот же порядок аппроксимации, что и в конечно-разностной аппроксимации (5.25) дифференциального уравнения (5.21).

Приписывая к граничным конечно-разностным уравнениям (5.28), (5.29), каждое из которых содержит два значения сеточной функции, алгебраические уравнения (5.25), записанные в виде

$$\begin{aligned} a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} &= d_j; \quad j = \overline{1, N-1}; \\ a_j &= -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h} \right); \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{t} - g; \quad c_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h} \right); \quad d_j = \frac{1}{t} u_j^k, \end{aligned} \quad (5.30)$$

получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемую методом прогонки [1] ($a_0 = 0; c_N = 0$):

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}};$$

$$B_j = -\frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}} \left(A_0 = -\frac{c_0}{b_0}; B_0 = -\frac{d_0}{b_0}; A_N = 0 \right); \quad j = \overline{0, N}; \quad (5.31)$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j (u_N^{k+1} = B_N), \quad j = N, N-1, \dots, 0. \quad (5.32)$$

Изложенный метод аппроксимации краевых условий, содержащих производные по пространственным переменным, повышает не только порядок аппроксимации, но и сохраняет консервативность конечно-разностной схемы, т. е. в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы сохранения, на основе которых выведены дифференциальные соотношения задачи (5.21)–(5.24).

Аналогичный подход можно осуществить в краевых задачах для дифференциальных уравнений любых типов.

5.2. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений гиперболического типа

Постановка задач для уравнений гиперболического типа. Классическим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение, которое в области $0 < x < 1, t > 0$ имеет вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Данное уравнение описывает, в частности, процесс малых поперечных колебаний струны. В этом случае $u(x, t)$ – поперечные перемещения (колебания) струны, a – скорость распространения малых возмущений в материале, из которого изготовлена струна.

Если концы струны движутся по заданным законам, т. е. на концах заданы перемещения (или значения искомой функции), то первая начально-краевая задача для волнового уравнения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (5.33) \\ u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (5.34) \\ u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \quad (5.35) \\ u(x, 0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \quad (5.36) \\ \frac{du(x, u)}{dt} = \psi_2(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (5.37) \end{array} \right.$$

причем, если концы струны жестко закреплены, то $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$.

Как видно, в задачах для волнового уравнения, кроме начального распределения искомой функции, задается еще распределение начальной скорости перемещения.

Если на концах струны заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной (т. е. на концах заданы значения первых производных по переменной x), то ставится вторая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{u(0, t)}{dx} = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{u(l, t)}{dx} = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{du(x, u)}{dt} = \psi_2(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

В условиях, когда концы струны *свободны*, функции $\varphi_0(t) = \varphi_l(t) = 0$.

Наконец в условиях, когда концы закреплены упруго, т. е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, ставится третья начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ a \frac{u(0,t)}{dx} + \beta u(0,t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{u(l,t)}{dx} + \delta u(l,t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{du(x,u)}{dx} = \psi_2(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Аналогично ставятся двумерные и трехмерные начально-краевые задачи для двумерного и трехмерного волнового уравнения.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений гиперболического типа. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения (5.33)–(5.37). На пространственно-временной сетке (5.12) будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (5.33) одной из следующих конечно-разностных схем:

– с шаблоном на рис. 5.4, а:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k+1}}{t^2} = \\ & = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(t^2 + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (5.38)$$

– с шаблоном на рис. 5.4, б:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^k}{t^2} = \\ & = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(t + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.39)$$

При этом схема (5.38) является *явной*. С ее помощью решение u_j^{k+1} , $j = \overline{1, N-1}$, $k = 1, 2, \dots$ определяется сразу, поскольку значения сеточных функций u_j^{k-1} , u_j^k на нижних временных слоях должны быть известны. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум, как по пространственной, так и по вре-

менной переменной. При этом явная конечно-разностная схема (5.38) для волнового уравнения условно устойчива с условием $\sigma = \frac{a^2 t^2}{h^2} < 1$, накладываемым на сеточные характеристики τ и h .

Схема (5.39) является неявной и обладает абсолютной устойчивостью. Ее можно свести к СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемой методом прогонки.

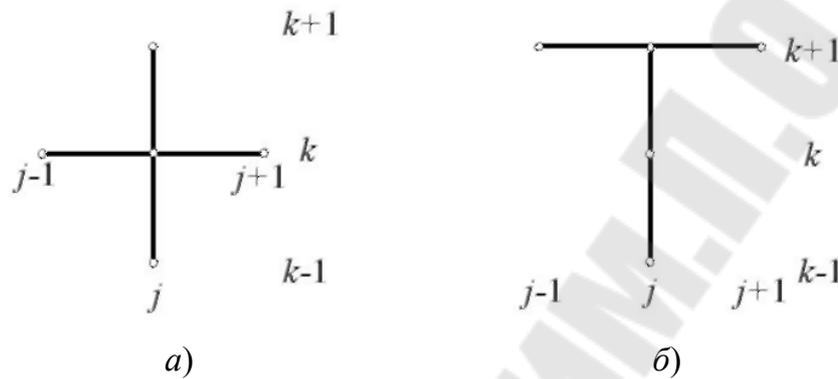


Рис. 5.4. Шаблоны конечно-разностных схем для волнового уравнения

В обеих схемах необходимо знать значения u_j^{k-1} , u_j^k , $j = \overline{1, N-1}$, $k = 1, 2, \dots$ на нижних временных слоях [27]. Для $k = 1$ это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), j = \overline{0, N}, \quad (5.40)$$

где $\psi_1(x)$ – функция из начального условия (5.36).

Для определения u_j^1 можно воспользоваться простейшей аппроксимацией второго начального условия (5.37):

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{t} = \psi_2(x_j).$$

Откуда для искомых значений u_j^1 получаем следующее выражение:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)t.$$

Недостатком такого подхода является первый порядок аппроксимации второго начального условия. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся следующей процедурой.

Разложим u_j^1 в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности $t = 0$:

$$u_j^1 = u(x_{j,0} + t) = u_j^0 + \left. \frac{du}{dt} \right|_j^0 t + \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_j^0 \frac{t^2}{2} + O(t^3). \quad (5.41)$$

Для определения второй производной в выражении (5.41) воспользуемся исходным дифференциальным уравнением

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j).$$

В результате получаем искомую сеточную функцию u со вторым порядком точности:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)t + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{t^2}{2}.$$

После определения из начальных условий значений сеточных функций, u_j^0 , u_j^1 на двух первых временных слоях вычислительный процесс продолжается согласно схемам (5.38) или (5.39). При этом аппроксимация краевых условий (5.34) и (5.35) производится аналогично тому, как это описывалось выше для уравнений параболического типа. Для иллюстрации этого этапа рассмотрим следующий пример.

Пример 5.2. Выписать явную конечно-разностную схему для третьей начально-краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ a \frac{u(0, t)}{dx} + \beta u(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{du(l, t)}{dx} + \delta u(l, t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{du(x, u)}{dt} = \psi_2(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Решение. Аппроксимация дифференциального уравнения на шаблоне (5.46) выглядит следующим образом:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b \frac{u_{j+1}^k + u_{j-1}^k}{2h} + cu_j^k + f_j^k,$$

$$j = \overline{1, N-1}; k = 1, 2, \dots,$$

где $f_j^k = f(x_j, t^k)$.

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1});$$

$$\gamma \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}).$$

В результате переход на новый временной слой представляется следующим алгоритмом:

$$u_j^{k+1} = u_{j+1}^k \left(\frac{a^2 \tau^2}{h^2} + b \frac{\tau^2}{2h} \right) + u_j^k \left(-2 \frac{a^2 \tau^2}{h^2} + 2 + c\tau^2 \right) +$$

$$+ u_{j-1}^k \left(\frac{a^2 \tau^2}{h^2} - b \frac{\tau^2}{2h} \right) - u_j^{k-1} + \tau^2 f_j^k;$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{a}{\beta - \frac{a}{h}} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\beta - \frac{a}{h}};$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\gamma}{\delta - \frac{\gamma}{h}} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_1(t^{k+1})}{\delta - \frac{\gamma}{h}}.$$

Таким образом, сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних узлах на новом временном слое, после чего из аппроксимации граничных условий находятся значения функции и в крайних узлах [29].

Для окончательного замыкания вычислительного процесса определим, исходя из начальных условий, значения искомой функции на двух первых временных слоях t^0, t^1 .

В начальный момент времени значения u_j определяются точно:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j).$$

Если воспользоваться аппроксимацией первого порядка по времени, то, как было показано выше, получим

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Для повышения порядка аппроксимации разложим u_j^1 в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности $t = 0$:

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + t) = u_j^0 + \left. \frac{du}{dt} \right|_j^0 \tau + \frac{d^2u}{d^2t} \Big|_j^0 \frac{t^2}{2} + O(t^3),$$

где согласно исходному уравнению

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_j^0 &= a^2 \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_j^0 + b \left. \frac{du}{dx} \right|_j^0 + cu_j^k + f_j^k = \\ &= a^2 \psi_1''(x_j) + b\psi_1(x_j) + c\psi_1(x_j) + f_j^k. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + \left(a^2 \psi_1''(x_j) + b\psi_1(x_j) + c\psi_1(x_j) + f_j^k \right) \frac{\tau^2}{2}.$$

5.3. Построение математической модели микроуровня на основе дифференциальных уравнений эллиптического типа

Постановка задач для уравнений эллиптического типа. Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

или уравнение Лапласа при $f(x, y) = 0$.

Здесь функция $u(x, y)$ имеет различный физический смысл, а именно: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т. п.

Если на границе Γ расчетной области $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ задана искомая функция, то соответствующая первая краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется задачей Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.43)$$

Если на границе Γ задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая вторая краевая задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа или Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.45)$$

При этом n – направление внешней к границе Γ нормали.

Более приемлемой является координатная форма краевого условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, i) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, j) = \varphi(x, y),$$

где $\cos(\hat{n}, i)$, $\cos(\hat{n}, j)$ – направляющие косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе Γ ; i и j – орты базисных векторов.

Наконец третья краевая задача для уравнения Пуассона (Лапласа) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} + au|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Конечно-разностная аппроксимация задач для уравнений эллиптического типа. Рассмотрим краевую задачу для уравнений Лапласа или Пуассона (5.42), (5.43) в прямоугольнике $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$, на который наложим сетку:

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N_1}; y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}. \quad (5.46)$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме (вводится сеточная функция u_{ij} , $i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h_1^2} + \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = \\ = f(x_i, y_j), i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

которая на шаблоне (рис. 5.5) имеет второй порядок по переменным x и y , поскольку шаблон центрально симметричен. СЛАУ (5.47) имеет пятидиагональный вид (каждое уравнение содержит пять неизвестных и при соответствующей нумерации переменных матрица имеет ленточную структуру) [30]. Решать ее можно различными методами линейной алгебры, например, итерационными методами, методом матричной прогонки и т. п.

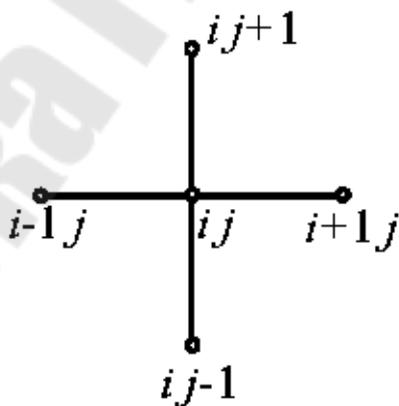


Рис. 5.5. Шаблон центрально-разностной схемы

Рассмотрим симметричный шаблон Либмана численного решения задачи Дирихле (5.42), (5.43). Для простоты изложения этого метода примем $h_1 = h_2 = h$, тогда из схемы (5.47) получим (A: – номер итерации):

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} - h^2 f_{i,j}],$$

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j), i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

На каждой координатной линии (например, $y_j = \text{const}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$) с помощью линейной интерполяции (рис. 5.6) граничных значений $\varphi(x, y)$ определим $u_{ij}^{(0)}$ на нулевой итерации, подставив которые в (5.48), получим распределение $u_{ij}^{(1)}$ на первой итерации:

$$u_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)} + u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)} - h^2 f_{i,j}], i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Это распределение $u_{ij}^{(1)}$ снова подставляется в (5.48), получаем распределение $u_{ij}^{(2)}$ и т. д. Процесс Либмана прекращается, когда

$$\|u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}\| \leq \varepsilon, \|u_{i,j}^{(k)}\| = \max_{i,j} |u_{i,j}^{(k)}|,$$

где ε – наперед заданная.

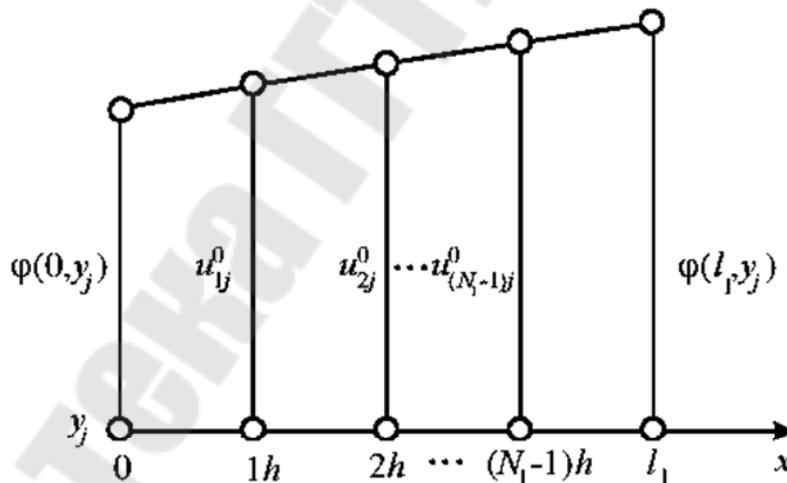


Рис. 5.6. Конечно-разностная точность по методу Либмана

При решении задач с граничными условиями 2-го и 3-го родов наряду с аппроксимацией дифференциального уравнения производится также аппроксимация граничных условий. Здесь в качестве примера приведем разностную схему, аппроксимирующую третью краевую задачу для уравнения Пуассона [2] в прямоугольнике.

Пример 5.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = f(x, y), \quad x \in (0, l_1), \quad y \in (0, l_2); \\ \alpha_1 \frac{du(0, y)}{dx} + \beta_1 u(0, y) = \varphi_1(y_i); \\ \alpha_2 \frac{du(l_1, y)}{dx} + \beta_2 u(l_1, y) = \varphi_2(y_i); \\ \alpha_3 \frac{du(l_2, y)}{dx} + \beta_3 u(l_2, y) = \varphi_3(y_i); \\ \alpha_4 \frac{du(l_3, y)}{dx} + \beta_4 u(l_3, y) = \varphi_4(y_i). \end{array} \right.$$

Как и ранее в прямоугольнике $x \in [0, l_1]$, $y \in [0, l_2]$, построим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N_1}; y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}.$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах по рассмотренной выше центрально-разностной схеме [4]:

$$\frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h_1^2} + \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j),$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{du(0, y)}{dx} + \beta_1 u(0, y) = \varphi_1(y_i); \\ \alpha_2 \frac{du(l_1, y)}{dx} + \beta_2 u(l_1, y) = \varphi_2(y_i); \\ \alpha_3 \frac{du(l_2, y)}{dx} + \beta_3 u(l_2, y) = \varphi_3(y_i); \\ \alpha_4 \frac{du(l_3, y)}{dx} + \beta_4 u(l_3, y) = \varphi_4(y_i). \end{array} \right.$$

В результате получена СЛАУ, содержащая $(N_1 + 1)(N_2 + 1) - 4$ уравнений относительно неизвестных $(u_{i,j} (i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}))$, при этом угловые узлы с координатами, равными $(0,0)$, $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, (N_1, N_2) , в вычислениях не участвуют). Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

Замечание. Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим. С более эффективными методами решения таких СЛАУ можно познакомиться, например, в [15], [17].

Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач. К основным понятиям, связанным с методом конечных разностей, относятся следующие понятия: аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости (или точность). Определим каждое из этих понятий.

Аппроксимация и порядок аппроксимации. Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

где L – один из дифференциальных операторов:

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{диффузионный}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{волновой}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{лапласиан}; \end{cases}$$

$U(x, y)$ – искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче; f – входные данные (т. е. начальные и краевые условия, правые части и т. п.). Операторная форма $(LU)_h = f_h$ описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма $L_h U_h = f_h$ – конечно-разностную схему на точном решении $U(x, y)$, т. е. в конечно-разностной схеме вместо сеточных значений сеточной функции

подставлены точные (неизвестные) значения искомой функции. Для перечисленных дифференциальных операторов L конечно-разностные операторы L_h имеют вид:

$$L = \begin{cases} \frac{\Delta}{t} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{t^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2}; \\ \frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2}; \end{cases} \quad (5.49)$$

$$L_h u_h = f_h.$$

Введем норму сеточной функции, например, с помощью выражения

$$|u^k| = \max |u_j^k|, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.50)$$

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности $|(LU)_h - L_h U_h|$ стремится к нулю при $t, h \rightarrow 0$:

$$(LU) |(LU)_h - L_h U_h| \xrightarrow{t, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.51)$$

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении с порядком p по времени и порядком q по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $|(LU)_h - L_h U_h|$ удовлетворяет равенству [12]:

$$|(LU)_h - L_h U_h| = O(t^p + h^q). \quad (5.52)$$

Таким образом, если конечно-разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, то речь идет о *близости* дифференциального и конечно-разностного операторов в узлах сетки.

Устойчивость. Пусть в конечно-разностной схеме (5.49) входные данные f_h получили возмущения и стали \tilde{f}_h . Тогда сеточная функция u_h также получит возмущение и станет \tilde{u}_h .

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) устойчива по входным данным, если найдется такая ограниченная константа K ,

не зависящая от сеточных характеристик t_h и входных данных f_h , что выполняется неравенство

$$|u_h - \tilde{u}_h| \leq K |f_h - \tilde{f}_h|. \quad (5.53)$$

Таким образом, понятие устойчивости интерпретируется следующим образом: конечно-разностная схема устойчива, если для малых возмущений входных данных (начально-краевых условий и правых частей) конечно-разностная схема обеспечивает малые возмущения сеточной функции u_h , т. е. решение с помощью конечно-разностной схемы находится под контролем входных данных. Если во входные данные f_h входят только начальные условия или только краевые условия, или только правые части, то говорят об устойчивости соответственно по начальным условиям, по краевым условиям или по правым частям.

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) абсолютно (безусловно) устойчива, если неравенство (5.53) выполняется при любых значениях сеточных характеристик τ и h , т. е. на шаги сетки не накладывается никаких ограничений.

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) условно устойчива, если неравенство (5.53) выполняется для сеточных характеристик τ и h , на которые накладываются определенные ограничения.

Сходимость и порядок сходимости

Определение. Решение u_h , полученное с помощью конечно-разностной схемы (5.49), сходится к точному решению U , если какая-либо норма разности $|U_h - u_h|$ стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик τ , h :

$$|U_h - u_h| \xrightarrow{t, h \rightarrow 0} 0. \quad (5.54)$$

Определение. Конечно-разностная схема (5.49) имеет p -й порядок сходимости (порядок точности) по времени и q -й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $|U_h - u_h|$ удовлетворяет равенству

$$|U_h - u_h| = O(t^p + h^q). \quad (5.55)$$

Таким образом, порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

При численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимости. Однако следующая теорема утверждает, что достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость и, в случае положительного ответа, сходимости будет обеспечена.

Теорема эквивалентности. Если конечно-разностная схема (5.49) аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной и эта схема *устойчива*, то решение с помощью этой конечно-разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с p -м порядком по времени и q -м порядком по пространственной переменной [9].

ГЛАВА 6. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

6.1. Основные понятия метода конечных элементов

6.1.1. Методы решения математических моделей краевых задач

Приведем три группы уравнений, применяющихся в линейной теории упругости: статические (или динамические) уравнения равновесия (4.2), геометрические уравнения (уравнения Коши) (4.3), физические уравнения (4.5). В этих 15 уравнениях неизвестными являются шесть компонентов напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$), шесть компонентов деформаций ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$) и три компонента перемещений u, v, w , т. е. всего 15 неизвестных. Таким образом, с математической точки зрения эту задачу можно решить, и ее решение сводится к нахождению 15 функций, удовлетворяющих 15 уравнениям (4.2), (4.3), (4.5), а также условиям (случай заданных статических граничных условий):

$$\left. \begin{aligned} P_{xv} &= \sigma_x \cos(xv) + \tau_{xy} \cos(yv) + \tau_{xz} \cos(zv), \\ P_{yv} &= \tau_{yz} \cos(xv) + \sigma_y \cos(yv) + \tau_{yz} \cos(zv), \\ P_{zv} &= \tau_{zx} \cos(xv) + \tau_{zy} \cos(yv) + \sigma_z \cos(zv). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Решение трех групп уравнений (4.2), (4.3), (4.5) можно вести различными путями в зависимости от того, что прежде всего необходимо определить [9].

Решение задач в перемещениях. Преобразуем основные уравнения (4.2), (4.3), (4.5), выражая все неизвестные через три перемещения u , v , w , которые примем за основные. Из уравнения (4.5) при помощи (4.3) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta; \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\}$$

где $\theta = 3\varepsilon_{cp}$.

Дифференцируя последние тождества, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\}$$

Внося это в первое уравнение группы (4.2), получим:

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \\ &+ G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Выражение, записанное в левой скобке, кратко можно выразить так:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Введем для краткости обозначение гармонической операции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) называют также Лапласовым оператором второго рода над функцией $u = f(x, y, z)$.

Тогда уравнение (6.15) примет вид

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X \rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.4)$$

Аналогично можно преобразовать и два других уравнения группы (4.2), но можно и сразу представить результат, сделав в (6.4) круговую перестановку (x, y, z) и (u, ϑ, w) . Получаем следующую систему метода перемещений в теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X \rho &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y \rho &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z \rho &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Уравнения (6.5) называют уравнениями Ламе.

Таким образом, решение задач теории упругости в перемещениях сводится к решению системы уравнений Ламе при тех или иных граничных условиях [9], [12].

Решение задач в напряжениях. Принимаем за неизвестные напряжения. Так как напряжения из уравнений равновесия непосредственно не определяются, надо применить уравнения совместности деформаций (4.4). Так как в последние входят деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, то их необходимо выразить через напряжения при помощи закона упругости (4.5). Выполнив эту подстановку, не производя промежуточные выкладки и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (4.2), уравнения неразрывности деформаций преобразуем к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned}
 (1 + \mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial x^2} &= 0; \\
 (1 + \mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial y^2} &= 0; \\
 (1 + \mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial z^2} &= 0; \\
 (1 + \mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial x\partial y} &= 0; \\
 (1 + \mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial y\partial z} &= 0; \\
 (1 + \mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial z\partial x} &= 0,
 \end{aligned} \right\} (6.6)$$

где $\sigma^I = 3\sigma_{\text{ср}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Таким образом, для решения задачи необходимо проинтегрировать девять уравнений (4.2), (6.6), а входящие в общие решения этих уравнений произвольные функции определить из условий на поверхности [9], [12].

6.1.2. Вариационные методы решения

Большинство приближенных методов решения различных задач теории упругости основывается на классическом вариационном принципе, согласно которому действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что в этом случае полная энергия системы имеет минимальное значение. Эти методы называют экстремальными или вариационными [1], [10], [12], [22].

Метод сил. Общий интеграл дифференциальных уравнений теории упругости можно представить суммой частного и общего решений. Пусть на поверхности тела заданы компоненты внешних сил P_{xy} , P_{yz} , P_{zx} . Для определения соответствующих этой внешней нагрузке напряжений внутри тела найдем сначала какое-либо частное решение уравнений равновесия (4.2). Уравнения (4.2) удовлетворяют на поверхности тела граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= P_{xv}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= P_{yv}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= P_{zv}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Пусть это решение есть

$$\sigma_x^{(0)}, \sigma_{yx}^{(0)}, \dots, \tau_{zx}^{(0)}. \quad (6.8)$$

Если указанная система напряжений случайно удовлетворяет также и уравнениям неразрывности деформаций, то найденное частное решение уравнений (6.7) и (6.8) является искомым точным решением задачи.

Если совокупность функций $\sigma_x^{(0)}, \sigma_{yx}^{(0)}, \dots, \tau_{zx}^{(0)}$ не удовлетворяет условиям неразрывности деформаций, то для нахождения истинного решения задачи необходимо найти ряд особых частных решений однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти особые уравнения удовлетворяют на поверхности тела отсутствию внешних нагрузок, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пусть такими решениями являются:

$$\sigma_x^{(i)}, \sigma_{yx}^{(i)}, \dots, \tau_{zx}^{(i)}, \text{ где } i = \overline{1, n}. \quad (6.9)$$

Тогда истинное решение задачи можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sum A_i \sigma_x^{(i)}; \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sum A_i \sigma_y^{(i)}; \\ &\dots \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}^{(0)} + \sum A_i \tau_{zx}^{(i)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

где A_i – некоторые неопределенные постоянные.

Варьируя значение величины A_i , получаем возможность изменять напряженное состояние тела, не нарушая условий (4.2) и (6.7).

Для определения этих постоянных подставим (6.10) в выражение потенциалов энергии деформации:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2E} \times \\ &\times \iiint \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Так как действительному напряженному состоянию в упругом теле соответствует минимум потенциальной энергии деформации, то искомую комбинацию параметров A_i можно найти из системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_i} = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, n}.$$

Компоненты напряжений, составляющие частное решение (6.8), назовем компонентами основного тензора напряжений в данной точке. Компоненты напряжений, составляющие общее решение (6.9) назовем компонентами корректирующего тензора напряжений в этой же точке. Тогда выражения (6.10) будут иметь вид:

$$T_{\text{напр}} = T_{\text{напр}}^{(0)} + T_{\text{напр}}^{(1)}.$$

В рассмотренном выше случае основными неизвестными являются напряжения, и поэтому имеются вспомогательные коэффициенты при варьируемых функциях для напряжений. В этом смысле такой приближенный метод можно отнести к разновидности метода сил [1], [11].

Метод перемещений. Очевидно, что основными неизвестными можно принять и перемещения. Тогда вспомогательными неизвестными будут коэффициенты при варьируемых функциях. Для компонентов перемещений можно принять выражения:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{i=1}^m a_i f_i(x, y, z); \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \sum_{i=1}^m b_i \varphi_i(x, y, z); \\ w &= w_0 + \sum_{i=1}^m c_i \psi_i(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

где $u_0 = u_0(x, y, z)$, $\vartheta_0 = \vartheta_0(x, y, z)$, $w_0 = w_0(x, y, z)$ – назначаемые функции координат, не содержащие произвольных постоянных, точно удовлетворяющие граничным условиям; a_1, a_2, \dots, a_m ; b_1, b_2, \dots, b_m ; c_1, c_2, \dots, c_m – произвольные постоянные; f_1, f_2, \dots, f_m – известные функции координат x, y, z .

Эти компоненты составляют как бы основное поле смещений. Слагаемые, следующие за этими функциями в (6.11) под знаками сумм, определяют корректирующие поля смещений. Вид функций f_1, f_2 выбираем так, чтобы согласно (6.11) были удовлетворены граничные условия в перемещениях.

Дальнейший ход рассуждений аналогичен изложенному выше методу сил, т. е. используем принцип наименьшей работы. В выражении для потенциальной энергии в таком случае принимаем не компоненты напряжения, а компоненты деформации, т. е.

$$\mathfrak{E} = G \iiint \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dx dy dz.$$

Затем компоненты деформации выражаем через компоненты смещений. Из условий

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial c_i} = 0 \quad \text{при } i = \overline{1, m}$$

определяем параметры $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$. Такой способ приближенного решения относится к разновидности метода перемещений [1], [9], [16].

6.1.3. Виды конечных элементов и функций формы

В методе конечных элементов исходная расчетная область дискретизируется конечными элементами [9], [16], [30]. В силу размерности рассматриваемой области конечные элементы могут быть соот-

ветственно одномерными, двумерными и трехмерными. Поведение искомой функции на конечном элементе выражается через известные базисные функции (функции формы):

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \alpha_{ij} N_{ij}^*, \quad (6.12)$$

где F – искомая функция; α_{ij} – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению; N_{ij}^* – базисные функции; n – общее число узлов элемента; s_i – число степеней свободы в i -м узле.

Неизвестные постоянные множители α_{ij} выражаются через значения в узлах искомой функции. Данные значения называются узловыми степенями свободы, или просто степенями свободы конечного элемента. В зависимости от того, содержат ли узловые степени свободы только значения функции или еще дополнительно содержат и значения производных, различают соответственно лагранжевы и эрмитовы конечные элементы.

Таким образом, выражая постоянные множители α_{ij} через значения в узлах искомой функции, (6.12) можно переписать в виде

$$F = \sum_{i=1}^e N_i F_i^e = (\{N\}, \{F^e\}), \quad (6.13)$$

где N_i – функция формы конечного элемента; F_i^e – значение искомой функции в узле конечного элемента; e – общее количество степеней свободы конечного элемента.

При выборе функций формы N_i необходимо руководствоваться следующими условиями [11], [16]:

1. Функции формы должны быть непрерывно дифференцируемы внутри конечного элемента столько раз, каков порядок производной, входящей в исходное дифференциальное уравнение или применяемый вариационный принцип (условие дифференцируемости или условие существования функционала вариационной задачи).

2. При переходе через границы смежных элементов должна обеспечиваться непрерывность искомой функции и существование ее производных (условие межэлементной непрерывности).

3. При стремлении размера конечного элемента к нулю функции формы должны обеспечить возможность получения конечных значе-

ний искомой функции и ее производных, входящих в вариационный функционал.

4. Кроме того, для существования решения, основанного на принципе минимума энергии, необходимо, чтобы реализовывалось состояние постоянной деформации. В частности, при перемещении тела как твердого целого должна обеспечиваться нулевая энергия деформации.

5. Из соотношений (6.13) следует, что $N_i = 1$ только в i -м узле, и нулю – во всех остальных узлах.

На практике с целью упрощения расчетов при выборе функций формы могут нарушаться одно или несколько из приведенных условий. В этом случае нельзя гарантировать сходимость процесса к точному решению. Однако полученные результаты могут обеспечивать достаточную для практического применения адекватность.

Одномерные элементы. Одномерные элементы представляют собой отрезки, содержащие две, три и более узловых точек [30], [31]. Простейшим одномерным элементом является линейный лагранжевый элемент (рис. 6.1).



Рис. 6.1. Линейный лагранжевый элемент

Данный элемент имеет два узла: один в точке x_1 с координатой -1 , другой в точке x_2 с координатой 1 . Каждый узел имеет по одной степени свободы. Соотношения (6.13) примут вид:

$$F(x) = N_1(x)F(x_1) + N_2(x)F(x_2).$$

Воспользовавшись условием п. 5 для функций формы, получим:

$$N_1(x) = \frac{1}{2}(1-x), \quad N_2(x) = \frac{1}{2}(1+x).$$

Откуда

$$F(x) = \frac{1}{2}(1-x)F(x_1) + \frac{1}{2}(1+x)F(x_2) = c + bx, \quad (6.14)$$

где $c = \frac{1}{2}(F(x_1) + F(x_2))$; $b = \frac{1}{2}(F(x_2) - F(x_1))$.

То есть искомая функция на конечном элементе аппроксимируется линейным полиномом (полиномом первого порядка).

В случае, если элемент, представленный на рис. 6.1, будет иметь еще промежуточную точку $x_3 = 0$, то можно получить квадратичный лагранжевый элемент. Аналогично, как и для линейного элемента, можно найти функции формы, которые будут иметь вид:

$$N_1(x) = \frac{1}{2}x(1-x), \quad N_2(x) = \frac{1}{2}x(1+x), \quad N_3(x) = 1-x^2. \quad (6.15)$$

Тогда (6.13) будет иметь вид:

$$F(x) = \frac{1}{2}x(1-x)F(x_1) + \frac{1}{2}x(1+x)F(x_2) + (1-x^2)F(x_3) = c + bx + ax^2, \quad (6.16)$$

где $a = \frac{1}{2}x^2(-F(x_1) + F(x_2) - 2F(x_3))$; $b = \frac{1}{2}x(F(x_1) + F(x_2))$; $c = F(x_3)$.

То есть искомая функция на конечном элементе аппроксимируется квадратичным полиномом. Как ни сложно заметить, это и определяет название (порядок) элемента.

Линейный элемент обеспечивает существование только первой производной, квадратичный – первой и второй. Согласно условию 1 это и будет определять их область применения.

Аналогично рассуждая, можно построить одномерный элемент и более высокого порядка.

Рассмотрим кубический элемент, который в качестве степеней свободы будет содержать не только $F(x)$, но и $\frac{dF(x)}{dx}$. Данный элемент будет содержать два узла, по две степени свободы в каждом. Для данного элемента соотношения (6.16) примут вид:

$$F(x) = N_1(x)F(x_1) + N_2(x)F(x_2) + N_3(x)F'(x_1) + N_4(x)F'(x_2);$$

$$F'(x) = N'_1(x)F(x_1) + N'_2(x)F(x_2) + N'_3(x)F'(x_1) + N'_4(x)F'(x_2).$$

Руководствуясь условием п. 5, могут быть найдены функции формы:

$$N_1(x) = \frac{1}{4}(1-x)^2(2+x); \quad N_2(x) = \frac{1}{4}(1+x)^2(2-x);$$

$$N_3(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)(1-x); \quad N_4(x) = \frac{1}{4}(-1+x^2)(1+x).$$

Данные функции формы соответствуют эрмитовой полиномиальной интерполяции и поэтому элементы такого типа называются эрмитовыми. Найденные функции формы соответствуют кубическому эрмитову элементу.

Способы нахождения функций формы. Априорный выбор функций формы возможен только для самых простейших элементов. На практике для нахождения функций формы используют два подхода. Первый основан на выборе аппроксимации искомой функции в виде полинома. Степень полинома определяется количеством степеней свободы конечного элемента. Рассмотрим квадратичный лагранжевый элемент. Искомую функцию будем аппроксимировать на конечном элементе полиномом. Для данного элемента необходимо использовать полином второго порядка:

$$F(x) = c + bx + ax^2. \quad (6.17)$$

Так как соотношение (6.17) справедливо для всего конечного элемента, то оно будет справедливо и для его узлов:

$$F(x_i) = c + bx_i + ax_i^2, \quad i = \overline{1,3};$$

или в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ F(x_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

или

$$\{F^e\} = [A]\{\alpha\},$$

где $\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ F(x_3) \end{Bmatrix}$; $[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$ – координатная матрица;

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}.$$

Откуда

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{F^e\}. \quad (6.18)$$

Аппроксимацию (6.17) можно записать в виде

$$F(x) = \{P\} \{\alpha\}, \quad (6.19)$$

где $\{P\} = \{1 \ x \ x^2\}$.

Подставив (6.17) в (6.19), получаем

$$F(x) = \{P\} [A]^{-1} \{F^e\}. \quad (6.20)$$

Сравнивая (6.20) и (6.13), находим

$$\{N\} = \{P\} [A]^{-1}. \quad (6.21)$$

Для рассматриваемого случая:

$$\{N\} = \{1 \ x \ x^2\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \{1 \ x \ x^2\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\ 1 - x^2 \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что полученные выражения для функций формы полностью совпадают с (6.16). Аналогично могут быть найдены функции формы и для более сложных элементов.

Однако данный подход имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, обратная матрица $[A]^{-1}$ в ряде случаев может не существовать. Во-вторых, нахождение обратной матрицы $[A]^{-1}$ может быть сопряжено со значительными алгебраическими трудностями, что не позволит найти точные аналитические зависимости для функций формы.

Непосредственное нахождение функций формы возможно с использованием полиномиальной интерполяции. Интерполяция Лагранжа позволяет определить коэффициенты полиномиального представления функции через значения функции в точках прямой. То есть ищутся коэффициенты полинома заданного порядка, принимающего в указанных точках определенные значения. В рассматриваемом случае это будут значения 1 и 0.

Как известно, для одномерного случая интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x_i - x_j)}, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad (6.22)$$

где m – порядок полинома.

Рассмотрим квадратичный лагранжев элемент. В данном случае $m = 2$ и интерполяция (4.35) запишется в виде:

$$N_1(x) = \frac{(x-1)(x-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \frac{1}{2}(x^2 - x);$$

$$N_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{1}{2}(x^2 + x);$$

$$N_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = -(x^2 - 1).$$

Очевидно, что полученные функции формы совпадают с (6.15).

В случае если степени свободы конечного элемента содержат как значения самой искомой функции, так и ее производных, то для нахождения функций формы используется эрмитова интерполяция аналогично, как и лагранжева.

Двумерные элементы. Простейшим двумерным конечным элементом является треугольный (рис. 6.2) [16], [30], [31].

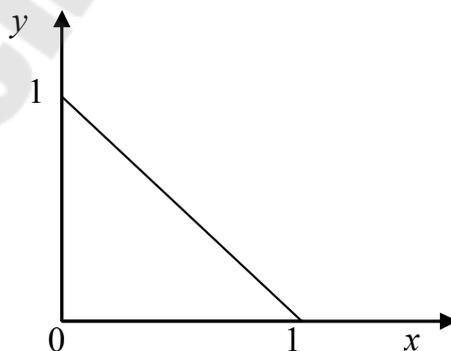


Рис. 6.2. Треугольный конечный элемент

В каждом узле такого элемента будет по две степени свободы и три функции формы. Соотношения (6.13) примут вид:

$$F(x, y) = \left\{ \begin{matrix} u(x, y) \\ \vartheta(x, y) \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^3 \left([E] \{N_i\} \left\{ \begin{matrix} u(x_i, y_i) \\ \vartheta(x_i, y_i) \end{matrix} \right\} \right), \quad (6.23)$$

где $[E]$ – единичная матрица размерности 2×2 ; i – номер узла конечного элемента; x_i, y_i – координаты i -го узла.

Соотношения (6.23) можно переписать в явном виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1(x, y)u(x_1, y_1) + N_2(x, y)u(x_2, y_2) + N_3(x, y)u(x_3, y_3); \\ \vartheta(x, y) &= N_1(x, y)\vartheta(x_1, y_1) + N_2(x, y)\vartheta(x_2, y_2) + N_3(x, y)\vartheta(x_3, y_3). \end{aligned}$$

Для треугольника, изображенного на рис. 6.2, как легко проверить, функции формы примут вид:

$$N_1(x, y) = 1 - x - y; \quad N_2(x, y) = x; \quad N_3(x, y) = y.$$

Аппроксимация исходных функций будет выполняться следующими полиномами:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_1, y_1) + (u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1))x + (u(x_3, y_3) - u(x_1, y_1))y; \\ \vartheta(x, y) &= \vartheta(x_1, y_1) + (\vartheta(x_2, y_2) - \vartheta(x_1, y_1))x + (\vartheta(x_3, y_3) - \vartheta(x_1, y_1))y. \end{aligned} \quad (6.24)$$

В случае произвольно ориентированного треугольника функции формы могут быть найдены с помощью обращения координатной матрицы или интерполирования. Кроме того, можно воспользоваться преобразованием координат и произвольный треугольник привести к треугольнику, изображенному на рис. 6.2. Однако подобные преобразования сопряжены с вычислением значений функций \sin и \cos , которые в общем случае вычисляются приближенно, что вносит определенный вклад в погрешность находимого решения.

Найдем функции формы для произвольного треугольника с использованием координатной матрицы. Аппроксимация искомым функциям будет выполняться полиномом вида (6.24):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ \vartheta(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $\alpha_{1,2,\dots,6}$ – параметры линейризации, постоянные для элемента.

Аналогично рассуждая, как и в случае одномерных элементов, узловые перемещения можно выразить через координаты узловых точек:

$$\{F^e\} = [A]\{\alpha\},$$

где $\{F^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений;

$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$ – координатная матрица; $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$ – век-

тор параметров.

Вычисляя обратную матрицу $[A]^{-1}$ в общем виде, найдем функции формы для произвольного линейного треугольного элемента:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y); \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y); \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2S} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y), \end{aligned} \quad (6.26)$$

где S – площадь конечного элемента.

Очевидно, что функции формы для треугольного элемента, представленного на рис. 6.2, могут быть легко найдены из общей формулы (6.26).

Рассмотрим квадратичный лагранжевый треугольный конечный элемент. Искомые функции на данном элементе будут аппроксимироваться полиномами второго порядка, следовательно, количество неизвестных коэффициентов возрастет до 12. Для их определения необходимо, чтобы конечный элемент имел 12 степеней свободы, что будет соответствовать шести узлам (рис. 6.3).

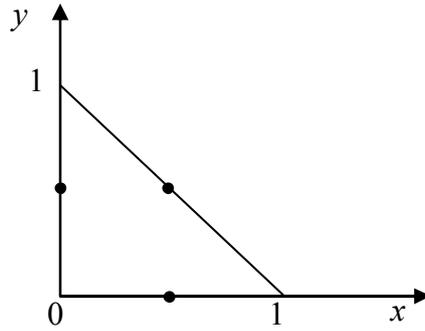


Рис. 6.3. Треугольный конечный элемент с шестью узлами

Для квадратичного треугольного элемента можно подобрать функции формы, которые будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= (x + y - 1)(2x + 2y - 1); & N_2(x, y) &= x(2x - 1); \\
 N_3(x, y) &= y(2y - 1); & N_4(x, y) &= 4x(1 - x - y); \\
 N_5(x, y) &= 4xy; & N_6(x, y) &= 4y(1 - x - y).
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Аналогично, как и в случае линейного элемента, можно найти функции формы и для произвольного лагранжева квадратичного элемента [4].

Линейный прямоугольный элемент изображен на рис. 6.4.

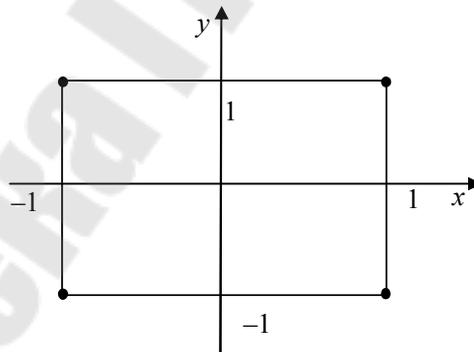


Рис. 6.4. Линейный прямоугольный элемент

Для данного элемента несложно составить функции формы, которые примут вид:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - x)(1 - y); & N_2(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + x)(1 - y); \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + x)(1 + y); & N_4(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - x)(1 + y).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что с помощью преобразования подобия и параллельного переноса осей координат произвольный прямоугольный элемент можно преобразовать к данному.

В этом случае аппроксимации искомой функции будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \\ \vartheta(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) + u(x_4, y_4); \\ \alpha_2 &= -u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) - u(x_4, y_4); \\ \alpha_3 &= -u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) + u(x_4, y_4); \\ \alpha_4 &= u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) - u(x_4, y_4); \\ \alpha_5 &= \vartheta(x_1, y_1) + \vartheta(x_2, y_2) + \vartheta(x_3, y_3) + \vartheta(x_4, y_4); \\ \alpha_6 &= -\vartheta(x_1, y_1) + \vartheta(x_2, y_2) + \vartheta(x_3, y_3) - \vartheta(x_4, y_4); \\ \alpha_7 &= -\vartheta(x_1, y_1) - \vartheta(x_2, y_2) + \vartheta(x_3, y_3) + \vartheta(x_4, y_4); \\ \alpha_8 &= u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2) + u(x_3, y_3) - u(x_4, y_4). \end{aligned}$$

Для квадратичного лагранжевого прямоугольного элемента, как и в случае с треугольным элементом, на каждой из сторон добавляется по одному узлу, а функции формы будут иметь вид [5]:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(1+x-y); & N_2(x, y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1-y)(1+x-y); \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{4}(1+x)(1+y)(-1+x+y); & N_4(x, y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1+y)(1+x+y); \\ N_5(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y); & N_6(x, y) &= \frac{1}{2}(1+x)(1-y^2); \\ N_7(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x^2)(1+y); & N_8(x, y) &= \frac{1}{2}(1-x)(1-y^2). \end{aligned}$$

Несложно найти в этом случае и аппроксимационный полином.

Рассмотрим прямоугольный эрмитов элемент с 4 узлами (рис. 6.5). Данный элемент в узлах будет содержать по 4 степени свободы: значения искомых функций, их первые производные и смешанную произ-

водную: $F(x_i, y_i)$, $\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F(x_i, y_i)}{\partial x \partial y}$. Таким образом на данном элементе необходимо определить 16 функций формы, которые могут быть выражены через 4 базовые функции:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \phi_1(x)\phi_1(y); & N_2(x, y) &= \phi_3(x)\phi_1(y); \\ N_3(x, y) &= \phi_3(x)\phi_3(y); & N_4(x, y) &= \phi_1(x)\phi_3(y); \\ N_5(x, y) &= \phi_2(x)\phi_1(y); & N_6(x, y) &= \phi_4(x)\phi_1(y); \\ N_7(x, y) &= \phi_4(x)\phi_3(y); & N_8(x, y) &= \phi_2(x)\phi_3(y); \\ N_9(x, y) &= \phi_1(x)\phi_2(y); & N_{10}(x, y) &= \phi_3(x)\phi_2(y); \\ N_{11}(x, y) &= \phi_3(x)\phi_4(y); & N_{12}(x, y) &= \phi_1(x)\phi_4(y); \\ N_{13}(x, y) &= \phi_2(x)\phi_2(y); & N_{14}(x, y) &= \phi_4(x)\phi_2(y); \\ N_{15}(x, y) &= \phi_4(x)\phi_4(y); & N_{16}(x, y) &= \phi_2(x)\phi_4(y), \end{aligned}$$

где $\phi_1(\omega) = \frac{1}{4}(1 - \omega^2)(2 + \omega)$; $\phi_2(\omega) = \frac{1}{4}(1 + \omega^2)(2 - \omega)$;

$\phi_4(\omega) = \frac{1}{4}(-1 + \omega^2)(2 + \omega)$; $\phi_3(\omega) = \frac{1}{4}(1 + \omega^2)(2 - \omega)$.

Для исследования объемных тел используют трехмерные конечные элементы, простейшим из которых является линейный элемент в форме тетраэдра (рис. 6.5) [9], [11], [16].

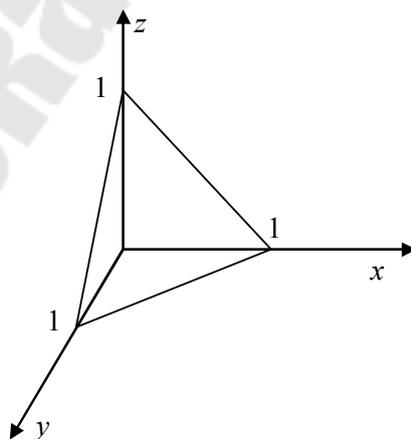


Рис. 6.5. Линейный элемент в форме тетраэдра

Функции формы для данного элемента будут иметь вид:

$$N_1(x, y, z) = 1 - x - y - z; \quad N_2(x, y, z) = x;$$

$$N_3(x, y, z) = y; \quad N_4(x, y, z) = z.$$

В этом случае аппроксимация искомых функций будет осуществляться выражениями:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z; \\ \vartheta(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ \omega(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u(x_1, y_1, z_1); \quad \alpha_2 = -u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2); \\ \alpha_3 &= -u(x_1, y_1, z_1) + u(x_3, y_3, z_3); \quad \alpha_4 = -u(x_1, y_1, z_1) + u(x_4, y_4, z_4); \\ \alpha_5 &= \vartheta(x_1, y_1, z_1); \quad \alpha_6 = -\vartheta(x_1, y_1, z_1) + \vartheta(x_2, y_2, z_2); \\ \alpha_7 &= -\vartheta(x_1, y_1, z_1) + \vartheta(x_3, y_3, z_3); \quad \alpha_8 = -\vartheta(x_1, y_1, z_1) + \vartheta(x_4, y_4, z_4); \\ \alpha_9 &= \omega(x_1, y_1, z_1); \quad \alpha_{10} = -\omega(x_1, y_1, z_1) + \omega(x_2, y_2, z_2); \\ \alpha_{11} &= -\omega(x_1, y_1, z_1) + \omega(x_3, y_3, z_3); \quad \alpha_{12} = -\omega(x_1, y_1, z_1) + \omega(x_4, y_4, z_4). \end{aligned}$$

Так же, как и в случае плоского треугольного элемента, можно получить выражения для функций формы произвольного линейного конечного элемента в форме тетраэдра. Перепишем (6.29) в матричном виде:

$$\{F_0\} = [A^*] \{\alpha\}, \quad (6.30)$$

где

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}\}.$$

Так как (6.30) имеет место для любой точки тетраэдра, то для его узлов будем иметь

$$\{F^e\} = [A]\{\alpha\}, \quad (6.32)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix},$$

где x_i, y_i, z_i ($i = \overline{1,4}$) – координаты узлов тетраэдра.

Из (6.32) следует

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{F^e\}, \quad (6.33)$$

где

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix},$$

где V – объем элементарного тетраэдра; $a_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix};$

$$b_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_n & z_n \end{vmatrix}; \quad c_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_n & z_n \end{vmatrix}; \quad d_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix};$$

i, j, k, n – номера вершин элементарного тетраэдра, принимают значения от 1 до 4.

Остальные значения a, b, c, d получаются круговой перестановкой индексов.

Из (6.33) можно выразить вид функций формы:

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z).$$

Квадратичный тетраэдральный элемент содержит по одному дополнительному узлу на каждом из ребер, таким образом, он имеет 10 узлов. Функции формы для подобного элемента в случае системы координат, как на рис. 6.5, будут иметь вид:

$$N_1(x, y, z) = (1 - x - y - z)(1 - 2x - 2y - 2z); \quad N_2(x, y, z) = -x(1 - 2x);$$

$$N_3(x, y, z) = -y(1 - 2y); \quad N_4(x, y, z) = -z(1 - 2z);$$

$$N_5(x, y, z) = 4x(1 - x - y - z); \quad N_6(x, y, z) = 4xy;$$

$$N_7(x, y, z) = 4y(1 - x - y - z); \quad N_8(x, y, z) = 4z(1 - x - y - z);$$

$$N_9(x, y, z) = 4xz; \quad N_{10}(x, y, z) = 4yz.$$

Аналогично, как и в случае с линейным тетраэдральным элементом, можно найти функции формы для произвольно ориентированного элемента.

6.1.4. Преобразование из локальной системы координат в глобальную

Непосредственный вид функций формы конечного элемента напрямую зависит от системы координат, в которой получен. Как было показано выше, выбор системы координат может значительно упростить вычисления. Но при этом все найденные значения будут спра-

ведливы для локальной системы координат только рассматриваемого элемента. При формировании общей системы необходимо преобразовать полученные значения из локальной системы координат в глобальную [9], [16].

Рассмотрим линейный треугольный конечный элемент (см. рис. 6.3). Будем считать, что данный элемент находится в косоугольной локальной системе координат, которая связывается с исходной декартовой системой соотношениями вида

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{Bmatrix} = [\Xi] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (6.34)$$

где x^* , y^* – локальные координаты; x , y – глобальные координаты; $[\Xi]$ – матрица координатных преобразований.

В рассматриваемом случае, как известно из линейной алгебры, матрица координатных преобразований будет равна:

$$[\Xi] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & 0 & 2S \end{bmatrix},$$

где x_i, y_i ($i = \overline{1,3}$) – координаты узлов треугольника в глобальной системе координат; S – площадь треугольника в глобальной системе координат.

Несложно найти и обратное преобразование:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [\Xi]^{-1} \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 2Sx_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & 2Sy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (6.35)$$

Вычислив функции формы в локальной системе координат, по формулам (6.34) можно найти функции формы в глобальной системе координат.

На практике координатные преобразования выполняют уже после нахождения локальной матрицы жесткости.

Общая процедура нахождения локальной матрицы жесткости. Общую процедуру нахождения локальной матрицы жесткости рассмотрим на примере задачи теории упругости. Будем искать решение

задачи в перемещениях. Воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений:

$$\{\delta F^e\}^T \{R\} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (6.36)$$

где $\{F^e\}$ – вектор узловых перемещений (символ « δ » означает его вариацию); $\{R\}$ – вектор узловых усилий; V – объем конечного элемента.

Искомую функцию будем аппроксимировать соотношениями вида (6.13) в форме по соответствующим компонентам перемещений вдоль координатных осей, т. е.

$$F_j = \sum_{i=1}^n N_i F_{ij}^e, \quad (6.37)$$

где j определяет номер координатной оси.

Воспользуемся уравнениями Коши (4.3), соотношением (6.13) и выразим деформации через перемещения:

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{F^e\}, \quad (6.38)$$

где

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Подставим в закон Гука [17] выражение деформаций через узловые перемещения:

$$\{\sigma\} = [E][Q]\{F^e\}. \quad (6.39)$$

Подставим выражения (6.38) и (6.39) в (6.36):

$$\{\delta F^e\}^T \{R^e\} = \int_V \{\delta F^e\}^T [Q]^T [E][Q] \{F^e\} dV.$$

Учитывая, что интегральное выражение не зависит от перемещений, в конечном итоге получим основное уравнение метода конечных элементов:

$$\{R^e\} = [k] \{F^e\}, \quad (6.40)$$

где $[k] = \int_V [Q]^T [E][Q] dV$ – локальная матрица жесткости.

В случае, если матрица $[Q]$ будет содержать только константы (для линейных конечных элементов), то локальная матрица жесткости будет равна:

$$[k] = V [Q]^T [E][Q].$$

6.2. Решение некоторых задач с использованием метода конечных элементов

6.2.1. Плоская задача теории упругости

Рассмотрим последовательность решения плоской задачи теории упругости в матричной форме для треугольных элементов (рис. 6.1) [9], [16], [31].

Функция перемещений для элементов различной формы выбирается в форме интерполяционных полиномов. Рассмотрим простейший линейный полином для аппроксимации перемещений узлов треугольного элемента

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \vartheta &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

где $\alpha_{1,2,\dots,6}$ – параметры линеаризации, постоянные для элемента.

Таким образом, компоненты перемещений u и ϑ треугольного элемента, узлы которого имеют шесть степеней свободы, можно выразить как произведение матрицы декартовых координат узловых точек на матрицу-столбец параметров поля деформаций:

$$\{F\} = [A]\{\alpha\}, \quad (6.42)$$

где $\{F\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ \vartheta_i \\ \vartheta_j \\ \vartheta_k \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений;

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \text{ – координатная матрица; } \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \text{ –}$$

вектор параметров; $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ – координаты узлов.

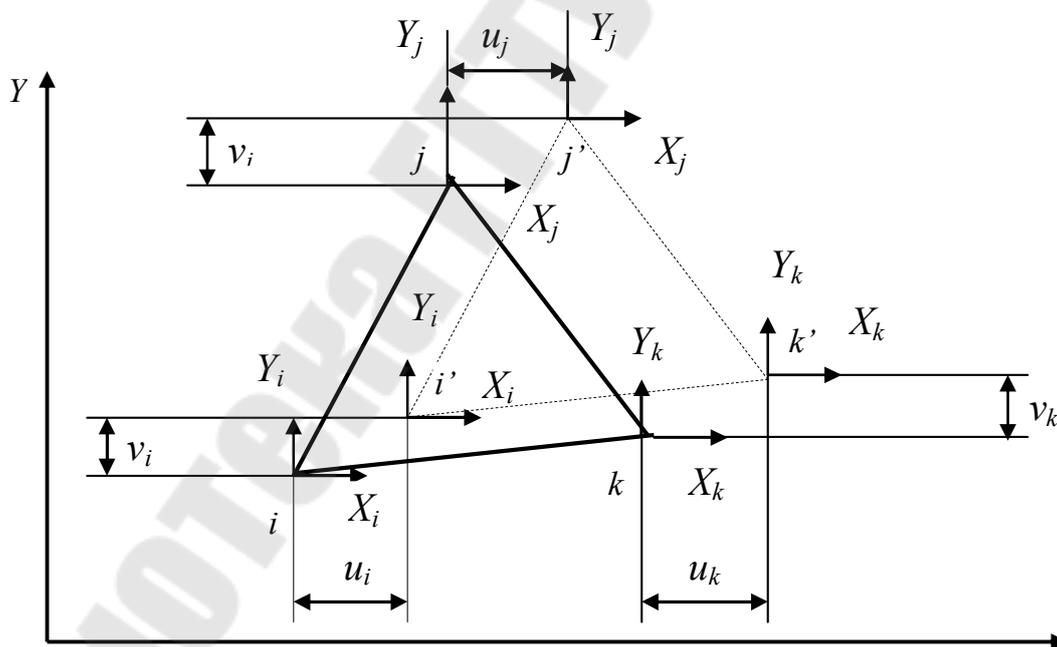


Рис. 6.6. Схема деформации треугольного элемента

Из уравнений (6.42) могут быть найдены неизвестные параметры:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{F^e\}. \quad (6.43)$$

Деформации определяются из уравнений Коши [12]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (6.44)$$

Подставляя в уравнения (6.44) равенства (6.41) и производя дифференцирование, получим:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix}. \quad (6.45)$$

Легко убедиться, что

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\}, \quad (6.46)$$

где $[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Подставляя в уравнения (6.46) формулы (6.43), получим выражения, связывающие три составляющих деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} с перемещениями

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1}\{F^e\}. \quad (6.47)$$

Если заданы функции перемещения, то составляющие деформации определяются из уравнений Коши [12] однозначно. Если же заданы составляющие деформации, то для определения двух составляющих перемещения необходимо проинтегрировать три дифференциальных уравнения (6.44) в частных производных. Для получения однозначного решения в теории упругости Сен-Венаном введены уравнения сплошности или уравнения совместности деформаций [14]. Для случая плоской задачи из шести уравнений совместности деформаций остается одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (6.48)$$

Уравнение (6.47) получается из уравнений Коши при исключении из них перемещений. В методе конечных элементов при аппроксимации перемещений выражениями (6.41) уравнение (6.48) удовлетворяется автоматически. Однако вследствие допущения о постоянстве напряжений и деформаций в пределах элемента на границах элементов имеет место скачок деформаций и уравнение (6.48) удовлетворяется лишь приближенно. Степень приближения зависит от густоты сетки формы треугольника. Наибольшая погрешность будет при выборе элементов в виде вытянутых треугольников. Поэтому в местах высоких градиентов напряжений следует стремиться к равносторонним треугольникам и сгущению сетки в таких областях.

В физических уравнениях (уравнениях обобщенного закона Гука) [12] матрица $[E]$ для случая плоской деформации будет иметь вид:

$$[E] = \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}; \quad (6.49)$$

для случая плоского напряженного состояния

$$[E] = \frac{E}{(1-\mu)(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Подставляя далее уравнение (6.49) в уравнения (6.44), где матрица $[E]$ определяется выражениями (6.45) или (6.50), получим уравнения, в которых напряжения выражены через перемещения:

$$\{\sigma\} = [E][Q][A]^{-1}\{F^e\}. \quad (6.51)$$

Воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений:

$$\{\delta F^e\}^T \{R\} = \iint_S \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dS, \quad (6.52)$$

тогда подставив (6.49) и (6.51) в (6.52) и проварьировав, получим:

$$\{R\} = \iint_S [A]^{-1T} [Q]^T [E][Q][A]^{-1} \{F^e\} dS.$$

Учитывая, что в последнем выражении ни матрицы, ни вектор перемещений не зависят от переменных интегрирования, получаем:

$$\{R\} = [k] \{F^e\}, \quad (6.53)$$

где $[k] = S[A]^{-1T} [Q]^T [E][Q][A]^{-1}$, S – площадь конечного элемента.

Матрица шестого порядка $[k]$ представляет собой матрицу жесткости элемента.

6.2.2. Изгиб стержней

При расчете стержня выделяются задачи обеспечения нормативных значений прогиба и деформаций. При этом принимаются следующие гипотезы:

1. О малости деформаций: деформации малы по сравнению с размерами тела, т. е. изменением размеров бруса вследствие деформации можно пренебречь, а длина бруса значительно больше его толщины и ширины (рис. 6.7), т. е. перемещения вдоль оси OY можно пренебречь:

$$2. \quad \vartheta = 0. \quad (6.54)$$

3. Справедлив закон Гука [15].

4. Гипотеза плоских сечений Бернулли [30], на основании которой имеем отсутствие нормальной деформации вдоль оси OZ и тангенциальных компонент деформаций в плоскостях XOZ и YOZ :

$$5. \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (6.55)$$

6. Гипотеза о недеформированности срединной плоскости:

$$u_0 = 0, \quad (6.56)$$

где u_0 – перемещения точек срединной плоскости вдоль оси OX .

Рассмотрим одномерный конечный элемент, работающий на изгиб при действии поперечной нагрузки (рис. 6.7). В силу (6.54) каждый узел должен иметь две степени свободы: $\delta^{*T} = \{u \quad w\}$, где u – перемещение вдоль оси X ; w – перемещение вдоль оси Z .

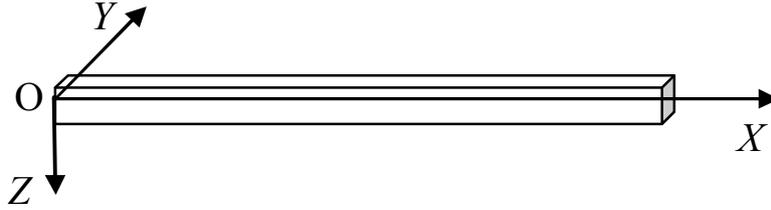


Рис. 6.7. Брус под действием вертикальной поперечной нагрузки

Исходя из гипотез (6.54), (6.55) и уравнений Коши [27], получим:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

следовательно, прогибы не зависят от координат y и z , таким образом $w = w(x)$.

Из (6.56) и [4.3] получаем:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируем по z последнее тождество:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y). \quad (6.57)$$

Так как (6.57) справедливо для всего стержня, то для срединной плоскости будем иметь:

$$u_0 = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y). \quad (6.58)$$

Подставляя (6.56) в (6.58) при $z = 0$, получим $u_0 = f_1(x, y) = 0$, откуда

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6.59)$$

В силу (6.59) приходим к возможности рассматривать в качестве узловых степеней свободы w и $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, т. е. $\delta^T = \{w \ \theta_x\}$. Следовательно, для моделирования прогибов стержня воспользуемся двух-узловым одномерным конечным элементом с четырьмя степенями свободы – по две в каждом узле. Таким образом функцию прогибов будем аппроксимировать кубическим полиномом:

$$w(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3. \quad (6.60)$$

Откуда

$$\theta_x(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2. \quad (6.61)$$

Так как соотношения (6.60) и (6.61) справедливы для всех точек конечного элемента, то для его узлов будем иметь:

$$\{\delta_0\} = [A]\{a\}, \quad (6.62)$$

где $\{a\}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}$; $\{\delta_0\}^T = \{w_1 \ \theta_{x1} \ w_2 \ \theta_{x2}\}$; w_j, θ_{xj} – соответственно перемещения j -го узла и угол поворота,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix}, \text{ где } x_j \text{ – координата } j\text{-го узла, } j = \overline{1,2}.$$

Согласно принятым гипотезам для стержня, с учетом уравнений Коши [5] и формулы (6.39), получим:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} \text{ и } \{\sigma\} = \{\sigma_x\}, \quad (6.63)$$

а закон Гука [9] примет вид:

$$\{\sigma_x\} = E\{\varepsilon_x\}, \quad (6.64)$$

где E – модуль упругости.

Подставим (6.61) в (6.59), а затем в уравнения Коши [4.3], про- дифференцировав, получим:

$$\{\varepsilon\} = -z[C]\{a\}, \quad (6.65)$$

где $[C] = [0 \ 0 \ 2a_3 \ 6a_4x]$.

Из (6.62) найдем вектор неизвестных коэффициентов $\{a\}$:

$$\{a\} = [B]^{-1} \{\delta_0\}. \quad (6.66)$$

Подставим (6.64) в (6.65):

$$\{\varepsilon\} = -z[C][B^{-1}]\{\delta_0\}. \quad (6.67)$$

Подставим (6.67) в (6.65):

$$\{\sigma\} = -zE[C][B^{-1}]\{\delta_0\}. \quad (6.68)$$

Воспользуемся принципом возможных перемещений [12]:

$$\left\{ \bar{\delta}_0 \right\}^T \{R\} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{l_1}^{l_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \bar{\varepsilon} \right\}^T \{\sigma\} dz dx dy, \quad (6.69)$$

где $\{R\}$ – вектор узловых сил конечного элемента; h – толщина бруса; b – ширина бруса; l_1 и l_2 – координаты узлов одномерного конечного элемента бруса, черта над переменной означает вариацию признака.

Подставив в (6.69) выражения (6.65) и (6.66), учитывая, что $\{\delta_0\}$ не зависит от координат, интегрируя по z и y , получим:

$$\left\{ \bar{\delta}_0 \right\}^T \{R\} = \left\{ \bar{\delta}_0 \right\}^T E \frac{bh^3}{12} \left[\int_{l_1}^{l_2} [B^{-1}]^T [C]^T [C] [B^{-1}] dx \right] \{\delta_0\},$$

или

$$\{R\} = [K]\{\delta_0\}, \quad (6.70)$$

где

$$[K] = E \frac{bh^3}{12} \left[\int_{l_1}^{l_2} [B^{-1}]^T [C]^T [C] [B^{-1}] dx \right],$$

где (6.70) – основное уравнение метода конечных элементов [42].

После проведения вычислений матрица жесткости будет иметь вид:

$$[K] = E \frac{bh^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} & \frac{12}{(l_1 - l_2)^3} & \frac{6}{(l_1 - l_2)^2} \\ \frac{(l_1 - l_2)^2}{6} & \frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{(l_1 - l_2)^2}{6} & -\frac{1}{l_1 - l_2} \\ \frac{(l_1 - l_2)^3}{6} & -\frac{(l_1 - l_2)^2}{2} & -\frac{(l_1 - l_2)^3}{6} & -\frac{(l_1 - l_2)^2}{4} \\ \frac{(l_1 - l_2)^2}{6} & \frac{1}{l_1 - l_2} & -\frac{(l_1 - l_2)^2}{6} & -\frac{1}{l_1 - l_2} \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

6.2.3. Изгиб пластин

Рассмотрим прямоугольный элемент (рис. 6.8), работающий на изгиб при действии поперечной нагрузки [1], [9], [11].

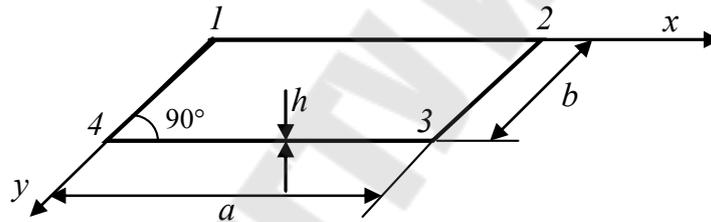


Рис. 6.8. Конечный элемент прямоугольной формы

При изгибе плит справедливы гипотезы Кирхгофа:

1. В срединной плоскости пластинка не испытывает никаких деформаций. При изгибе эта плоскость остается нейтральной:

$$u_0 = \vartheta_0 = 0, \quad (6.72)$$

где u_0 и ϑ_0 соответственно перемещения точек срединной плоскости вдоль осей X и Y .

2. Точки плиты, лежащие до нагружения на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к ее срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{zx} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

$$\varepsilon_z = 0. \quad (6.74)$$

3. Нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости пластинки, можно пренебрегать:

$$\sigma_z = 0. \quad (6.75)$$

Исходя из гипотезы Кирхгофа (6.74) и уравнений Коши [22] получим: $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, следовательно, прогибы не зависят от координаты z , таким образом

$$w = w(x, y).$$

Из (4.3) подставляя (6.75), получаем:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируя по z последние тождества, имеем:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y), \quad \vartheta = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \quad (6.76)$$

Так как (6.76) справедливы для всей пластинки, то для срединной плоскости будем иметь:

$$u_0 = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y), \quad \vartheta_0 = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \quad (6.77)$$

Подставляя (6.65) в (6.77) при $z = 0$, получим:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta_0 = f_2(x, y) = 0.$$

Таким образом, подставляя найденные значения для функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ в (6.77), получаем:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.78)$$

Анализируя полученные результаты, получаем, что в качестве степеней свободы необходимо взять:

$$\{F\}^T = \{w \quad -\theta_x \quad \theta_y\},$$

где w – перемещение вдоль оси Z ; $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$ – угол поворота относительно оси X ; $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ – угол поворота относительно оси Y .

То есть необходимо использовать эрмитовы элементы.

Для выражения поверхности прогиба принимается полином, удовлетворяющий однородному дифференциальному уравнению изгибаемой плиты:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3. \quad (6.79)$$

Аналогично, как и в предыдущих случаях, из (6.79) можно записать:

$$\{F\} = [A^*]\{\alpha\}, \quad (6.80)$$

где $\{F\}^T = \{w \quad -\theta_x \quad \theta_y\} = \left\{ w \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\};$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 & 3x^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy & 0 & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix};$$

$$\{\alpha\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12}\}.$$

Так как (6.80) имеет место для любой точки конечного элемента, то для его вершин получим

$$\{F^e\} = [A]\{a\}, \quad (6.81)$$

где

$$\{F^e\}^T = \{w_1 \quad -\theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad -\theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad -\theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad -\theta_{x4} \quad \theta_{y4}\};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^3 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & y_1 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2 y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y_1 & x_1 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 0 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & x_2^3 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & 0 & y_2 & 2x_2 y_2 & y_2^2 & 3x_2^2 & 0 & 3x_2^2 y_2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y_2 & x_2 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 0 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & x_3^3 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & 0 & y_3 & 2x_3 y_3 & y_3^2 & 3x_3^2 & 0 & 3x_3^2 y_3 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y_3 & x_3 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 0 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & x_4^3 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & 0 & y_4 & 2x_4 y_4 & y_4^2 & 3x_4^2 & 0 & 3x_4^2 y_4 & y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y_4 & x_4 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 0 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \end{bmatrix},$$

где x_i, y_i, z_i ($i = \overline{1,4}$) – координаты узлов конечного элемента.

Из (6.81) следует:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{F^e\}, \quad (6.82)$$

где

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^2} & -\frac{2}{a} & 0 & \frac{3}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} \\ \frac{3}{a^2 b} & \frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{a^2 b} & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{3}{a^2 b} & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & 0 & \frac{1}{ab} \\ \frac{3}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab} & -\frac{3}{ab^2} & 0 & -\frac{2}{ab} & \frac{3}{ab^2} & 0 & -\frac{1}{ab} & -\frac{3}{ab^2} & 0 & \frac{1}{ab} \\ \frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} \\ -\frac{2}{a^3 b} & -\frac{1}{a^2 b} & 0 & \frac{2}{a^3 b} & -\frac{1}{a^2 b} & 0 & -\frac{2}{a^3 b} & \frac{1}{a^2 b} & 0 & \frac{2}{a^3 b} & \frac{1}{a^2 b} & 0 \\ -\frac{2}{ab^3} & 0 & -\frac{1}{ab^2} & \frac{2}{ab^3} & 0 & \frac{1}{ab^2} & -\frac{2}{ab^3} & 0 & \frac{1}{ab^2} & \frac{2}{ab^3} & 0 & -\frac{1}{ab^2} \end{bmatrix}.$$

Из уравнений Коши [43] с учетом гипотез Кирхгофа и выражений (6.73), (6.74) для ненулевых компонент вектора деформаций получим

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}.$$

Дифференцируя (6.79), можно записать:

$$\{\varepsilon\} = -z[Q]\{\alpha\}, \quad (6.83)$$

где $[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$.

Подставляя (6.83), для ненулевых деформаций получим

$$\{\sigma\} = -z[E][Q]\{a\}, \quad (6.84)$$

где в случае изотропного материала:

$$[E] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},$$

в случае ортотропного материала:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\mu_x\mu_y} & \frac{E_x\mu_x}{1-\mu_x\mu_y} & 0 \\ \frac{E_x\mu_y}{1-\mu_x\mu_y} & \frac{E_y}{1-\mu_x\mu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

где E_x и E_y – соответствующие модули упругости; μ_x и μ_y – коэффициенты Пуассона.

Подставляя (6.82) в (6.83) и (6.84), получим:

$$\{\varepsilon\} = -z[Q][A]^{-1}\{F^e\}; \quad (6.85)$$

$$\{\sigma\} = -z[E][Q][A]^{-1}\{F^e\}. \quad (6.86)$$

На основании принципа возможных перемещений:

$$\{\delta F^e\}^T \{R\} = \int_0^b \int_0^a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dz dx dy. \quad (6.87)$$

Подставив в (6.87) выражения (6.86) и (6.85), учитывая, что $\{F^e\}$ не зависит от координат, интегрируя по z , получим

$$\{\delta F^e\}^T \{R\} = \{\delta F^e\}^T \frac{h^3}{12} \left[\int_0^b \int_0^a [A^{-1}]^T [Q]^T [E_0] [Q] [A^{-1}] dx dy \right] \{F^e\},$$

или

$$\{R\} = [k] \{F^e\}, \quad (6.88)$$

где

$$[k] = \frac{h^3}{12} [A^{-1}]^T \left(\int_0^b \int_0^a [Q]^T [E_0] [Q] dx dy \right) [A^{-1}]. \quad (6.89)$$

После проведения вычислений в (6.89) матрицу жесткости можно представить в виде

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix},$$

где k_{ij} – матрица размерности 3×3 , характеризующая вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил, $k_{ij} = k_{ji}^T$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$.

Для случая ортотропной плиты получим [16]:

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{4bD_x}{a^3} + \frac{4aD_y}{b^3} + \frac{10D_\mu + 28D_k}{5ab} & \frac{2bD_x}{a^2} + \frac{5D_\mu + 2D_k}{5b} & \frac{2aD_y}{b^2} + \frac{5D_\mu + 2D_k}{5a} \\ & \frac{4bD_x}{3a} + \frac{8aD_k}{15b} & D_\mu \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} + \frac{4bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -\frac{4bD_x}{a^3} + \frac{4aD_y}{b^3} - \frac{10D_\mu + 28D_k}{5ab} & \frac{2bD_x}{a^2} + \frac{2D_k}{5b} & \frac{aD_y}{b^2} - \frac{5D_\mu + 2D_k}{5a} \\ & \frac{2bD_x}{3a} - \frac{2aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} - \frac{8bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{13}] = \begin{bmatrix} -\frac{2bD_x}{a^3} - \frac{2aD_y}{b^3} + \frac{10D_\mu + 28D_k}{5a^2b} & \frac{bD_x}{a^2} - \frac{2D_k}{5b} & \frac{aD_y}{b^2} - \frac{2D_k}{5a} \\ & \frac{bD_x}{3a} + \frac{2aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{aD_y}{3b} + \frac{2bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{14}] = \begin{bmatrix} \frac{2bD_x}{a^3} - \frac{4aD_y}{b^3} - \frac{10aD_\mu + 28D_k}{5a^2b} & \frac{bD_x}{a^2} - \frac{5D_\mu + 2D_k}{5b} & \frac{2aD_y}{b^2} + \frac{2D_k}{5a} \\ & \frac{2bD_x}{3a} + \frac{8aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} - \frac{2bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{23}] = \begin{bmatrix} \frac{2bD_x}{a^3} - \frac{4aD_y}{b^3} - \frac{10aD_\mu + 28D_k}{5a^2b} & -\frac{bD_x}{a^2} + \frac{5D_\mu + 2D_k}{5b} & \frac{2aD_y}{b^2} + \frac{2D_k}{5a} \\ & \frac{2bD_x}{3a} + \frac{8aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} - \frac{2bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{24}] = \begin{bmatrix} -\frac{2bD_x}{a^3} - \frac{2aD_y}{b^3} + \frac{10D_\mu + 28D_k}{5a^2b} & -\frac{bD_x}{a^2} + \frac{2D_k}{5b} & \frac{aD_y}{b^2} - \frac{2D_k}{5a} \\ & \frac{bD_x}{3a} + \frac{2aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{aD_y}{3b} + \frac{2bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{33}] = \begin{bmatrix} \frac{4bD_x}{a^3} + \frac{4aD_y}{b^3} + \frac{10D_\mu + 28D_k}{5ab} & -\frac{2bD_x}{a^2} - \frac{5D_\mu + 2D_k}{5b} & -\frac{2aD_y}{b^2} - \frac{5D_\mu + 2D_k}{5a} \\ & \frac{4bD_x}{3a} + \frac{8aD_k}{15b} & D_\mu \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} + \frac{4bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{34}] = \begin{bmatrix} -\frac{4bD_x}{a^3} + \frac{4aD_y}{b^3} - \frac{10D_\mu + 28D_k}{5ab} & -\frac{2bD_x}{a^2} - \frac{2D_k}{5b} & -\frac{aD_y}{b^2} + \frac{5D_\mu + 2D_k}{5a} \\ & \frac{2bD_x}{3a} - \frac{2aD_k}{15b} & 0 \\ \text{симметрично} & & \frac{aD_y}{3b} + \frac{2bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

$$[k_{44}] = \begin{bmatrix} \frac{4bD_x}{a^3} + \frac{4aD_y}{b^3} + \frac{10D_\mu + 28D_k}{5ab} & \frac{2bD_x}{a^2} + \frac{5D_\mu + 2D_k}{5b} & -\frac{2aD_y}{b^2} - \frac{5D_\mu + 2D_k}{5a} \\ & \frac{4bD_x}{3a} + \frac{8aD_k}{15b} & -D_\mu \\ \text{симметрично} & & \frac{2aD_y}{3b} + \frac{4bD_k}{15a} \end{bmatrix},$$

где $D_x = \frac{h^3 E_x}{12(1 - \mu_x \mu_y)}$ – изгибная жесткость плиты в направлении оси OX ;

$D_y = \frac{h^3 E_y}{12(1 - \mu_x \mu_y)}$ – изгибная жесткость плиты в направлении оси OY ;

$D_\mu = \mu_x D_x = \mu_y D_y$; $D_k = \frac{h^3 G}{12}$.

Матрица жесткости системы, определяющая жесткость плиты в целом, строится аналогично, как и в случае решения плоской задачи теории упругости.

6.2.4. Пространственная задача теории упругости

Выберем в качестве исходного конечного элемента тетраэдр [9], [16], [31], к его вершинам приложим узловые усилия

$$\{R\}^T = \{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4\}, \quad (6.90)$$

которым будут соответствовать узловые перемещения

$$\{F^e\}^T = \{u_1, \vartheta_1, w_1, u_2, \vartheta_2, w_2, u_3, \vartheta_3, w_3, u_4, \vartheta_4, w_4\}. \quad (6.91)$$

Для тетраэдра можно взять линейные функции для перемещений:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \\ \vartheta &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z, \end{aligned} \quad (6.92)$$

или

$$\{F\} = [A^*] \{\alpha\}, \quad (6.93)$$

где

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}, \quad (6.94)$$

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}\}. \quad (6.95)$$

Так как (6.93) имеет место для любой точки тетраэдра, то для его узлов будем иметь

$$\{F^e\} = [A] \{\alpha\}, \quad (6.96)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}, \quad (6.97)$$

где x_i, y_i, z_i ($i = \overline{1,4}$) – координаты узлов тетраэдра.

Из (6.96) следует

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{F^e\}, \quad (6.98)$$

где

$$[A]^{-1} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix},$$

где V – объем элементарного тетраэдра; $a_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix}$;

$$b_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_n & z_n \end{vmatrix}; \quad c_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_n & z_n \end{vmatrix}; \quad d_i = (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_n & y_n \end{vmatrix};$$

i, j, k, n – номера вершин элементарного тетраэдра.

Остальные значения a, b, c, d получаются круговой перестановкой индексов. Используя уравнения Коши (4.3) и физические уравнения теории упругости (4.6), получим:

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\}; \quad (6.99)$$

$$\{\sigma\} = [E_0]\{\varepsilon\} = [E_0][Q]\{\alpha\}, \quad (6.100)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (6.101)$$

$$[E_0] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (6.102)$$

где G, λ – модуль сдвига и коэффициент Ламе соответственно.

Подставим (6.99) в (6.98) и (6.100), тогда получим:

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1}\{F^e\}; \quad (6.103)$$

$$\{\sigma\} = [E_0][Q][A]^{-1}\{F^e\}. \quad (6.104)$$

На основании принципа возможных перемещений:

$$\{\delta F^e\}^T \{R\} = \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz. \quad (6.105)$$

Подставив в (6.105) выражения (6.103) и (6.104), учитывая, что в рассматриваемом случае все матрицы и $\{F^e\}$ не зависят от координат, получим

$$\{R\} = V[D]^T [E_0][D]\{F^e\}, \quad (6.106)$$

следовательно, для тетраэдра:

$$[k] = V[D]^T [E_0][D], \quad (6.107)$$

где $[D] = [Q][A]^{-1}$.

Выполнив матричные операции, получим

$$[k] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (6.108)$$

где

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} b_i b_j \rho + (c_i c_j + d_i d_j) G & b_i c_j \lambda + c_i b_j G & b_i d_j \lambda + d_i b_j G \\ c_i b_j \lambda + b_i c_j G & c_i c_j \rho + (b_i b_j + d_i d_j) G & c_i d_i \lambda + d_i c_j G \\ d_i b_j \lambda + b_i d_j G & d_i c_j \lambda + c_i d_j G & d_i d_j \rho + (c_i c_j + b_i b_j) G \end{bmatrix},$$

$\rho = 2G + \lambda$.

6.2.5. Определение собственных частот и форм колебаний

При анализе сооружений, подвергающихся воздействию динамических нагрузок, важной задачей является определение собственных частот и форм колебаний. В том случае, когда частота, с которой воздействует внешняя динамическая нагрузка, приближается к частоте собственных колебаний, амплитуды колебаний резко возрастают (явление резонанса), что может привести к разрушению конструкции.

Если $C = 0$ и $P = 0$, то уравнение [17] принимает вид

$$M\ddot{z} + Rz = 0 \quad (6.109)$$

и допускает решения типа

$$z(t) = \varphi \sin \omega t.$$

Подставив выражение для $z(t)$ в уравнение движения (6.109), получим задачу на собственные значения:

$$R\varphi = \omega^2 M\varphi;$$

$$R\varphi = \lambda M\varphi.$$

Решение обобщенной проблемы собственных значений (6.109), позволяющее найти собственные числа λ и собственные векторы φ , может быть найдено с помощью различных подходов, среди которых наиболее часто используются в рамках МКЭ метод вычисления корней характеристического определителя, метод Ланцоша, метод итераций в подпространстве и ряд других [4].

Формы собственных колебаний φ обладают свойством, которое определяется как условие ортогональности. Запишем уравнение (6.109) для i -й и j -й форм колебаний:

$$R\varphi_i = \lambda_i M\varphi_i; \quad (6.110)$$

$$R\varphi_j = \lambda_j M\varphi_j. \quad (6.111)$$

Матрица жесткости R симметрична, поэтому

$$\varphi_j^T R\varphi_i = \varphi_i^T R\varphi_j.$$

Так как левые части уравнений (6.110) и (6.111) равны, то равны и правые части

$$\lambda_i \varphi_j^T M \varphi_i = \lambda_j \varphi_i^T M \varphi_j. \quad (6.112)$$

Матрица масс M симметрична, поэтому

$$\varphi_j^T M \varphi_i = \varphi_i^T M \varphi_j.$$

Тогда уравнение (6.112) преобразуется к виду

$$(\lambda_i - \lambda_j) \varphi_i^T M \varphi_j = 0.$$

Так как в общем случае $\omega_i \neq \omega_j$, то получим первое условие ортогональности:

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0, i \neq j;$$

$$M \varphi_j = \lambda_j^{-1} R \varphi_j;$$

$$\lambda_j^{-1} \varphi_i^T R \varphi_j = 0, i \neq j;$$

$$\varphi_i^T R \varphi_j = 0, i \neq j.$$

Уравнение (6.112) представляет собой второе условие ортогональности собственных форм.

Условия (6.108) и (6.112) могут быть получены иным путем. Собственные колебания можно рассматривать как перемещения системы под действием сил инерции, приложенных как внешние нагрузки. Тогда из уравнений (6.110) и (6.111) силы инерции для i -й и j -й форм колебания записываются следующим образом:

$$I_i = \lambda_i M \varphi_i;$$

$$I_j = \lambda_j M \varphi_j.$$

Согласно теореме Бетти, работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна работе сил j -го состояния на перемещениях i -го состояния, т. е.

$$I_i^T \varphi_j = I_j^T \varphi_i. \quad (6.113)$$

Физический смысл первого условия ортогональности состоит в том, что возможная работа сил инерции i -й формы колебаний на перемещениях i -й формы равна нулю. Физический смысл второго усло-

вия ортогональности состоит в том, что возможная работа сил упругости i -й формы колебаний на перемещениях j -й формы равна нулю.

Пример 6.1. Рассматривается задача о продольных колебаниях стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой свободен (рис. 6.9).

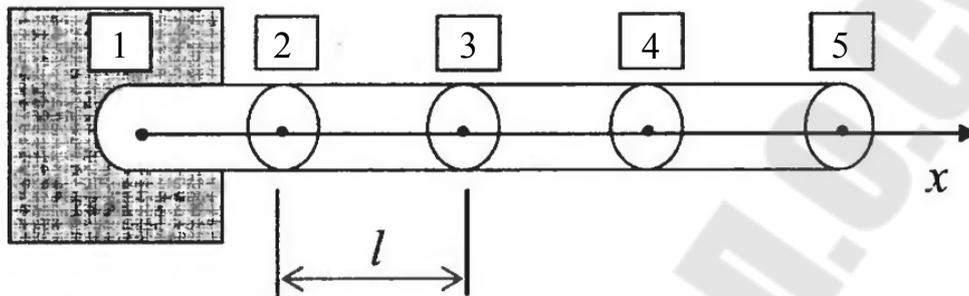


Рис. 6.9. К решению задачи о продольных колебаниях стержня

Исходные данные для расчета: модуль упругости материала $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; площадь поперечного сечения $F = 10^{-4}$ м²; общая длина стержня $L = 0,1$ м; плотность материала $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Стержень разбит на четыре конечных элемента, длина каждого элемента $l = 0,025$ м, общее количество узлов равно пяти.

Матрица жесткости и матрица масс конечного элемента имеют вид:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & -\frac{EF}{l} \\ -\frac{EF}{l} & \frac{EF}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 \times 10^9 & -0,84 \times 10^9 \\ -0,84 \times 10^9 & 0,84 \times 10^9 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{F\rho l}{3} & \frac{F\rho l}{6} \\ \frac{F\rho l}{6} & \frac{F\rho l}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,5 \times 10^{-3} & 3,25 \times 10^{-3} \\ 3,25 \times 10^{-3} & 6,5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (6.112) для всего стержня с учетом условия $i = 0$ может быть представлено следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1,68 \times 10^9 & -0,84 \times 10^9 & 0 & 0 \\ & 1,68 \times 10^9 & -0,84 \times 10^9 & 0 \\ \text{симметрично} & & 1,68 \times 10^9 & -0,84 \times 10^9 \\ & & & 0,84 \times 10^9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \\
 = \lambda \begin{bmatrix} 13 \times 10^{-3} & 3,25 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ & 13 \times 10^{-3} & 3,25 \times 10^{-3} & 0 \\ \text{симметрично} & & 13 \times 10^{-3} & 3,25 \times 10^{-3} \\ & & & 6,5 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}.$$

Для решения записанной выше задачи используется метод вращений Якоби [15]. В приведенной далее табл. 6.1 представлены собственные значения, круговые частоты и соответствующие собственные векторы для различных форм колебаний.

На рис. 6.10 показаны собственные формы колебаний в соответствии с данными, приведенными в табл. 6.1. По горизонтали откладывается безразмерная координата x/L , а по вертикали относительная амплитуда $alum$.

Таблица 6.1

Собственные формы колебаний

Форма колебаний			
Собственные значения, c^2			
$0,6729 \cdot 10^{10}$	$0,6696 \cdot 10^{11}$	$0,2210 \cdot 10^{12}$	$0,4621 \cdot 10^{12}$
Круговая частота, c^{-1}			
$0,8203 \cdot 10^5$	$0,2588 \cdot 10^6$	$0,4701 \cdot 10^6$	$0,6800 \cdot 10^6$
Собственные векторы			
0	0	0	0
0,2420	-0,5843	-0,5843	-0,2420
0,4472	-0,4472	0,4472	0,4472
0,5843	0,2420	0,2420	0,5843
0,6325	0,6325	-0,6325	0,6325

Рассмотренная задача имеет аналитическое решение, получаемое методом Фурье. Предполагается, что стержень растянут силой P , приложенной к свободному концу. В момент времени $t = 0$ действие силы мгновенно прекращается, после чего стержень начинает совершать свободные продольные колебания.

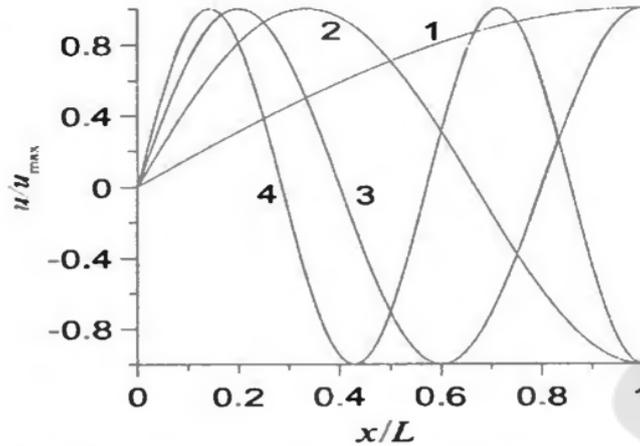


Рис. 6.10. Собственные формы колебаний стержня

Задача о свободных продольных колебаниях закрепленного на одном конце стержня, возникающих вследствие начального сжатия или растяжения, приводит к уравнению [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$;

– с начальными условиями

$$u(x,0) = \frac{P}{EF} x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

– краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Решение данной задачи позволяет получить функцию $u(x,t)$, описывающую продольные колебания стержня [3]:

$$u(x,t) = \frac{8Pl}{\pi^2 EF} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Круговая частота колебаний определяется по формуле

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi a}{2l} = 81,504 \cdot 10^3 (2k+1), \quad k = 0,1,2,\dots$$

В табл. 6.2 дано сравнение результатов аналитического и численного решений для ω_k и приведена оценка погрешности.

Таблица 6.2

Сравнение результатов аналитического и численного решений для ω_k

Номер гармоники	Аналитическое решение	Решение по МКЭ	Относительная погрешность, %
1	$0,8150 \cdot 10^5$	$0,8203 \cdot 10^5$	0,65
2	$0,2445 \cdot 10^6$	$0,2588 \cdot 10^6$	5,8
3	$0,4075 \cdot 10^6$	$0,4701 \cdot 10^6$	15
4	$0,5705 \cdot 10^6$	$0,6800 \cdot 10^6$	19

Пример 6.2. Требуется определить частоты и формы собственных колебаний балки, шарнирно опертой по концам (рис. 6.11). Исходные данные для расчета следующие: модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^4$ МПа; поперечное сечение имеет форму прямоугольника шириной 0,3 м, высотой 0,4 м и площадью $F = 0,12$ м²; момент инерции поперечного сечения $J = 16 \cdot 10^{-4}$ м⁴; общая длина балки $L = 4$ м; плотность материала $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³. Балка разбита на восемь конечных элементов, длина каждого элемента $l = 0,5$ м.

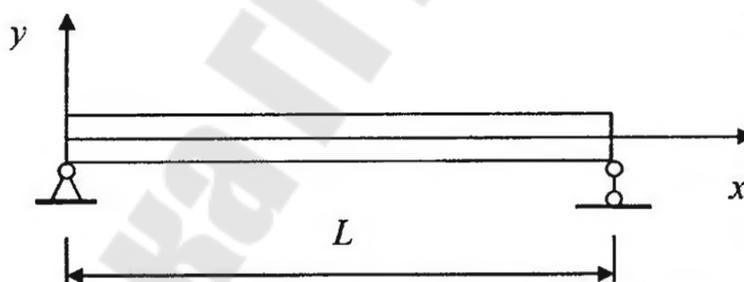


Рис. 6.11. К решению задачи о собственных колебаниях балки

Для решения задачи по методу конечных элементов используется матрица жесткости и матрица масс, приведенные выше, для стержня с тремя степенями свободы в каждом узле.

$$R = \begin{bmatrix} 256 \times 10^6 & 768 \times 10^6 & 128 \times 10^6 & -768 \times 10^6 \\ & 3072 \times 10^6 & 768 \times 10^6 & -3072 \times 10^6 \\ & & 256 \times 10^6 & -768 \times 10^6 \\ & \text{симметрично} & & 3072 \times 10^6 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 44,5 & 3,14 & 15,4 & -1,86 \\ & 0,286 & 1,86 & -0,214 \\ & & 44,6 & -3,14 \\ & \text{симметрично} & & 0,286 \end{bmatrix}.$$

Задача формулируется как обобщенная проблема собственных значений, из решения которой определяются собственные частоты и собственные векторы.

В представленной ниже табл. 6.3 даны круговые частоты и соответствующие собственные векторы для трех первых форм колебаний.

Таблица 6.3

**Круговые частоты и собственные векторы
для трех первых форм колебаний**

Форма колебаний		
Круговая частота, с		
223,09	892,10	2004,14
Собственные векторы		
0	0	0
0,383	0,707	0,924
0,707	1,000	0,707
0,924	0,707	-0,383
1,000	0	-1,000
0,924	-0,707	-0,383
0,707	-1,000	0,707
0,383	-0,707	0,924
0	0	0

На рис. 6.12 показаны собственные формы колебаний шарнирно опертой балки в соответствии с данными табл. 6.3. По горизонтали откладывается безразмерная координата x/L , а по вертикали относительная амплитуда v/A .

Уравнение свободных колебаний балки с постоянной жесткостью EJ и распределенной массой m имеет вид [14]:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

В результате решения однородной краевой задачи получается спектр собственных частот ω_k :

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = 225,24k^2 \dots (k = 1, 2, 3, \dots)$$

и спектр собственных функций v_k :

$$v_k = A \sin \frac{k\pi x}{l} \dots (k = 1, 2, 3, \dots).$$

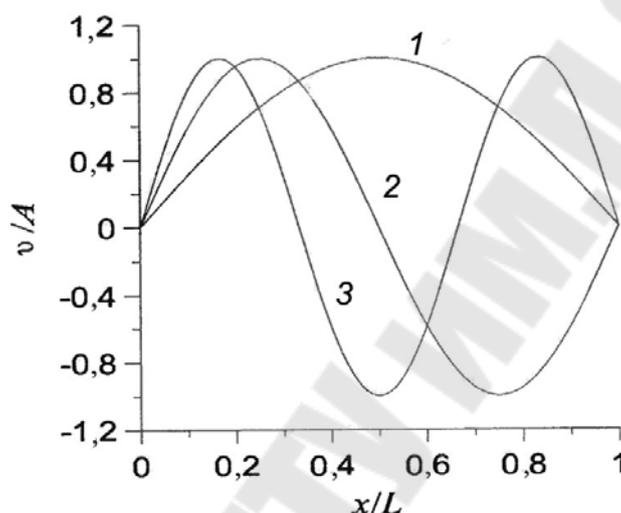


Рис. 6.12. Собственные колебания шарнирно опертой балки

В табл. 6.4 дано сравнение результатов аналитического и численного решений для ω_k .

Таблица 6.4

Результаты аналитического и численного решений для ω_k

Номер гармоники	Аналитическое решение	Решение по МКЭ	Относительная погрешность, %
1	225,24	223,09	0,95
2	900,96	892,10	0,98
3	2027,16	2004,14	1,1

Решение обобщенной проблемы собственных значений для матриц большой размерности при конечно-элементной реализации нередко выполняется с помощью метода итераций в подпространстве [4], который включает в себя следующие основные этапы:

1. Вычисление компонент матрицы жесткости R и матрицы масс M .
2. LDL^T -факторизация матрицы R .
3. Формирование матрицы $X_0 = [X_1 X_2 \dots X_q]$ начальной аппроксимации подпространства собственных векторов ($q = \min\{2p, p + 8\}$, p – число искоемых собственных значений и собственных векторов).
4. Переход от подпространства E_k , определяемого векторами X_k , к подпространству E_{k+1} :

$$R\bar{X}_{k+1} = MX_k.$$

5. Нахождение проекций операторов R и M на подпространство E_{k+1} :

$$R_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T R \bar{X}_{k+1},$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1}.$$

6. Решение задачи на собственные значения обобщенным методом Якоби для проекций операторов R и M :

$$R_{k+1} = M_{k+1} Q \Lambda_{k+1}.$$

7. Нахождение следующего приближения для собственных векторов:

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1}.$$

8. Проверка сходимости для собственных значений:

$$\frac{|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k|}{|\lambda_i^{k+1}|} \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, p,$$

где ε – заданная точность нахождения собственных значений.

9. Проверка, позволяющая убедиться в том, что ни одно из собственных значений не пропущено. Для этого выполняется сдвиг $R - \mu M$ на величину диапазона μ и проводится LDL^T -факторизация матрицы со сдвигом. Число отрицательных элементов в диагональной матрице D должно быть равно числу собственных значений, меньших μ .

Пример 6.3. В качестве одной из тестовых задач, иллюстрирующих применение метода итераций в подпространстве, рассмотрим квадратную пластинку, шарнирно опертую по контуру. Для расчета приняты следующие исходные данные: длина стороны квадрат-

ной пластинки $a = l$ м; толщина $h = 0,01$ м; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ Н · с²/м⁴. На пластинку накладывалась сетка конечных элементов 16×16 .

В табл. 6.5 приведены собственные круговые частоты колебаний при различном количестве полуволн m и n , образующихся вдоль сторон пластинки. Для каждой комбинации m и n в числителе дано значение, полученное путем аналитического решения дифференциального уравнения свободных колебаний, в знаменателе – полученное с помощью МКЭ.

Таблица 6.5

Собственные круговые частоты при различном количестве полуволн

n	m		
	1	2	3
1	308,40	771,20	1542,5
	310,40	777,90	1566,7
2	771,20	1234,0	2005,2
	777,90	1258,8	2102,2
3	1542,5	2005,2	2776,4
	1566,7	2102,2	2803,3

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях квадратной пластинки из композиционного анизотропного материала с низкой сдвиговой жесткостью (углепластика). Обобщенная проблема собственных значений решается методом итераций в подпространстве.

Исходные данные для расчета следующие: длина стороны квадратной пластинки $a = 0,15$ м; толщина $h = 0,35 \cdot 10^{-2}$ м; модули упругости и сдвига $E_1 = 0,6393 \cdot 10^{11}$ Н/м², $E_2 = 0,5786 \cdot 10^{11}$ Н/м², $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,3 \cdot 10^{10}$ Н/м²; коэффициенты Пуассона $\nu_{12} = 0,15$, $\nu_{21} = 0,1657$; плотность материала $\rho = 0,14144 \cdot 10^4$ кг/м³. Пластинка жестко закреплена в четырех точках, отстоящих от кромок на $0,9375 \cdot 10^{-2}$ м. На пластинку накладывалась сетка конечных элементов 16×16 . В табл. 6.6 приведены собственные частоты колебаний для первых четырех форм.

Собственные частоты для первых четырех форм

Круговая частота			
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
4343,0	6895,5	7151,9	8985,9

На рис. 6.13, 6.14 приведены формы колебаний, соответствующие собственным частотам ω_1 и ω_2 .

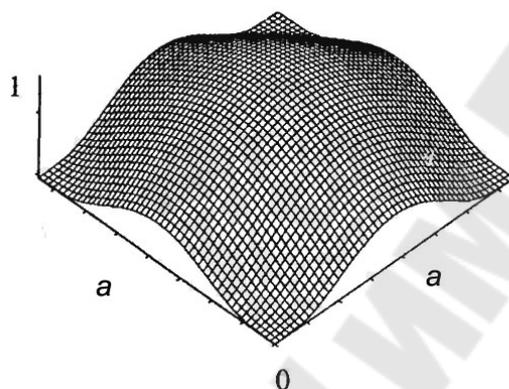


Рис. 6.13. Первая форма собственных колебаний

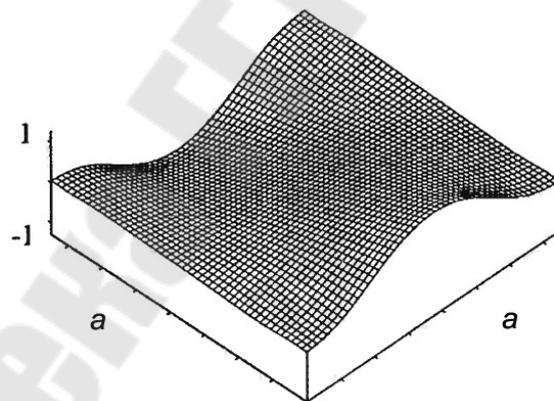


Рис. 6.14. Вторая форма собственных колебаний

6.3. Компьютерная реализация метода конечных элементов

6.3.1. Алгоритм применения метода конечных элементов

Шаг 1. Осуществляется задание геометрической конфигурации исследуемой системы, физических свойств (модуль упругости, коэф-

фициент Пуассона) ее элементов, граничных условий и действующих внешних сил.

Шаг 2. Выполняем дискретизацию исследуемой системы выбранными конечными элементами с обеспечением строго общей границы между конечными элементами со стыковкой в узлах. При этом является недопустимой ситуация, когда узел какого-либо конечного элемента граничит с ребром другого.

Шаг 3. Осуществляем последовательную уникальную нумерацию конечных элементов и их узлов. Данная операция может быть совмещена с предыдущей.

Шаг 4. Последовательно просматриваем каждый конечный элемент. Для локальных номеров узлов находим соответствующие им глобальные.

Шаг 5. Вычисляем локальную матрицу жесткости $[k]$.

Шаг 6. Добавляем найденную локальную матрицу жесткости в глобальную. Формирование глобальной матрицы жесткости осуществляется в следующем порядке:

$$K_{ij} = \sum_{r=1}^n k_{ij}^r,$$

где K_{ij} – элемент глобальной матрицы жесткости $[K]$, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил всей системы в целом; n – количество конечных элементов, которыми дискретизирована рассматриваемая система; k_{ij}^r – элемент локальной матрицы жесткости $[k^r]$ r -го конечного элемента, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил, причем матрицы жесткости $[k^r]$ вычисляются по формуле вида (6.53).

Разумеется, под знаком суммы ненулевой вклад дадут лишь элементы, примыкающие к узлу, в котором приложен i -й компонент сил. Таким образом, для всей рассматриваемой системы будет получено:

$$[K]\{F^{\text{узл}}\} = \{R\}, \quad (6.113)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{F^{\text{узл}}\}$ – вектор узловых перемещений всей системы; $\{R\}$ – вектор узловых усилий.

Шаг 6. На основе заданных внешних сил осуществляется формирование вектора узловых усилий $\{R\}$.

Шаг 8. Осуществляется учет граничных условий. В каждом узле может быть задана либо действующая внешняя сила, либо – известное перемещение. Задание действующих внешних сил эквивалентно записи соответствующего значения в определенную строку вектора $\{R\}$. Задание же известных перемещений эквивалентно тому, что для части неизвестных в системе (6.113) определены значения (граничные условия). То есть часть уравнений из системы (6.113) должна быть исключена и ее порядок должен быть понижен на количество известных перемещений. Таким образом должна быть сформирована новая система (6.113) с меньшим порядком. На практике оказывается неудобным (затратным) изменять размерность матрицы жесткости и векторов. Поэтому известные перемещения прямо выражают из системы.

Пусть $\{F_i^{узл}\}$ – известное узловое перемещение со значением P_i . Тогда в i -й строке матрицы $[K]$ все элементы заменим 0, кроме элемента, стоящего на главной диагонали:

$$\forall j = \overline{1, n}; j \neq i; K_{ij} = 0 \text{ и } K_{ii} = 1.$$

При этом в соответствующий элемент вектора $\{R\}$ (с номером i) запишем известное значение перемещения:

$$R_i = P_i.$$

Затем откорректируем оставшиеся уравнения, выразив из них известные перемещения:

$$\forall j = \overline{1, n}; j \neq i; R_j = R_j - K_{ji}P_i; K_{ji} = 0.$$

Таким образом, будет получена новая система вида (6.113):

$$[K^*]\{F^{узл}\} = \{R^*\} \quad (6.114)$$

Шаг 9. Каким-либо способом осуществляется решение системы (6.114), в результате которого будет найден вектор $\{F^{узл}\}$.

Шаг 10. Выполняется интерпретация результатов: найденные значения связываются с соответствующими узлами конечных элементов [9], [30], [31].

6.3.2. Построение виртуальной физической системы

На первом этапе в методе конечных элементов необходимо осуществить ввод исходных данных, которые представляют собой виртуальную физическую модель исследуемой системы [9], [28], [30].

Каждому элементу системы поставим в соответствие элемент функциональной модели. Построим математическую модель для i -го элемента системы в виде

$$\Phi_i(x, y, z) = 0, \quad (6.115)$$

где Φ_i – функционал связи элементов математической модели; x – вектор входных переменных, $x = \{x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)\}$; y – вектор выходных переменных, $y = \{y_1(t), y_2(t) \dots y_m(t)\}$; z – вектор внешних воздействий, $z = \{z_1(t), z_2(t) \dots z_r(t)\}$; t – время.

В случае если не удалось построить математическую модель (6.115) для какого-либо элемента системы, то будем считать его модулем и проведем дополнительную дискретизацию до тех пор, пока не будет возможным построение соотношений (6.115).

Пронумеруем каждый вектор входных и выходных переменных, а также внешних воздействий. В итоге получим три множества:

$$x_i \in X, \quad y_i \in Y, \quad z_i \in Z,$$

где $i = \overline{1, N}$, N – количество элементов функциональной модели.

Для каждого элемента функциональной модели необходимо описать входные и выходные интерфейсы. Под входным интерфейсом будем понимать унифицированный вектор x или z , под выходным – вектор y . Будем считать, что интерфейсы совпадают, если в соответствующих векторах совпадают имена переменных (значения переменных могут и не совпадать). Тогда каждый интерфейс будет представлять собой класс объектов, а вектора x_i , y_i , z_i будут являться экземплярами соответствующего класса интерфейса. Дополним класс интерфейса свойством, содержащим ссылку на другой интерфейс, с которым связывается данный, т. е. интерфейсы будем рассматривать попарно: входной – выходной. Сформируем множество входных интерфейсов $I_{\text{вх}}$ и множество выходных интерфейсов $I_{\text{вых}}$. Очевидно, что эти два множества могут отличаться только на интерфейсы векторов внешних воздействий и на один выходной набор переменных, представляющий результат функционирования математической модели всей системы в целом. В противном случае в формальной модели

будет иметься тупиковый элемент либо элемент, не имеющий входных переменных. Всякий тупиковый элемент может быть отнесен к внешней среде системы и исключен из рассмотрения, а элемент, не имеющий входных переменных, может быть аппроксимирован вектором внешних воздействий. Таким образом, каждый элемент функциональной модели будет определяться своей математической моделью (6.115), поддерживаемыми интерфейсами и связями с другими элементами.

Определим иерархические связи между элементами функциональной модели. Введем понятие уровня (слоя) в функциональной модели. Таким образом, элементы могут располагаться на различных уровнях модели. Уровни между собой взаимодействуют последовательно, т. е. пока не выполнятся все элементы нижнего уровня, переход к элементам следующего уровня невозможен. Элементы одного уровня функциональной модели могут выполняться совместно (параллельно).

Элемент функциональной модели графически будем обозначать прямоугольником, в правом верхнем углу которого укажем номер слоя или время t . Входящие в прямоугольник сбоку стрелки будут обозначать вектор входных переменных x , выходящие стрелки – вектор выходных переменных y , стрелки, входящие в прямоугольник сверху – вектор внешних воздействий z (рис. 6.15).

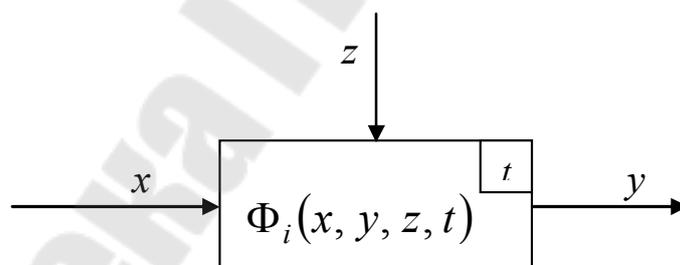


Рис. 6.15. Графическое обозначение элемента функциональной модели

В функциональных моделях многих реальных систем можно выделить ряд элементов, имеющих одинаковое ядро математической модели, и одни и те же интерфейсы. Следовательно, при компьютерной реализации целесообразно каждую группу таких элементов описать как класс. В этом случае элементы функциональной модели будут представлять собой экземпляры данных классов, а схожие группы элементов можно будет описать новым классом, который является

потомком описанных ранее базовых классов. Таким образом, функциональная модель системы в памяти компьютера будет представлять собой связанный список, при этом связь между элементами будет определяться соответствующими экземплярами родительского класса интерфейсов. Следовательно, если описать заранее множества классов элементов функциональной модели и интерфейсов, то этап построения функциональной модели можно осуществить методами визуального объектно-ориентированного проектирования, заключающимися в построении исследуемой системы на экране монитора компьютера из заранее созданных конструктивных элементов.

Построение математической модели сложной системы осуществляется на основании функциональной модели по следующему алгоритму:

Шаг 1. Выбирается первый уровень функциональной модели.

Шаг 2. Последовательно просматривается список размещенных на текущем уровне элементов функциональной модели и формируется математическая модель уровня посредством объединения в общую систему всех математических моделей элементов. В результате получается система:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z, t) = 0; \\ \Phi_2(x, y, z, t) = 0; \\ \dots \\ \Phi_N(x, y, z, t) = 0. \end{cases} \quad (6.116)$$

Шаг 3. Учитываются известные значения векторов входных переменных и векторов внешних воздействий и решается система (6.114).

Шаг 4. Сохраняются результаты решения и осуществляется переход на следующий уровень функциональной модели.

Шаг 5. Проводится проверка на предмет рассмотрения всех уровней. В случае отрицательного ответа осуществляется переход на шаг 2.

Например, рассмотрим задачу о действии сосредоточенной нагрузки на шарнирно опертую тонкую прямоугольную пластинку. Для создания данной виртуальной модели нам потребуется три класса:

– реализующий геометрическую структуру параллелепипед, который будет содержать, например, координаты левого верхнего угла пластинки и правого нижнего, а также физические характеристики материала;

– четыре объекта класса граничных условий, которые будут содержать геометрическое описание плоскости (например, также координаты двух точек) и метод, реализующий данные условия;

– класс внешних воздействий, который будет содержать интенсивность нагрузки, ее вид (сосредоточенная, распределенная, закон распределения нагрузки) и область приложения.

Таким образом, для описания реальной физической системы нам потребуется всего несколько байт оперативной памяти.

6.3.3. Способы организации и хранения данных в памяти компьютера

Как было указано выше, описание виртуальной физической системы будет представлять собой массивы классов, реализующих элементы исследуемой системы. При этом затраты оперативной памяти даже для сложных систем будут незначительными по сравнению с объемами памяти, необходимыми для хранения матрицы жесткости и векторов. Например, для исследования реальной физической системы размерами $10 \times 10 \times 10$ см при шаге 1 см необходим будет 1331 узел по три степени свободы в каждом, т. е. матрица жесткости (6.113) будет иметь размерность 3993. В реальных же системах количество узлов может достигать миллионов. Поэтому является весьма актуальной задача рационального хранения матрицы жесткости в памяти компьютера [30], [31].

Самый простой способ – это учесть, что матрица жесткости является симметричной, поэтому можно хранить лишь верхнюю или нижнюю треугольные матрицы. Кроме того, матрица жесткости имеет ленточную структуру, т. е. начиная с некоторого номера l на диагоналях будут находиться только нулевые элементы. Число l называется шириной полуленты матрицы. Также нулевые диагонали могут присутствовать и внутри ленты. Поэтому логичным является хранение только ненулевых диагоналей. Для этих целей используется битовый вектор, в котором номер бита соответствует диагонали, а сброшенное значение – нулевой диагонали и обозначает ее отсутствие в памяти.

Возможна модификация данного подхода, когда хранятся только ненулевые диагонали, в начале которых (или в отдельном индексном массиве) хранится число элементов, что позволяет однозначно определить номер диагонали в матрице жесткости.

Кроме указанных существует множество различных способов упакованного хранения матрицы жесткости. Как правило, более сложные методы связываются с используемым методом решения системы уравнений (6.114).

6.3.4. Методы решения основного уравнения метода конечных элементов

Основное уравнение метода конечных элементов представляет собой либо систему линейных алгебраических уравнений, либо систему нелинейных алгебраических уравнений [16], [30].

Рассмотрим системы вида (6.114):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (6.117)$$

или, иначе, систему матрично-векторных уравнений

$$[A]\{x\} = \{b\}.$$

Одним из наиболее распространенных методов решения подобных систем является метод Гаусса [18]. Его суть состоит в последовательном исключении неизвестных и приведении матрицы системы к диагональному виду. Решение находится в два этапа:

– на первом этапе – *прямой ход* метода Гаусса – исходная система (6.2) при помощи последовательного исключения неизвестных приводится к верхнему треугольному виду;

– на втором этапе – *обратный ход* метода Гаусса – осуществляется определение значений неизвестных.

При прямом ходе система (6.117) поэтапно приводится к треугольному виду последовательным исключением x_1 из второго, третьего, ..., n -го уравнений, затем x_2 – из третьего, четвертого, ..., n -го уравнения преобразованной системы и т. д. На первом этапе отнимем от второго, третьего, ..., n -го уравнения первое уравнение, умноженное на $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Результатом этого преобразования

будет эквивалентная (6.117) система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}; \\ \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.118)$$

На втором этапе производятся аналогичные преобразования, как и на первом, с подсистемой (6.118). Продолжая процесс, на $(n-1)$ -м этапе система (6.117) будет приведена к треугольному виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}; \\ \dots \dots \dots &\dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Треугольная структура системы (6.119) позволяет последовательно находить неизвестные, начиная с последнего:

$$x_n = \frac{a_{nn}^{(n-1)}}{b_n^{(n-1)}}; \quad x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}}; \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}.$$

Метод Холецкого применим к системам с положительно определенной симметричной матрицей коэффициентов [18]. В этом методе исходная матрица коэффициентов представляется в виде произведения двух взаимно транспонированных матриц:

$$[A] = [L][L]^T, \quad (6.120)$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}. \quad (6.121)$$

Формулы для вычисления коэффициентов матрицы L имеют вид

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}; \quad l_{ij} = \frac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk})}{l_{jj}}. \quad (6.122)$$

Таким образом, вместо системы (6.117) с симметричной матрицей рассматриваются две системы уравнений с треугольными матрицами:

$$[L]\{y\} = \{b\}; \quad [L]^T\{x\} = \{y\}, \quad (6.123)$$

неизвестные в которых находятся по формулам:

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k), \quad i = 1, 2, 3 \dots n; \quad (6.124)$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k}{l_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (6.125)$$

В силу того, что в методе конечных элементов матрица системы имеет ленточную структуру с шириной полуленты l , можно значительно сократить количество выполняемых операций в рассмотренных методах решения систем линейных алгебраических уравнений, так как преобразование элементов в каждой строке может оканчиваться номером $i + l$.

Метод сопряженных градиентов относят к так называемым методам вариационного типа. Помимо этого метода, к ним также относятся методы минимальных невязок, минимальных поправок, минимальных итераций наискорейшего спуска и т. п.

Метод сопряженных градиентов применим, если матрица $[A]$ симметрична и положительно определена, что имеет место в методе конечных элементов [18]. С его помощью можно довольно быстро (за несколько итераций) получить приближенное решение системы. Причем метод продолжает быстро работать при больших размерах матрицы $[A]$. Метод сопряженных градиентов применим к большому кругу задач. Поэтому попробуем дать общую формулировку этого метода, а затем более подробно остановимся на описании этого метода в пространстве R_n .

Пусть нам надо решить систему (6.117). Формально задача формулируется следующим образом. Определим в исходном пространстве векторов некоторую D -норму и некоторое подпространство G_S с базисом $\{g_i\}$. Тогда задача наилучшего приближения решения $\{x\}^* = [A]^{-1}\{b\}$ системы (6.120) на многообразии

$$U_S = x^0 + G_S = \{x \div x = x^0 + \psi, \text{ где } \psi \in G_S\}$$

формулируется следующим образом. Требуется найти вектор $\psi_1 \in G_S$ такой, что

$$\|x^* - (x^0 + \psi_1)\|_D = \min_{\psi \in G_S} \|\psi^* - (\psi^0 + \psi)\|_D = \min_{a_1, a_2, \dots, a_s} \|(\psi^* - \psi^0) - \sum_{i=1}^s a_i g_i\|_D.$$

Обычно в качестве x^0 выступает вектор начального приближения. В качестве $\{g_i\}$ берется базис векторного пространства, на котором ищется решение задачи. Норма D может быть задана изначально, если это входит в формулировку задачи. Но если она не дана, ее можно выбрать самостоятельно. Конечно, максимальное приближение решения по одной норме не будет таким для другой, но если некий процесс сходится по одной норме, то он сходится и по другой. Таким образом, норму можно выбрать так, чтобы она лучше подходила для конкретного метода. И если эта норма не очень «неестественна», то близкое приближение решения по этой норме будет соответствовать достаточно точному решению исходной задачи.

Разложим ψ_1 в ряд по $\{g_i\}$:

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^s a_i^* g_i.$$

Тогда коэффициенты a_i^* находятся из решения системы

$$[B]\{a\} = \{F\},$$

где $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = (g_i, g_j)_D$, а $F = (F_1, \dots, F_s)$ – вектор с компонентами $F_i = (\varphi^* - \varphi^0, g_i)_D$.

Наиболее простой случай, когда система $\{g_i\}$ является D -ортогональной. Тогда матрица $[B]$ является диагональной, и решением будут коэффициенты

$$a_i^* = \frac{(x^* - x^0, g_i)_D}{\|g_i\|_D^2} = \frac{(D(x^* - x^0), g_i)}{\|g_i\|_D^2}.$$

Для реализации необходимо знание вектора Dx^* (т. е., в некотором смысле, необходимо знать ответ). Вообще говоря, этот вектор неизвестен, но в отдельных случаях его можно найти. В частности, когда $[D] = [A]$, $[A] = [A^*] > 0$ или $[D] = [A^*][A]$.

Далее необходима D -ортогональная система векторов $\{g_i\}$. Так как изначально система векторов $\{g_i\}$ может не быть D -ортогональной (система $\{g_i\}$ может получаться в процессе решения), то ее необходимо ортогонализировать. Обычно это проще, чем решать искомую систему.

Мы будем рассматривать случай, когда G_S является линейной оболочкой независимой системы векторов

$$\{A_i(x_0 - x^*)\} = \{A^{i-1}(Ax^0 - b)\},$$

матрица $[A]$ симметрична и положительно определена. Тогда:

$$x_1 = x_0 + \sum_{i=1}^s a_i g_i; \quad a_i = \frac{(x^* - x^0, g_i)_A}{(g_i, g_i)_A} = -\frac{(Ax^0 - b, g_i)}{(g_i, Ag_i)}.$$

Иначе этот процесс можно записать в виде:

$$x^k = x^{k-1} - a_k g_k; \quad a_k = \frac{(\xi^{k-1}, g_k)}{(Ag_k, g_k)},$$

где $\{\xi^k\} = [A]\{x^k\} - \{b\}$ – вектор невязки.

Из методов ортогонализации наиболее известным и простым (с точки зрения описания) является метод Грамма–Шмидта. Но для большого числа векторов процесс становится очень трудоемким: при его реализации необходимы большие затраты как памяти, так и ресурсов процессора. Положим $[D] = [A]^2$. Тогда для ортогонализации векторов $\{[A]^{i-1}([A]\{x^0\} - \{b\})\}$ наиболее экономичным из известных методов является метод сопряженных градиентов. Формулы для решения системы имеют вид:

$$g_k = \begin{cases} \xi^0 & \text{если } k=1, \\ \xi^{k-1} - b_k g_{k-1} & \text{если } k > 1; \end{cases}$$

$$b_k = \frac{(A\xi^{k-1}, g_{k-1})}{(Ag_{k-1}, g_{k-1})}; \quad x^k = x^{k-1} - a_k g_k; \quad a_k = \frac{(\xi^{k-1}, g_k)}{(Ag_k, g_k)}; \quad \xi^k = Ax^k - b.$$

Первые два уравнения ортогонализуют систему векторов, а остальные, собственно, решают задачу.

Теоретически метод сопряженных градиентов является прямым методом, так как при $s > n$, где n – порядок матрицы $[A]$, система векторов $\{A^i \xi^0\}$, $i = 1, \dots, s-1$ линейно зависима. Следовательно, на некотором шаге мы получаем, что система $\{g_i\}$ является базисом, откуда следует, что решение точное. Но при реализации этого метода на ЭВМ в случае матриц высокого порядка, как правило, уже через

несколько десятков шагов из-за нелинейности возникает явление численной неустойчивости. Один из способов борьбы с этим заключается в следующем: через каждые s шагов начальное приближение выбирается заново.

Как уже упоминалось, метод сопряженных градиентов относится к методам вариационного типа. Хорошего понимания и обоснования таких методов можно достигнуть лишь с привлечением теории оптимизации, ибо решение линейной алгебраической системы здесь подменяется решением эквивалентной экстремальной задачи.

А именно, пусть $[A]\{x\} = \{b\}$ – нормальная n -мерная система, т. е. $[A]$ – положительно определенная симметрическая матрица, и пусть (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в пространстве R_n . Образует квадратичный функционал

$$\Phi(x) = (Ax, x) - 2(b, x) + c,$$

где $c \in R_1$ – произвольная постоянная.

Задача решения нормальной системы линейных уравнений и задача минимизации описанного функционала эквивалентны. Действительно, нормальная форма имеет, и притом единственное, решение; обозначим его x^* . Тогда при любом векторе $x = x^* + \Delta$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(x^* + \Delta) = (A(x^* + \Delta), x^* + \Delta) - 2(b, x^* + \Delta) + c = \\ &= (Ax^*, x^*) + (A\Delta, x^*) + (Ax^*, \Delta) + (A\Delta, \Delta) - 2(b, x^*) - 2(b, \Delta) + c = \\ &= \Phi(x^*) + (A\Delta, x^*) + (Ax^*, \Delta) - 2(Ax^*, \Delta) + (A\Delta, \Delta) = \\ &= \Phi(x^*) + (A\Delta, \Delta) > \Phi(x^*), \end{aligned}$$

в силу самосопряженности и положительности $[A]$, значит,

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in R_n} \Phi(x).$$

Теперь можно применять различные методы численной минимизации функционала $\Phi(x)$ (функции n переменных x_1, x_2, \dots, x_n).

На основании вышеизложенного можно предложить следующий алгоритм для метода сопряженных градиентов.

Шаг 1. Задать $x^{(0)}$ (начальный вектор) и число $\varepsilon > 0$ (уровень допустимых погрешностей).

Шаг 2. Вычислить вектор $\xi^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ (невязка начального приближения).

Шаг 3. Положить $p^{(0)} = \xi^{(0)}$, $k = 0$ (номер итерации).

Шаг 4. Вычислить скаляр $a_k = \frac{(\xi^{(k)}, p^{(k)})}{(\xi^{(k)}, Ap^{(k)})}$.

Шаг 5. Вычислить вектор $x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k p^{(k)}$ (очередное приближение).

Шаг 6. Вычислить $\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - a_k Ap^{(k)}$ (невязка $(k+1)$ -го приближения).

Шаг 7. Полагая $\xi^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, имеем (см. шаг 5) $\xi^{(k)} = b - Ax^{(k)} = b - Ax^{(k)} - Aa_k p^{(k)} = \xi^{(k)} - a_k Ap^{(k)}$. Такое выражение невязки $\xi^{(k+1)}$ позволяет обходиться без вычисления вектора $Ax^{(k+1)}$.

Шаг 8. Проверить выполнение неравенства $\|\xi^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$; если «да», остановить работу алгоритма и вывести результаты.

Шаг 9. Вычислить скаляр $\beta_k = \frac{(\xi^{(k+1)}, Ap^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})}$.

Шаг 10. Вычислить вектор $p^{(k+1)} = \xi^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$ (новое направление минимизации).

Шаг 11. Положить $k := k + 1$ и вернуться к шагу 4.

Интересно определить место, которое занимает этот метод в общей классификации методов решения линейных алгебраических систем. Дело в том, что метод сопряженных градиентов, являясь по форме итерационным, фактически должен быть отнесен к прямым методам, ибо доказано, что с его помощью минимум введенной квадратичной функции от n переменных, иначе решение n -мерной линейной системы достигается ровно за n -шагов при любом начальном векторе $x^{(0)}$. Применяют же метод сопряженных градиентов именно как итерационный метод (что видно и из приведенного алгоритма), имея в виду два обстоятельства. Во-первых, реальный вычислительный процесс может быть довольно далек от идеального и, вследствие неизбежных ошибок округления, на n -м шаге может быть не достигнута нужная точность. Во-вторых, если размерность n решаемой задачи велика, то число шагов, достаточное для получения решения системы с нужной точностью, может оказаться значительно меньшим этой (n) теоретической величины.

Очевидно, что в случае ленточной структуры матрицы системы, аналогично как и для методов Гаусса и Холесского, в методе сопряженных градиентов может быть уменьшено число операций.

В ряде случаев система (5.1)–(5.4) может оказаться нелинейной. Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений наибольшее распространение получил итерационный метод Ньютона–Рафсона [30].

6.3.5. Применение метода конечных элементов в распределенных вычислительных системах

Основную вычислительную сложность в методе конечных элементов занимают алгоритмы решения системы алгебраических уравнений (6.115). Поэтому применение метода конечных элементов в распределенных системах сводится к распараллеливанию решения системы (5.1)–(5.4) [24], [36].

Существует два основных подхода:

- распараллеливание на уровне алгоритма;
- распараллеливание на уровне операций алгоритма.

Метод Гаусса позволяет осуществить распараллеливание на уровне самого алгоритма. Как следует из линейного алгоритма, операции преобразования строк можно выполнять параллельно. Поэтому основная идея заключается в том, чтобы на каждом вычислительном узле передать часть основной матрицы системы, а затем осуществлять лишь обмен разрешающими строками (столбцами).

Существует несколько модификаций данного подхода [24]. Простейшая из них – это размещение по строкам (столбцам). На каждом вычислительном узле размещается определенное число строк (столбцов) матрицы системы. При этом на каждом узле строки (столбцы) размещаются последовательно. На каждом шаге расчета узлы обмениваются информацией о разрешающей строке (столбце). На практике такой подход является не совсем эффективным, так как не обеспечивает равномерной загрузки вычислительных узлов. Очевидно, что узел, содержащий начальные строки (столбцы) матрицы, закончит вычисления первым.

Для более равномерной загрузки вычислительных узлов используется циклическое размещение по строкам и столбцам. Пусть n – размерность матрицы, а U – число вычислительных узлов, тогда количество обрабатываемых строк (столбцов) на каждом узле будет

$$r = \frac{n}{U}.$$

Тогда на первом узле разместим строки (столбцы) с номерами:

$$1, 1+r, 1+2r, + \dots;$$

на втором:

$$2, 2+r, 2+2r, + \dots$$

и т. д.

Такое размещение позволяет нагружать вычислительные узлы более сбалансированно.

Существуют и другие способы размещения матриц, а также и адаптированные к этому методы разложения матриц на произведение нижней и верхней треугольной.

Методы Холесского и сопряженных градиентов можно распараллеливать не на уровне алгоритмов, а на уровне операций, выполняемых в ходе алгоритма. Такими операциями является умножение вектора на матрицу и матрицы на матрицу. Такой подход менее эффективен, чем распараллеливание на уровне алгоритмов, так как сопряжен с большим числом обменных операций между вычислительными узлами [20].

ГЛАВА 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

7.1. Методика проведения вычислительного эксперимента

В последнее время в связи с быстрым развитием компьютерных технологий большое значение приобрел *вычислительный эксперимент* – исследование, основанное на применении прикладной математики и ЭВМ как технической базы при использовании математических моделей.

Вычислительный эксперимент основывается на создании математических моделей изучаемых объектов, которые формируются с помощью некоторой особой математической структуры, способной отражать свойства объекта, проявляемые им в различных экспериментальных условиях. Однако эти математические структуры превращаются в модели лишь тогда, когда элементы структуры имеют конкретную физическую интерпретацию. Получаемые математические структуры вместе с описанием соответствия экспериментально

обнаруженным свойствам объекта являются моделью изучаемого объекта. Они отражают в математической, символической (знаковой) форме объективно существующие в природе зависимости, связи и законы. Модель может соответствовать наглядным образом реальному устройству или какому-либо его элементу [29].

Вычислительный эксперимент основывается как на математической модели, так и на приемах вычислительной математики, которая состоит из многих разделов, развивающихся вместе с эволюцией вычислительной техники. Так, например, относительно недавно появился дискретный анализ, дающий возможность получения любого численного результата только с помощью арифметических и логических действий. Задача вычислительной математики здесь сводится к представлению решений (точно или приближенно) в виде последовательности арифметических операций, т. е. алгоритма решения.

На основе математического моделирования и методов вычислительной математики разработаны теория и практика вычислительного эксперимента, технологический цикл которого принято разделять на ряд этапов:

1. Для исследуемого объекта строится модель, обычно сначала физическая, фиксирующая разделение всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные и второстепенные, причем второстепенные факторы, которые не имеют существенного значения для рассматриваемого вопроса, на данном этапе исследования отбрасываются. Формулируются допущения и условия применимости модели, границы, в которых будут справедливы полученные результаты. Модель записывается в виде математических соотношений, как правило, в виде дифференциальных уравнений.

2. Разрабатывается метод решения сформулированной математической задачи, на основе которого в дальнейшем строится алгоритм. Каждый конкретный расчет в вычислительном эксперименте проводится при фиксированных значениях всех параметров. При оптимизации конструкции устройства приходится проводить большое число расчетов однотипных вариантов задачи, отличающихся значениями некоторых исходных данных. Это предопределяет эффективность применения вычислительной техники.

3. Разрабатывается программа решения задачи на ЭВМ. В настоящее время исследователи, как правило, программируют не самостоятельно, а используют готовые универсальные инженерные программные комплексы, в которых уже реализованы типовые алгоритмы решения прикладных задач.

4. Проведение расчетов на ЭВМ. Результат получается в виде некоторой цифровой информации, которую далее необходимо будет проанализировать. Точность решения определяется при вычислительном эксперименте достоверностью модели, положенной в основу эксперимента, правильностью алгоритмов и программ (проводятся предварительные «тестовые» испытания).

5. Обработка результатов расчетов, их анализ и выводы. На этом этапе могут возникнуть как необходимость уточнения математической модели (усложнения или, наоборот, упрощения), так и предложения по созданию упрощенных инженерных способов решения и формул, дающих возможности получить необходимую информацию более простым способом.

Вычислительный эксперимент приобретает исключительное значение в тех случаях, когда натурные эксперименты и построение физической модели оказываются невозможными. Особенно ярко можно проиллюстрировать значение вычислительного эксперимента при исследовании масштабов современного воздействия человека на природу. То, что принято называть климатом – устойчивое среднее распределение температуры, осадков, облачности и т. д., – представляет собой результат сложного взаимодействия физических процессов, протекающих в атмосфере, на поверхности Земли и в океане [7]. Характер и интенсивность этих процессов в настоящее время изменяются значительно быстрее, чем в сравнительно близком геологическом прошлом в связи с воздействием загрязнения окружающей среды. Климатическую систему можно исследовать, строя соответствующую математическую модель, которая должна в развитии рассматривать взаимодействие между собой атмосферы, океана и суши. Физические эксперименты над климатической системой не только чрезвычайно дороги, но и весьма опасны, так как могут вывести ее из равновесия. Однако глобальный климатический эксперимент возможен, но не натуральный, а вычислительный, проводящий исследования не реальной климатической системы, а ее математической модели.

В науке и технике известно немало областей, в которых вычислительный эксперимент оказывается единственно возможным при исследовании сложных систем. Кроме того, часто он экономически более выгоден, чем натуральный эксперимент.

Методика проведения экспериментальных работ [36]. Для проведения эксперимента любого типа необходимо провести ряд предварительных действий: разработать гипотезу, подлежащую проверке, создать программу экспериментальных работ, определить способы

и приемы вмешательства в объект исследования, обеспечить условия для осуществления процедуры экспериментальных работ, разработать пути и приемы фиксирования хода и результатов эксперимента, подготовить средства эксперимента (приборы, установки, модели и т. п.), обеспечить эксперимент необходимым обслуживающим персоналом.

Особое значение имеет правильная разработка методики эксперимента. *Методика* – это совокупность мыслительных и физических операций, размещенных в определенной последовательности, в соответствии с которой достигается цель исследования. Она должна включать следующие составные элементы:

- проведение предварительного целенаправленного наблюдения над изучаемым объектом или явлением с целью определения исходных данных (гипотез, выбора варьируемых факторов);

- создание условий, при которых возможно экспериментирование (подбор объектов для экспериментального воздействия, устранение влияния случайных факторов);

- определение пределов измерений;

- систематическое наблюдение за ходом развития изучаемого явления в процессе эксперимента и точные описания фактов;

- проведение систематической регистрации измеряемых величин различными средствами и способами;

- создание повторяющихся ситуаций, изменение характера условий и перекрестные воздействия, создание усложненных ситуаций с целью подтверждения или опровержения ранее полученных данных;

- переход от эмпирического изучения к логическим обобщениям, к анализу и теоретической обработке полученного фактического материала.

Важным этапом подготовки к эксперименту является определение его целей и задач. Объем и трудоемкость исследований зависят от степени точности принятых средств измерений и глубины теоретических разработок. Чем четче сформулирована теоретическая часть исследования, тем меньше объем эксперимента. Количество задач для конкретного эксперимента не должно быть слишком большим (как правило 3–4, максимально до 10).

Чтобы перед экспериментом выбрать варьируемые факторы, т. е. установить основные и второстепенные характеристики, влияющие на исследуемый процесс, необходимо проанализировать расчетные (теоретические) схемы процесса. При этом используется метод ранжирования (см. § 5.1). Основным принципом установления степени важности характеристики является ее роль в исследуемом процессе.

Для этого процесс изучается в зависимости от какой-то одной переменной при остальных постоянных. Такой принцип проведения эксперимента оправдывает себя лишь в тех случаях, когда таких характеристик не более трех. Если же переменных величин много, целесообразен принцип многофакторного анализа.

При регистрации величин в ходе одного и того же процесса повторные отсчеты на приборах, как правило, неодинаковы. Отклонения объясняются различными причинами – неоднородностью свойств изучаемого тела, погрешностью приборов, субъективными особенностями экспериментатора и др. Чем больше случайных факторов, влияющих на опыт, тем больше расхождения значений, получаемых при измерениях. Это ведет к необходимости повторных измерений. Установление потребного минимального количества измерений имеет большое значение, поскольку дает возможность получения наиболее объективных результатов при минимальных затратах времени и средств. Оно должно обеспечить устойчивое среднее значение измеряемой величины, удовлетворяющее заданной степени точности.

Чтобы обосновать набор средств измерений (приборов), экспериментатор должен быть хорошо знаком с выпускаемой в стране измерительной аппаратурой (при помощи регулярно издающихся каталогов, по которым можно заказать те или иные средства измерений). Естественно, что в первую очередь следует использовать стандартные, серийно выпускаемые машины и приборы, работа на которых регламентируется официальными документами. В отдельных случаях возникает потребность в создании уникальных приборов, установок, стендов, машин для разработки темы. Для этих целей желательно использовать готовые узлы выпускаемых приборов или реконструировать существующие. Причем целесообразность изготовления нового оборудования должна быть тщательно обоснована как теоретическими расчетами, так и практическими соображениями.

Важным разделом методики является выбор методов обработки и анализа экспериментальных данных. Обработка данных сводится к систематизации всех значений, классификации, анализу. Результаты экспериментов должны быть сведены в удобочитаемые формы записи – таблицы, графики, формулы, позволяющие быстро сопоставлять и анализировать полученные результаты [12]. Размерность всех параметров должна соответствовать единой системе физических величин. Особое внимание в методике должно быть уделено математическим методам обработки и анализу опытных данных, в том числе

установлению эмпирических зависимостей, аппроксимации связей между варьируемыми характеристиками, установлению критериев и доверительных интервалов.

7.2. Подбор параметров модели

При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Сделать это совсем не так просто, как кажется на первый взгляд. Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и может допускать количественную оценку. Будем называть характеристику цели, заданную количественно, параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы. Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, как раз и задается целью исследования.

При традиционном, не математическом, подходе исследователь стремится как-то учесть разные аспекты, взвесить их и принять «согласованное» решение о том, какой опыт «лучше». Однако разные экспериментаторы проведут сравнение опытов не одинаково. Различия, если хотите, одно из проявлений «таланта» исследователя или его «бездарности».

Прежде чем сформулировать требования к параметрам оптимизации и рекомендации по их выбору, познакомимся с различными видами параметров.

Виды параметров оптимизации [24]. В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразными. Чтобы ориентироваться в этом многообразии, введем некоторую классификацию (рис. 7.1). Мы не стремимся к созданию полной и детальной классификации. Наша задача – построить такую условную схему, которая включала бы ряд практически важных случаев и помогала экспериментатору ориентироваться в реальных ситуациях.

Реальные ситуации, как правило, сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих, параметров. В принципе каждый объект может характеризоваться сразу всей совокупностью параметров, приведенных на рис. 7.1, или любым подмножеством из этой совокупности. Движение к оптимуму возможно, если выбран один единственный параметр оптимизации. Тогда прочие

характеристики процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.



Рис. 7.1. Параметры оптимизации

Прокомментируем некоторые элементы схемы.

Экономические параметры оптимизации, такие как прибыль, себестоимость и рентабельность, обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов, тогда как затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том числе и лабораторных. Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Такие параметры, как долговечность, надежность и стабильность, связаны с длительными наблюдениями. Имеется некоторый опыт их использования при изучении дорогостоящих ответственных объектов, например, радиоэлектронной аппаратуры.

Почти во всех исследованиях приходится учитывать количество и качество получаемого продукта. Как меру количества продукта используют выход, например, процент выхода химической реакции, выход годных изделий. Показатели качества чрезвычайно разнообразны. В нашей схеме они сгруппированы по видам свойств. Характеристики количества и качества продукта образуют группу технико-технологических параметров.

Под рубрикой «Прочие» сгруппированы различные параметры, которые реже встречаются, но не являются менее важными. Сюда попали статистические параметры, используемые для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций. В качестве примеров назовем задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т. д. Последняя задача возникает, в частности, при выборе оптимальных настроек автоматических регуляторов или при улучшении свойств нитей (проволока, пряжа, искусственное волокно и др.).

С ростом сложности объекта возрастает роль психологических аспектов взаимодействия человека или животного с объектом. Так, при выборе оптимальной организации рабочего места оператора параметром оптимизации может служить число ошибочных действий в различных возможных ситуациях. Сюда относятся задачи выработки условных рефлексов типа задачи «крысы в лабиринте».

При решении задач технической эстетики или сравнении произведений искусства возникает потребность в эстетических параметрах. Они основаны на ранговом подходе, который будет рассмотрен ниже.

Требования к параметру оптимизации [3]. Параметр оптимизации – это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Мы должны уметь его измерять при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, будем называть областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100 %. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, число кровяных телец в пробе крови – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Уметь измерять параметр оптимизации – это значит располагать подходящим прибором. В ряде случаев такого прибора может не существовать или он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата, то приходится воспользоваться приемом, называемым ранжированием (ранговым подходом). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. п. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем

случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.

Ранг – это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Мы ставим в соответствие качественному признаку некоторое число – ранг.

Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог. Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построения удовлетворительных численных оценок. При прочих равных условиях всегда нужно отдавать предпочтение физическому измерению, так как ранговый подход менее чувствителен и с его помощью трудно изучать тонкие эффекты.

Другие примеры рангового подхода: определение чемпиона мира по фигурному катанию или гимнастике, дегустация вин, сравнение произведений искусства и т. д. Или, если хотите, из области химии: сравнение продуктов по цвету, прозрачности, форме кристаллов.

Следующее требование: параметр оптимизации должен выражаться одним числом. Иногда это получается естественно, как регистрация показания прибора. Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре. Чаще приходится производить некоторые вычисления. Так бывает при расчете выхода реакции. В химии часто требуется получать продукт с заданным отношением компонентов, например, $A : B = 3 : 2$. Один из возможных вариантов решения подобных задач состоит в том, чтобы выразить отношение одним числом (1,5) и в качестве параметра оптимизации пользоваться значениями отклонений (или квадратов отклонений) от этого числа.

Еще одно требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации, – однозначность в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. Однако обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно оценивал эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи.

Представление об эффективности не остается постоянным в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Это приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации. Так, например, на первых стадиях исследования технологических процессов в качестве параметра оптимизации часто используется выход продукта. Однако в дальнейшем, когда возможность повышения выхода исчерпана, нас начинают интересовать такие параметры, как себестоимость, чистота продукта и т. д.

Говоря об оценке эффективности функционирования системы, важно помнить, что речь идет о системе в целом. Часто система состоит из ряда подсистем, каждая из которых может оцениваться своим локальным параметром оптимизации. При этом оптимальность каждой из подсистем по своему параметру оптимизации не говорит об оптимальности системы в целом.

Мало иметь эффективный параметр оптимизации. Надо еще, чтобы он был эффективным в статистическом смысле. Фактически это требование сводится к выбору параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью. (Если и эта точность недостаточна, тогда приходится обращаться к увеличению числа повторных опытов.)

Пусть, например, нас интересует исследование прочностных характеристик некоторого сплава. В качестве меры прочности можно использовать как прочность на разрыв, так и макротвердость. Поскольку эти характеристики функционально связаны, то с точки зрения эффективности они эквивалентны. Однако точность измерения первой характеристики существенно выше, чем второй. Требование статистической эффективности заставляет отдать предпочтение прочности на разрыв.

Следующее требование к параметру оптимизации – требование универсальности или полноты. Под универсальностью параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента [3]. Не представляет труда объяснить, что значит максимум извлечения, максимум содержания ценного компонента. Эти и подобные им технологические параметры оптимизации имеют ясный физический смысл, но иногда для них может не выполняться, например, требование статистической эффективности. Тогда рекомендуется переходить к преобразованию параметра оптимизации.

Второе требование часто также оказывается весьма существенным. Для процессов разделения термодинамические параметры оптимизации более универсальны. Однако на практике ими пользуются мало: их расчет довольно труден.

Пожалуй, из этих двух требований первое является более существенным, потому что часто удается найти идеальную характеристику системы и сравнить ее с реальной характеристикой. Иногда при этом целесообразно нормировать параметр с тем, чтобы он принимал значения от нуля до единицы.

Кроме вышеизложенных требований и пожеланий при выборе параметра оптимизации нужно еще иметь в виду, что параметр оптимизации в некоторой степени оказывает влияние на вид математической модели исследуемого объекта. Экономические параметры, в силу их аддитивной природы, легче представляются простыми функциями, чем физико-химические показатели. Температура плавления сплава является, как известно, сложной, многоэкстремальной характеристикой состава, тогда как стоимость сплава зависит от состава линейно.

Факторы [12]. После того как выбран объект исследования и параметр оптимизации, нужно включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным, то это может привести к неприятным последствиям. Так, если неучтенный фактор произвольно флуктуировал – принимал случайные значения, которые экспериментатор не контролировал, – это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании фактора на некотором фиксированном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, так как нет гарантии, что фиксированный уровень является оптимальным.

Определение фактора. Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования.

Также, как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения. Мы будем считать фактор заданным, если вместе с его названием указана область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор, ясно, что совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения.

Область определения может быть непрерывной и дискретной. Однако в тех задачах планирования эксперимента, которые мы собираемся рассматривать, всегда используются дискретные области определения. Так, для факторов с непрерывной областью определения, таких, как температура, время, количество вещества и т. п., всегда выбираются дискретные множества уровней.

В практических задачах области определения факторов, как правило, ограничены. Ограничения могут носить принципиальный либо технический характер.

Произведем классификацию факторов в зависимости от того, является ли фактор переменной величиной, которую можно оценивать количественно: измерять, взвешивать, титровать и т. п., или же он – некоторая переменная, характеризующаяся качественными свойствами.

Факторы разделяются на количественные и качественные. Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т. д.

Хотя качественным факторам не соответствует числовая шкала в том смысле, как это понимается для количественных факторов, однако можно построить условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т. е. производит кодирование. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется.

В ряде случаев граница между понятием качественного и количественного фактора весьма условна. Пусть, например, при изучении воспроизводимости результатов химического анализа надо установить влияние положения тигля с навеской в муфельной печи. Можно разделить под печи на квадраты и считать номера квадратов уровнями качественного фактора, определяющего положение тигля. Вместо этого можно ввести два количественных фактора – ширину и длину пода печи. Качественным факторам не соответствует числовая шкала, и порядок уровней факторов не играет роли.

Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента. При планировании эксперимента факторы должны быть управляемыми. Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т. е. может управлять фактором. В этом состоит особенность «активного» эксперимента. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни). Такое определение фактора будем называть операциональным. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то совершенно необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Введение операционального определения обеспечивает однозначное понимание фактора.

Точность замера факторов должна быть возможно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. При изучении процесса, который длится десятки часов, нет необходимости учитывать доли минуты, а в быстрых процессах необходимо учитывать, быть может, доли секунды.

Факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект. Факторы должны быть однозначны. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать сложные факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т. п.

Необходимость введения сложных факторов возникает при желании представить динамические особенности объекта в статической форме. Пусть, например, требуется найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Если относительно температуры известно, что она должна нарастать линейно, то в качестве фактора вместо функции (в данном случае линейной) можно использовать тангенс угла наклона, т. е. градиент. Положение усложняется, когда исходная температура не зафиксирована. Тогда ее приходится вводить в качестве еще одного фактора. Для более сложных кривых пришлось бы ввести большее число факторов (производные высоких порядков, координаты особых точек и т. д.). Поэтому целесообразно пользоваться сложным качественным фактором – номером кривой. Различные варианты кривых рассматриваются в качестве уровней. Это могут быть разные режимы термообработки сплавов, переходные процессы в системах управления и т. д.

Требования к совокупности факторов [13]. При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Прежде всего, выдвигается требование совместимости. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Это очень важное требование. Представьте себе, что вы поступили легкомысленно, не обратили внимания на требование совместимости факторов и запланировали такие условия опыта, которые могут привести к взрыву установки или осмолению продукта. Согласитесь, что такой результат очень далек от целей оптимизации.

Несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения. Избавиться от нее можно сокращением областей. Положение усложняется, если несовместимость проявляется внутри областей определения. Одно из возможных решений – разбиение на подобласти и решение двух отдельных задач.

При планировании эксперимента важна независимость факторов, т. е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условно невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент. Итак, мы подошли ко второму требованию – отсутствию корреляции между факторами. Требование некоррелированности не означает, что между значениями факторов нет никакой связи. Достаточно, чтобы связь не была линейной.

7.3. Точность и верификация математической модели

При моделировании исследователь должен быть уверен в корректности модели, в соответствии модели реальному прототипу. Точность математического моделирования зависит от того, насколько хорошо математическая модель отражает свойства объекта. Исследователю важно знать, с какой погрешностью он получает результат, потому что в случае большой погрешности расчет теряет смысл.

На точность моделирования влияют следующие особенности [14]:

- упрощение модели;
- ошибки при построении модели;
- использование элементов с низкой точностью, с линейной аппроксимацией;
- наличие в модели вырожденных конечных элементов;
- некорректные связи;

- некорректные параметры моделей;
- некорректные свойства элементов;
- некорректные начальные и граничные условия;
- погрешности метода расчетов.

На основании результатов испытаний, таких, например, как показания приборов, вносятся изменения в математическую модель. В итоге создается модель, результаты использования которой совпадают с реальными объектами с заданной погрешностью.

Верификация модели (*model verification*) – проверка ее истинности, адекватности. Дословный перевод с английского: *verification* – это: 1) контроль, проверка; 2) удостоверение, подтверждение (предсказания, сомнения) (а); подтверждение под присягой (б); 3) засвидетельствование. В отношении к дескриптивным моделям верификация модели сводится к сопоставлению результатов расчетов по модели с соответствующими данными действительности – фактами и закономерностями экономического развития. В отношении нормативных (в том числе оптимизационных) моделей положение сложнее: в условиях действующего экономического механизма моделируемый объект подвергается различным управляющим воздействиям, не предусмотренным моделью; надо ставить специальный экономический эксперимент с учетом требований чистоты, т. е. устранения влияния этих воздействий, что представляет собой трудную, во многом еще не решенную задачу.

Верификация имитационной модели есть проверка соответствия ее поведения предположениям экспериментатора. Когда модель организована в виде вычислительной программы для компьютера, то сначала исправляют ошибки в ее записи на алгоритмическом языке, а затем переходят к верификации. Это первый этап действительной подготовки к имитационному эксперименту. Подбираются некоторые исходные данные, для которых могут быть предсказаны результаты просчета. Если окажется, что ЭВМ выдает данные, противоречащие тем, которые ожидалось при формировании модели, значит, модель неверна, т. е. не соответствует заложенным в нее ожиданиям. В обратном случае переходят к следующему этапу проверки работоспособности модели – ее валидации.

Валидация модели (*model validation*) – проверка соответствия данных, получаемых в процессе машинной имитации, реальному ходу явлений, для описания которых создана модель. Она производится тогда, когда экспериментатор убедился на предшествующей стадии (верификации) в правильности структуры (логики) модели, и состоит

в том, что выходные данные после расчета на компьютере сопоставляются с имеющимися статистическими сведениями о моделируемой системе.

В более общем виде верификация – это подтверждение на основе представления объективных свидетельств того, что установленные требования были выполнены. Если образно, то верификация – процедура сопоставления того, что сделано (или еще пока делается), с тем, что было задумано (предписано) сделать, т. е. сопоставление законченного или промежуточного результата с входными требованиями – «взгляд назад».

Валидация – подтверждение на основе представления объективных свидетельств того, что требования, предназначенные для конкретного использования или применения, выполнены [18]. Образно говоря, валидация – это процедура сопоставления того, что задумано сделать (или еще пока делается), с тем, что необходимо потребителю для конкретного применения, т. е. сопоставление планируемого или промежуточного результата деятельности с текущими выходными требованиями – «взгляд вперед». Дословный перевод с английского: *validation* – это: 1) ратификация, утверждение; 2) легализация, признание законной силы, придание юридической силы.

Верификация является инструментом валидации, ее частью. Верификация продолжается вплоть до момента кодирования программы, а валидация осуществляется непосредственно после. Поэтому в практике моделирования с использованием ЭВМ верификация и валидация моделей завершается после проведения вычислительного эксперимента и подтверждения его результатами соответствия как реальным процессам исследуемого объекта, так соответствия конкретным условиям применимости (или требованиям). Однако в большинстве случаев процессы верификации, валидации, тестирования и реализации пересекаются по времени.

Используются два подхода к валидации программного обеспечения. Первый подход, дедуктивный, представлен такими направлениями исследований, как автоматическое доказательство теорем, использование мультимножеств и графов, а также разнообразных специализированных алгебр. Программная система описывается в рамках некоего формализма, после чего выполняется строгое математическое доказательство обладания данной системой теми или иными свойствами. Второй подход – модельный; его последователи не стремятся вписать систему в рамки теории, а вместо этого строят модель системы, которую

можно рассматривать как машину или автомат. Любое требование к системе проверяется для каждого возможного состояния автомата.

Модельный подход поддерживает не только полную, но и частичную верификацию, которая может быть направлена на проверку только одного небольшого свойства, абстрагировавшись от менее важных деталей системы. Иными словами, для проведения верификации необязательно добиваться формализации всех без исключения требований спецификации. В отличие от тестирования и использования симуляторов, в модельном подходе не существует такого понятия как вероятность обнаружения ошибки: если ошибка есть, она будет обнаружена за конечное время.

В том случае, когда свойство оказывается нарушенным, в виде контрпримера предоставляется диагностирующая информация.

Процесс проверки моделей не требует ни ручного управления со стороны пользователя, ни высокого уровня профессионализма. Имея модель, можно автоматически проверять на ней необходимые свойства. Процесс проверки интегрируется в стандартный цикл проектирования, позволяя, как показывает практика, уменьшить время создания приложений с учетом проведения рефакторинга программного кода.

Однако у модельного подхода есть и слабые стороны. Верификация осуществляется по модели, а не по реальной системе, поэтому ценность полученного результата напрямую зависит от корректности модели, что требует высокого уровня подготовки персонала, создающего модели программ. Модельный подход не может эффективно применяться без точных алгоритмов принятия решений. Нет гарантий полноты: проверяются только те свойства, которые указаны явно.

Построение моделей и формулировка требований требуют высокого уровня знаний и умения их применять. Результаты могут вводить в заблуждение (верификатор – тоже программа и тоже может ошибаться, модель может содержать ошибку; правда, основные процедуры проверки моделей формально доказаны с помощью пакетов автоматического доказательства теорем). Нет верификаторов, поддерживающих обобщения, например, нельзя проверить систему, если в ней не зафиксировать число сущностей.

Примеры успешного применения модельного подхода можно обнаружить, изучая процесс разработки сложных систем, оперирующих большими объемами данных: СУБД, комплексы потоковой обработки речевой и текстовой информации, системы обеспечения информационной безопасности [27]. Модельный подход к верификации

программного обеспечения позволяет при правильном разбиении всего комплекса, проектировании и разработке модулей и атомарных составляющих выявлять логические ошибки еще на этапе проектирования. Так, при разработке программного обеспечения потоковой обработки растровых изображений в рамках модельного подхода была сформирована модель для верификации менеджера заданий для потоковой обработки и обработчиков атомарных заданий, позволившая выявить ошибки в проектировании протоколов взаимодействия модулей комплекса и алгоритме определения обработчика атомарного задания. Данная модель основана на использовании сетей Петри и сопутствующих алгоритмов.

Говоря о функциональности, обычно подразумевают некоторое множество атрибутов, рассчитанных на существование определенного набора функций и их специальных свойств, достигающих поставленных целей:

- пригодность. Выполняет ли приложение предназначенную ему задачу? Может быть верифицировано путем моделирования правильного сопутствующего окружения (подход, аналогичный тестированию);

- точность. Насколько точны результаты работы приложения? Трудно реализуется при модельном подходе; логическая верификация в данном случае будет более эффективна;

- безопасность. Не происходит ли неавторизованной утечки информации? Верифицируется напрямую с формулированием соответствующих запросов. Также существует целый ряд немодельных верификаторов, решающих эту же задачу;

- соответствие. Соответствует ли реализованная функция данному стандарту? Стандарт используется как спецификация (источник требований), реализация функции моделируется;

- совместимость. Может ли данное приложение общаться с соответствующими программными продуктами от других производителей? Близким приближением является подразумеваемая совместимость при наличии соответствия стандарту и отсутствии недокументированных возможностей. При необходимости более точной проверки выполняет автоматическое дизассемблирование и эмуляцию заданных участков программного кода, ручную отладку, построение графа передачи управления и данных.

Множество атрибутов надежности характеризует способность программного обеспечения поддерживать определенный уровень предоставляемых услуг при данных условиях и в течение заданного промежутка времени:

– завершенность. Является ли изначально предоставляемый уровень услуг достаточным? Все ли было реализовано? Это свойство по определению не может быть проверено формальным тестированием: на каждую ожидаемую функцию формулируется требование (или множество требований), которое проверяется на модели;

– устойчивость к ошибкам. Ведет ли себя программа адекватно в случае предоставления заведомо неверных входных данных? Очень неэффективно и громоздко реализуется в модельном подходе, существуют неплохие методы тестирования, решающие эту проблему;

– устойчивость к окружению (прочность). Может ли приложение работать нормально в нестандартном или неустойчивом окружении? Применение модельного подхода в данном случае возможно только при наличии возможности моделирования окружения. Однако корректное моделирование стресс-ситуации – весьма нетривиальная задача;

– восстанавливаемость. Может ли приложение продолжать работу после сбоя? Как правило, это свойство явно прописывается в программе и нуждается только в проверке. Может быть проверено как модельной верификацией, так и тестированием.

Множество атрибутов по удобству пользования характеризует трудности при использовании программного обеспечения и их субъективную оценку тем или иным множеством пользователей:

– понятность. Насколько интуитивно ясен пользовательский интерфейс приложения? Не поддается научной формализации. Несмотря на то что менее формальные правила существуют уже давно, модельная верификация невозможна;

– обучаемость. Приспосабливается ли приложение к специфике пользователя? Используются алгоритмы искусственного интеллекта, которые могут быть верифицированы, соответственно может быть верифицирован и признак;

– управляемость. Легко ли управлять работой приложения? Эта область, традиционная для бета-тестирования, в последнее время переходит в руки специалистов по пользовательским интерфейсам.

Множество атрибутов производительности выявляет связь уровня предоставляемых приложением услуг с объемом используемых при этом ресурсов:

– поведение во времени. Адекватен ли временной график использования ресурсов? В данном случае нужно тестировать реальную систему, а не ее модель (например, для нахождения утечки памяти). Абсолютно не подходит для модельной верификации;

– использование ресурсов. Эффективно ли используются ресурсы? Имеется направленность на реальную систему, и существуют эффективные методы формального тестирования, которые в основном базируются на смеси сетей Петри и специализированных языков описания моделей верификации, при прогонке которых происходит количественная оценка потенциально используемых ресурсов; максимальное значение дает вполне эффективную оценку, пригодную для большинства реализаций;

– алгоритмизация. Насколько оптимальны использованные алгоритмы? Классический анализ алгоритмов вместе с формальной их верификацией дает быстрые и точные результаты.

Множество атрибутов поддержки связано с усилиями по внесению определенных изменений в работающее приложение:

– анализируемость. Насколько легко определить части, нуждающиеся в изменении? Не поддается формализации;

– изменяемость. Какие усилия требуются для внесения изменений? Не поддается формализации, уровень может быть установлен априори;

– настраиваемость. Можно ли достичь желаемого эффекта без изменения самой программы, изменяя только настройки? Задача решается тестированием в реальных условиях;

– стабильность. Как ведет себя программа при внесении изменений на лету? Эффективно решается модельной верификацией с помощью недетерминированных параллельных процессов;

– тестируемость. Насколько легко проверяется работа изменившегося контура? Решается параллельно с тестированием или превентивно явным образом и к верификации отношения практически не имеет.

Множество атрибутов переместимости характеризует способность программного обеспечения быть перенесенным из одного окружения в другое:

– приспособляемость. Может ли приложение изменяться в соответствии с изменениями окружения? Взаимодействующие недетерминированные последовательные процессы дают хороший результат, в том числе и в модельном подходе;

– устанавливаемость. Может ли приложение устанавливаться на разные платформы или в разные конфигурации? Как правило, явно задается в спецификации и явно реализуется и в проверке не нуждается;

– согласованность. Какие стандарты были использованы в приложении? Не нуждается в проверке, однако само соответствие стандартам проверять можно и нужно;

– заменяемость. Может ли приложение быть использовано так же, как его эквивалент от другого производителя? Зависит ли от списка опций соответствующих приложений, которые могли бы быть или должны были быть реализованы?

Это относится к фазе формулирования требований, поэтому в верификации не участвует.

Приведенный общий список свойств, которые могут быть проверены с помощью техник модельной верификации и валидации, краток, насколько это максимально возможно. Свойства, не упомянутые (например, масштабируемость или живучесть), но встречающиеся на практике, могут быть сведены к данному списку. Важно отметить, что верификация и валидация моделей, реализуемых средствами вычислительной техники, может выполняться тестированием программного обеспечения, используемого при моделировании, на уровне системных, архитектурных и функциональных требований к программному обеспечению, в то время как тестирование его кода не заменяет процедур верификации и валидации моделей.

7.4. Обработка и анализ результатов моделирования

Решения, принимаемые исследователем по результатам моделирования, могут быть конструктивными только при выполнении двух основных условий:

– полученные результаты обладают требуемой точностью и достоверностью;

– исследователь способен правильно интерпретировать полученные результаты и знает, каким образом они могут быть использованы.

Оценка качества модели. Оценка качества модели является завершающим этапом ее разработки и преследует две цели [19]:

– проверить соответствие модели ее предназначению (целям исследования);

– оценить достоверность и статистические характеристики результатов, получаемых при проведении модельных экспериментов.

При **аналитическом моделировании** достоверность результатов определяется двумя основными факторами:

- корректным выбором математического аппарата, используемого для описания исследуемой системы;
- методической ошибкой, присущей данному математическому методу.

При **имитационном моделировании** на достоверность результатов влияет целый ряд дополнительных факторов, основными из которых являются [33]:

- моделирование случайных факторов, основанное на использовании датчиков СЧ, которые могут вносить «искажения» в поведение модели;
- наличие нестационарного режима работы модели;
- использование нескольких разнотипных математических методов в рамках одной модели;
- зависимость результатов моделирования от плана эксперимента;
- необходимость синхронизации работы отдельных компонентов модели;
- наличие модели рабочей нагрузки, качество которой зависит, в свою очередь, от тех же факторов.

Пригодность имитационной модели для решения задач исследования характеризуется тем, в какой степени она обладает так называемыми *целевыми* свойствами. Основными из них являются:

- адекватность;
- устойчивость;
- чувствительность.

Ниже рассмотрены некоторые способы проведения оценки модели по каждому из них.

Оценка адекватности модели. В общем случае под адекватностью понимают степень соответствия модели тому реальному явлению или объекту, для описания которого она строится [25].

Вместе с тем, создаваемая модель ориентирована, как правило, на исследование определенного подмножества свойств этого объекта. Поэтому можно считать, что адекватность модели определяется степенью ее соответствия не столько реальному объекту, сколько целям исследования. В наибольшей степени это утверждение справедливо относительно моделей проектируемых систем (т. е. в ситуациях, когда реальная система вообще не существует).

Процедура оценки основана на сравнении измерений на реальной системе и результатов экспериментов на модели и может проводиться различными способами. Наиболее распространенные из них:

- по средним значениям откликов модели и системы;
- по дисперсиям отклонений откликов модели от среднего значения откликов системы;
- по максимальному значению относительных отклонений откликов модели от откликов системы.

В результате N_0 опытов на реальной системе получают множество значений (выборку) Y^* . Выполнив N_M экспериментов на модели, также получают множество значений наблюдаемой переменной Y .

Затем вычисляются оценки математического ожидания и дисперсии откликов модели и системы, после чего выдвигается гипотеза о близости средних значений величин Y^* и Y (в статистическом смысле). Основой для проверки гипотезы является t -статистика (распределение Стьюдента). Ее значение, вычисленное по результатам испытаний, сравнивается с критическим значением $t_{кр}$, взятым из справочной таблицы. Если выполняется неравенство $t_n < t_{кр}$, то гипотеза принимается.

Оценка устойчивости. Устойчивость модели – это ее способность сохранять адекватность при исследовании эффективности системы на всем возможном диапазоне рабочей нагрузки, а также при внесении изменений в конфигурацию системы.

Каким образом может быть оценена устойчивость модели? Универсальной процедуры проверки устойчивости модели не существует. Разработчик вынужден прибегать к методам «для данного случая», частичным тестам и здравому смыслу. Часто бывает полезна апостериорная проверка. Она состоит в сравнении результатов моделирования и результатов измерений на системе после внесения в нее изменений. Если результаты моделирования приемлемы, уверенность в устойчивости модели возрастает.

В общем случае можно утверждать, что чем ближе структура модели структуре системы и чем выше степень детализации, тем устойчивее модель.

Устойчивость результатов моделирования может быть также оценена методами математической статистики. В генеральной совокупности исследователя обычно интересует некоторый признак, который обусловлен случайностью и может иметь качественный или количественный характер.

В данном случае именно устойчивость результатов моделирования можно рассматривать как признак, подлежащий оценке. Для проверки гипотезы об устойчивости результатов может быть использован критерий Уилкоксона.

Критерий Уилкоксона служит для проверки того, относятся ли две выборки к одной и той же генеральной совокупности (т. е. обладают ли они одним и тем же статистическим признаком).

Оценка чувствительности. Очевидно, что устойчивость является положительным свойством модели. Однако если изменение входных воздействий или параметров модели (в некотором заданном диапазоне) не отражается на значениях выходных параметров, то польза от такой модели невелика (ее можно назвать «бесчувственной»). В связи с этим возникает задача оценивания чувствительности модели к изменению параметров рабочей нагрузки и внутренних параметров самой системы.

Такую оценку проводят по каждому параметру X в отдельности. Основана она на том, что обычно диапазон возможных изменений параметра известен. Одна из наиболее простых и распространенных процедур оценивания состоит в следующем [13]:

1. Вычисляется величина относительного среднего приращения параметра X_k :

$$\Delta X_k = \frac{(X_{k \max} - X_{k \min})^2}{(X_{k \max} + X_{k \min})} 100 \%$$

2. Проводится пара модельных экспериментов при значениях $\Delta X_k = X_{k \max}$ и $X_k = X_{k \min}$ и средних фиксированных значениях остальных параметров. Определяются значения отклика модели $Y_1 = f(X_{k \max})$ и $Y_2 = f(X_{k \min})$.

3. Вычисляется ее относительное приращение наблюдаемой переменной Y :

$$\Delta Y = \frac{|Y_1 - Y_2|}{(Y_1 + Y_2)} 100 \%$$

В результате для k -го параметра модели имеют пару значений $(\Delta X_k, \Delta Y)$, характеризующую чувствительность модели по этому параметру.

Аналогично формируются пары для остальных параметров модели, которые образуют множество $\{\Delta X_k, \Delta Y\}$.

Данные, полученные при оценке чувствительности модели, могут быть использованы, в частности, при планировании экспериментов: большее внимание должно уделяться тем параметрам, по которым модель является более чувствительной.

Калибровка модели. Если в результате проведенной оценки качества модели оказалось, что ее целевые свойства не удовлетворяют разработчика, необходимо выполнить ее калибровку, т. е. коррекцию с целью приведения в соответствие предъявляемым требованиям.

Как правило, процесс калибровки носит итеративный характер и состоит из трех основных этапов:

1. Глобальные изменения модели (например, введение новых процессов, изменение типов событий и т. д.).
2. Локальные изменения (в частности, изменение некоторых законов распределения моделируемых случайных величин).
3. Изменение специальных параметров, называемых калибровочными.

На первый взгляд, структурные изменения модели, как более сложные, должны рассматриваться только после того, как все попытки откалибровать модель *путем изменения* параметров и локальных модификаций окажутся безуспешными. Однако такая стратегия может скрыть структурное несоответствие или недостаточную степень детальности модели. В этом смысле начинать калибровку с внесения глобальных изменений значительно безопаснее.

Вообще целесообразно объединить оценку целевых свойств имитационной модели (ИМ) и ее калибровку в единый процесс. Именно такая стратегия принята в статистическом методе калибровки, описанном ниже.

Процедура калибровки состоит из трех шагов, каждый из которых является итеративным (рис. 7.2).



Рис. 7.2. Процедура калибровки

Шаг 1. Сравнение выходных распределений.

Цель – оценка адекватности ИМ. Критерии сравнения могут быть различны. В частности, может использоваться величина разности между средними значениями откликов модели и системы. Устранение различий на этом шаге основано на внесении глобальных изменений.

Шаг 2. Балансировка модели.

Основная задача – оценка устойчивости и чувствительности модели. По его результатам, как правило, производятся локальные изменения (но возможны и глобальные).

Шаг 3. Оптимизация модели.

Цель этого этапа – обеспечение требуемой точности результатов. Здесь возможны три основных направления работ:

- дополнительная проверка качества датчиков СЧ;
- снижение влияния переходного режима;
- применение специальных методов понижения дисперсии.

Оценка влияния и взаимосвязи факторов. Отыскание аналитических зависимостей, связывающих между собой различные параметры, фигурирующие в модели, может быть основано на совместном использовании группы методов математической статистики: дисперсионного, корреляционного и регрессионного анализа.

Однофакторный и дисперсионный анализ. Его суть сводится к определению влияния на результат моделирования одного выбранного фактора.

Пусть, например, исследователя интересует средняя интенсивность отказов компьютера, и в созданной им модели учтены следующие факторы: интенсивность поступления заданий пользователей, интенсивность обращений в оперативную память, временные характеристики решаемых задач и интенсивность обращений к жесткому диску. Если предварительные данные говорят о том, что основной причиной отказов является ненадежная работа жесткого диска, то в качестве анализируемого фактора целесообразно выбрать интенсивность обращений к нему. Задача факторного анализа в данном случае состоит в том, чтобы оценить влияние указанного фактора на среднее число отказов.

Многофакторный дисперсионный анализ. Многофакторный дисперсионный анализ (МДА) [17] позволяет оценивать влияние на наблюдаемую переменную уже не одного, а произвольного числа

факторов. Точнее, МДА позволяет выбрать из группы факторов, участвующих в эксперименте, те, которые действительно влияют на его результат.

Необходимо отметить, что дисперсионный анализ может использоваться для оценки влияния факторов, имеющих как количественный характер, так и качественный, поскольку в уравнении дисперсионного анализа фигурируют не сами факторы, а только их «эффекты».

В том случае, если все факторы носят количественный характер, взаимосвязь между ними и наблюдаемой переменной может быть описана с помощью уравнения регрессии.

Корреляционный и регрессионный анализ. Это два близких метода, которые обычно используются совместно для исследования взаимосвязи между двумя или более непрерывными переменными.

Результаты корреляционного анализа позволяют делать статистические выводы о степени зависимости между переменными.

Величина линейной зависимости между двумя переменными измеряется посредством простого коэффициента корреляции, величина зависимости от нескольких – посредством множественного коэффициента корреляции.

В корреляционном анализе используется также понятие частного коэффициента корреляции, который измеряет линейную взаимосвязь между двумя переменными без учета влияния других переменных.

Если корреляционный анализ позволил установить наличие линейной зависимости наблюдаемой переменной от одной или более независимых, то форма зависимости может быть уточнена методами регрессионного анализа.

Для этого строится так называемое уравнение регрессии, которое связывает зависимую переменную с независимыми и содержит неизвестные параметры. Если уравнение линейно относительно параметров (но необязательно линейно относительно независимых переменных), то говорят о линейной регрессии, в противном случае регрессия нелинейна.

При анализе результатов ИМ необходимо иметь в виду, что если даже удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, это еще не является прямым доказательством их причинно-следственной связи. Возможно, имеет место стохастическая зависимость, обусловленная, например, коррелированностью последовательностей псевдослучайных чисел, используемых в имитационной модели.

Поэтому результаты корреляционного анализа целесообразно уточнить, проведя регрессионный анализ.

Регрессионный анализ позволяет решать две задачи:

– устанавливать наличие возможной причинной связи между переменными;

– предсказывать значения переменной по значениям независимых переменных. Эта возможность особенно важна в тех случаях, когда прямые измерения зависимой переменной затруднены.

7.5. Представление результатов моделирования

Академическое, или научное, письмо – это стиль прозы. Обычно представленный в безличном и бесстрастном тоне, он нацелен на критическую и информированную аудиторию на основе тщательно обоснованных и доказанных знаний и предназначен для укрепления или оспаривания концепций или аргументов [36]. Этот стиль используют в академическом (научном) обиходе.

Академическое письмо как понятие более употребительно в англоязычной литературе, в русскоязычной применяется обычно понятие научного стиля текста.

Уровни академического письма, выделяемые по степени сложности:

- 1) базовые умения и навыки в области работы с частями текста;
- 2) написание небольших письменных работ и аннотирование;
- 3) письменная работа достигает такого уровня качества ее подготовки, что может быть одобрена к публикации в каких-либо международных журналах;

- 4) подготовка не только самой публикации, но и представления изложенной информации аудитории (доклад, сообщение), включающая взаимодействие с аудиторией (ответы на вопросы, переписка, дискуссия с оппонентами и сторонниками).

Один из самых простых способов быть замеченным на научной конференции – сделать хорошую устную презентацию своего исследования. Рассмотрим принцип пяти параграфов для создания научного текста.

Понятие параграфа. Параграф – это набор связанных между собой предложений, относящихся к одной теме.

- Основное правило – в одном параграфе раскрывается одна идея.
- Принципы построения параграфа:
- единство (*Unity*) – весь параграф сфокусирован на одной идее;
 - связность (*Coherence*) – для лучшего усвоения информации:
 - логические связки (одна и та же идея от предложения к предложению, общий стиль предложений);
 - вербальные связки (повторение в предложениях ключевых слов, синонимов);
 - ключевое предложение – указывает путь развития идеи параграфа (в начале параграфа) (*Thesis Statement*);
 - адекватное развитие идеи (*Development*):
 - аргументация (*Argument*);
 - переходы между идеями и предложениями (*Transitions*);
 - стилистика текста.
 - Методы развития идеи в параграфе:
 - примеры и иллюстрации;
 - использование данных (статистика, фактография, детали и т. д.);
 - истории;
 - определение терминов параграфа;
 - сравнение и контраст;
 - оценка причин и следствий;
 - анализ эффектов и последствий;
 - анализ темы;
 - описание темы;
 - хронология событий.
 - Структура параграфа:
 - первое предложение, содержащее главную идею параграфа (*topic sentence*);
 - предложения, подтверждающие и раскрывающие аргумент первого предложения: развивают главную идею (*supporting sentences*);
 - заключительное предложение – конец параграфа, «сигнальный флажок» (*concluding sentence*).
 - Виды основного утверждения параграфа (*Thesis Statement*):
 - аналитическое – вопрос или идея разбивается на части, которые последовательно рассматриваются;
 - описательное – объяснение чего-либо для целевой аудитории;
 - аргументационное – делается утверждение о теме, далее дается обоснование с приведением доказательств.

На рис. 7.3 приведен риторический треугольник (*Rhetorical Triangle*).

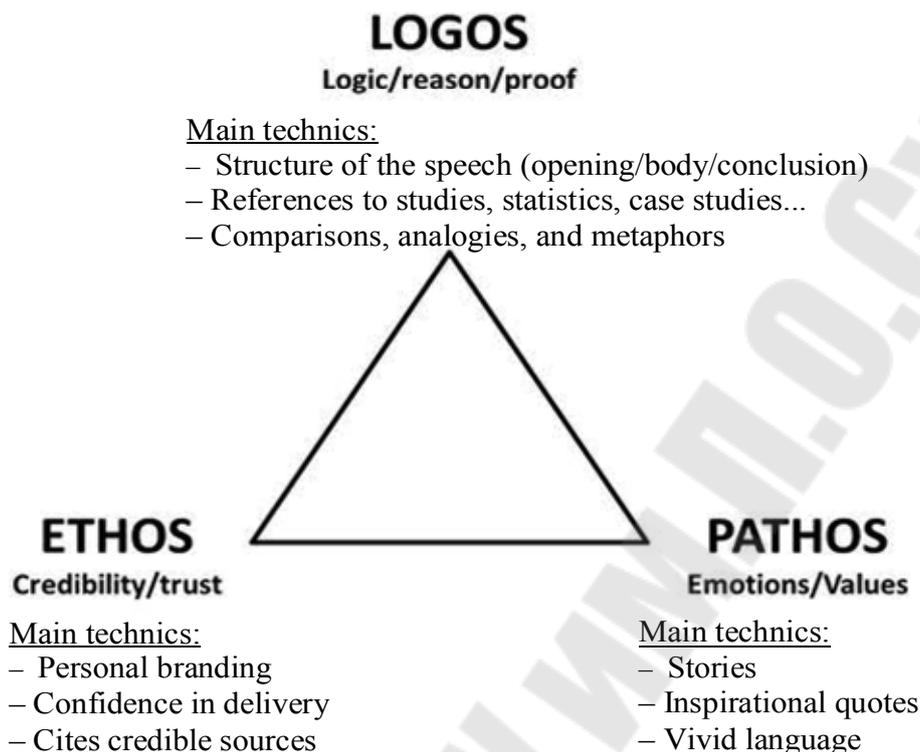


Рис. 7.3. Риторический треугольник

Принцип пяти параграфов:

1. Введение (почему тема так важна для читателя, какая проблема решается в тексте, контекст, постановка основного утверждения – главной мысли текста).

2–4. Три аргумента, последовательно обосновывающие основное утверждение.

5. Заключение (выводы в сжатом виде, полная картина).

Литература

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. специальностей вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.
2. SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А. А. Алямовский [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 1040 с.
3. Алямовский, А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation / А. А. Алямовский. – М. : ДМК Пресс, 2010. – 464 с.
4. Басов, К. А. ANSYS для конструкторов / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 248 с.
5. Басов, К. А. ANSYS и LMS Virtual Lab. Геометрическое моделирование / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2006. – 240 с.
6. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках : пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 494 с.
7. Большаков, В. П. 3D-моделирование в AutoCAD, КОМПАС-3D, SolidWorks, Inventor, T-Flex : учеб. курс / В. П. Большаков, А. Л. Бочков, А. А. Сергеев. – СПб. : Питер, 2011. – 336 с.
8. Бреббия, К. Методы граничных элементов : пер. с англ. / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1986. – 524 с.
9. Быховцев, В. Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В. Е. Быховцев, А. В. Быховцев, В. В. Бондарева. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 215 с.
10. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление : учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 3-е изд., испр. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 488 с.
11. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы : пер. с англ. / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
12. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.
13. Гуржий, А. Численные методы математической физики / А. Гуржий. – К. : РТУ КПИ, 2006. – 98 с.
14. Демидов, С. П. Теория упругости : учеб. для вузов / С. П. Демидов. – М. : Высш. шк., 1979. – 432 с.

15. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике : учеб. для вузов / В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496 с.
16. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 543 с.
17. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Минск : Выш. шк., 1990. – 351 с.
18. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
19. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – М. : Высш. шк., 2008. – 4801 с.
20. Корнеев, В. Г. Параллельное программирование в MPI / В. Г. Корнеев / В. Г. Корнеев. – 2-е изд., испр. – Новосибирск : ИВМиМГ СО РАН, 2002. – 215 с.
21. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела : пер. с англ. / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1986. – 328 с.
22. Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – М. : Физматгиз, 1965. – 408 с.
23. Ли, К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / К. Ли. – СПб. : Питер, 2004. – 560 с.
24. Лупин С. А. Технологии параллельного программирования / С. А. Лупин, М. А. Посыпкин. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2011. – 208 с.
25. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1966. – 599 с.
26. Малюх, В. Н. Введение в современные САПР : курс лекций / В. Н. Малюх. – М. : ДМК Пресс, 2010. – 192 с.
27. Норенков, И. П. Основы автоматизированного проектирования : учеб. для вузов / И. П. Норенков. – 4-е изд. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 430 с.
28. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М. : ДМК Пресс, 2006. – 600 с.
29. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.
30. Сабоннальер, Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР : пер. с фр. / Ж.-К. Сабоннальер, Ж.-Л. Кулон. – М. : Мир, 1989. – 190 с.

31. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
32. Системы автоматизированного проектирования. Классификация и обозначение : ГОСТ 23501.108–85. – Введ. 01.01.86. – М. : Гос. ком. по упр. качеством продукции и стандартам, 2011. – 15 с.
33. Системы обработки информации. Термины и определения : ГОСТ 15971–90. – Введ. 01.01.92. – М. : Гос. ком. по упр. качеством продукции и стандартам, 2011. – 14 с.
34. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем : учеб. для вузов / В. П. Тарасик. – Минск : ДизайнПРО, 1996. – 640 с.
35. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1976. – 735 с.
36. Хьюз, К. Параллельное и распределенное программирование с использованием C++ / К. Хьюз, Т. Хьюз. – М. : Вильямс, 2004. – 358 с.
37. Курочка, К. С. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния сложных систем неоднородных упруго-пластических дисперсных и сплошных твердых тел / К. С. Курочка // Информатика. – 2007. – № 2 (14). – С. 117–128.
38. Курочка, К. С. / Технология визуального объектно-ориентированного моделирования сложных систем / К. С. Курочка // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2007. – № 5 (44). – С. 36–41.
39. Курочка, К. С. Построение математической модели сложной системы неоднородных вязкоупругих дисперсных и сплошных твердых тел / К. С. Курочка // Строит. механика инженер. конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 18–31.
40. Курочка, К. С. Modeling of stress-strained state of a thin plate on the heterogeneous viscoelastic basis / К. С. Курочка // Technicaly jornal. – 2008. – № 7. – С. 117–124.
41. Курочка, К. С. Исследование математических моделей в ГРИД-средах / К. С. Курочка // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 1. – С. 69–73.
42. Курочка, К. С. Конечно-элементное моделирование прогибов тонких круглых трехслойных пластин / К. С. Курочка // Информатика. – 2014. – № 1. – С. 6–15.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Курочка Константин Сергеевич
Комракова Евгения Владимировна**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-40 05 01 «Информационные системы и технологии
(по направлениям)» и 1-40 80 04 «Информатика
и технологии программирования»
дневной и заочной форм обучения**

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 09.12.21.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Цифровая печать. Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 13,82.

Изд. № 3.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель