Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова, В. В. Кондратюк

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Гомель 2021

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

УДК 517.37+517.373(075.8)
ББК 22.161.12я73
З-15

Рекомендовано научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 10 от 01.06.2020 г.*)

Рецензент: декан факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого канд. физ.-мат. наук, доц. *В. О. Лукьяненко*

Задорожнюк, М. В.

З-15 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы : учеб.-метод. пособие для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова, В. В. Кондратюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 53 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по указанным темам, необходимые для решения задач, 30 вариантов заданий для индивидуальной самостоятельной работы студентов, а также разобранный пример решения типового варианта.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 517.37+517.373 (075.8)
ББК 22.161.12я73

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2021

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

<u>Двойной интеграл</u> $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

Решается сведением к повторному по следующему алгоритму:

1) изобразить область D;

2) найти точки пересечения графиков функций, задающих границы области D;

3) свести интеграл к повторному вида $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$, если область D ориентирована вдоль оси Oy (рис. 1) или $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$, если область D ориентирована вдоль оси Ox (рис. 2);

4) вычислить сначала внутренний интеграл, а затем внешний.

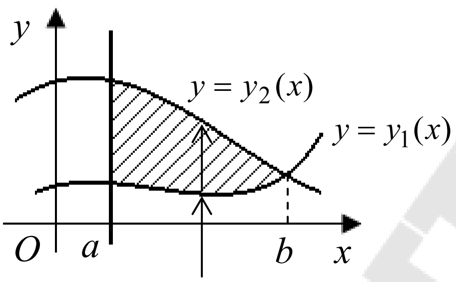

Рис. 1

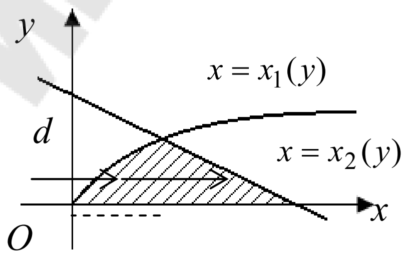

Рис. 2

Площадь области D: $S = \iint\limits_D dxdy$.

Масса пластины D плотностью $\mu(x, y)$: $m = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy$.

Если область интегрирования представляет собой круг или часть круга (эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), то для вычисления интеграла удобно использовать полярные (обобщённые полярные) координаты:

Полярные координаты	Обобщённые полярные координаты
$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$
$dxdy = \rho d\rho d\varphi$	$dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

<u>Тройной интеграл</u> $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

Вычисление аналогично вычислению двойного интеграла: необходимо свести тройной интеграл к повторному вида

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Объем тела, ограничивающего пространственную область *V*:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,.$$

Масса тела *V* плотностью $\mu(x,y,z)$:

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz\,.$$

Если границами пространственной области *V* являются *конус*, *параболоид* или *цилиндр*, то удобно использовать цилиндрические координаты; если *сфера* – сферические координаты (в этом случае θ – угол между радиус-вектором произвольной точки области *V* и положительным направлением оси Oz):

Цилиндрические координаты	Сферические координаты
$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$	$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$ $dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$
Обобщённые цилиндрические координаты	Обобщённые сферические координаты
$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ $dxdydz=ab\rho d\rho d\varphi dz$	$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\theta \end{cases}$ $dxdydz=abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Криволинейный интеграл I рода

Имеет вид $\int\limits_L f(x,y)dl$ (если задана плоская кривая L) или $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ (если кривая L задана в пространстве); элемент dl вычисляется по одной из следующих формул в зависимости от того, как задана кривая L:

$y = f(x)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$\rho = \rho(\varphi)$
$dl = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$	$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$	$dl = \sqrt{\rho_\varphi{}^2 + (\rho_\varphi')^2}\,d\varphi$

Если кривая L задана в пространстве параметрическми уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \text{ то } dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt. \\ z = z(t) \end{cases}$

Длина дуги кривой L: $l = \int\limits_L dl$.

Масса криволинейного стержня плотностью $\mu(x,y)$: $m = \int\limits_L \mu(x,y)dl.$

Криволинейный интеграл II рода

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Для вычисления необходимо свести все к одной переменной, воспользовавшись уравнением кривой L (в случае, когда L – пространственная кривая, удобно перейти к её параметрическим уравнениям).

Физический смысл: $\int\limits_L Pdx + Qdy$ равен работе силы $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j}$ по перемещению точки вдоль кривой L.

Формула Грина: $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

Условие независимости криволинейного интеграла $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от пути интегрирования: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Поверхностные интегралы I рода

$$\iint_S f(x, y, z)ds$$

Если поверхность S задана формулой $z = z(x, y)$, то

$$ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$$

Площадь поверхности S: $S = \iint_S ds$.

Если на поверхности S распределена *масса m* с плотностью μ, то

$$m = \iint_S \mu(x, y, z)ds.$$

Поверхностные интегралы II рода

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy$$

Вычисление:

1) записать векторную функцию $\overline{a} = (P; Q; R)$;

2) найти вектор нормали к ориентированной поверхности S, заданной уравнением $z = z(x, y)$, по формуле $\overline{n} = \pm(-z'_x; -z'_y; 1)$ (знак плюс (минус) берётся, если нормаль образует острый (тупой) угол с заданной стороной поверхности);

3) свести поверхностный интеграл к двойному по формуле:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{S_{xy}} \left(\overline{a}, \overline{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

где S_{xy} – проекция поверхности S на плоскость xOy;

Скалярное произведение $\left(\overline{a}, \overline{n}\right)$ в общем случае есть функция, зависящая от x, y и z, поэтому запись $\left(\overline{a}, \overline{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)}$ означает, что в произведении $\left(\overline{a}, \overline{n}\right)$ переменную z следует заменить на $z(x, y)$.

Формула Остроградского–Гаусса:

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dxdydz,$$

где S – замкнутая поверхность, ограничивающая область V.

Формула Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(R'_y - Q'_z\right)dydz + \left(P'_z - R'_x\right)dxdz + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy,$$

где S – любая поверхность, «натянутая» на контур L.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+6x-7,\ y=2x-3,\ x=0$;

б) $x^2+y^2-10x=0,\ x^2+y^2-3x=0,\ y\le-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Решение

а) Площадь области вычисляется по формуле $S=\iint\limits_D dxdy$, следовательно, необходимо сделать чертёж заданной области, а затем вычислить двойной интеграл путём сведения его к повторному.

1) Изобразим графики указанных функций.

Графиком функции $y=-x^2+6x-7$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём её вершину. Это можно сделать, воспользовавшись формулой $x_в=-\dfrac{b}{2a}$, либо найдя производную и приравняв её к нулю:

$$y'=-2x+6=0$$

$$x_в=\frac{6}{2}=3$$

Подставив $x_в=3$ в уравнение параболы, найдём

$$y_в=-3^2+6\cdot3-7=2.$$

Следовательно, вершина параболы находится в точке $(3;2)$.

Графиком функции $y=2x-3$ является прямая, которую можно построить по двум точкам, например, $(0;-3)$ и $(2;1)$.

Прямая $x=0$ совпадает с осью *Oy*.

На рисунке 3 заштрихована область, ограниченная тремя заданными линиями.

2) Определим пределы интегрирования. Для этого найдём точки пересечения прямой и параболы.

Решим систему:

$$\begin{cases} y=-x^2+6x-7, \\ y=2x-3. \end{cases}$$

$$-x^2+6x-7=2x-3,$$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$
$$x_{1,2} = 2.$$

Таким образом, прямая касается параболы в точке с абсциссой $x = 2$.

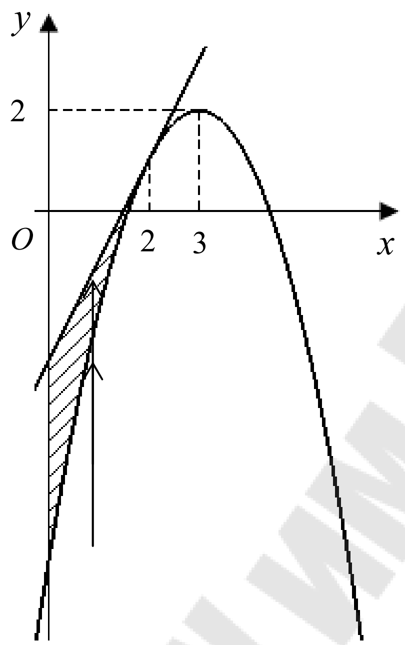

Рис. 3

Так как область D является ориентированной вдоль оси Oy, то внутренний интеграл будет по игреку. Игрек изменяется от параболы до прямой, т.е.

$$-x^2 + 6x - 7 \le y \le 2x - 3,$$
$$0 \le x \le 2.$$

3) Вычислим площадь:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{-x^2+6x-7}^{2x-3} dy = \int_0^2 dx \cdot y\Big|_{-x^2+6x-7}^{2x-3} = \int_0^2 (4 - 4x + x^2)dx =$$

$$= \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8 - 8 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}(ед.^2)$$

Ответ: $\frac{8}{3}$ *ед.*^{2}

б) Изобразим область, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 - 10x = 0,\ x^2 + y^2 - 3x = 0,\ y \le -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Для этого выделим полный квадрат в первом и втором уравнениях:

$$x^2 + y^2 - 10x = 0,$$
$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) + y^2 = 5^2,$$
$$(x-5)^2 + y^2 = 5^2.$$

Полученное уравнение задаёт окружность радиуса 5 с центром в точке $(5;\,0)$.

Аналогично преобразуем второе уравнение:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 -$$

окружность радиуса $\frac{3}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{3}{2};\,0\right)$.

Неравенство $y \le -\frac{x}{\sqrt{3}}$ определяет полуплоскость, находящуюся ниже прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, проходящей через начало координат и точку с координатами $\left(\sqrt{3};-1\right)$.

Заданная область изображена на рис. 4.

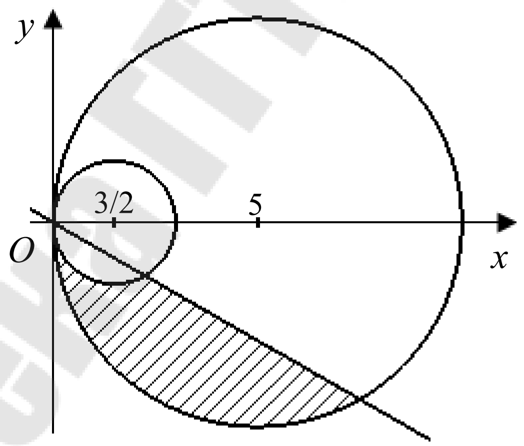

Рис. 4

4) Так как область интегрирования представляет собой часть круга, то целесообразно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Для нахождения пределов интегрирования по переменной ρ запишем уравнения заданных окружностей в полярных координатах. Тогда уравнение внутренней окружности примет вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi-3\rho\cos\varphi=0,$$

$$\rho^2=3\rho\cos\varphi,$$

$$\rho=3\cos\varphi,$$

а уравнение внешней окружности:

$$\rho=10\cos\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$3\cos\varphi\le\rho\le10\cos\varphi.$$

Очевидно, что $\varphi\ge-\dfrac{\pi}{2}$. Для нахождения верхнего предела интегрирования подставим полярные координаты в неравенство $y\le-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$:

$$\rho\sin\varphi\le-\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi\le-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда $\varphi\le-\dfrac{\pi}{6}$.

Вычислим площадь области:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/6}d\varphi\int\limits_{3\cos\varphi}^{10\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/6}d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{3\cos\varphi}^{10\cos\varphi}=\frac{91}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/6}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{91}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/6}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{91}{4}\left.\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\right|_{-\pi/2}^{-\pi/6}=$$

$$=\frac{91}{4}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{91}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{91\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{48}(ед.^2)$$

Ответ: $\dfrac{91\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{48}ед.^2$

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1\le\dfrac{x^2}{2}+y^2\le4,\ y\ge\dfrac{x}{\sqrt{2}},\ x\ge0$ и имеющей поверхностную плотность $\mu=2x^3/y^4$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Решение

Уравнение $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ задаёт эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}, b=1$ и центром в начале координат.

Разделим обе части уравнения $\frac{x^2}{2}+y^2=4$ на 4:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Таким образом, это уравнение также задаёт эллипс с центром в начале координат, полуоси которого равны $a_1=2\sqrt{2}, b_1=2$.

Уравнение $y=\frac{x}{\sqrt{2}}$ определяет прямую, проходящую через начало координат и расположенную в первой и третьей координатных четвертях, а прямая $x=0$ совпадает с осью Oy.

Приняв во внимание все указанные в условии неравенства, получим область, изображённую на рис. 5.

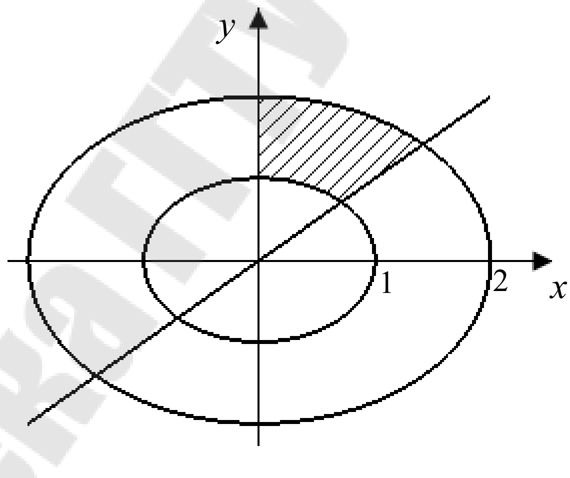

Рис. 5

Для вычисления массы пластинки воспользуемся формулой:

$$m=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy.$$

Так как область интегрирования представляет собой часть эллиптического кольца, то целесообразно перейти не просто к полярным, а к обобщённым полярным координатам:

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

$$dxdy = ab\rho d\rho d\varphi.$$

Так как $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, то для нашей задачи формулы (1) примут вид:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

$$dxdy = \sqrt{2}\rho d\rho d\varphi.$$

Подставим формулы () в неравенство

$$1 \le \frac{x^2}{2} + y^2 \le 4.$$

Получим $1 \le \dfrac{\left(\sqrt{2}\rho\cos\varphi\right)^2}{2} + \left(\rho\sin\varphi\right)^2 \le 4$, откуда $1 \le \rho^2 \le 4$, следовательно, $1 \le \rho \le 2$.

Найдём пределы интегрирования по переменной φ. Для этого подставим равенства (2) в неравенства $y \ge \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ и $x \ge 0$. Получим

$$\rho\sin\varphi \ge \frac{\sqrt{2}\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } \operatorname{tg}\varphi \ge 1, \text{ а значит } \varphi \ge \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично $\sqrt{2}\rho\cos\varphi \ge 0$, следовательно, $\varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D \frac{2x^3}{y^4}dxdy = 2\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \frac{(\sqrt{2}\rho\cos\varphi)^3}{(\rho\sin\varphi)^4}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi\int\limits_1^2 d\rho = 4\sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi}{\sin^4\varphi}\cdot\rho\Big|_1^2 =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^4\varphi} - \frac{d(\sin\varphi)}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3\sin^3\varphi} + \frac{1}{\sin\varphi}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Ответ: $\dfrac{8(\sqrt{2}-1)}{3}$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (2xy+z)dxdydz,\ V: -1 \le x \le 0,\ 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 4$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V: x^2+y^2+z^2=4,\ y \ge x,\ z \ge 0$.

Решение

а) Сведём тройной интеграл к повторным (порядок интегрирования в данном случае не имеет значения, так как все переменные изменяются в пределах отрезков).

$$\iiint\limits_V (2xy+z)dxdydz = \int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{4} (2xy+z)dz = \int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2} dy \left(2xyz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2} (8xy+8)dy = \int_{-1}^{0} dx \left(4xy^2 + 8y\right)\Big|_1^2 = \int_{-1}^{0} (12x+8)dx = \left(6x^2+8x\right)\Big|_{-1}^{0} = 2.$$

Ответ: 2

б) Изобразим область интегрирования V: $x^2+y^2+z^2=4$, $y \ge x,\ z \ge 0$. Она представляет собой часть сферы радиуса 2 (рис. 6). Проекция области V на плоскость xOy изображена на рис. 7.

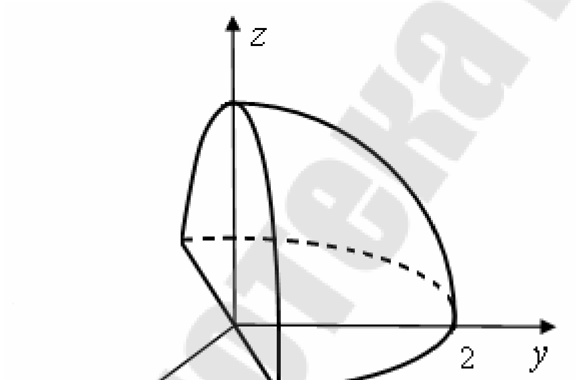

Рис. 6

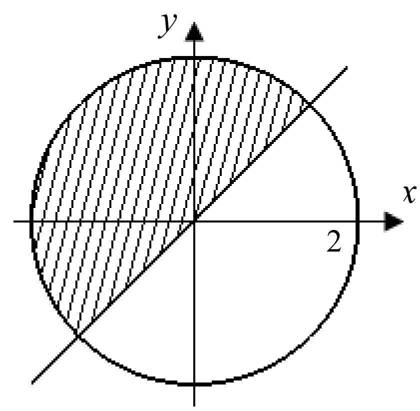

Рис. 7

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Заметим, что в сферических координатах $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Расставим пределы интегрирования:

$$0 \le \rho \le 2,$$

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4},$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Тогда интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint\limits_{V'} \frac{\rho\cos\theta}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta) \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $y = x^2,\ z = 0,\ y + z = 4$.

Решение

Изобразим тело, ограниченное заданными поверхностями, а также его проекцию на плоскость xOy. Уравнения $z = 0$ и $y + z = 4$ задают плоскости, а уравнение $y = x^2$ – параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси Oz (рис. 8). При этом плоскости пересекутся по прямой $y = 4$, а цилиндр $y = x^2$ пересечёт её в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ (рис. 9).

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

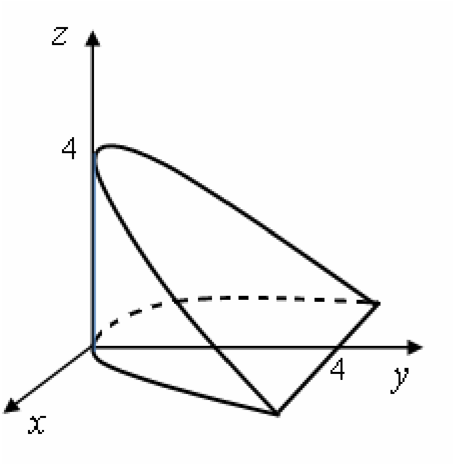

Рис. 8

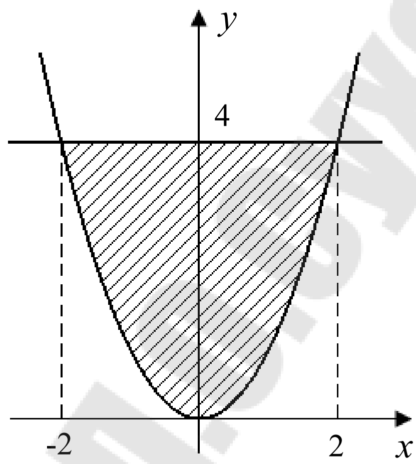

Рис. 9

Расставим пределы интегрирования:

$$0 \le z \le 4 - y,$$
$$x^2 \le y \le 4,$$
$$-2 \le x \le 2.$$

Вычислим объём указанного тела:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{4-y} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy(4-y) = \int\limits_{-2}^{2} dx \left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{4} =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = \frac{256}{15}(ед.^3).$$

Ответ: $\frac{256}{15}$ *ед.*^{3}

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $y = 3(x^2 + z^2)$, $x^2 + z^2 = 9$, $y = 0$.

Решение

Область *V* представляет собой часть цилиндра $x^2 + z^2 = 9$, огрниченную плоскостью $y = 0$ и параболоидом $y = 3(x^2 + z^2)$, причём и цилиндр, и параболоид расположены вдоль оси Oy (рис. 10).

Область однозначно проецируется на плоскость xOz (рис. 11).

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

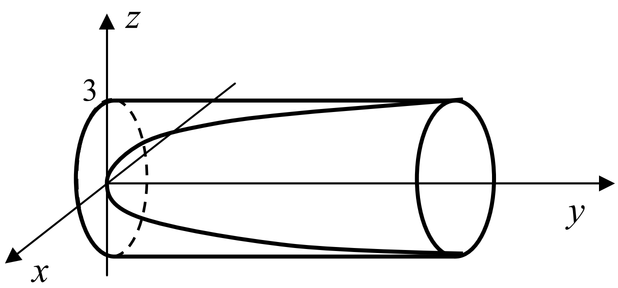

Рис. 10

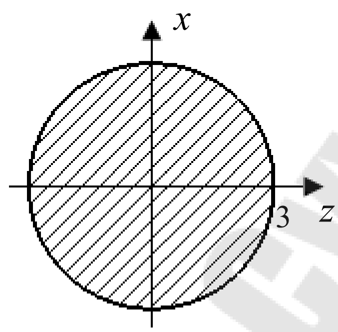

Рис. 11

Так как Oy является осью симметрии заданного однородного тела, то центр масс будет находится на этой оси, то есть будет иметь координаты $(0;\, y_c;\, 0)$. Координату y_c найдем по формуле:

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz}{m} = \frac{\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz}, \qquad (3)$$

где $\mu(x,y,z)$ – поверхностная плотность.

По условию тело однородно, значит, плотность его в каждой точке постоянна, следовательно, в числителе и знаменателе формулы (3) плотность μ можно вынести за знаки интегралов и сократить.

Окончательно получим:

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V ydxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz} \qquad (4)$$

Вычислим числитель и знаменатель дроби (4), перейдя для этого к цилиндрическим координатам. Ввиду того, что область интегрирования однозначно проецируется на плоскость xOz, полярные координаты примут вид:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi \\ y = y \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$dxdydz = \rho d\rho d\varphi dy.$$

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho d\rho \int\limits_0^{3\rho^2} dy = 2\pi\int\limits_0^3 3\rho^3 d\rho = 6\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^3 = \frac{243\pi}{2}.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$\iiint\limits_V ydxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{3\rho^2} ydy = 2\pi \int_0^3 \rho d\rho \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{3\rho^2} = 9\pi \int_0^3 \rho^5 d\rho = 9\pi \frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^3 = \frac{2187\pi}{2}.$$

Тогда $y_c = \dfrac{2187\pi / 2}{243\pi / 2} = 9$.

Ответ: $(0; 9; 0)$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{(x+y+z)^2}$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключённый между точками $A(1;1;0)$ и $B(2;3;2)$.

Решение

Чтобы вычислить криволинейный интеграл первого рода вдоль какой-либо кривой, необходимо иметь уравнение этой кривой. Составим уравнение L_{AB}, воспользовавшись уравнением прямой по двум точкам:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Уравнение прямой *AB* примет вид:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}.$$

Приравняв к t, получим уравнение прямой *AB* в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

Вычислим элемент dl по формуле:

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt,$$

откуда $dl = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\, dt = 3dt$.

Тогда интеграл примет вид:

$$\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{(x+y+z)^2} = \int_0^1 \frac{3dt}{(t+1+2t+1+2t)^2} = 3\int_0^1 (5t+2)^{-2} dt = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5t+2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{14}.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Замечание. Пределы интегрирования по переменной t в интеграле мы определили, подставив координаты точек A и B в параметрические уравнения прямой (номер).

Ответ: $\frac{3}{14}$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (xy - 2)\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y = 2x^2 - 2$ от точки $A(0;-2)$ до точки $B(2;6)$.

Решение

Для вычисления работы силы $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ вдоль кривой L необходимо вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$A = \int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_L (xy - 2)dx + x^2dy = \begin{bmatrix} y = 2x^2 - 2 \\ dy = 4xdx \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x(2x^2 - 2) - 2\right)dx + x^2 \cdot 4xdx = \int\limits_0^2 \left(2x^3 - 2x - 2 + 4x^3\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(6x^3 - 2x - 2\right)dx = \frac{3x^4}{2}\Bigg|_0^2 - x^2\Big|_0^2 - 2x\Big|_0^2 = 16.$$

Ответ: 16.

8. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz - z^2dxdz + zdxdy$, где S – часть внешней поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсекаемая плоскостью $z = 3$.

Решение

Изобразим заданную поверхность S (рис. 12) и её проекцию на плоскость xOy (рис.13).

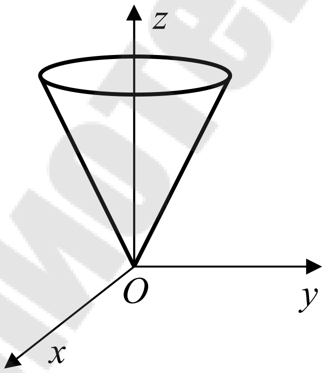

Рис. 12

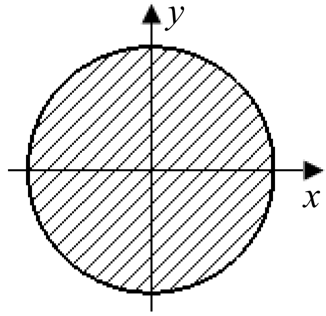

Рис. 13

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Так как поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z=\sqrt{x^2+y^2}$, однозначно проецирующейся на плоскость xOy, то для вычисления заданного поверхностного интеграла второго рода воспользуемся формулой:

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_{S_{xy}}(\overline{a},\overline{n})\Big|_{z=z(x,y)}dxdy, \qquad (5)$$

где S_{xy} – проекция поверхности S на плоскость xOy; $\overline{a}=(P;Q;R)$ – векторная функция; $\overline{n}=\pm(-z'_x;-z'_y;1)$ – вектор нормали к заданной ориентированной поверхности S (знак плюс (минус) берётся, если нормаль образует острый (тупой) угол с заданной стороной поверхности); скалярное произведение $(\overline{a},\overline{n})$ в общем случае есть функция, зависящая от x, y и z, поэтому запись $(\overline{a},\overline{n})\big|_{z=z(x,y)}$ означает, что в произведении $(\overline{a},\overline{n})$ переменную z следует заменить на $z(x,y)$.

По условию $\overline{a}=(x^2;-z^2;z)$. Для нахождения вектора нормали вычислим частные производные z'_x и z'_y от функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Нормаль к внешней поверхности конуса образует тупой угол с положительным направлением оси Oz, следовательно, вектор нормали имеет координаты $\overline{n}=(z'_x;z'_y;-1)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};-1\right)$.

Подставив в формулу (5), получим:

$$\iint\limits_S xdydz+ydxdz-2z^2dxdy=\iint\limits_{S_{xy}}(\overline{a};\overline{n})\Big|_{z=z(x;y)}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{S_{xy}}\left(x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-2z^2\cdot(-1)\right)dxdy=\left[z=\sqrt{x^2+y^2}\right]=$$

$$=\iint\limits_{S_{xy}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=\iint\limits_{S_{xy}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Так как проекция конуса на плоскость xOy является кругом радиуса 3, то для вычисления полученного двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$dxdy = \rho d\rho d\varphi$$

Интеграл примет вид:

$$\iint\limits_{S_{xy}} \left(\sqrt{x^2+y^2} + 2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy = \iint\limits_{S\rho\varphi} \left(\rho + 2\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(\rho^2 + 2\rho^3\right)d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} + \frac{2\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = 2\pi\left(9 + \frac{81}{2}\right) = 99\pi .$$

Ответ: 99π.

9. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (\ln z + 2)\bar{i} + 5y\bar{j} + (z+2)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Решение

Для вычисления потока векторного поля $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую пространственную область V, воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса:

$$\Pi_S(\bar{a}) = \oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dxdydz .$$

Найдем $P'_x + Q'_y + R'$, учитывая, что $P = \ln z + 2$, $Q = 5y$, $R = z + 2$:

$$P'_x + Q'_y + R' = 0 + 5 + 1 = 6 .$$

Поверхность S, ограниченная плоскостями $x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, представляет собой пирамиду, изображённую на рис. 14. Напомним, что уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ задают координатные плоскости. Чтобы изобразить плоскость $x + 3y + z = 6$, разделим обе части

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

уравнения на 6, превратив его таким образом в уравнение плоскости «в отрезках по осям»:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1.$$

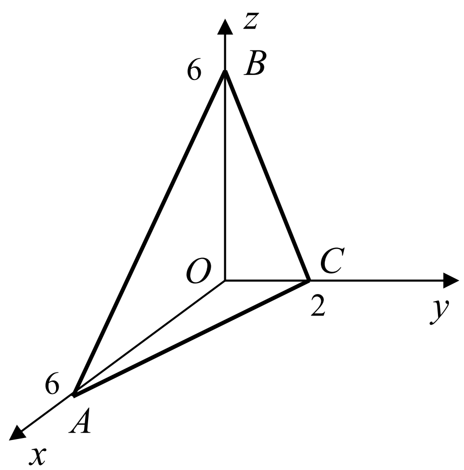

Рис. 14

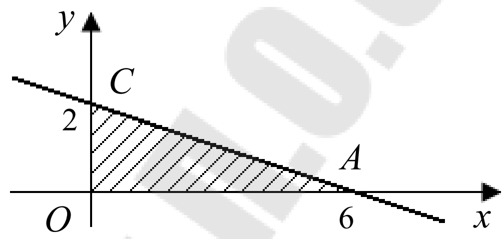

Рис. 15

Расставим пределы интегрирования, используя рис. 14 и 15:

$$0\le z\le 6-x-3y,$$

$$0\le y\le \frac{6-x}{3},$$

$$0\le x\le 6.$$

Тогда

$$\Pi_S(\overline{a})=\iiint\limits_V\left(P'_x+Q'_y+R'_z\right)dxdydz=6\iiint\limits_V dxdydz=6\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{6-x}{3}}dy\int\limits_0^{6-x-3y}dz=$$

$$=6\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{6-x}{3}}dy(6-x-3y)=6\int\limits_0^6 dx\left(6y-xy-\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{6-x}{3}}=$$

$$=6\int\limits_0^6 dx\left((6-x)y-\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{6-x}{3}}=6\int\limits_0^6\left(\frac{(6-x)^2}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{6-x}{3}\right)^2\right)dx=$$

$$=6\int\limits_0^6(6-x)^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)dx=\int\limits_0^6(6-x)^2\,dx=-\frac{(6-x)^3}{3}\Bigg|_0^6=-(0-72)=72.$$

Ответ: 72.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Замечание. Этот же интеграл можно вычислить гораздо быстрее, воспользовавшись тем, что $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему пространственной области V. В нашем случае область V представляет собой пирамиду, объем которой можно вычислить по формуле, известной из школьного курса математики:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Тогда

$$\Pi_S(\overline{a}) = 6\iiint\limits_V dxdydz = 6 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta AOC} \cdot OB = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72.$$

Ответ: 72.

Замечание. Этот же интеграл можно вычислить гораздо быстрее, воспользовавшись тем, что $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему пространственной области V. В нашем случае область V представляет собой пирамиду, объем которой можно вычислить по формуле, известной из школьного курса математики:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Тогда

$$\Pi_S(\overline{a}) = 6\iiint\limits_V dxdydz = 6 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta AOC} \cdot OB = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\frac{3}{2x},\ x=4$;

б) $x^2+y^2+4x=0,\ x^2+y^2+6x=0,\ y\ge x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 36,\quad x\ge 0,\quad y\ge\frac{3}{2}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu=9x/y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V(2x^2+3y+z)dxdydz,\ V:2\le x\le 3,-1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$;

б) $\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ V:x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z^2=4-x,\ \ x+y=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=36,\ \ y=0$.

6. Вычислить $\oint\limits_L\left(x^2+y^2\right)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=(3+2y)\vec{i}+y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y=2x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S dydz+2dxdz+2zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z=3-x^2-y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z=0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=(e^z+2x)\bar{i}+e^x\bar{j}+e^y\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $2y = \sqrt{x},\ y + x = 5,\ x \geq 0;$

б) $x^2 + y^2 + 2y = 0,\ x^2 + y^2 + 6y = 0,\ x \leq 0,\ y \geq \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 2,\quad y \geq 0,\quad y \leq \dfrac{2}{3}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = 3y / x$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V x^2 yz\,dxdydz,\ V: -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 2 \leq z \leq 3;$

б) $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,\ V: z = 2,\ y \geq \pm x,\ z \geq 0,\ z^2 = 4(x^2 + y^2).$

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x + y + z = 4$, $x = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 8$.

6. Вычислить $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl,$ где L – часть дуги спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиусом 2 с центром в полюсе.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y\,dy,$ где L_{AB} – дуга параболы $y^2 = 4 - 4x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dxdz + z^2 dxdy,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащая в верхней полуплоскости.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (3z^2 + x)\bar{i} + (e^x - 2y)\bar{j} + (2z - xy)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 4$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 2x^2 + 4x - 7,\ y = -x^2 - x + 1$;

б) $x^2 + y^2 - 4x = 0,\ x^2 + y^2 - 8x = 0,\ y \ge x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \le 1, \quad y \ge 0$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^2 / y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x + y + 4z^2)dxdydz,\ V: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_V z^2 dxdydz,\ \ V: 1 \le x^2 + y^2 \le 36,\ y \ge z,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z \ge 0$, $z = x^2,\ x - 2y + 2 = 0,\ x + y = 7$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 6\sqrt{y^2 + z^2}$, $y^2 + z^2 = 9,\ x = 0.$

6. Вычислить $\int\limits_{L_{OA}} \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(2;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_{L_{AB}} (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где L_{AB} – дуга эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8. Вычислить $\iint\limits_S xydydz - 5zdxdy$, где S – нижняя часть поверхности $x + 2y + z - 4 = 0$, расположенная в первом октанте.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (8x+1)\bar{i} + (zx - 4y)\bar{j} + (e^x - z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x^2 = 2y, 5x - 2y + 6 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 6y = 0, x^2 + y^2 - 8y = 0, y \le x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\frac{x^2}{9} + y^2 \le 1, \quad x \ge 0,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = xy^6$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V x^2y^2zdxdydz, \; V: -1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, -2 \le z \le 5$;

б) $\iiint\limits_V xdxdydz, \; V: x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 = y^2 + z^2, x \ge 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $y \ge 0$, $z \ge 0$, $z = x$, $x + y + z = 2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 9$.

6. Найти длину дуги кривой $y = 2e^x + 3$, , $0 \le x \le \ln 2$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x^2 + 1)\vec{i} + (y + 2)^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y = 3x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,3)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz - xdxdy$, где S – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует тупой угол с ортом $\bar{k}$), лежащая между плоскостями $z = 0$ и $z = 3$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x + z)\bar{i} + (z + y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z \ge 0 \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1,\ y = \ln x$;

б) $x^2 + y^2 - 6x = 0,\ x^2 + y^2 - 8x = 0,\ y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq \dfrac{3}{2}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x / y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,\ V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: x^2 + y^2 + z^2 = 32,\ y^2 = x^2 + z^2,\ y \geq 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z = y^2,\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $3z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$.

6. Вычислить $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl,$ где L – дуга кривой $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t,\ z = 4t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Вычислить $\int\limits_{L_{OA}} 2ydx + 3x^2dy,$ где L_{OA} – дуга параболы $y = 2 + x^2$ от точки $O(0, 2)$ до точки $A(1, 3)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S 3xdydz + 3ydxdz - xdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $9 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (2x+1)\bar{i} + (\cos z - y) \times$ $\times \bar{j} + (e^x + 2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

плоскостями $x+2y-3z=6$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$ в направлении внешней нормали.

Вариант 6

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3, x+y=2, x=0$;

б) $x^2+y^2+6y=0, x^2+y^2+8y=0, y\le x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\quad x\ge\dfrac{2}{3}y,\quad y\ge 0,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu=9x^3y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, $V: 0\le x\le 1, -1\le y\le 0, 1\le z\le 2$;

б) $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z=4-x-y,\ y=x,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $8x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=1/2$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}}\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)dl,$ где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющей точки $A(-1;0)$ и $B(0;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=(3+2y)\vec{i}+y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y=2x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S yzdydz-y^2dxdz-y^2dxdy,$ где S – часть поверхности конуса $y^2=x^2+z^2$ (нормальный вектор образует тупой угол с ортом $\bar{j}$), отсекаемая плоскостями $y=0$ и $y=1$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a}=(2yz-x)\bar{i}+(xz+2y)\bar{j}+$ $+(y^2+2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x-y+z=1$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 7

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \geq 0,\ x \geq y,\ y = \sqrt{8 - x^2}$;

б) $x^2 + y^2 + 10x = 0,\ x^2 + y^2 + 18x = 0,\ y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 25,\quad x \geq 0,\quad y \leq x/2,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x / y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (2x - y^2 - z)\,dxdydz,\ V: 1 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2,\ -1 \leq z \leq 0$;

б) $\iiint\limits_V y\,dxdydz,\ V: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ y \geq 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z = 2 - x - y,\ x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $4y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $x^2 + z^2 = 16,\ y = 0$.

6. Вычислить $\oint\limits_L (x - y)\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy,$ где L_{AB} – отрезок прямой между точками $A(1,2)$ и $B(2,-1)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S 2xdydz + 2ydxdz - zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $1 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - z^3)\bar{i} + (\sin z + 2y)\bar{j} + 3y^2\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: x^2 + y^2 = 2y,\ z = 0,\ z = 3$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вариант 8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \geq 0,\ x + 2y - 12 = 0,\ y = \lg x$;

б) $x^2 + y^2 - 12y = 0,\ x^2 + y^2 - 20y = 0,\ y \leq x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \dfrac{x^2}{16} + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = xy^7$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V 2xy^2 dxdydz$, $V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{y^2 dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, x \geq 0, z \geq 0, y \geq \sqrt{3}x$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x \geq 0,\ z \geq 0, z = x,\ x = 4, y = \sqrt{25 - x^2}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36.$

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{x + 2y}$, где L_{AB} – отрезок прямой AB, заключенный между точками $A(0;2)$ и $B(-4;0)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$ где L_{AB} – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy,$ где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, отсекаемая плоскостями $y = 0$, $z = 0$ и $x = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - \ln z)\bar{i} + (\sqrt{xz} + y)\bar{j} + (3z + y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: z^2 = 9\left(x^2 + y^2\right), z = 3$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 9

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 8$;

б) $x^2 + y^2 - 8x = 0,\ x^2 + y^2 - 14x = 0,\ y \geq x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 3,\ y \geq 0,\ y \geq \frac{2}{3}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^2 / y.$

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V 5xyz^2 dxdydz$, $V: -1 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V \frac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dxdydz$, $V: y \leq \sqrt{3}x, z = 3(x^2 + y^2), y \geq 0, z = 3$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z \geq 0$, $z = 4 - x,\ x = 2\sqrt{y},\ y = 2\sqrt{x}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$, $y^2 + z^2 = 4,\ x = 0.$

6. Вычислить $\int\limits_{L_{OA}} ydl,$ где L_{OA} – дуга параболы $y^2 = 4x$ между точками $O(0;0)$ и $A(4;4)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{L_{AB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 zdz,$ где L_{AB} – отрезок прямой между точками $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4).$

8. Вычислить $\iint\limits_S (x + xy)dydz + (y - x^2)dxdz + 2zdxdy,$ где S – внешняя сторона полусферы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

9. Найти поток векторного поля $a = (2y - 5x)\bar{i} + (\cos z^2 + 2x)\bar{j} + (e^{xy} + 2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $2x + 2y - z = 4$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Вариант 10

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \geq x^2$, $x = \sqrt{2-y^2}$, $x \geq 0.$;

б) $x^2 + y^2 + 2y = 0,\ x^2 + y^2 + 10y = 0,\ y \leq -x,\ x \geq 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $x^2 + \dfrac{y^2}{9} \leq 1,\ y \geq 0,\ y \leq \dfrac{3}{2}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = 9x^4y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x^2 + 2y^2 - z)dxdydz$, $V: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3,\ -1 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $y \geq 0$, $z \geq 0,\ 2x - y = 0,\ x + y = 9$, $z = x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 5\sqrt{y^2 + z^2}$, $x = 20$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (2x^2 + xy)\vec{i} + y^4\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $x = 4y^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,1)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz - zdxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $4 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $а = (x + 2y)\bar{i} + (zx + 4y)\bar{j} + (y^2x - z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вариант 11

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt[3]{x},\ x=1,\ y=-x^2$;

б) $x^2+y^2+16x=0,\ x^2+y^2+20x=0,\ y\le x,\ y\ge 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1\le x^2+\dfrac{y^2}{16}\le 9,\ y\ge 0,\ y\le 4x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu=y/x^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x+2yz)dxdydz,\ V:-2\le x\le 0, 0\le y\le 1, 0\le z\le 2$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,,\ V: z=2(x^2+y^2),\ y\ge 0,\ y\le 1/\sqrt{3}x,\ z=18$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $y\ge 0,\ z\ge 0,\ x=4,\ \ y=2x,\ z=x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $y=3\sqrt{x^2+z^2}$, $x^2+z^2=16,\ y=0$.

6. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl,$ где $L-$ первый виток лемнискаты $\rho^2=7\cos 2\varphi$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy^2\vec{i}+x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $y=3x+2$ от точки $A(0,2)$ до точки $B(1,5)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xzdydz+xydxdz+yzdxdy,$ где S – верхняя сторона плоскости $x+y+z=4$, отсекаемая плоскостями $y=0$, $z=0$ и $x=0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=(x-y)\bar{i}+(\sqrt{z}+3y)\bar{j}$ через замкнутую поверхность $S:\begin{cases} z=4-2(x^2+y^2) \\ z=2(x^2+y^2)\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 12

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = 8$;

б) $x^2 + y^2 - 6y = 0,\ x^2 + y^2 - 16y = 0,\ y \le -x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \le 25,\ x \ge 0,\ y \ge 2x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x / y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x^3 + y^2 - z)dxdydz,\ V: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 0, 0 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dxdydz$, $V: z = x^2 + y^2,\ y \ge 0,\ y \le x,\ z = 4$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x \ge 0, z \ge 0,\ y = 2x,\ \ y = 3,\ \ z = \sqrt{x}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 4$.

6. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, где L – первый виток винтовой линии $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{OA}} \dfrac{y}{x}dx + xdy$, где L_{OA} – дуга линии $y = \ln x$ от точки $O(1,0)$ до точки $A(e,1)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x + z)dydz + 2ydxdz - zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 2$, отсекаемая плоскостями $y = 0$, $z = 0$ и $x = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (\sqrt[3]{y} + z^2)\bar{i} + (x^2 + 4y)\bar{j} + (yx - z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 8$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 13

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 - 2,\ y = -x^2 + 2x - 2$;

б) $x^2 + y^2 - 10x = 0,\ x^2 + y^2 - 20x = 0,\ y \ge -x,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^5 y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (xy + 3z)dxdydz,\ V: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz,\ V: x^2 + y^2 = 4,\ y + z = 4,\ z \ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $y \ge 0, z \ge 0, x = 3,\ y = 2x,\ z = y^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 3$.

6. $\int\limits_{L_{AB}} xdl,$ где L_{AB} – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(2;4)$ до точки $B(1;1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz,$ где L_{AB} – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t,\ A(1,0,0), B(1,0,4\pi)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdy,$ где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует тупой угол с ортом $\bar{k}$), отсечённая плоскостью $z = 1$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (\sin z + 2x)\bar{i} + (\sin x - y)\bar{j} + (4z + \sin y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} z^2 = 9(x^2 + y^2), \\ z = 3,\ z = 6 \end{cases}$ в направлении внешней нормали

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 14

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{4-x},\ x\geq 3y,\ y\geq 0$;

б) $x^2+y^2+4y=0,\ x^2+y^2+14y=0,\ y\leq x\sqrt{3},\ x\leq 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\leq 2x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu=2x^5y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (xy-z^2)dxdydz,\ V: 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1, -1\leq z\leq 3$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,\ V: x^2+y^2=2,\ x+z=2,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z\geq 0$, $y^2=2-x,\ z=3x$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4,\ z=0$.

6. $\int\limits_{L_{AB}}\dfrac{dl}{x-y}$, где L_{AB} – отрезок прямой AB, заключенный между точками $A(4;0)$ и $B(6;1)$

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L xdy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y=x,\ x=2,\ y=0$ при положительном направлении обхода контура.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x+y)dydz+(y-x)dxdz+3zdxdy,$ где S – внешняя сторона полусферы $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}=5y\bar{i}+(3\cos z-y)\bar{j}+(e^y+4z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность *S*, ограниченную плоскостями $x-2y+2z=4,\ x=0,\ y=0$ и $z=0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 15

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \le x^2,\ y \ge 0,\ x = \sqrt{2 - y^2}$;

б) $x^2 + y^2 + 2x = 0,\ x^2 + y^2 + 4x = 0,\ y \ge x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{100} + y^2 \le 1,\ y \ge 0,\ y \le \dfrac{x}{10}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = xy^9$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x^3 + yz)dxdydz$, $V: -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdydz$, $V: x^2 + y^2 = 16,\ y + z = 16,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z \ge 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $x = 6\left(y^2 + z^2\right)$, $y^2 + z^2 = 3,\ x = 0$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{y}\right)dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{4}$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(2,1)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x+2)dydz + xdxdz + zdxdy$, где S – часть поверхности конуса $y^2 = x^2 + z^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{j}$), отсекаемая плоскостями $y = 0$ и $y = 1$.

9. Найти поток векторного поля $a = (5x - y^2)\bar{i} + (3\ln x + 2y)\bar{j} + (\sqrt{x} - 2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $3x - 2y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 16

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y^2 = -x,\ y^2 = x + 2;$

б) $x^2 + y^2 - 10y = 0,\ x^2 + y^2 - 20y = 0,\ y \geq -x,\ y \geq x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1,\ y \geq 0,\ y \leq 2x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x^3 + y^2 - z)dxdydz,\ V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1;$

б) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz,,\ V: x^2 + y^2 = 2x, x + z = 2, z \geq 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x \geq 0$, $y \geq 0,\ z \geq 0\ x + y = 2,\ z = x^2 + y^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $x = 7\left(y^2 + z^2\right)$, $x = 28$.

6. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{(x+2)^3} - 1,\ 1 \leq x \leq 7$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x + 2y)dx + 2xydy$, где L – окружность $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода.

8. Вычислить $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy,$ где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в первом октанте.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (x + e^{3z})\bar{i} + (\ln x - 5y)\,\bar{j} + {}$ $+ (z - \sqrt{y})\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$, $z = 0,\ z = 6$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 17

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = 8,\ x = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 8x = 0,\ x^2 + y^2 - 10x = 0,\ y \ge x\sqrt{3},\ y \le 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \le 1,\quad y \ge 0,\quad y \le \dfrac{5x}{3}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (2x^2 + y - z^3)dxdydz,\ V: 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_V xydxdydz,\ V: 2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 8,\ z^2 = x^2 + y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z \ge 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 5 - x - y$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 3$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \left(4x - \dfrac{2}{\sqrt{y}}\right)dl$, где L_{AB} – отрезок прямой AB, заключенный между точками $A(2;0)$ и $B(4;6)$.

7. Вычислить $\int\limits_{L_{OA}} \dfrac{x}{y}dx + \dfrac{1}{y-a}dy$, где L_{OA} – дуга циклоиды $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ \pi/6 \le t \le \pi/3$.

8. Вычислить $\iint\limits_S 3xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя часть поверхности $2x + 3y + z - 6 = 0$, расположенная в первом октанте.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (y + e^z)\bar{i} + (\ln z + 2y)\bar{j} + (3z - \sqrt{y})\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: z^2 = 25(x^2 + y^2)$, $z = 1,\ z = 5$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 18

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 3\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{x},\ x = 9$;

б) $x^2 + y^2 + 2x = 0,\ x^2 + y^2 + 12x = 0,\ y \le x,\ x \le 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 4,\ y \ge 0,\ y \le \dfrac{2x}{3}$, имеющей поверхностную плотность $\mu = \dfrac{y}{x^3}$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V x^2 yz^2 dxdydz$, $V: 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, -1 \le z \le 0$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{ydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $V: x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 4y,\ x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 6$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z \ge 0$, $z = x,\ x = \sqrt{4 - y^2}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x = 7\left(y^2 + z^2\right),\ x = 28$.

6. Вычислить $\int\limits_L xydl$, где L – первая четверть эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

7. Вычислить $\int\limits_{L_{ABO}} (xy - x)dx + \dfrac{x^2}{2}dy$, где L_{AB0} – ломаная ABO: $O(0;0), A(1;2), B(0{,}5;\ 3)$ при положительном направлении обхода контура.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x + y)dydz + (y - x)dxdz$, где S – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (y^2 + x)\bar{i} + (5^x + y)\bar{j} + (x\ln y + 2z)$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x + 4y - z = 4,\ x = 0,\ y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 19

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -x^2 + 3x + 1,\ y = 2x - 1$;

б) $x^2 + y^2 + 12x = 0,\ x^2 + y^2 + 14x = 0,\ y \le x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \le \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 9,\ y \ge -\dfrac{x}{2}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = 4y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x + y - z)dxdydz,\ V: 0 \le x \le 4, 1 \le y \le 3, -1 \le z \le 5$;

б) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz, V: x^2 + y^2 + z^2 = 36, y \ge 0, z \ge 0, y \le -x$

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $y \ge 0$, $z \ge 0,\ x + y = 2, z = x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $z = 5\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 = 2,\ z = 0$.

6. Вычислить $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{OA}} xdy$, где L_{OA} – дуга синусоиды $y = \sin x$ от точки $O(\pi, 0)$ до точки $A(0,0)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + 4zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $2 - z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - y)\bar{i} + (\sqrt{z} + 3y)\bar{j}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right), \\ z = 1, z = 2 \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 20

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \geq -x,\ y = -\sqrt{8 - x^2},\ y = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 14y = 0,\ x^2 + y^2 - 20y = 0,\ x \geq 0,\ y \geq x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4,\quad x \geq 0,\quad y \leq \frac{x}{2}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = x / y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x + 2y + 3z^2)dxdydz,\ V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdydz,\ V: x^2 + y^2 = 2x,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ z = 4,\ y \leq x$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $y \geq 0$, $z \geq 0,\ y = 4,\ z = x,\ x = \sqrt{25 - y^2}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $z = 8(x^2 + y^2)$, $z = 32$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x - z}$, где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющей точки $A(0;0;-2)$ и $B(4;0;0)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{OA}} y^2dx + x^2dy$, где L_{OA} – верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки.

8. Вычислить $\iint\limits_S 2xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя часть поверхности $x + 4y + 2z - 8 = 0$, расположенная в первом октанте.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (2x + z^2)\bar{i} + (e^z - 4y)\bar{j} + {}$ $+ (z + 2)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 2$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 21

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -x^3$, $y = \sqrt{2+x}$, $y = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 10x = 0$, $x^2 + y^2 - 16x = 0$, $y \ge x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \le \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 4$, $\quad x \ge 0$, $\quad y \le \dfrac{x}{2}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = 2x^3 y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (3x^2 + 2y + z)dxdydz$, $V: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, -1 \le z \le 3$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{zdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $y \le \dfrac{1}{\sqrt{3}x}$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0,$ $z = y^2$, $3x + y = 9$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $9y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, где L_{AB} – дуга параболы $y = 4x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;4)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{OA}} xdx + xydy$, где L_{OA} – дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = 2x$, при положительном направлении обхода контура.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x + xy^2)dydz + (y - yx^2)dxdz + (z-3)dxdy$, где S – часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсечённая плоскостью $z = 1$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (z^2 - 2x)\bar{i} + (3\sin z + 2x)\bar{j} + (\sqrt{y^3} + 4z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x - 5y - z = 5$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вариант 22

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -x^2 + 4x,\ y = 2x + 1,\ x = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 2y = 0,\ x^2 + y^2 + 14y = 0,\ y \geq x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 4,\quad x \leq 0,\quad y \leq \frac{2x}{3}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^2 y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (xy - z^3)dxdydz,\ V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$;

б) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz, V: x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + z = 2$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z = 2$, $y = x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $6y = x^2 + z^2$, $y = 8$.

6. Вычислить $\int\limits_L \left(\arcsin y - x^2\right)dl$, где L – первая четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} xye^x dx + (x-1)e^x dy$, где L_{AB} – любая линия, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(1,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S 2xdydz + 2ydxdz + (3z+1)dxdy$, где S – верхняя часть поверхности $x + y + 2z - 2 = 0$, отсекаемая плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (2y + z^2)\bar{i} + (e^z - 2y)\bar{j} + (z + 2\cos y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4z + 4$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вариант 23

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sqrt[3]{x},\ x = 1,\ y = 4,\ x = 0,\ x = 1$;

б) $x^2 + y^2 + 12x = 0,\ x^2 + y^2 + 14x = 0,\ y \geq -x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} \leq 1,\quad x \geq 0,\quad y \geq -3x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = 81x^3y^7$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V x^3 yz dxdydz,\ V: -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$;

б) $\iiint\limits_V x^2 dxdydz,\ V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq 0, z \geq 0, y \leq x$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x \geq 0$, $y \geq 0,\ z \geq 0,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 4$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $2x = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 4,\ x = 0.$

6. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y} dl,$ где L – первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x^2 - y) dx$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ при положительном направлении обхода контура.

8. Вычислить $\iint\limits_S xy^2 dydz - yx^2 dxdz + dxdy,$ где S – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{j}$), отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 5$.

9. Найти поток векторного поля $\text{a} = (2x - \cos y)\bar{i} + (z - 2y)\bar{j} +$ $+ (3\sqrt{x} + z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = 3$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \le -x^2$, $x = -\sqrt{6-y^2}$, $x \le 0$;

б) $x^2 + y^2 - 14y = 0,\ x^2 + y^2 - 20y = 0,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \le x^2 + \dfrac{y^2}{25} \le 2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 5x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^2$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V xy^2 z\,dxdydz,\ V: -2 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3;$

б) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}},\ V: x^2 + y^2 = 4y,\ y + z = 4,\ z \ge 0.$

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z \ge 0$, $y = 2,\ y = x,\ z = x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $8x = y^2 + z^2$, $x = 2$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{OA}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + \left(x^2 + x\right)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $x^2 + y^2 = 9\ (y \ge 0)$ от точки $A(3,0)$ до точки $B(-3,0)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S x\,dydz + (y+z)\,dxdz + (z-y)\,dxdy$, где S – внешняя сторона полусферы $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (3x + e^y)\bar{i} + z^2\bar{j} + (2^x + 2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 25

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \geq 0$;

б) $x^2 + y^2 - 10x = 0,\ x^2 + y^2 - 16x = 0,\ y \leq -x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \leq \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} \leq 2,\ y \geq 0$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = 7x^4 y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V xyz^2 dxdydz,\ V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{ydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ y \leq \sqrt{3}x,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 2,\ x^2 + y^2 = z$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $x^2 + z^2 = 4y$, $y = 9$.

6. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, где L – первый виток винтовой линии $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, где L – контур треугольника с вершинами $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$ при положительном направлении обхода контура.

8. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz - zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 1$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (y^2 + x)\bar{i} + (3\sin x + 2y)\bar{j} + (5^x - 4z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $4x - y - z + 4 = 0,\ x = 0,\ y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 26

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 - 4x + 2,\ y = x - 2,\ x = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 8y = 0,\ x^2 + y^2 + 16y = 0,\ x \geq 0,\ y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{25} + y^2 \leq 1,\quad y \geq 0,\quad y \geq \dfrac{x}{5}$, и имеющей поверхностную плотность $\mu = 9x / y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x + yz)dxdydz,\ V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2$;

б) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,\ V: x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0, z \geq 0, z = 3$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $y \geq 0$, $z \geq 0,\ 2x + y = 2, 4z = y^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 10,\ y = 0$.

6. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{2}\ln(\cos 2x) + 1,\ \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$, где L_{AB} – отрезок прямой между точками $A(-2,2)$ и $B(2,4)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S 5xdydz + zdxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, отсекаемая плоскостью $z = 0\ (z \geq 0)$.

9. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (3x + e^z)\bar{i} + (\cos x - y)\bar{j} + 3x^2\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: z^2 = x^2 + y^2, z = 0, z = 4$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Вариант 27

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{2-x},\ y=x^3,\ y=0$;

б) $x^2+y^2+10x=0,\ x^2+y^2+18x=0,\ y\le 0,\ y\ge x\sqrt{3}$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1\le \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}\le 4,\ y\le 0,\ y\ge \dfrac{3}{5}x,$ имеющей поверхностную плотность $\mu = x^2/y$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (2x^2y+z)dxdydz,\ V:0\le x\le 3,\ -1\le y\le 3,\ 0\le z\le 4$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V:1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le x$

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x\ge 0$, $y\ge 0,\ z\ge 0,\ 2x+y=2,\ z=y^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область, ограниченную поверхностями $y^2+z^2=3x,\ x=9$.

6. Вычислить $\int\limits_L \dfrac{ydl}{x^2+y^2}$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} 4x\sin^2 ydx + y\cos^2 2xdy$, где L_{AB}- отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ до точки $B(3,\ 6)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S (x+xz^2)dydz+ydxdz+(z-zx^2)dxdy$, где S – внешняя сторона полусферы $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a}=(z-e^y)\bar{i}+(2\ln x-y)\bar{j}+$ $+(x^2y+2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S:x^2+y^2=6y,\ z=0,\ z=8$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 28

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x = y^2,\ x - 2y + 1 = 0,\ x = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 14y = 0,\ x^2 + y^2 - 18y = 0,\ x \geq 0$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leq 36,\ y \geq \dfrac{5}{2}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = x^4$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V x\,dxdydz,\ V: 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4$;

б) $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $z \geq 0$, $x = 2y^2,\ x = y^2 + 1,\ z = 1 - y^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $x = y^2 + z^2$, $y^2 + z^2 = 9,\ x = 0.$

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \left(xy - x^2\right)dl,$ где L_{AB} – отрезок прямой AB, заключенный между точками $A(3;0)$ и $B(4;6)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{OA}} (x + y^3)dx + 2ydy,$ где L_{OA} - дуга параболы $x = y^2 + 2$ от точки $O(2,0)$ до точки $A(3,1)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + 2ydxdz + 2y^2dxdy,$ где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 4$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (y^2 + z)\bar{i} + (3^x - 5y)\bar{j} + (\cos y + z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную плоскостями $x - y - z = 3,\ x = 0,\ y = 0$ и $z = 0$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Вариант 29

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{x},\ y=\dfrac{8}{x},\ x=1$;

б) $x^2+y^2-10x=0,\ x^2+y^2-18x=0,\ y\le -x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 4,\ y\ge 0,\ y\le\dfrac{3}{2}x$, имеющей поверхностную плотность $\mu=\dfrac{9x}{y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x+y^2-2z)dxdydz,\ V:1\le x\le 2,-2\le y\le 3,0\le z\le 1$;

б) $\iiint\limits_V \dfrac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ V:1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ y\le x,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела *V*, ограниченного поверхностями $x\ge 0$, $y\ge 0,\ z\ge 0,\ y=3-x,\ z=9-x^2$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область *V*, ограниченную поверхностями $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=9,\ z=0$.

6. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}}(x+y)dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$ между точками $A(3;0)$ и $B(0;3)$.

7. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}}(xy-1)dx+x^2ydy$, где L_{AB}- дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+4zxdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ (нормальный вектор образует тупой угол с ортом $\bar{k}$), вырезаемая цилиндрам $x^2+y^2=1$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a}=(2x+e^y)\bar{i}+(\ln z-x)\bar{j}+$ $+(xy+2z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S:x^2+y^2=6,\ z=0,\ z=4$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вариант 30

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y \le x,\ y = \sqrt{32 - x^2},\ y = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 2y = 0,\ x^2 + y^2 + 14y = 0,\ y \ge x$.

2. Вычислить массу материальной пластинки, ограниченной линиями $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 36,\quad x \ge 0,\quad y \ge \dfrac{3}{2}x,$ и имеющей поверхностную плотность $\mu = 9x / y^3$.

3. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_V (x - y - z)dxdydz,\ V: 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1, -2 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_V xdxdydz,\ V: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2},\ x \ge 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $x \ge 0$, $z \ge 0,\ x + y = 4,\ z = 4\sqrt{y}$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 4$.

6. Вычислить $\oint\limits_L ye^x dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2xdx - \cos 2xdy$, где L_{AB} –любая линия от точки $A\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$ до точки $B\left(\dfrac{\pi}{6}, 1\right)$.

8. Вычислить $\iint\limits_S x^2 dydz - dxdz + zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$ (нормальный вектор образует острый угол с ортом $\bar{k}$), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

9. Найти поток векторного поля $\mathrm{a} = (2x + y)\bar{i} + (e^z + y)\bar{j} + (x^2 - \cos y)\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 6x + 2y + 2z - 2$ в направлении внешней нормали.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск : Выш.шк., 2013. – Ч. 3. – 367 с.

2. Руководство к решению задач по мысшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск: Выш. шк., 1990. – Ч. 2.– 400 с.

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Задорожнюк Мария Викторовна
Евтухова Светлана Михайловна
Кондратюк Валерия Вячеславовна

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 23.12.21.
Рег. № 52 Е.
http://www.gstu.by

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого