Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, Л. Д. Корсун

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

***Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника»***

**Электронный аналог печатного издания**

Гомель 2021

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
Б12

Рецензенты: зав. каф. «Теоретическая физика» Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины канд. физ.-мат. наук, доц. *Г. Ю. Тюменков*;
доц. каф. «Высшая математика» Белорусского государственного университета транспорта канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. А. Задорожнюк*

**Бабич, А. А.**

Б12 Специальные математические методы и функции : учеб.-метод. пособие / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 91 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-463-6.

Кратко изложен теоретический материал и сформированы основные понятия и методы решения задач. Для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов представлены разобранные примеры, задания и упражнения.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 517(075.8)**
**ББК 22.16я73**

**ISBN 978-985-535-463-6**

## Оглавление

# ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

## 1.1. Метрические пространства

Множество $M$ является *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов $x$ и $y$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

$M_1$: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (*аксиома тождества*);

$M_2$: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

$M_3$: $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in M$ (*аксиома треугольника*).

Число $\rho(x, y)$ называется *метрикой* и служит мерой *расстояния* между точками (элементами) $x$ и $y$ метрического пространства $M$.

Для проверки аксиом метрики полезны следующие общие неравенства:

**1.** Неравенство треугольника для модуля:

$$|x + y| \le |x| + |y|,$$

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

**2.** Неравенство Коши:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

**3.** Неравенство Коши–Буняковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

**4.** Неравенство Гёльдера:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \text{ где } p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**5.** Неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}, \text{ где } p > 1.$$

При $p = 2$: $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

**6.** Неравенство Шварца:

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Основные метрические пространства представлены в табл. 1.1.

*Таблица 1.1*

**Основные метрические пространства**

| Обозначение пространства | Элементы пространства | Формулы для метрик |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{R}_2^n$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ | $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$ |
| $\boldsymbol{R}_1^n$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ | $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lvert x_k - y_k \rvert$ |
| $\boldsymbol{R}_\infty^n$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ | $\rho(x, y) = \max_k \lvert x_k - y_k \rvert$ |
| $\boldsymbol{R}_2^\infty$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ | $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2}$ |
| $\boldsymbol{R}_1^\infty$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert < \infty$ | $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k - y_k \rvert$ |
| $\boldsymbol{R}_\infty^\infty$ | $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\lvert x_k \rvert \le M$ для $\forall k$ | $\rho(x, y) = \sup_k \lvert x_k \rvert$ |
| $\boldsymbol{C}_2[a,b]$ | Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ | $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$ |
| $\boldsymbol{C}_1[a,b]$ | Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ | $\rho(f, g) = \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert dx$ |
| $\boldsymbol{C}[a,b]$ | Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ | $\rho(f, g) = \max_{[a,b]} \lvert f(x) - g(x) \rvert$ |

| **Обозначение пространства** | **Элементы пространства** | **Формулы для метрик** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{D}^n[a,b]$ | Функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ вместе со своими производными до $n$-го порядка | $\rho(f,g)=\sum_{k=1}^{n}\max_{[a,b]}\left\|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)\right\|$ <br> $k=\overline{1,n}$ |

***Пример 1.*** Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=\left|2^x-2^y\right|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

*Решение*

Поскольку $\rho(x,y)$ содержит модуль, следовательно, $\rho(x,y)\geq 0$. Проверим аксиомы метрики $M_1$–$M_3$.

$M_1$: Пусть $\rho(x,y)=0$, тогда

$$\left|2^x-2^y\right|=0 \Leftrightarrow 2^x-2^y=0 \Leftrightarrow 2^x=2^y \Leftrightarrow x=y.$$

Покажем обратное, что если $x=y$, то $\rho(x,y)=0$: пусть $x=y$, тогда $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\left|2^x-2^x\right|=0.$

Таким образом, аксиома тождества $M_1$ выполняется.

$M_2$: $\rho(x,y)=\left|2^x-2^y\right|=\left|2^y-2^x\right| \Rightarrow \rho(x,y)=\rho(y,x).$

Аксиома симметрии $M_2$ выполняется.

$M_3$: Проверим выполнение аксиомы треугольника. Пусть $z$ – некоторое число. Тогда находим

$$\rho(x,y)=\left|2^x-2^y\right|=\left|2^x-2^z+2^z-2^y\right|\leq\left|2^x-2^z\right|+\left|2^z-2^y\right|=$$

$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Аксиома $M_3$ выполняется.

***Ответ***: Является. ▲

***Пример 2.*** Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=\left|x^4-y^4\right|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

*Решение*

Проверим выполнение аксиомы $M_1$. Пусть $\rho(x,y)=0$, тогда

$$\left|x^4-y^4\right|=0 \Leftrightarrow x^4-y^4=0 \Leftrightarrow x^4=y^4.$$

Последнее уравнение имеет больше одного решения, однозначность нарушена. Действительно, пусть $x=1$, тогда $y=\pm 1$, т. е. $x\neq y$. Следовательно, аксиома $M_1$ не выполняется и $\rho(x,y)=\left|x^4-y^4\right|$ не является метрикой.

***Ответ***: Не является. ▲

***Пример 3.*** Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=\left|\sin(x-y)\right|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

*Решение*

Проверим выполнение аксиомы $M_1$. Пусть $\rho(x,y)=0$, тогда

$$\left|\sin(x-y)\right|=0 \Rightarrow x-y=\pi n,\ n\in Z.$$

Но из последнего равенства не следует, что $x=y$. Следовательно, аксиома $M_1$ не выполняется.

***Ответ***: Не является. ▲

***Пример 4.*** Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=\left(4x^2+y^2\right)\left|x^3-y^3\right|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

*Решение*

**1.** Пусть $\rho(x,y)=0$, тогда $\left(4x^2+y^2\right)\left|x^3-y^3\right|=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+y^2=0 \\ x^3-y^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=y \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y.$$

Проверим обратное: пусть $x=y$, тогда имеем $\rho(x,y)=0$: пусть $x=y$, следовательно, $\rho(x,x)=\left(4x^2+x^2\right)\left|x^3-x^3\right|=0$.

Аксиома $M_1$ выполняется.

**2.** Сравнивая выражения $\rho(x,y)=\left(4x^2+y^2\right)\left|x^3-y^3\right|$ и $\rho(y,x)=\left(4y^2+x^2\right)\left|y^3-x^3\right|$, приходим к выводу, что

$$\left(4x^2+y^2\right)\left|x^3-y^3\right| \neq \left(4y^2+x^2\right)\left|y^3-x^3\right| \text{ для } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Аксиома симметрии $M_2$ не выполняется.

***Ответ*: Не является.** ▲

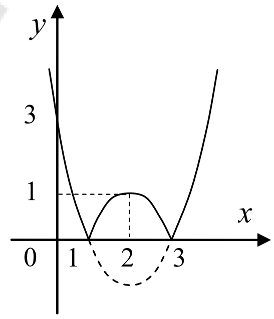
***Пример 5.*** Найти расстояние между функциями $f(x)=x^2$ и $g(x)=4x-3$ в метрических пространствах: а) $\boldsymbol{C}[0,2]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,2]$.

*Решение*

а) В пространстве $\boldsymbol{C}[0,2]$ метрика задается как

$$\rho(f,g)=\max_{[0,2]}\left|f(x)-g(x)\right|=\max_{[0,2]}\left|x^2-4x+3\right|. \qquad (1.1)$$

Построим график функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$. Начнем построение с графика параболы $y=x^2-4x+3$. Парабола пересекает ось $Ox$ в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=3$, а ось $Oy$ в точке $(0,3)$. Вершина параболы находится в точке с координатами $(2,-1)$, ветви параболы направлены вверх. Для построения графика функции $y=\left|x^2-4x+3\right|$ отображаем часть графика, лежащего в нижней полуплоскости, в верхнюю. Тогда по формуле (1.1) получаем




$$\rho(f,g)=\max_{[0,2]}\left|x^2-4x+3\right|=3.$$

б) Для пространства $\boldsymbol{C}_1[0,2]$ последовательно вычисляем

$$\rho(f,g)=\int_0^2\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^2\left|x^2-4x+3\right|dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx-\int_1^2\left(x^2-4x+3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^2=2\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=2.$$

***Ответ*:** а) $\rho(f,g)=3$; б) $\rho(f,g)=2$. ▲

## ЗАДАНИЯ

**1.** Являются ли метриками на прямой ($M = \mathbb{R}$) следующие функции:

1.1. $\rho(x, y) = \left|x^3 - y^3\right|$.

1.2. $\rho(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$.

1.3. $\rho(x, y) = \left|\cos(x - y)\right|$.

1.4. $\rho(x, y) = \left(x^2 + 2y^2\right)|x - y|$.

1.5. $\rho(x, y) = \left|e^x - e^y\right|$.

1.6. $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$.

1.7. $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

1.8. $\rho(x, y) = \sqrt[3]{|x^2 - y^2|}$.

**2.** Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определить так:

**2.1.** $\rho(M_1, M_2) = \left(\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}\right)^2$.

**2.2.** $\rho(M_1, M_2) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4}$?

**3.** Для множества точек плоскости $M(x, y)$ введены следующие три метрики:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\ ;$$

$$\sigma(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

$$\mu(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Определить их геометрический смысл и найти расстояния между точками $A$ и $B$ в этих метрических пространствах:

а) $A(0, 0)$, $B(1,1)$; б) $A(-2,1)$, $B(3, 4)$.

**4.** Будет ли пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t), y(t), \ldots$ метрическим, если метрику определить как:

**4.1.** $\rho(x, y) = \min|x(t) - y(t)|,\ t \in [a, b]$.

**4.2.** $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|dt.$

**4.3.** $\rho(x,y)=\left[\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2 dt\right]^{1/2}.$

**5.** Пусть $M$ – множество населенных пунктов на берегу реки. Расстояние между пунктами $A$ и $B$ определим как время движения теплохода, имеющего собственную скорость $v$. Образует ли $M$ метрическое пространство?

**6.** В пространстве $\boldsymbol{R}_1^3$ метрика задана формулой: $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{3}|x_k-y_k|$. Определить расстояние между элементами пространства $x$ и $y$: $x=(4,-3,0)$ и $y=(5,2,4)$.

**7.** В пространстве $\boldsymbol{R}_\infty^4$ метрика задана формулой: $\rho(x,y)=\max\limits_k|x_k-y_k|$. Определить расстояние между элементами пространства $x$ и $y$: $x=(5;7;0;-2)$ и $y=(6;-2;3;2)$.

**8.** Метрика на множестве целых чисел $Z$ задана формулой $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ \dfrac{1}{4^k}, & x\neq y,\end{cases}$ где $k$ – наивысший показатель степени, при котором число $x-y$ делится нацело (без остатка) на $4^k$. Определить расстояние между парами чисел: а) $x=35,\ y=3$; б) $x=146,\ y=18$.

**9.** Найти расстояние между функциями $f(x)=x^2$ и $g(x)=3x-2$ в метриках пространств: а) $\boldsymbol{C}[-1,3]$; б) $\boldsymbol{C}_1[-1,3]$; в) $\boldsymbol{C}_2[-1,3]$.

**10.** Найти расстояние между функциями $f(x)=1-x^2$ и $g(x)=x-5$ в метриках пространств: а) $\boldsymbol{C}[0,4]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,4]$; в) $\boldsymbol{D}^1[0,4]$.

**11.** Найти расстояние между функциями $f(x)=x^3$ и $g(x)=4x^2-3x$ в метриках пространств:

а) $\boldsymbol{C}_1[-1,4]$; б) $\boldsymbol{C}_2[-1,2]$; в) $\boldsymbol{C}[-1,4]$; г) $\boldsymbol{D}^1[0,2]$.

**12.** Найти расстояние между функциями $f(x) = \sin 2x$ и $g(x) = 0$ в метриках пространств: а) $\boldsymbol{C}\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\boldsymbol{C}_1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\boldsymbol{D}^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

## 1.2. Сходимость в метрических пространствах

Пусть задана последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства *M*.

Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства *M* сходится к точке $x_0$ ($x_0$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0$, начиная с которого все точки последовательности содержатся в $\varepsilon$-окрестности точки $x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0: \ n > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Из определения непосредственно следует, что если последовательность $\{x_n\} \to x_0$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0. \qquad (1.2)$$

***Свойства пределов сходящихся последовательностей*:**

1. Если предел $x_0$ существует, то он единственен.

2. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу $x_0$.

3. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства *M* называется *фундаментальной* или последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0$, начиная с которого расстояние между любыми точками последовательности $x_n$ и $x_m$ не превышает $\varepsilon$:

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ для } \forall n, m > n_0.$$

Всякая сходящаяся в метрическом пространстве последовательность является фундаментальной. Обратное утверждение неверно!

Метрическое пространство *M* называется полным, если всякая ее фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x_0$ этого пространства.

*Сжимающим отображением* называется отображение метрического пространства $M$ в себя $f : M \to M$, если существует такое число $q$ $(0 < q < 1)$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y). \tag{1.3}$$

Неподвижной точкой отображения $f : M \to M$ называется точка $x \in M$ такая, что

$$f(x) = x. \tag{1.4}$$

***Принцип сжимающих отображений.*** Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку.

Для сжимающего отображения $f : M \to M$ справедлива следующая оценка сходимости последовательности приближений $\{x_n\}$ к неподвижной точке $x$:

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(f(x_0), x_0),$$

где $x_0$ – стартовая точка, а $x$ – неподвижная точка отображения.

***Пример 1.*** Установить, сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ к функции $f(x) \equiv 0$ в метрических пространствах:

а) $\boldsymbol{C}[0,1]$; б) $\boldsymbol{C}_1[0,1]$.

*Решение*

а) В пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$ метрика определяется как

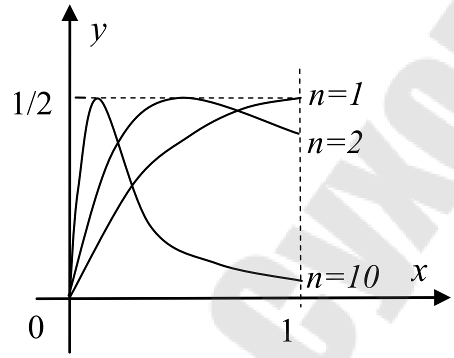
$$\rho(f_n(x), f(x)) = \max_{[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \max_{[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right|.$$

Найдем наибольшее значение функции $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ на отрезке $[0,1]$ (напомним, что оно достигается в критических точках, принадлежащих отрезку, или на границах отрезка).

Найдем критические точки:

$$f_n'(x)=\frac{n\left(1+n^2x^2\right)-2n^2x\cdot nx}{\left(1+n^2x^2\right)^2}=\frac{n\left(1-n^2x^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2},$$

$f_n'(x)=0$ при $x=\dfrac{1}{n}$, а $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}.$




Точка $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{2}\right)$ – максимум функции $f_n(x)$.

На границах отрезка $[0,1]$: $f_n(0)=0$, $f_n(1)=\dfrac{n}{1+n^2}$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n^2}=0$. Таким образом, наибольшие значения функций $f_n(x)$ на отрезке $[0,1]$ равны $\dfrac{1}{2}$, поэтому для $f(x)\equiv 0$ находим

$$\rho(f_n(x),f(x))=\max_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max_{[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n(x),f(x))=\dfrac{1}{2}\neq 0$, последовательность функций $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ не сходится к функции $f(x)\equiv 0$ в пространстве $\boldsymbol{C}[0,1]$.

***Ответ*:** Не сходится. ▲

б) В пространстве $\boldsymbol{C}_1[0,1]$ метрика определяется как

$$\rho(f_n(x),f(x))=\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx=\int_0^1\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|dx=$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^1\frac{d(1+n^2x^2)}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\ln\left|1+n^2x^2\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right).$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n(x),f(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+n^2\right)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+n^2\right)\right)'}{(2n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2}=0.$$

Тогда можно утверждать, что последовательность функций $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится к функции $f(x)\equiv 0$ в пространстве $\boldsymbol{C_1}[0,1]$.

***Ответ*: Сходится.** ▲

## ЗАДАНИЯ

**1.** Установить, сходятся ли данные последовательности функций к функции $f(x)\equiv 0$ в указанных метрических пространствах:

а) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $\quad \boldsymbol{C}[0,1]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,1]$;

б) $f_n(x)=xe^{-nx}$, $\quad \boldsymbol{C}[0,10]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,10]$;

в) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $\quad \boldsymbol{C}[-\pi,\pi]$, $\boldsymbol{C}_1[-\pi,\pi]$, $\boldsymbol{D}^1[-\pi,\pi]$;

г) $f_n(x)=x^n$, $\quad \boldsymbol{C}[0,1]$ и $\boldsymbol{C}_1[0,1]$;

д) $f_n(x)=\dfrac{\ln\left(1+n^2x^2\right)}{2n^2}$, $\quad \boldsymbol{D}^1[0,1]$.

**2.** Установить, являются ли данные последовательности действительных чисел фундаментальными в $\mathbb{R}$:

а) $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$;

б) $x_n=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$.

**3.** Установить, является ли последовательность функции $y_n(x)=x^n$ фундаментальной в указанных метрических пространствах:

а) $\boldsymbol{C}\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$; б) $\boldsymbol{C}[0,1]$.

**4.** Являются ли фундаментальными данные последовательности функций в указанных пространствах:

а) $f_n(x)=\sin\left(2^n x\right)$, $\boldsymbol{C}[0,2\pi]$;

б) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $\boldsymbol{C}[0,1]$;

в) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $\quad \boldsymbol{D}^1[0,1]$.

**5.** Найти неподвижные точки отображения $f(x)=x^2$ числовой прямой в себя.

**6.** Установить, имеет ли отображение $f(x)=5x^2+2x+3-2\sin x$ числовой прямой в себя неподвижные точки.

**7.** Найти неподвижные точки отображения $f(y)=y^2(x)-y(x)-x^2$ пространства $\boldsymbol{C}[0,1]$ в себя.

**8.** Найти неподвижные точки отображения $f(y)=y''(x)$ пространства дважды дифференцируемых функций в себя.

**9.** Установить, задает ли функция $f(x)=x^2$, определенная на отрезке $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, сжимающее отображение.

**10.** Установить, задает ли функция $f(x)=4x-4x^2$, определенная на отрезке $[0,1]$, сжимающее отображение.

**11.** Является ли сжимающим отображение $f(x)=x+\frac{1}{x}$ луча $[1,+\infty)$ в себя?

**12.** Является ли сжимающим отображение $f(x)=\sin x$ числовой прямой в себя.

**13.** Является ли сжимающим отображение $f:(x,y)\to(u,v)$, где $\begin{cases} u=0{,}7x+0{,}8y; \\ v=0{,}2x-0{,}05y \end{cases}$ плоскости в себя, если плоскость рассматривается как метрическое пространство: а) $\boldsymbol{R}_2^2$; б) $\boldsymbol{R}_1^2$.

**14.** Установить, является ли отображение $f(y)=q\int\limits_0^x y(t)dt$ пространства $C[0,1]$ в себя сжимающим, если $0<q<1$.

**15.** Установить, имеют ли последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, неподвижные точки, и если имеют, то найти их:

а) $x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$, $x_0=1$;

б) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}}, \quad x_0 = -5;$

в) $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}, \quad x_0 = 5.$

*Указание*. Ввести соответствующее отображение $f(x)$, определить область, в которой $f(x)$ является сжимающим отображением. Предел найти как неподвижную точку.

**16.** Установить, является ли последовательность цепных дробей

$$2,\, 2+\frac{1}{2},\, 2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}},\, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}},\ldots$$

сходящейся, и если является, то найти ее предел.

**17.** Доказать, что следующие последовательности имеют пределы и найти их:

а) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots;$

б) $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots .$

## 1.3. Линейные пространства

*Линейным пространством* $V$ над полем действительных или комплексных чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$ называется непустое множество, любой паре элементов которого $f$ и $q$ при помощи операций сложения и умножения на числе $\lambda$ ставятся в соответствие единственные элементы $f + q \in V$ и $\lambda f \in V$ со свойствами:

$V_1$: $f + g = g + f$ (коммутативность)

$V_2$: $f + (g + h) = (f + g) + h$ (ассоциативность)

$V_3$: $f + 0 = f$ (существование элемента 0)

$V_4$: $f + (-f) = 0$ (существование элемента –*f*)

$V_5$: $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$ (ассоциативность)

$V_6$: $\lambda + (f + g) = \lambda f + \lambda g$ (дистрибутивность)

$V_7$: $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$ (дистрибутивность)

$V_8$: $1 \cdot f = f$

Элементы линейного пространства $V$ принято называть *векторами*. Часто линейное пространство $V$ называют векторным пространством.

*Линейно независимой* называется система векторов $\{f_k\}$, $k=\overline{1,n}$, если их линейная комбинация обращается в 0 только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

В противном случае система называется *линейно зависимой*.

*Базисом* линейного пространства $V$ размерности $\dim V=n$ называется любая совокупность $n$ линейно независимых векторов.

*Координатами* вектора $g$ в базисе $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ называются коэффициенты $\lambda_k$, $k=\overline{1,n}$ разложения вектора $g$ по базису $\{f_k\}$:

$$g=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n.$$

## ЗАДАНИЯ

**1.** Является ли линейным пространство: а) пустое множество $\varnothing$; б) множество, состоящее из одного нулевого элемента?

**2.** Существует ли линейное пространство, состоящее только из двух элементов?

**3.** Являются ли линейными пространствами над полем $\boldsymbol{R}$ множества: а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел?

**4.** Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка $n$?

**5.** Установить, являются ли линейными подпространствами заданные множества векторов в $n$-мерном векторном пространстве $V$, и если являются, то найти их размерность:

а) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

б) множество векторов, первая координата которых равна 0;

в) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

г) множество векторов плоскости, параллельных между собой.

**6.** Установить, образует ли указанное множество функций на произвольном отрезке $[a,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число $\lambda$:

а) множество непрерывных функций;

б) множество дифференцируемых функций;

в) множество интегрируемых функций;

г) множество неотрицательных функций;

д) множество функций таких, что $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0.$

**7.** Доказать, что при любом натуральном $n$ заданное множество функций образует конечномерное линейное пространство. Найти размерность пространств и указать их базис:

а) пространство многочленов степени $\le n$;

б) множество четных многочленов степени $\le n$;

в) множество нечетных многочленов степени $\le n$;

г) множество тригонометрических многочленов порядка $\le n$ вида $f(t)=a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+\ldots+a_n\cos t+b_n\sin t.$

**8.** Найти размерность и базис линейных оболочек, задаваемых столбцами:

а) $\bar{c}_1=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_2=\begin{Vmatrix}-1\\6\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_3=\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix};$

б) $\bar{c}_1=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_2=\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix},\quad \bar{c}_3=\begin{Vmatrix}-2\\2\end{Vmatrix}.$

**9.** Найти размерность и базис линейной оболочки, задаваемых системами матриц:

$$A=\begin{Vmatrix}6&9&8\\0&1&6\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}2&7&6\\-6&1&4\end{Vmatrix}.$$

**10.** Найти размерность и базис линейной оболочки для системы многочленов: $P_1(t)=(1+t)^3;\ P_2(t)=t^3;\ P_3(t)=1;\ P_4(t)=t+t^2.$

**11.** Показать, что многочлены $\left\{1,t-2,(t-2)^2,\ldots,(t-2)^5\right\}$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 5 и найти координаты заданных многочленов в этом базисе:

а) $g(t)=4-t+2t^2-t^5;$

б) $g(t)=3+2t^2-3t^3+4t^4;$

в) $g(t)=7t+2t^2-t^4+2t^5;$

г) $g(t)=4-2t^2+3t^4$;

д) $g(t)=t+5t^3-2t^5$.

**12.** Показать, что векторы $a=(1,-1,0)$, $b=(0,-1,2)$, $c=(-1,1,2)$ образуют базис, и найти координаты вектора $d=(-1,0,6)$ в этом базисе.

**13.** Показать, что векторы $a=(1,1,1)$, $b=(1,-1,-1)$, $c=(-1,1,4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $d=(1,14)$ в этом базисе.

## 1.4. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Ортогональные системы векторов

*Нормой* элемента $f$ линейного пространства $V$ называется действительное неотрицательное число $\| f \|$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$N_1$: $\| f \|=0 \Leftrightarrow f=0$;

$N_2$: $\| \lambda f \|=|\lambda|\cdot\| f \|$ для $\forall\lambda\in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$;

$N_3$: $\| f+g \|\le\| f \|+\| g \|$ для $\forall f,g\in V$.

*Нормированным линейным пространством* называется линейное пространство с введенной в ней нормой.

Всякое нормированное пространство является метрическим. При этом метрика вводится по формуле

$$\rho(f,g)=\| f-g \|. \tag{1.5}$$

*Таблица 1.2*

**Таблица основных нормированных пространств**

| Обозначение пространства | Элементы пространств | Формулы для норм |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{R}_2^n$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ | $\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$ |
| $\boldsymbol{R}_1^n$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ | $\|x\|=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|$ |
| $\boldsymbol{R}_\infty^n$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ | $\|x\|=\max_k\|x_k\|$ |
| $\boldsymbol{R}_2^\infty$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ | $\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2}$ |

*Окончание табл. 1.2*

| Обозначение пространства | Элементы пространств | Формулы для норм |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{R}_1^{\infty}$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert<\infty$ | $\lVert x\rVert=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert$ |
| $\boldsymbol{R}_{\infty}^{\infty}$ | $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$, $\lvert x_k\rvert\le M$ | $\lVert x\rVert=\sup\limits_{k}\lvert x_k\rvert$ |
| $\boldsymbol{C}_2[a,b]$ | Непрерывная на $[a,b]$ функция | $\lVert f(x)\rVert=\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$ |
| $\boldsymbol{C}_1[a,b]$ | Непрерывная на $[a,b]$функция | $\lVert f(x)\rVert=\int\limits_a^b\lvert f(x)\rvert dx$ |
| $\boldsymbol{C}[a,b]$ | Непрерывная на $[a,b]$ функция | $\lVert f(x)\rVert=\max\limits_{[a,b]}\lvert f(x)\rvert$, $x\in[a,b]$ |
| $\boldsymbol{D}^n[a,b]$ | Непрерывная вместе со своими производными до $n$-го порядка функция | $\lVert f(x)\rVert=\sum\limits_{k=1}^{n}\max\limits_{[a,b]}\lvert f^{(k)}(x)\rvert, k=\overline{1,n}$ |

Пусть $V$ – действительное линейное пространство. *Скалярным произведением* называется функционал, удовлетворяющий следующим аксиомам:

$S_1$: $\forall x\in V$ $(x,x)\ge 0$, причем $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$;

$S_2$: $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

$S_3$: $(x,y)=(y,x)$;

$S_4$: $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, $\forall x,y,z\in V$ и $\lambda\in\mathbb{R}$.

Линейное пространство $V$ со скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

Для норм любых двух элементов $f$ и $g$ евклидова пространства имеет место неравенство Коши–Буняковского:

$$\lvert(f,g)\rvert\le\sqrt{(f,f)}\cdot\sqrt{(g,g)}.$$

Всякое евклидово пространство является нормированным с *нормой*:

$$\lVert f\rVert=\sqrt{(f,f)}. \qquad (1.6)$$

***Примеры евклидовых пространств***:

1. Пространство $\mathbb{R}^n$. Для двух элементов этого пространства $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ скалярное произведение определяется как

$$(x, y)=x_1 \cdot y_1+\ldots+x_2 \cdot y_2+...+x_n \cdot y_n. \tag{1.7}$$

2. Для функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, скалярное произведение вводится по формуле

$$(f, g)=\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx. \tag{1.8}$$

Два элемента $x$ и $y$ евклидова пространства $E$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно 0.

«Угол» между элементами евклидова пространства $x$ и $y$ можно определить аналогично углу между геометрическими векторами

$$\cos\varphi=\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{1.9}$$

Система ненулевых векторов $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in E$ называется *ортонормированной*, если:

1) все векторы системы взаимно ортогональны: $(x_i, x_j)=0,\ i \neq j$;

2) все векторы нормированы на 1: $\|x_k\|=1,\ k=1, ..., n.$

Если в некотором евклидовом пространстве существует линейно-независимая система векторов $\{y_n\}$, тогда можно построить ортонормированную систему векторов $\{x_n\}$, используя следующую *процедуру Грамма–Шмидта*:

1) из линейно-независимой системы векторов $\{y_n\}$ строим ортогональную систему векторов $\{f_n\}$:

$$f_1=y_1; \quad f_2=y_2+\lambda_{21} \cdot f_1, \text{ где } \lambda_{21}=-\frac{(y_2, f_1)}{(f_1, f_1)};$$

$$f_3=y_3+\lambda_{31} \cdot f_1+\lambda_{32} \cdot f_2, \text{ где } \lambda_{31}=-\frac{(y_3, f_1)}{(f_1, f_1)},\ \lambda_{32}=-\frac{(y_3, f_2)}{(f_2, f_2)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

.

$$f_n=y_n-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(y_n, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k. \tag{1.10}$$

2) из ортогональной системы векторов $\{f_n\}$ строим ортонормированную систему векторов $\{x_n\}$:

$$x_1 = \frac{f_1}{\| f_1 \|}; \quad x_2 = \frac{f_2}{\| f_2 \|}; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{f_n}{\| f_n \|}, \tag{1.11}$$

где $\| f_n \| = \sqrt{(f, f)}$.

*Гильбертовым пространством* называется полное евклидово пространство.

***Пример 1.*** Проверить, образует ли ортогональный базис система многочленов $\left\{1;\, 2t;\, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$ в пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) dt$. Найти норму многочлена $g_2 = 2t$.

*Решение*

Обозначим многочлены как $g_1 = 1$, $g_2 = 2t$, $g_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Далее, находим скалярные произведения:

$$(g_1, g_2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 2t\, dt = t^2 \Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_1 \perp g_2,$$

$$(g_1, g_3) = \int_{-1}^{1} 1 \left( t^2 - \frac{1}{3} \right) dt = \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = 0 \;\Rightarrow\; g_1 \perp g_3,$$

$$(g_2, g_3) = \int_{-1}^{1} 2t \left( t^2 - \frac{1}{3} \right) dt = \left( \frac{2t^4}{4} - \frac{t^2}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = 0 \;\Rightarrow\; g_2 \perp g_3.$$

Таким образом, система многочленов является ортогональной и образует базис.

$$(g_2, g_2) = \int_{-1}^{1} (2t)^2\, dt = \left( \frac{4t^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} \;\Rightarrow\; \|g_2\| = \sqrt{(g_2, g_2)} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

***Ответ*:** Образует базис. $\|g_2\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$. ▲

***Пример 2.*** Построить ортонормированный базис по заданной системе векторов евклидова пространства, используя процедуру ортогонализации Грамма–Шмидта:

$$y_1 = (1,0,1), \quad y_2 = (2,1,0), \quad y_3 = (0,1,1)$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + x_3y_3.$$

*Решение*

1. Для проверки линейной независимости заданной по условию системы векторов $\{y_1, y_2, y_3\}$ исследуем равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0.$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$ все $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$ следовательно, система векторов линейно независима и образует базис.

2. Используя процедуру Грамма–Шмидта, составим ортогональную систему векторов $\{f_1, f_2, f_3\}$ согласно (1.10).

Положим $f_1 = y_1$, $f_2 = y_2 + \lambda_{21} \cdot f_1$, где $\lambda_{21} = -\dfrac{(y_2, f_1)}{(f_1, f_1)}$.

$$(y_2, f_1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 3,$$

$$(f_1, f_1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3,$$

$$\lambda = -\frac{3}{3} = -1.$$

Тогда $f_2 = (2,1,0) + (-1) \cdot (1,0,1) = (2,1,0) + (-1,0,-1) = (1,1,-1).$

$$f_3 = y_3 + \lambda_{31} \cdot f_1 + \lambda_{32} \cdot f_2, \quad \text{где } \lambda_{31} = -\frac{(y_3, f_1)}{(f_1, f_1)}, \; \lambda_{32} = -\frac{(y_3, f_2)}{(f_2, f_2)},$$

$$(y_3, f_1) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0,$$

$$\lambda_{31} = -\frac{0}{3} = 0,$$

$$(y_3, f_2) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1,$$

$$(f_2, f_2) = 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 2,$$

$$\lambda_{32} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$f_3 = (0,1,1) + 0\cdot(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,-1) = (0,1,1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Проверим ортогональность векторов:

$$(f_1, f_2) = 2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2,$$

$$(f_2, f_3) = 2\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 0 = 0 \Rightarrow f_2 \perp f_3,$$

$$(f_1, f_3) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_3.$$

Итак, получили систему ортогональных векторов. Нормируем полученную ортогональную систему векторов согласно (1.11):

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{(f_2, f_2)}} f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{(f_3, f_3)}} f_3 = \frac{1}{\sqrt{6/4}}\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

***Ответ*:** Искомая ортонормированная система векторов имеет вид:

$$x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad x_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \ \blacktriangle$$

***Пример 3.*** В евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортогональный базис, применив процедуру ортогонализации к системе многочленов $\{1; 2t-3; t^2+1\}$.

*Решение*

Пусть $g_1 = 1$, $g_2 = 2t - 3$, $g_3 = t^2 + 1$. Положим

$$f_1 = 1;\ f_2 = g_2 + \lambda_{21} \cdot f_1,\ \text{где}\ \lambda_{21} = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}.$$

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2.$$

$$(g_2, f_1) = \int_{-1}^{1} (2t - 3) \cdot 1\, dt = \left(t^2 - 3t\right)\Big|_{-1}^{1} = 1^2 - 3 \cdot 1 - \left((-1)^2 - 3 \cdot (-1)\right) = -6.$$

$$\lambda_{21} = -\frac{-6}{2} = 3; \quad f_2 = 2t - 3 + 3 = 2t.$$

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 2t dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^2 = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2.$$

$$f_3 = g_3 + \lambda_{31} \cdot f_1 + \lambda_{32} \cdot f_2, \quad \text{где}\ \lambda_{31} = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)},\ \lambda_{32} = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}.$$

$$(g_3, f_1) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 + 1\right) \cdot 1 dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}.$$

$$(g_3, f_2) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 + 1\right) \cdot 2t dt = \int_{-1}^{1} \left(2t^3 + 2t\right) dt = \left(\frac{2t^4}{4} + \frac{2t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

$$(f_2, f_2) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot 2t dt = \frac{4t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\left(1^3 - (-1)^3\right) = \frac{8}{3}.$$

Тогда

$$\lambda_{31} = -\frac{\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}; \quad \lambda_{32} = -\frac{0}{\frac{8}{3}} = 0;$$

$$f_3 = t^2 + 1 - \frac{4}{3} \cdot 1 + 0 \cdot 2t = t^2 + 1 - \frac{4}{3} = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Проверка на ортогональность:

$$(f_1, f_3) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\big(1 + 1 - (1+1)\big) = 0.$$

$$(f_2, f_3) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = 2\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{t}{3}\right) dt = 2 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Искомая ортогональная система: $f_1 = 1, \quad f_2 = 2t, \quad f_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$

***Ответ*:** $f_1 = 1, \quad f_2 = 2t, \quad f_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$ ▲

## ЗАДАНИЯ

**1.** Можно ли в пространстве действительных чисел задать норму как:

а) $\|x\| = |\operatorname{arctg} x|$;

б) $\|x\| = \sqrt{x}$;

в) $\|x\| = \sqrt{|x|}$;

г) $\|x\| = |x - 1|$;

д) $\|x\| = \sqrt{x^2}$;

е) $\|x\| = 5|x|$;

ж) $\|x\| = x^2$.

**2.** Пусть $E$ – пространство векторов $\overline{a} = \{x, y\}$ на плоскости, заданных своими декартовыми координатами. Можно ли в пространстве $E$ задать норму $\|\overline{a}\|$ как:

а) $\|\overline{a}\| = \sqrt{|xy|}$;

б) $\|\overline{a}\| = |x| + |y|$;

в) $\|\overline{a}\| = \max\{|x|, |y|\}$;

г) $\|\overline{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{|xy|}$ ?

**3.** Пусть $P$ – линейное пространство многочленов с действительными коэффициентами. Можно ли в пространстве $P$ определить норму как:

а) модуль значения многочлена в точке 0;

б) сумму модулей коэффициентов многочлена?

**4.** Найти норму функции $y=\frac{1}{5}\left(4x-x^3\right)$ в пространствах:

а) $\boldsymbol{C}[-1{,}5]$; б) $\boldsymbol{C}_1[-1{,}5]$; в) $\boldsymbol{D}^1[-1{,}5]$.

**5.** Найти норму последовательности $\left\{x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ в пространствах:

а) $\boldsymbol{R}_2^\infty$; б) $\boldsymbol{R}_1^\infty$; в) $\boldsymbol{R}_\infty^\infty$.

**6.** Является ли евклидовым пространство $\boldsymbol{R}^2$, если паре векторов $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ поставлено в соответствие в качестве нормы число:

а) $x_1y_1+x_2y_2$; б) $x_1x_2y_1y_2$;

в) $3x_1y_1+5x_1y_2+x_2y_2$; г) $2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

**7.** Найти в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций:

а) норму функции $f(x)=\cos x+\sin x$, если $a=-\pi$, $b=\pi$;

б) скалярное произведение $(\sin 2x,\sin 3x)$, $a=-\pi$, $b=\pi$;

в) скалярное произведение $f(x)=x$, $g(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$;

г) «угол» между векторами $\sin x$ и $\cos x$, $a=-\pi$, $b=\pi$.

**8.** Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве векторов $E^3$ следующие системы векторов:

а) $(1,1,3)$, $(-1,-2,1)$, $(7,-4,-1)$;

б) $(2,1,-1)$, $(-1,2,0)$, $(0,1,1)$.

**9.** Установить, какие из заданных систем векторов являются ортогональными в пространстве $C_1[-1,1]$:

а) $1,x^2$; б) $x^2,x^3$; в) $1,\sin\pi x,\cos\pi x,\ldots,\sin\pi x\cos\pi x$.

**10.** В евклидовом пространстве $E^3$ даны два ортогональных вектора $a$ и $b$. Найти вектор $c$, такой, что $a$, $b$, $c$ и образуют ортонормированный базис, если:

а) $a = 2i + 2j - k; \quad b = 4j + 3k;$
б) $a = i - 2j + k; \quad b = 5i + 3j + k.$

**11.** В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ проверить, образует ли ортогональный базис система многочленов $\{1; t; 6t^2 - 2\}$. Найти норму $g_3 = 6t^2 - 2$.

**12.** В евклидовом пространстве $E^3$ по заданной системе векторов построить ортонормированный базис:
а) $a = (1,1,-1), b = (-4,0,5), \; c = (-8,2,0);$
б) $a = (3,-1,-2), \; b = (4,0,-1), \; c = (5,1,0);$
в) $a = (1,0,-1), \; b = (3,1,0), \; c = (4,1,2).$

**13.** В евклидовом пространстве $E^3$ с заданным скалярным произведением с помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис:
а) $a = (2,1,1), \; b = (0,1,-2), \; c = (-1,1,3),$
$(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2;$
б) $a = (1,3,-1), \; b = (1,0,2), \; c = (-1,2,1),$
$(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_3y_3.$

**14.** В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов:

а) $\{1, t+2, 2t^2\};$
б) $\{1, 2t+1, t^2+1\};$
в) $\{1, 2t+3, 2t^2-1\};$
г) $\{1, 3t-1, t^2+2\}.$

## 1.5. Линейные операторы

Пусть $V$ и $W$ два линейных пространства. Тогда всякое отображение $A$, сопоставляющее каждому элементу $f \in V$ единственный элемент $g = Af \in W$, называется *оператором*, действующим из $V$ в $W$.

Оператор $A$ называется *линейным*, если:

1) $A(x+y)=Ax+Ay$ для любых $x, y \in V$;

2) $A(\lambda x)=\lambda Ax$ для любых $x \in V$, $\lambda \in R$.

Пусть $E$ – комплексное векторное пространство. Комплексное число $\lambda$ называется *собственным значением* линейного оператора $A$, если существует ненулевой элемент $u \in E$, такой, что

$$Au = \lambda u. \tag{1.12}$$

*Собственным вектором* линейного оператора $A$, соответствующим собственному значению $\lambda$, называется всякий ненулевой вектор $u$, который удовлетворяет соотношению (1.12).

В конечномерных пространствах любой линейный оператор задается матрицей, вид которой зависит от выбранного базиса. При этом уравнение (1.12) эквивалентно системе линейных уравнений

$$(A-\lambda I)u = 0, \tag{1.13}$$

где $I$ – единичная матрица.

Для того чтобы система (1.13) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, а значит

$$\det(A-\lambda I)=0. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) называется *характеристическим уравнением* и на множестве комплексных чисел имеет ровно $n$ корней.

***Пример 1.*** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A$:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

*Решение*

Найдем собственные значения линейного оператора. Для этого решим характеристическое уравнение (1.14):

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \ (\lambda+2)(\lambda^2-12\lambda+32)=0.$$

Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Обозначим через $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ координаты собственного вектора $u_1$ с собственным значением $\lambda_1 = 8$. Тогда система (1.13) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 6-8 & 0 & 2 \\ 0 & -2-8 & 0 \\ 2 & 0 & 6-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0, \\ -10\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений: $\alpha_1 = \alpha_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 0$. Поэтому множество собственных векторов линейного оператора, соответствующих собственному значению линейного оператора $\lambda_1 = 8$: $u_1 = (c, 0, c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Аналогично находим собственные векторы $u_2 = (t, 0, -t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ и $u_3 = (0, l, 0)$, $\forall l \in \mathbb{R}$, матрицы $A$, соответствующие собственным значениям $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = -2$.

***Ответ***: Множество собственных векторов:
$u_1 = (c, 0, c)$, $u_2 = (t, 0, -t)$, $u_3 = (0, l, 0)$, $\forall c, t, l \in \mathbb{R}$. ▲

***Пример 2.*** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Решение*

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \text{ или } (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 8\right) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_{1,2} = 2$ кратности $m = 2$ и $\lambda_3 = 4$.

Найдем собственный вектор $u_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с собственным значением $\lambda_{1,2} = 2$. Система (1.13) примет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда собственный вектор $u_1 = (0, c, c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

При $\lambda_3 = 4$ система (1.10) примет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_1 = 0, \\ -4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = k$, $\alpha_3 = -k$, $k \in \mathbb{R}$ и собственный вектор $u_2 = (0, k, -k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

***Ответ*:** Множество собственных векторов:
$u_1 = (0, c, c)$, $u_2 = (0, k, -k)$, $\forall c, k \in \mathbb{R}$. ▲

## ЗАДАНИЯ

**1.** Каков геометрический смысл условий линейности оператора

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \ \ f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x).$$

**2.** Является ли линейным каждый из операторов $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданный следующим образом: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

а) $f(\alpha) = 3\alpha$;

б) $f(\alpha) = 2^{\alpha}$;

в) $f(\alpha) = 2\alpha + 5$;

г) $f(\alpha) = \alpha^3$;

д) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{5}$.

**3.** Является ли линейным оператор $f$, переводящий всякий вектор $x(\alpha_1, \alpha_2)$ в вектор $y$, заданный координатами в том же базисе, если:

а) $y(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$;

б) $y(\alpha_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2)$;

в) $y(2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2)$;

г) $y(1, \alpha_1 + \alpha_2)$;

д) $y(\alpha_1^3, \alpha_2^2)$.

**4.** Является ли линейным оператор $f$: $E_3 \to E_3$, если $\forall x \in E_3$:

а) $f(x) = |x| i$;

б) $f(x) = 2i + 3j - k$;

в) $f(x) = (i, x)x$;

г) $f(x) = (i, x) j$;

д) $f(x) = (a, x)a$, где $a$ – фиксированный вектор этого пространства;

е) $f(x) = [a, x]$;

ж) $f(x) = \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

з) $f(x) = x + a$, $a \in E_3$.

**5.** Является ли линейным оператор $f$: $R_{n\times n} \to R_{n\times n}$, если $\forall A \in \boldsymbol{R}_{n\times n}$ :

а) $f(A) = E + A$, $E$ – единичная матрица;

б) $f(A) = \alpha \cdot A$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

в) $f(A) = A^2$; г) $f(A) = A^T$.

**6.** Дан оператор $f$, переводящий каждый вектор $X$ в вектор $f(x) = (np_{Ox}X)a$, где $a$ – фиксированный вектор пространства $E_3$. Доказать, что оператор $f$ является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе $i, j, k$, если:

а) $a = 3i + 2j + k$;

б) $a = i - 3j - 2k$.

**7.** Даны координаты вектора $X$ и матрица $A$ линейного оператора $f$. Найти координаты вектора $Y = f(X)$, если:

а) $X = (2, -1, 3)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $X = (1, 0, 0)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**8.** Дан оператор $A$, переводящий каждый вектор $x$ в вектор $y = f(x) = x \times a$, где $a$ – фиксированный вектор пространства $E_3$: $a = (3, -2, 1)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $i, j, k$.

**9.** Пользуясь определением, установить, какие из данных векторов являются собственными векторами оператора $f$, и найти их собственные значения, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**10.** Найти характеристическое уравнение и спектр линейного оператора, заданного матрицей $A$ в некотором базисе, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

**11.** Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**12.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A$:

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

# ГЛАВА 2. ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

## 2.1. Ортонормированные системы функций. Ряд Фурье

***Тригонометрическая система***

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2[-\pi,\pi]$ – пространство функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi,\pi]$. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ скалярное произведение задается формулой

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)dx.$$

Тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

образует полную ортонормированную систему и является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{2.1}$$

где коэффициенты ряда (2.1) вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx .$$

***Системы ортогональных многочленов.*** Рассмотрим совокупность одночленов

$$\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}, \tag{2.3}$$

из которых можно построить любую систему многочленов. Система является линейно независимой и полной на отрезке $[-1,1]$. Однако она не является на этом отрезке ортонормированной и не образует ортонормированный базис.

Мы можем прийти к различным ортонормированным системам, выполнив процедуру ортогонализации системы одночленов (2.3) на промежутке $(a,b)$ относительно скалярного произведения пространства $L_2(a,b)$ с весовой функцией $w(x)$:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \tag{2.4}$$

На весовую функцию $w(x)$ накладываются следующие условия: она должна быть интегрируемой и неотрицательной на промежутке $(a,b)$.

Условие ортонормированности многочленов $\{\varphi_n\}$ в пространстве $L_2(a,b)$ имеет вид

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}. \tag{2.5}$$

Подбирая соответствующую весовую функцию $w(x)$ на промежутке $(a,b)$ и проводя процедуру ортогонализации системы одночленов (2.3), мы приходим к различным системам ортогональных многочленов (Лежандра, Чебышева, Эрмита и др.).

***Обобщенный ряд Фурье.*** Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – некоторая ортонормированная система многочленов в пространстве $L_2(a,b)$.

Разложение функции $f(x)$ на промежутке $(a,b)$ в *обобщенный ряд Фурье* по системе многочленов $\{\varphi_n(x)\}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{2.6}$$

где числа $a_n$ называются *коэффициентами Фурье* в пространстве $L_2(a,b)$ и вычисляются по формуле

$$a_n = (f(x), \varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)w(x)dx. \tag{2.7}$$

Важным с точки зрения приложений является выбор весовой функции $w(x)$, поскольку ряд Фурье (2.6) по системе многочленов $\{\varphi_n(x)\}$ может сходиться значительно быстрее, чем соответствующий ряд Тейлора. К тому же мы можем построить ортогональную систему функций на пространстве бесконечной меры $L_2(0,+\infty)$ или $L_2(-\infty,+\infty)$, используя весовые функции вида $w(x)=e^{-x}$ или $w(x)=e^{-x^2}$.

*Таблица 2.1*

**Ортонормированные системы многочленов**

| **Многочлены** | **Весовая функция $w(x)$** | **Пространство функций $L_2(a,b)$** | **Многочлены низших степеней** |
|---|---|---|---|
| Лежандра $P_n(x)$ | 1 | $L_2[-1,1]$ | $P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,$<br>$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},$<br>$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,$<br>$P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8},\ldots$ |
| Чебышева $T_n(x)$<br>$\left(T_0^*(x)=\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}},\ T_n^*(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $L_2[-1,1]$ | $T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$<br>$T_2(x)=2x^2-1,$<br>$T_3(x)=4x^3-3x,$<br>$T_4(x)=4x^4-8x^2+1,\ldots$ |
| Эрмита $H_n(x)$ | $e^{-x^2}$ | $L_2(-\infty,+\infty)$ | $H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,$<br>$H_2(x)=4x^2-2,$<br>$H_3(x)=8x^3-12x,$<br>$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,\ldots$ |

*Окончание табл. 2.1*

| **Многочлены** | **Весовая функция $w(x)$** | **Пространство функций $L_2(a,b)$** | **Многочлены низших степеней** |
|---|---|---|---|
| Лагерра $L_n(x)$ | $e^{-x}$ | $L_2[0,\infty)$ | $L_0(x)=1,$ <br> $L_1(x)=1-x,$ <br> $L_2(x)=1-2x+\frac{1}{2}x^2,$ <br> $L_3(x)=1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3, \dots$ |

*Таблица 2.2*

**Основные формулы для ортогональных многочленов**

| **Многочлены** | **Основные формулы** |
|---|---|
| Лежандра $P_n(x)$ | Формула Родрига: $P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right];$ <br> $\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x)-$ производящая функция |
| Чебышева $T_n(x)$ | $T_n(x)=\cos(n\arccos x);$ <br> $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x);$ <br> $\left\{T_0^*(x), T_n^*(x)\right\}=\left\{\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}};\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x),\ (n\geq 1)\right\}$ <br> – ортонормированная система многочленов Чебышева первого рода |
| Эрмита $H_n(x)$ | $H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\cdot\sqrt{\pi}}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right);$ <br> $H_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right);$ <br> $e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^*(x)}{n!}t^n$ – производящая функция |
| Лагерра $L_n(x)$ | $L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right);$ <br> $(n+1)L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0;$ <br> $\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$ – производящая функция |

*Таблица 2.3*

**Обобщенные ряды Фурье по системе ортогональных многочленов**

| Многочлены | Весовая функция $w(x)$ | Пространство $L_2(a,b)$ | Ряд Фурье для функции $f(x)$ и его коэффициенты в $L_2(a,b)$ |
|---|---|---|---|
| Лежандра $P_n(x)$ | 1 | $L_2[-1,1]$ | $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, $a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ |
| Чебышева $T_n(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $L_2[-1,1]$ | $f(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n T_n^*(x)$, $a_n=\int_{-1}^{1} f(x)T_n^*(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| Эрмита $H_n(x)$ | $e^{-x^2}$ | $L_2(-\infty,+\infty)$ | $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$, $a_n=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H_n(t)e^{-t^2}dt$ |
| Лагерра $L_n(x)$ | $e^{-x}$ | $L_2[0,\infty)$ | $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$, $a_n=\int_{0}^{+\infty} f(t)L_n(t)e^{-t}dt$ |

## ЗАДАНИЯ

**1.** Проверить ортогональность системы функций $1, \sin\pi x, \cos\pi x, \ldots, \sin\pi x\cos\pi x$ в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

**2.** Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y=x+\pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

**3.** Разложить в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ функцию $y=2-x$ в тригонометрический ряд Фурье.

**4.** Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

**5.** Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя производящую функцию многочленов Лежандра.

**6.** Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x)=|x|$ на $[-1,1]$.

**7.** Написать ряд Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x)=1-x^2$ на $[-1,1]$.

**8.** Найти шесть первых многочленов Чебышева, используя рекуррентную формулу $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, где $T_n(x)=\cos[n\arccos x]$.

**9.** Доказать ортогональность многочленов Чебышева $T_2(x)$ и $T_3(x)$.

**10.** Для функции $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

**11.** Для функции $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ x, & 0<x<1\end{cases}$ найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Чебышева.

**12.** Получить четыре первых многочлена Эрмита, используя формулу Родрига для многочленов Эрмита.

**13.** Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x)=e^{-5x^2}$ при $x\in R$.

**14.** Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя формулу Родрига для многочленов Лагерра.

**15.** Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя производящую функцию многочленов Лагерра.

**16.** Найти несколько первых членов ряда Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x)=e^{-7x}$ при $x>0$.

## 2.2. Функции Радемахера и Уолша

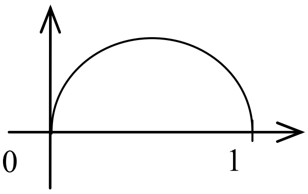
Функции Радемахера могут быть определены как

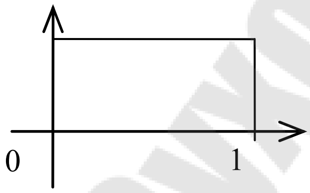
$$R(m,x)=\operatorname{sgn}\left(\sin 2^m \pi x\right), \tag{2.8}$$

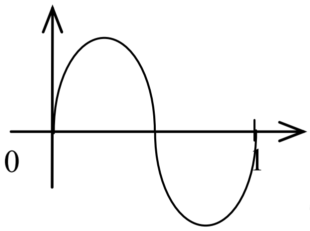
где $m=0,1,2,\ldots;\ \ x\in[0,1]$.

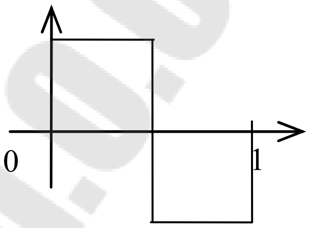
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases} \tag{2.9}$$

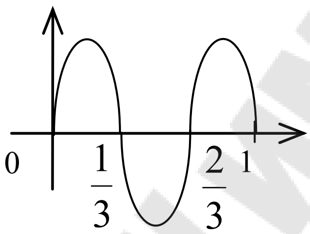
Например,

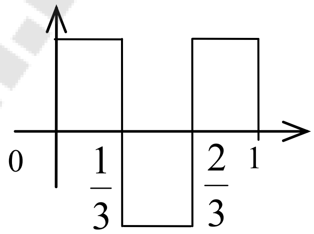
$R(0,x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x) \ \Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 


$R(1,x) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi x) \ \Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 


$R(2,x) = \operatorname{sgn}(\sin 3\pi x) \ \Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 


Функции Радемахера образуют ортонормированную в $L_2[0,1]$ систему:

$$\int_0^1 |R(m,x)|^2 dx = 1 \quad \text{или} \quad \int_0^1 R(m,x)R(n,x)dx = 0.$$

Последовательность функций Радемахера не полна. Функции Радемахера используются для построения функций Уолша, которые образуют *полную однородную систему*. Они обозначаются как $W(m,x),\ m = 0,1,2,\ldots$.

Для $m = 0$ положим $W(0,x) = 1$. Далее представим $m \neq 0$ в виде двоичного числа

$$m = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_k = a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^{n-1} a_n, \qquad (2.10)$$

где $a_i = \{0,1\}$.

Тогда определяем

$$W(m,x) = \prod_{k=1}^{n} a_k R(k,x) = (a_1 R_1(1,x))\ldots(a_n R_n(n,x)). \qquad (2.11)$$

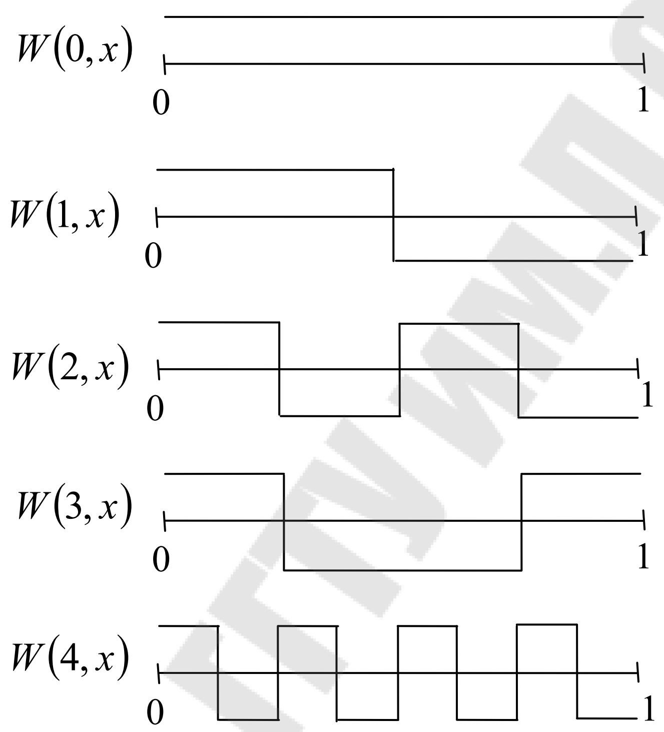
Например, так как $53 = \underset{a_6}{1}\ \underset{a_5}{1}\ \underset{a_4}{0}\ \underset{a_3}{1}\ \underset{a_2}{0}\ \underset{a_1}{1}$ в двоичной форме, то

$$W(53,x) = R(1,x)R(3,x)R(5,x)R(6,x).$$

Справедливо соотношение

$$W\left(2^{n-1},x\right) = R(n,x). \tag{2.12}$$

На рисунках представлены некоторые функции Уолша:




## 2.3. Задача Штурма–Лиувилля

Для функции $u(x)$ рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} Lu + \lambda\omega(x)u = 0, & a \le x \le b, \\ a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, & b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$ и функции $p(x)$, $q(x)$, $\omega(x)$, а также $p'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Кроме этого $q(x)$ и $\omega(x)$ – положительны. Здесь $\lambda$ – параметр; $L = \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d}{dx}\right] + q(x)$ – *оператор Штурма–Лиувилля.*

Задача решения дифференциального уравнения (2.13) при заданных граничных условиях называется *задачей Штурма–Лиувилля*. Значения параметра $\lambda$, при которых существует нетривиальное решение задачи (2.13), называются собственными значениями задачи Штурма–Лиувилля, а сами нетривиальные решения называются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля. При этом справедливы следующие свойства:

• Оператор Штурма–Лиувилля является самосопряженным.

• Собственные значения системы Штурма–Лиувилля действительны.

• Собственные функции для различных собственных значений системы Штурма–Лиувилля ортогональны по отношению к скалярному произведению с весовой функцией $\omega(x)$.

Наиболее часто встречаются на практике задачи Штурма–Лиувилля, решениями которых являются специальные функции и многочлены. Например:

**1.** Дифференциальное уравнение Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \tag{2.14}$$

Здесь $p(x)=1-x^2$, $q(x)=0$, $\omega(x)=1$. Собственные функции этого уравнения есть полиномы Лежандра:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$, $n=1,2,3\ldots$ .

**2.** Присоединенное уравнение Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}\right]-\frac{m^2u}{1-x^2}+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \tag{2.15}$$

Здесь $p(x)=1-x^2$, $q(x)=-\frac{m^2}{1-x^2}$, $\omega(x)=1$. Собственным значениям $\lambda_n=n(n+1)$, $n=1,2,3...$ соответствуют собственные функции:

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),\ n>m,$$

которые называются *присоединенными многочленами Лежандра*.

**3.** Дифференциальное уравнение Чебышева:

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \qquad (2.16)$$

Здесь $p(x)=\sqrt{1-x^2}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Собственным значениям $\lambda=n^2$ соответствуют собственные функции: $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ – многочлены Чебышева.

**4.** Дифференциальное уравнение Лагерра:

$$e^x\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ 0<x<\infty. \qquad (2.17)$$

Здесь $p(x)=xe^{-x}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=e^{-x}$. Собственным значениям $\lambda=n$ соответствуют собственные функции – многочлены Лагерра:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{x^k}{k!}.$$

**5.** Дифференциальное уравнение Эрмита:

$$e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -\infty<x<\infty. \qquad (2.18)$$

Здесь $p(x)=e^{-x^2}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=e^{-x^2}$. Собственным значениям $\lambda_n=2n$ соответствуют собственные функции – многочлены Эрмита:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

## ЗАДАНИЯ

Определить собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля:

**1.** $u''+\lambda u=0,\quad u(0)=0,\qquad u(l)=0$.

**2.** $u''+\lambda u=0,\quad u'(0)=0,\qquad u'(l)=0$.

**3.** $u''+\lambda u=0,\quad u'(0)=0,\qquad u(l)=0$.

**4.** $u''+\lambda u=0,\quad u'(0)=0,\qquad u'(l)+\beta u(l)=0,\quad \beta>0$.

**5.** $(xu')' + \lambda \dfrac{u}{x} = 0, \;\; u(1) = 0, \; u'(2) = 0$.

**6.** $(xu')' + \lambda \dfrac{u}{x} = 0, \;\; u(1) = 0, \; u(2) = 0$.

## 2.4. Функции Бесселя

Функции Бесселя чаще всего встречаются при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, а также при вычислении некоторых определенных интегралов.

Уравнение вида

$$x^2 u'' + xu' + \left(x^2 - v^2\right)u = 0, \tag{2.19}$$

где $v$ – параметр уравнения, называется *уравнением Бесселя*, а всякое решение этого уравнения, не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*.

После деления на $x$ уравнение (2.19) можно привести к форме Штурма–Лиувилля. Добавляя однородные граничные условия, получаем следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] + \frac{v^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < a,$$

$$u(x) = O\left(x^{\gamma}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0, \; \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0,$$

где $\gamma = \min(v, 1), \quad \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta > v.$

Очевидно, здесь $p(x) = x, \; q(x) = -\dfrac{v^2}{x}, \; w(x) = x.$

Чаще всего параметр уравнения $v$ есть целое число. В этом случае собственными функциями задачи являются *функции Бесселя* $J_v(\mu_k, x)$, соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = \mu_k^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.20}$$

где $a\mu_k$ – положительные нули функции Бесселя $J_v(t)$, т. е. $J_v(a\mu_k) = 0.$

Дифференциальный оператор Бесселя имеет вид

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] + \frac{v^2}{x}u.$$

Он положительно определен, а его собственные функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0,a]$ относительно скалярного произведения с весовой функцией $w(x)=x$.

Для целочисленного параметра $v=n$ функция Бесселя $J_n(x)$ раскладывается в степенной ряд вида

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{2.21}$$

При этом справедливы также соотношения:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x);$$

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x); \quad J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x).$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье–Бесселя имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k J_n(\mu_k x), \tag{2.22}$$

где коэффициент разложения вычисляется по формуле

$$c_k=\frac{2}{a^2[J_{n+1}(\mu_n a)]}\int_0^a f(x)J_n(\mu_n x)x\,dx.$$

Нули функций Бесселя затабулированы и их можно найти в соответствующих справочниках.

## ЗАДАНИЯ

Записать общее решение уравнения:

**1.** $x^2u''+xu'+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)u=0.$

**2.** $x^2u''+xu'+\left(4x^2-\dfrac{9}{25}\right)u=0.$

**3.** $x^2u''+xu'+\left(3x^2-4\right)u=0.$

**4.** Найти решение уравнения Бесселя $u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0,$ удовлетворяющее начальным условиям: $u'(0) = 0,\ u(0) = 2.$

**5.** Найти решение уравнения Бесселя $xu'' + u' + xu = 0,$ удовлетворяющее начальным условиям: $u'(0) = 0,\ u(0) = 1.$

**6.** Показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(t) = \frac{1}{2}\sin t.$

**7.** Показать, что $J_0(t) + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1.$

# ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Метод интегральных преобразований является одним из мощных методов математической физики и применяется для решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). Любое интегральное преобразование имеет вид

$$\Pi[f(x)] = g(\lambda) = \int_a^b K(x,\lambda) f(x)dx,$$

где функция $f(x)$ – оригинал, а $\Pi[f(x)] = g(\lambda)$ – изображение. Функция $K(x,\lambda)$ называется ядром интегрального преобразования. Каждое интегральное преобразование определяется своим ядром.

## 3.1. Интеграл Фурье

При применении рядов Фурье следует обратить внимание на ограничения, с которыми мы сталкиваемся. В частности, раскладываемая в ряд Фурье функция должна быть периодической, или ее поведение за пределами некоторого отрезка не является важным для нас.

Если мы не можем пренебречь поведением функции на всей числовой прямой, на помощь приходит «*интеграл Фурье*».

Пусть функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (3.1)$$

при этом

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt \qquad (n = 0,1,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt \qquad (n = 0,1,...). \tag{3.2}$$

В курсе математического анализа были рассмотрены условия, при которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена как суперпозиция гармонических колебаний. Напомним достаточный признак сходимости.

**Теорема 3.1.** Если для интегрируемой функции $f(x)$ при фиксируемом $x$ и некотором $\delta > 0$ интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right|dt < \infty \tag{3.3}$$

существует, то частичные суммы

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right)$$

ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся в этой точке $x$ к $f(x)$.

Условие сходимости интеграла (3.3) называется *условием Дини*. Оно, в частности, выполнено, если в данной точке $x$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную, или хотя бы левую и правую производные.

Перенесем этот результат на *непериодические* функции. Пусть функция $f(x)$ на каждом конечном интервале удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$.

Подставляя коэффициенты (3.2) в разложение (3.1), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi t}{l}dt + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt\right],$$

т. е.

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt. \qquad (3.4)$$

Дополним условие теоремы 3.1 еще одним требованием, а именно пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dt<\infty. \qquad (3.5)$$

Перейдем в формуле (3.4) к пределу $l\to\infty$. Тогда первое слагаемое в правой части формулы стремится к 0. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму, распространенную на бесконечный промежуток для интеграла

$$\int_{0}^{\infty} F(\lambda)d\lambda,$$

где

$$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt.$$

Если положить $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$, то $\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$. Формальный предельный переход дает

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \qquad (3.6)$$

Далее введем обозначения:

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \qquad (3.7)$$

Тогда равенство (3.6) можно записать в виде

$$\boxed{f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda.} \qquad (3.8)$$

Равенство (3.8) называется *интегралом Фурье* (*интегральной формулой Фурье*). Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ можно рассматривать как непрерывные аналоги коэффициентов ряда Фурье $a_n$ и $b_n$. При этом:

– если $f(x)$ – четная, то $a(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda)=0;$

– если $f(x)$ – нечетная, то $a(\lambda)=0, \quad b(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$

***Пример.*** Представить в виде интеграла Фурье следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases} 2-|x|, & |x|\le 2, \\ 0, & |x|>2. \end{cases}$$

*Решение*

Так как функция $f(x)$ – четная, то

$$b(\lambda)=0, \quad a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2}(2-t)\cos\lambda t dt.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2-t}{\lambda}\sin\lambda t\Big|_0^2+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^2\sin\lambda t dt\right]=\frac{-2}{\pi\lambda^2}\cos\lambda t\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{2}{\pi\lambda^2}(\cos 2\lambda-1)=\frac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}.$$

Интеграл Фурье примет вид: $f(x)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda.$ ▲

## ЗАДАНИЯ

Представить интегралом Фурье следующие функции:

**1.** $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

**2.** $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ где $\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

*Здесь используется известная функция сигнум* («*функция знака*»).

**3.** $f(x)=\begin{cases}2+|x|, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

**4.** $f(x)=\begin{cases}1-|x|/a, & \textit{если } |x|\le a,\\ 0, & \textit{если } |x|>a.\end{cases}$

**5.** $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

**6.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

**7.** $f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & \textit{если } |x|\le 2\pi n/\omega,\\ 0, & \textit{если } |x|>2\pi n/\omega, \quad n\in N, \omega>0.\end{cases}$

**8.** $f(x)=1/\left(x^2+a^2\right), \quad a\ne 0.$

**9.** $f(x)=e^{-a|x|}, \quad a>0.$

## 3.2. Интегральное преобразование Фурье и его свойства

Заметим, что в интегральной формуле Фурье (3.6) подынтегральная функция является четной по $\lambda$. Это позволяет переписать (3.6) в симметричной форме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{3.9}$$

Далее, из абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ следует, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$ существует и представляет собой нечетную функцию по $\lambda$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt = 0. \quad (3.10)$$

Умножив (3.10) на $-i$ и сложив с (3.9), получим формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt. \quad (3.11)$$

Если ввести обозначение

$$\boxed{g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt,} \quad (3.12)$$

то (3.11) можно записать в виде

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}dx.} \quad (3.13)$$

Формула (3.12) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции. Таким образом, каждой функции $f(x) \in L_1(-\infty,+\infty)$ мы сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную опять же на всей прямой.

Функция $g(\lambda)$ (3.12) называется *преобразованием Фурье* исходной функции $f(x)$. Формула (3.13), выражающая $f(x)$ через ее преобразование Фурье, называется *формулой обращения* для преобразования Фурье (*обратное преобразование Фурье*).

Таким образом, если к функции $f(x)$ применить преобразование Фурье, а затем обратное преобразование Фурье, то получим исходную функцию.

*Замечание.* Иногда коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ разбивают на два множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и формулы (3.12) и (3.13) записывают в симметричной форме:

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}dx.$$

Однако при всем внешнем сходстве эти формулы различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле, так как $f(x) \in L_1(-\infty,+\infty)$; во второй – только в смысле главного значения как $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A}$ (!).

Если функция $f(x)$ четная, то

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$$

– *косинус-преобразование Фурье*.

Если функция $f(x)$ нечетная, то

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = -2i\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$

– *синус-преобразование Фурье*.

***Свойства преобразования Фурье***

Удобно обозначать преобразование Фурье как $\mathcal{F}[f(x)] = g(\lambda)$. По существу $\mathcal{F}$ представляет собой линейный оператор, определенный на пространстве функций $L_1(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим основные свойства этого оператора:

**1.** Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(-\infty,+\infty)$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty,+\infty)$, то последовательность их образов $\{\mathcal{F}[f_n]\}$ (преобразований Фурье) сходится на прямой *равномерно*.

**2.** Преобразование Фурье $g(\lambda)=\mathcal{F}[f(x)]$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ есть ограниченная непрерывная функция, которая стремится к нулю при $|\lambda|\to\infty$.

**3.** Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$, то справедливо равенство

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}f(x)\right] = i\lambda\mathcal{F}[f(x)]. \tag{3.14}$$

Если производная $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $f(x),\ldots,f^{(k)}(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$, то

$$\mathcal{F}\left[f^{(k)}(x)\right] = (i\lambda)^k\mathcal{F}[f(x)]. \tag{3.15}$$

**4.** Если $f^{(k)}(x)$ абсолютно интегрируема, то

$$\left|\mathcal{F}[f(x)]\right| = \frac{\left|\mathcal{F}\left[f^{(k)}(x)\right]\right|}{|\lambda|^k} \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. $\mathcal{F}[f(x)]$ убывает на $\infty$ быстрее, чем $\frac{1}{|\lambda|^k}$. Чем больше производных имеет функция $f(x)$ в $L_1(-\infty,+\infty)$, тем быстрее на бесконечности убывает ее преобразование Фурье.

**5.** Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы. Тогда функция $g(\lambda)=\mathcal{F}[f(x)]$ дифференцируема, и имеет место равенство

$$g'(\lambda)=\mathcal{F}[-ixf(x)]. \qquad (3.16)$$

Если абсолютно интегрируемы $f(x), xf(x),..., x^p f(x)$, то

$$g^{(k)}(\lambda)=\mathcal{F}\left[(-ix)^k f(x)\right], \quad k=0,1,..., p. \qquad (3.17)$$

**6.** Пусть $f_1$ и $f_2$ – интегрируемые на всей прямой функции. Тогда для их свертки

$$f_1 * f_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)d\xi. \qquad (3.18)$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2]=\mathcal{F}[f_1]\cdot\mathcal{F}[f_2]. \qquad (3.19)$$

***Пример 1.*** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

*Решение*

Преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\mathcal{F}[f(x)]=g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}e^{-i\lambda x}dx. \qquad (3.20)$$

При вычислении интеграла (3.20) нам понадобится *лемма Жордана*:

*Если $f(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию: $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$ и $m>0$, то при $R\to+\infty$*

$$\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz\to 0,$$

*где $C_R$ есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом R, находящаяся в верхней полуплоскости.*

Тогда в выражении (3.20) параметр $\lambda=-|\lambda|$ должен быть отрицательным и

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{C_R}\;=\oint\limits_{C}\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+2}dz,$$

где $C$ – замкнутый контур, лежащий в верхней полуплоскости.

Функция $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка $z_0=-1+i$. Тогда

$$g(\lambda)=2\pi i\operatorname*{res}_{z=z}\left[\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+z}\right]=2\pi i\left.\frac{e^{i|\lambda|z}}{2z+2}\right|_{z=-1+i}=$$

$$=2\pi i\frac{e^{i|\lambda|(-1+i)}}{-2+2i+2}=\pi e^{-i|\lambda|-|\lambda|}=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

***Ответ***: $\mathcal{F}[f(x)]=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

***Пример 2.*** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

*Решение*

$$\mathcal{F}[f(x)]=g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-1}^{1}e^{2x}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-1}^{1}e^{(2-i\lambda)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2-i\lambda}e^{(2-i\lambda)x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2-i\lambda}\left(e^{2-i\lambda}-e^{-(2-i\lambda)}\right)=\frac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}.$$

***Ответ***: $\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}$. ▲

***Пример 3.*** Найти преобразование Фурье выражения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right).$$

*Решение*

По свойству (3.14) преобразования Фурье $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]=i\lambda\mathcal{F}\left[f(x)\right]$:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)\right]=i\lambda\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+2x+2}\right]=i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Здесь был использован результат примера 1:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+2x+2}\right]=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

***Ответ***: $i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

***Пример 4.*** Найти преобразование Фурье для функции $f(x)=e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$.

*Решение*

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma|x|}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma|x|}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\gamma x}\cos\lambda x dx=\text{(дважды интегрируя по частям)}=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

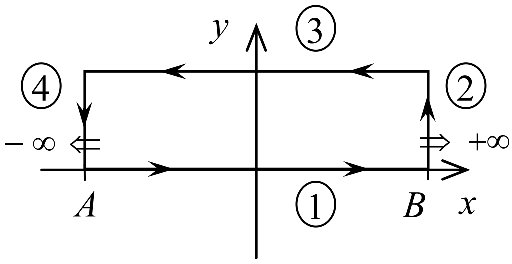
Здесь было учтено, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma|x|}\sin\lambda x dx=0$, так как под знаком интеграла находится нечетная функция.

***Ответ***: $\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}$. ▲

***Пример 5.*** Найти преобразование Фурье для функции $f(x)=e^{-ax^2}$.

*Решение*

$$\mathcal{F}[f(x)]=g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx.$$




Под интегралом находится аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости и стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой, параллельной действительной оси.

Следовательно, по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} e^{-az^2}\cdot e^{-a\lambda z}dz=0.$$

Интеграл по путям 2 и 4 в пределах $A\to-\infty,\ B\to+\infty$ обращается в 0, следовательно,

$$\int\limits_1+\int\limits_3=0\quad\Rightarrow\quad\int\limits_1=-\int\limits_3.$$

Поменяв направление интегрирования, мы получим, что исходный интеграл равен интегралу вдоль любой прямой $z=x+iy$ параллельной оси $Ox$. Таким образом

$$\mathcal{F}[f(x)]=g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+iy)^2}\cdot e^{-i\lambda(x+iy)}dx=$$

$$=e^{ay^2+\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x}dx=e^{ay^2+\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)}dx.$$

Выберем $y=-\dfrac{\lambda}{2a}$. Тогда

$$g(\lambda)=e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2}-\frac{\lambda^2}{2a}}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx}_{=\sqrt{\pi/a}}=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В частности, при $a = \frac{1}{2}$ имеем:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Из последнего примера следует, что действие преобразования Фурье оставляет функцию $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ инвариантной. Другими словами, функция $f(x)$ при преобразовании Фурье переходит в себя с точностью до постоянного множителя.

***Ответ***: $\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right] = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. ▲

## ЗАДАНИЯ

Найти преобразование Фурье указанных функций $f(x)$ и $f_1(x)$:

**1.** а) $f(x) = \begin{cases} e^{5x}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f_1(x) = xf(x)$.

**2.** а) $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f_1(x) = xf(x)$.

**3.** а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f_1(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$.

**4.** а) $f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| \le 3, \\ 0, & |x| > 3; \end{cases}$ б) $f_1(x) = \frac{d}{dx} f(x)$.

**5.** а) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 12x + 50}$; б) $f_1(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$.

**6.** а) $f(x) = \frac{1+x}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}$; б) $f_1(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$.

**7.** $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-2x}, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

**8.** $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & если\ |x|\le 1,\\ 1, & если\ 1<|x|<2,\\ 0, & если\ |x|\ge 2.\end{cases}$

**9.** $f(x)=xe^{-|x|}$.

**10.** $f(x)=x^2e^{-\gamma|x|},\quad \gamma>0.$

**11.** $f(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right).$

**12.** $f(x)=e^{-x^2/2}\cos ax.$

**13.** $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right).$

## 3.3. Приложение интегрального преобразования Фурье к решению задач математической физики

Методы интегральных преобразований являются эффективными методами решения и исследования уравнений математической физики. Применение преобразования Фурье для решения уравнений в частных производных приводит к упрощению исходной задачи и позволяет свести задачу к решению однородного дифференциального уравнения. Этот метод носит имя *метода Фурье*.

Для иллюстрации метода Фурье рассмотрим решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.21}$$

где $-\infty<x<+\infty$, $t\ge 0$.

Решение ищется при начальном условии

$$u(x,t_0)=u_0(x). \tag{3.22}$$

Предположим, что $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $u_0''(x)$ $\in L_1(-\infty,+\infty)$ и будем искать решение поставленной задачи в классе функций, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

1) $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$, $u''_{xx}(x,t) \in L_1(-\infty,+\infty)$ при любом $t \geq 0$;

2) функция $u'_t(x,t)$ имеет в каждом интервале $[a,T]$ интегрируемую мажоранту $f(x)$, т. е. $|u'_t(x,t)| \leq f(x)$, где $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

Выполним в уравнении (3.21) преобразование Фурье по переменной $x$, используя свойство (3.14):

$$\mathcal{F}[u''_{xx}(x,t)] = -\lambda^2 v(\lambda,t), \text{ где } v(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(x,t)].$$

$$\mathcal{F}[u'_t(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u'_t(x,t)e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx\right] = \frac{\partial v}{\partial t} \equiv v'_t(\lambda,t).$$

Получаем

$$v'_t(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{v} = -\lambda^2 dt \quad \Rightarrow \quad v(\lambda,t) = v_0(\lambda)e^{-\lambda^2 t},$$

где $v_0(\lambda) = \mathcal{F}[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)e^{-i\lambda x}dx$.

Далее воспользуемся результатом примера 5 (§ 3.2):

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right] = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \text{ при } a = \frac{1}{4t} \text{ получим } \mathcal{F}\left[e^{-x^2/4t}\right] = e^{-\lambda^2 t}\sqrt{4t\pi},$$

$$e^{-\lambda^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\right].$$

Поэтому

$$v(\lambda,t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\right] \cdot \mathcal{F}[u_0(x)] = F\left[\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t} * u_0(x)}_{=u(x,t)}\right],$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}u_0(x-\xi)d\xi.$$

Получили решение уравнения теплопроводности в виде интеграла Пуассона.

# ГЛАВА 4. ДИСКРЕТНОЕ *z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

## 4.1. *z*-преобразование

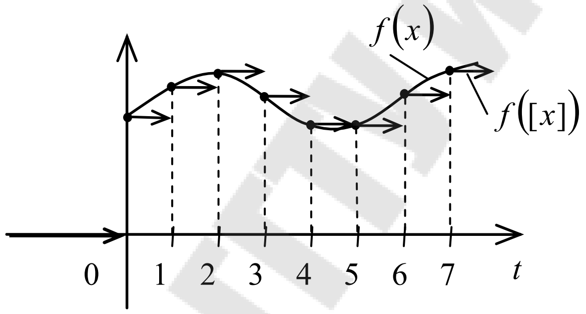
Комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента *t*, равная нулю при $t<0$ и принимающая постоянные значения $f(n)$ на промежутках $[n, n+1)$, где $n \in Z$, $n \geq 0$, называется *решетчатой функцией.* По-существу, задание решетчатой функции эквивалентно заданию числовой последовательности

$$f_n = f(n), \quad n = 1,2,\ldots\ , \tag{4.1}$$

при этом $f(n) \equiv 0$ при $n<0$.

Например, $f_n = n\,2^n$. Тогда $f_0 = 0,\ f_1 = 2,\ f_2 = 8,\ f_3 = 24, \ldots$ .

В случае, когда решетчатая функция принимает действительные значения, имеет место задать ее графически в виде *ступенчатой* линии.




*Изображением* решетчатой функции $f_n$ называется функция $F^*(z)$ комплексного аргумента *z*, определяемая как

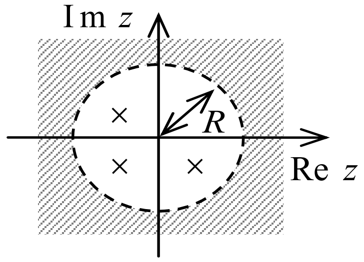
$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}. \tag{4.2}$$

Переход от функции $f_n$ к функции $F^*(z)$ по формуле (4.2) называется *z-преобразованием*.

Принято для *z*-преобразования использовать следующее символьное обозначение:

$$\boxed{f_n \;\dot{-}\; F^*(z).} \tag{4.3}$$

При этом сама решетчатая функция $f_n$ называется *оригиналом*.




Правая часть определяющего соотношения (4.2) представляет собой главную часть ряда Лорана. Как известно, ряд (4.2) сходится в области комплексной плоскости, задаваемой неравенством

$$|z| > R \geq 0.$$

Эта область есть внешняя часть круга радиуса $R$ и с центром в нулевой точке.

***Пример.*** Найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = e^{\alpha n}$.

*Решение*

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, $|q| < 1$, находим

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{e^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z-e^{\alpha}} \quad \text{при} \quad |z| > e^{\operatorname{Re}\alpha}.$$

***Ответ***: $e^{\alpha n} \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$.▲

В частности, при $\alpha = 0$ получаем $f_n = 1 \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-1}$.▲

## 4.2. Свойства *z*-преобразования

**1.** *Линейность.* Если $f_n \stackrel{\bullet}{-} F^*(z)$ и $g_n \stackrel{\bullet}{-} G^*(z)$, то имеет место соответствие

$$\boxed{\alpha f(n) + \beta g(n) \stackrel{\bullet}{-} \alpha F^*(n) + \beta G^*(n).} \tag{4.4}$$

***Пример 1.*** Найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = \sin an$.

*Решение*

Так как $f_n = \sin an = \dfrac{e^{ian} - e^{-ian}}{2i}$ и $e^{\alpha n} \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-e^{\alpha}}$, то находим

$$\sin an \doteq \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{ia}}-\frac{z}{z-e^{-ia}}\right)=\frac{1}{2i}\,\frac{z\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)}{z^2-\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)+1}=\frac{z\sin a}{z^2-2\cos a+1}. \blacktriangle$$

**2.** *Теорема запаздывания.* Если $f_n \doteq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо соответствие

$$\boxed{f_{n-k} \doteq z^{-k}F^*(z), \quad k=1,2,\ldots\ .} \tag{4.5}$$

***Пример 2.*** Найти изображение для функции $f_{n-3}$, если $f_n=\sin 2n$.

*Решение*

Так как $\sin an \doteq \dfrac{z\sin a}{z^2-2\cos a+1}$, то последовательно получаем

$$\sin 2(n-3) \doteq \frac{1}{z^3}\,\frac{z\sin 2}{z^2-2\cos 2+1}=\frac{\sin 2}{z^2\left(z^2-2\cos 2+1\right)}. \ \blacktriangle$$

**3.** *Теорема опережения.* Если $f_n \doteq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо соответствие:

$$f_{n+1} \doteq z\left[F^*(z)-f_0\right],$$

$$f_{n+2} \doteq z^2\left[F^*(z)-f_0-f_1z^{-1}\right], \tag{4.6}$$

$$f_{n+k} \doteq z^k\left[F^*(z)-\sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right]. \tag{4.7}$$

***Пример 3.*** Найти изображение для функции $f_{n+5}$, если $f_n=e^n$.

*Решение*

Так как $e^n \doteq \dfrac{z}{z-e}$, то получаем

$$e^{n+5} \doteq z^5\left(\frac{z}{z-e}-1-ez^{-1}-e^2z^{-2}-e^3z^{-3}-e^4z^{-4}\right)=$$

$$=\frac{z^6}{z-e}-\left(z^5-ez^4-e^2z^3-e^3z^2-e^4z\right). \ \blacktriangle$$

**4.** *Дифференцирование изображения.* Если $f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(z)$, то справедливо соответствие

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} (-z)^k \frac{d^k}{dz^k} F^*(z), \ \ k = 1,2,\ldots \ . \tag{4.8}$$

В частности,

$$nf_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} (-z)\left[F^*(z)\right]', \quad n(n+1)f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} z^2\left[F^*(z)\right]''.$$

***Пример 4.*** Найти изображение для функции $f_n = n$.

*Решение*

Так как $1 \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \dfrac{z}{z-1}$, получим

$$n \cdot 1 \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = -z\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \ \blacktriangle$$

**5.** *Изображение суммы.* Если $f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(z)$, то

$$\sum_{m=0}^{n-1} f_m \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \frac{1}{z-1} F^*(z). \tag{4.9}$$

**6.** *Теорема подобия.* Если $f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(z)$, то справедливо соответствие

$$\alpha^{-n} f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(\alpha z), \ \ \alpha \neq 0. \tag{4.10}$$

**7.** *Теорема о свертке оригиналов.* Если $f_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(z)$, $g_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} G^*(z)$, то справедливо соответствие

$$\sum_{m=0}^{n} f_m g_{n-m} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} F^*(z)G^*(z). \tag{4.11}$$

***Пример 5.*** Найти изображение $f_n = n$.

*Решение*

Так как $1 \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \dfrac{z}{z-1}$, то используя свойство дифференцирования изображения (4.8) находим

$$n = n \cdot 1 \bullet\!\!- (-z)\left(\frac{z}{z-1}\right)' = (-z)\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \quad \blacktriangle$$

Приведем таблицу основных формул и $z$-преобразований наиболее часто встречающихся решетчатых функций (табл. 4.1).

*Таблица 4.1*

**Таблица соответствия для $z$-преобразований**

| $f_n$ | $F^*(z)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $(-1)^n$ | $\frac{z}{z+1}$ |
| $n$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| $n^2$ | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| $a^n$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $na^{n-1}$ | $\frac{z}{(z-a)^2}$ |
| $C_n^k$ | $\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$ |
| $a^n \sin n\tau$ | $\frac{az\sin\tau}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$ |
| $a^n \cos n\tau$ | $\frac{z(z-a\cos\tau)}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$ |
| $a^n \operatorname{sh} n\tau$ | $\frac{az\operatorname{sh}\tau}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$ |
| $a^n \operatorname{ch} n\tau$ | $\frac{z(z-a\operatorname{ch}\tau)}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$ |

*Окончание табл. 4.1*

| $f_n$ | $F^*(z)$ |
|---|---|
| $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ | $\dfrac{z(z-x)}{z^2-2xz+1}$ |
| $\dfrac{a^n}{n!}$ | $e^{a/z}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} f_k$ | $\dfrac{z}{z-1}F^*(z)$ |
| $f_{n-k}$ | $\dfrac{1}{z^k}F^*(z)$ |
| $f_{n+k}$ | $z^k\left[F^*(z)-\sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right]$ |
| $n\,f_n$ | $-z\left(F^*(z)\right)'$ |
| $n^2\,f_n$ | $z^2\left(F^*(z)\right)''+z\left(F^*(z)\right)'$ |
| $a^{-n}f_n$ | $F^*(az)$ |
| $a^n f_n$ | $F^*(z/a)$ |
| $f_n * g_n$ | $F^*(z)\,G^*(z)$ |

***Обращение z-преобразования***

**1.** Если известно изображение $F^*(z)$ решетчатой функции $f_n$, то оригинал $f_n$ возможно восстановить, используя формулу

$$f_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C F^*(z)z^{n-1}dz,\ \ n=0,1,2,..., \tag{4.12}$$

где $C$ – некоторый замкнутый контур, содержащий внутри себя все особые точки функции $F^*(z)$.

Интеграл (4.12) можно вычислить с помощью вычетов:

$$f_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C F^*(z)z^{n-1}dz=\sum_k\left(\operatorname{res}\left(F^*(z)z^{n-1}\right)\right), \tag{4.13}$$

где $z_k$ – особые точки функции $F^*(z)$, лежащие внутри контура $C$. При этом вычет функции $F^*(z)z^{n-1}$ в полюсе $m$-го порядка $z_0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\left(F^*(z)z^{n-1}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(F^*(z)z^{n-1}(z-z_0)^m\right). \qquad (4.14)$$

***Пример 6.*** Найти оригинал для изображения

$$F^*(z) = \frac{z^2+3z}{(z-4)^3}.$$

*Решение*

Используем для вычисления оригинала $f_n$ формулу (4.13). Так как функция $F^*(z)$ имеет в точке $z_0 = 4$ полюс третьего порядка, то

$$f_n = \operatorname*{res}_{z=4}\left(X^*(z)z^{n-1}\right) = \operatorname*{res}_{z=4}\left(\frac{z^2+3z}{(z-4)^3}\cdot z^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 4}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^{n+1}+3z^n}{(z-4)^3}(z-4)^3\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left((n+1)z^n+3nz^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n(n+1)4^{n-1}+3n(n-1)4^{n-2}\right) = \frac{1}{2}4^{n-2}\left(7n^2+n\right).$$

***Ответ*:** $f_n = \frac{1}{2}4^{n-2}\left(7n^2+n\right)$.▲

**2.** Пусть изображение $F^*(z)$ – дробно-рациональная функция:

$$F^*(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},\ \ n \le m. \qquad (4.15)$$

Для того чтобы по известному изображению $F^*(z)$ найти оригинал $f_n$, можно разложить дробь (4.15) на сумму элементарных дробей (*предварительно оставив за скобками в числителе z*) и затем воспользоваться таблицей.

***Пример 7.*** Найти оригинал для изображения

$$F^*(z) = \frac{z^2}{(z+3)(z-5)}.$$

*Решение*

Для определения $f_n$ разложим дробь $F^*(z)$ на сумму элементарных дробей

$$F^*(z) = \frac{z^2}{(z+3)(z-5)} = z\frac{z}{(z+3)(z-5)} = z \cdot X^*(z),$$

где

$$X^*(z) = \frac{z}{(z+3)(z-5)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-5};$$

$$z = A(z-5) + B(z+3), \quad A = \frac{3}{8}, \quad B = \frac{5}{8}.$$

Тогда

$$F^*(z) = z \cdot X^*(z) = z\left(\frac{3}{8}\frac{1}{z+3} + \frac{5}{8}\frac{1}{z-5}\right) = \frac{3}{8}\frac{z}{z+3} + \frac{5}{8}\frac{z}{z-5}.$$

Так как $\frac{z}{z+3} \risingdotseq (-3)^n$, $\quad \frac{z}{z-5} \risingdotseq 5^n$, то

$$f_n = \frac{3}{8}(-3)^n + \frac{5}{8}5^n = \frac{5^{n+1} - (-3)^{n+1}}{8}.$$

***Ответ***: $f_n = \dfrac{5^{n+1} - (-3)^{n+1}}{8}$. ▲

### 4.3. Решение разностных и рекуррентных уравнений и систем

*Разностью первого порядка* решетчатой функции $f_n$ называется величина $\Delta f_n$, определяемая как

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n.$$

По аналогии вводятся и разности высших порядков:

*Разность второго порядка*: $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n$.

*Разность k-го порядка*: $\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n$.

Получим явный вид разностей через значения решетчатой функции:

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - f_{n+1} + f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n;$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta^2 f_{n+1} - \Delta^2 f_n = \left(f_{n+3} - 2f_{n+2} + f_{n+1}\right) - \left(f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n\right) =$$
$$= f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n;$$
$$\vdots$$
$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \text{ где } C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}. \tag{4.16}$$

***Пример 1.*** Найти разность *k*-го порядка $(k = 1,2,...)$ для решетчатой функции $f_n = 3n^2 - n$.

*Решение*

Находим

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = 3(n+1)^2 - (n+1) - 3n^2 + n = \underbrace{6n+4}_{g_n};$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = 6(n+1) + 4 - 6n - 4 = 6;$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta\left(\Delta^2 f_n\right) = 6 - 6 = 0; \qquad \Delta^4 f_n = \Delta^5 f_n = ... = 0. \ \blacktriangle$$

Уравнение вида

$$F\left(n, f_n, \Delta f_n, ..., \Delta^k f_n\right) = 0, \tag{4.17}$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция, называется *разностным уравнением k-го порядка*.

На основании формул (4.16) всякое разностное уравнение можно записать в форме *рекуррентного уравнения k-го порядка*

$$F\left(n, f_n, f_{n+1}, ..., f_{n+k}\right) = 0. \tag{4.18}$$

Решение рекуррентных уравнений аналогично решению дифференциальных уравнений с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Рассмотрим алгоритм решения линейного рекуррентного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a_0 f_{n+k} + a_1 f_{n+k-1} + \ldots + a_k f_n = \varphi(n), \tag{4.19}$$

с начальными условиями

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k-1}. \tag{4.20}$$

Перейдем в уравнении (4.19) от оригиналов к изображениям:

$$f_n \doteq F^*(z),$$

$$f_{n+1} \doteq z\left(F^*(z) - f_0\right), \quad f_{n+2} \doteq z^2\left(F^*(z) - f_0 - f_1 \cdot z^{-1}\right), \ \ldots;$$

$$f_{n+k} \doteq z^k\left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot z^{-m}\right];$$

$$\varphi(n) \doteq \Phi^*(z).$$

В результате получим линейное уравнение относительно функции $F^*(z)$. Далее необходимо для изображения $F^*(z)$ найти оригинал $f_n$. Общее решение будет содержать начальные условия (4.20) для оригинала $f_n$.

***Пример 2.*** С помощью $z$-преобразования решить линейное разностное уравнение:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

*Решение*

***Способ 1.*** Пусть $x_n \doteq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \doteq z\left(X^*(z) - x_0\right) = z\left(X^*(z) - 1\right) = zX^*(z) - z,$$

$$x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right) = z^2 X^*(z) - z^2 + z.$$

Применяя к обеим частям уравнения $z$-преобразование, получим уравнение

$$z^2 X^*(z) - z^2 + z - 6zX^*(z) + 6z + 9X^*(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (z-3)^2 X^*(z) - z^2 + 7z = 0.$$

Далее находим функцию $X^*(z)$:

$$X^*(z) = \frac{z(z-3)-4z}{(z-3)^2} = \frac{z}{z-3} - 4\cdot\frac{z}{(z-3)^2}.$$

Так как имеют место соответствия: $\dfrac{z}{z-3} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} 3^n$ и $\dfrac{z}{(z-3)^2} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} n3^n$, то

$$x_n = 3^n - 4n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n).$$

***Способ 2.*** Используем для определения оригинала $x_n$ формулу (4.13):

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_i}\left(X^*(z)z^{n-1}\right) = \operatorname*{res}_{z=3}\left(\frac{z^2-7z}{(z-3)^2}z^{n-1}\right) =$$

$$\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1}-7z^n}{(z-3)^2}(z-3)^2\right) = \lim_{z\to 3}\left((n+1)z^n - 7nz^{n-1}\right) =$$

$$= n3^n + 3^n - 7n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n).$$

***Ответ*:** $x_n = 3^{n-1}(3-4n)$. ▲

***Пример 3.*** С помощью $z$-преобразования решить линейное разностное уравнение:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5^n;\ x_0 = 0;\ x_1 = 1.$$

*Решение*

***Способ 1.*** Пусть $x_n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} z\left(X^*(z) - x_0\right), \qquad x_{n+2} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1z^{-1}\right),$$

$$5^n \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \frac{z}{z-5}.$$

Имеем

$$z^2X^*(z) - z - 4zX^*(z) + 4X^*(z) = \frac{z}{z-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (z-2)^2X^*(z) - z = \frac{z}{z-5} \quad \Rightarrow X^*(z) = \frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2}.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2}=z\cdot\frac{z-4}{(z-5)(z-2)^2}=\frac{1}{9}\frac{z}{z-5}-\frac{1}{9}\frac{z}{z-2}+\frac{2}{3}\frac{z}{(z-2)^2}.$$

Так как имеют место соответствия:

$$\frac{z}{z-2}\risingdotseq 2^n,\ \frac{z}{(z-2)^2}\risingdotseq n\cdot 2^{n-1},\ \frac{z}{z-5}\risingdotseq 5^n,$$

то

$$x_n=\frac{1}{9}\left(5^n-2^n\right)+\frac{2}{3}n\cdot 2^{n-1}.$$

***Способ 2.*** Используем для определения оригинала $x_n$ формулу

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}\operatorname*{res}_{z_i}\left(X^*(z)z^{n-1}\right)=\operatorname*{res}_{z=2}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right)+\operatorname*{res}_{z=5}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-2)^2\right)+\lim_{z\to 5}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-5)\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2}\frac{((n+1)z^n-4nz^{n-1})(z-5)-\left(z^{n+1}-4z^n\right)}{(z-5)^2}+\frac{5^{n+1}-4\cdot 5^n}{9}=$$

$$=\frac{\left((n+1)2^n-4n2^{n-1}\right)(-3)-\left(2^{n+1}-4\cdot 2^n\right)}{9}+\frac{5^n}{9}=\frac{1}{9}\left(5^n-2^n\right)+\frac{2}{3}n\cdot 2^{n-1}.$$

***Ответ*:** $x_n=\frac{1}{9}\left(5^n-2^n\right)+\frac{2}{3}n\cdot 2^{n-1}$.▲

***Пример 4.*** С помощью $z$-преобразования решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0,\ x_0=1,\ x_1=2.$$

*Решение*

Пусть $x_n\risingdotseq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1}\risingdotseq z\left(X^*(z)-x_0\right)=z\left(X^*(z)-1\right)=zX^*(z)-z,$$

$$x_{n+2}\risingdotseq z^2\left(X^*(z)-x_0-x_1z^{-1}\right)=z^2X^*(z)-z^2-2z.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\left(z^2 - z + 1\right)X^*(z) = z^2 + z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X^*(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 1} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}z}{z^2 - 2\cdot z\cdot\frac{1}{2} + 1} = \left[\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\right] =$$

$$= \frac{z^2 - z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 1} + \sqrt{3}\,\frac{z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{z^2 - 2z\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 1} \;\dot{-}\; \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} =$$

$$= 2\sin\frac{(2n+1)\pi}{6}.$$

***Ответ*:** $x_n = 2\sin\frac{(2n+1)\pi}{6}$. ▲

## ЗАДАНИЯ

**1.** Найти $z$-преобразование следующих решетчатых функций (используя определение):

**1.1.** $f_n = e^{-n}, \quad n = 0,1,2\ldots$ .

**1.2.** $f_n = 3^n, \quad n = 0,1,2\ldots$ .

**1.3.** $f_n = n, \quad n = 0,1,2\ldots$ .

**1.4.** $f_n = n^2, \quad n = 0,1,2\ldots$ .

**2.** Используя свойства и таблицу $z$-преобразования, найти изображения следующих функций:

**2.1.** $f_n = 2\cdot e^{n/2} - 4\cdot(-1)^n$.

**2.2.** $f_n = \operatorname{sh} 3n$.

**2.3.** $f_n = (n+2)^2$.

**2.4.** $f_n = ne^{2n}$.

**2.5.** $f_n = (\cos 2n)^2$.

**2.6.** $f_n = 3^n \sin 2n - 4^n \cos 3n$.

**2.7.** $f_{n-3}$, если $f_n = \cos 4n$.

**2.8.** $f_{n+4}$, если $f_n = 2^{3n}$.

**2.9.** $f_{n-5}$, если $f_n = 5^{3n}$.

**2.10.** $f_{n+5}$, если $f_n = a$.

**3.** Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму:

**3.1.** $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m^2$. **3.2.** $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m \cos am$.

**4.** Найти оригиналы для следующих изображений:

**4.1.** $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$.

**4.2.** $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2 - 7z + 10}$.

**4.3.** $F^*(z) = \dfrac{z^2 + z}{(z-4)^3}$.

**4.4.** $F^*(z) = \dfrac{2z^2 - 9z}{(z-1)(z-2)^2}$.

**5.** С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейные разностные уравнения:

**5.1.** $x_{n+1} - 2x_n = 0, \quad x_0 = 1$.

**5.2.** $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

**5.3.** $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = 1$.

**5.4.** $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 3^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$.

**5.5.** $x_{n+2} - 4x_n = 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 2$.

**5.6.** $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

**5.7.** $x_{n+2} + x_n = 1 - (-1)^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$.

**5.8.** $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 6^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$.

**5.9.** $x_{n+2} + x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$.

**5.10.** $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$.

**5.11.** $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$

**5.12.** $x_{n+2} - 4x_n = 4^n, \qquad x_0 = x_1 = 1.$

**6.** Найти формулу общего члена последовательности $x_n$, если:

**6.1.** $x_0 = 1$, а каждый последующий на 2 больше удвоенного предыдущего.

**6.2.** $x_0 = 8$, а каждый последующий на 1 меньше предыдущего, умноженного на 4.

**6.3.** $x_0 = 12$, а каждый последующий на 10 единиц меньше удвоенного предыдущего.

**7.** Решить систему разностных уравнений:

**7.1.** $\begin{cases} x_{n+1} + 2x_n + 10y_n = 0, & x_0 = 1; \\ y_{n+1} - 7y_n + 2x_n = 0, & y_0 = 0. \end{cases}$

**7.2.** $\begin{cases} x_{n+1} + 4x_n + 5y_n = 0, & x_0 = 1, \\ y_{n+1} - 3y_n - 2x_n = 0, & y_0 = 1. \end{cases}$

**7.3.** $\begin{cases} x_{n+1} + 4x_n + 3y_n = 0, & x_0 = -1; \\ y_{n+1} - 4y_n + 5x_n = 0, & y_0 = 1. \end{cases}$

**7.4.** $\begin{cases} x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n, & x_0 = 3; \\ y_{n+1} + 2x_n = -3^n, & y_0 = 0. \end{cases}$

# ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## 5.1. Понятие функционала и вариационной задачи

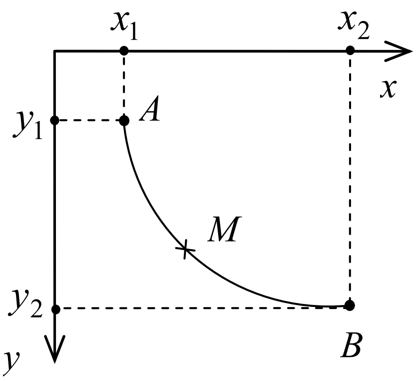
Если каждой функции $y = y(x)$ из некоторого функционального пространства поставлено в соответствие число $J$, то говорят, что в этом пространстве задан *функционал* $J[y(x)]$.

Функционал является обобщением понятия функции. Функция одной переменной ставит в соответствие одному числу $x$ другое число $y$. Функционал ставит в соответствие функции $y = y(x)$ (бесконечному числу ее значений) число *J*. Множество функций $y(x)$, на котором определен функционал $J[y(x)]$, называется областью определения функционала, а число *J* – его значением.

Основная задача вариационного исчисления – исследование функционалов на экстремум и поиск таких функций $y(x)$, на которых этот экстремум достигается.

Приведем примеры функционалов и вариационных задач:

**1.** ***Задача о брахистохроне.*** Задача, которой вариационное исчисление обязано своим появлением, была сформулирована в 1696 г. Иоганном Бернулли: *«Даны две точки A и B в вертикальной плоскости. Найти для движущейся точки M путь AMB, спускаясь вдоль которого под действием силы тяжести, она может достичь точку B за кратчайшее время»*.




Предположим, что точки *A* и *B* лежат в плоскости *xOy* с осью *Oy*, направленной вниз. Положим $A = A(x_1, y_1)$, $B = B(x_2, y_2)$ и пусть $y = y(x)$ – уравнение дуги, соединяющей точки *A* и *B* так, что $x_1 < x_2$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, $y_1 < y_2$.

Мгновенная скорость движения вдоль кривой: $v = \dfrac{ds}{dt}$, откуда $dt = \dfrac{ds}{v}$. Тогда время спуска определяется как

$$T[y(x)] = \int\limits_{AB} \frac{ds}{v} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx.$$

Скорость *v* как функцию координаты *x* найдем из закона сохранения энергии: $\dfrac{mv^2}{2} = mgy - mgy_1$ (начальная скорость равна 0). Отсюда $v = \sqrt{2g(y-y_1)}$ (ось *Oy* направлена вниз), поэтому

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_1}}\,dx. \qquad (5.1)$$

Таким образом, вариационная задача сводится к определению функции $y(x)$, для которой функционал $T[y(x)]$ достигает наименьшего возможного значения.

**2.** ***Задача о геодезических линиях (на плоскости).*** Из плоскости $xOy$ требуется найти линию, соединяющую две фиксированные точки $A(a, y_1)$ и $B(b, y_2)$, имеющую наименьшую длину. Кривые с такими свойствами в общем случае называются геодезическими.

Пусть кривая совпадает с графиком функции $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Тогда требуется определить вид функции $y(x)$ из класса непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, для которой функционал

$$l[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx, \qquad (5.2)$$

при условиях

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \qquad (5.3)$$

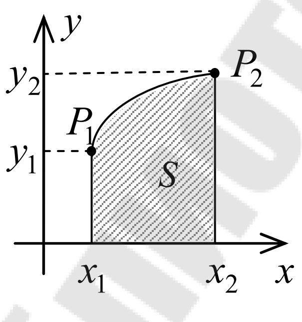
принимает наименьшее значение. Вариационная задача представляет собой поиск функции $y(x)$, которая задает кривую наименьшей длины.

Таким образом, приведенные выше задачи 1 и 2 сводятся к определению гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей начальным условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, которая минимизирует интеграл типа

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,$$

где $F$ – заданная функция трех аргументов. Такие задачи называются *простейшими задачами вариационного исчисления*.

**3.** ***Задача Дидоны***, или классическая изопериметрическая задача, связана с именем легендарной карфагенской царицы Дидоны. Ей понадобилось ремнем определенной длины ограничить участок земли наибольшей площади.




Среди всех гладких кривых длины $L$, соединяющих заданные точки $P_1$ и $P_2$ $(L > |P_1P_2|)$, найти ту, которая ограничивает наибольшую возможную площадь, заключенную между отрезками двух перпендикуляров, опущенных из точек $P_1$, $P_2$ на ось $Ox$.

Требуется найти функцию $y(x)$ такую, что

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx \to \max, \qquad (5.4)$$

при условиях

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L. \tag{5.5}$$

Такие задачи называются *изопериметрическими*. Отличие этих задач от простейших вариационных заключается в наличии дополнительных условий (5.5). Здесь мы имеем дело с вариационной задачей на условный экстремум.

## 5.2. Экстремум функционалов. Уравнение Эйлера–Лагранжа

*Вариацией* $\delta y$ аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу функций $G$:

$$\delta y = y(x) - y_0(x). \tag{5.6}$$

Понятно, что вариация $\delta y$ сама является функцией.

Пусть функционал $J[y(x)]$ задан на множестве функций $G$.

*Приращением функционала* $J[y(x)]$, соответствующим приращению аргумента $\delta y$, называется величина, определяемая как

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]. \tag{5.7}$$

Функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y_0(x) \in G$ *локального* или *относительного минимума* (*максимума*), если для всех $y(x)$ из некоторой ε-окрестности кривой $y_0(x)$ выполняется неравенство

$$J[y_0(x)] \le J[y(x)], \quad (J[y_0] \ge J[y]). \tag{5.8}$$

Локальные максимум и минимум называются локальными экстремумами. Если неравенства (5.8) выполняются для всех функций из класса $G \subset C_n[a, b]$, то говорят, что на кривой $y_0(x)$ функционал достигает *абсолютного экстремума*.

Пусть известно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, которая минимизирует функционал простейшей вариационной задачи

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx, \tag{5.9}$$

с граничными условиями:

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1. \tag{5.10}$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y(x)$.

**Теорема 5.1.** Для того чтобы функционал (5.9), определенный на множестве функций из $G\subset C_1[a,b]$ и удовлетворяющий граничным условиям (5.10), достигал на функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция была решением *уравнения Эйлера–Лагранжа*:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{5.11}$$

$\left(\text{здесь } F_y\equiv\dfrac{\partial F}{\partial y},\quad F_{y'}\equiv\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right).$

Решения уравнений Эйлера–Лагранжа называются *экстремалями функционала* (5.9).

Отметим также, что вариационная задача может не иметь решений или иметь бесконечное множество решений.

*Замечание.* Условие $\delta J=0$ не является достаточным для экстремума. Поэтому на экстремалях функционал может достигать как минимума, так и максимума. Более того, возможен случай, когда функционал на экстремалях не достигает экстремумов.

***Пример 1.*** Найти экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(y'^2-12xy\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0)=y(1)=1$.

*Решение*

В данном случае $F(x,y,y')=y'^2-12xy$, поэтому $F_y=-12x$, $F_{y'}=2y'$, следовательно,

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=-12x-2y''=0\quad\Rightarrow\quad y''(x)+6x=0,\quad y''(x)=-6x.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$y'(x)=-3x^2+C_1\quad\Rightarrow\quad y(x)=-x^3+C_1x+C_2.$$

Константы $C_1$ и $C_2$ находим из граничных условий:

$$y(0) = C_2 = 1, \quad y(1) = -1 + C_1 + 1 = C_1 = 1.$$

Таким образом, искомая экстремаль имеет вид $y(x) = -x^3 + x + 1$.

***Ответ*:** $y(x) = -x^3 + x + 1$. ▲

***Пример 2.*** Найти экстремали функционала с заданными граничным условиями:

$$J(y) = \int_1^0 \left(y'^2 + 2yy' + y^2\right)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$$

*Решение*

По условию

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2yy' + y^2.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, y')$:

$$F_y = 2y' + 2y, \quad F_{y'} = 2y' + 2y.$$

Тогда уравнение Эйлера примет вид

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2y' + 2y - 2y'' - 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - y = 0.$$

Таким образом, задача свелась к решению линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого записывается как

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Константы $C_1$ и $C_2$ определяем из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 1, \\ y(2) = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = -\frac{e^{-2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}, \quad C_2 = -\frac{e^2}{2\,\mathrm{sh}\,1}.$$

Окончательно имеем

$$y(x)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(-e^{-2+x}+e^{2-x}\right)=\frac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$$ – единственная экстремаль.

***Ответ***: $y(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$. ▲

***Пример 3.*** Найти экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$J[y]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

*Решение*

Экстремали функционала $J[y]$ являются решением уравнения Эйлера–Лагранжа. Предварительно вычислим производные:

$$F_y=2y-2\sin x,\quad F_{y'}=2y',\quad \frac{d}{dx}F_{y'}=2y''.$$

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа примет вид

$$y''-y=-\sin x.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение записывается как

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x.$$

Далее, используя граничные условия, находим константы $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C_1\left(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}\right)=2\quad\Rightarrow C_1=\frac{2}{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}=\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}},\ C_2=-\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}}.$$

Окончательно искомая экстремаль имеет вид

$$y = \frac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin x.$$

***Ответ***: $y(x) = \dfrac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\sin x$. ▲

## 5.3. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера–Лагранжа

Рассмотрим простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера–Лагранжа.

**I.** Пусть $F$ не зависит от $y$: $F = F(x, y')$.

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 = \text{const}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно производной, находим

$$y'(x) = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \varphi(x)dx + C_1.$$

**II.** Пусть $F$ не зависит явно от $x$: $F = F(y, y')$.

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа эквивалентно следующему дифференциальному уравнению первого порядка: $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1$.

**III.** Пусть $F$ есть полная производная: $F = \dfrac{d}{dx}G(x, y)$.

Тогда функционал $J$ не зависит от выбора функции $y(x)$: $J = G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1)$ и уравнение Эйлера–Лагранжа будет выполняться тождественно и любая функция из $C_1[a, b]$ будет экстремальна. Вариационная задача теряет свой смысл.

**IV.** Пусть функция $F$ не зависит от $y'$: $F = F(x, y)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Это алгебраическое уравнение. Его решение не содержит произвольных констант, и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям только в исключительных случаях.

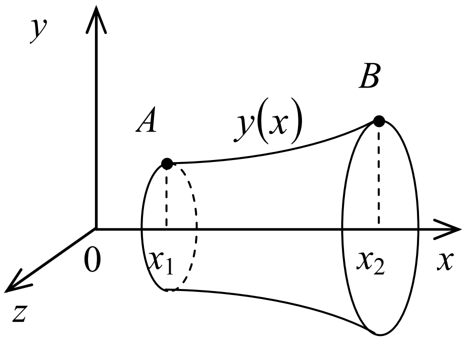
**V.** Пусть функция $F$ зависит только от $y'$: $F = F(y')$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа запишется как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{y'y'} \cdot y''(x) = 0.$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то $y''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$. Таким образом, экстремалью является любая линейная функция.

***Пример 1. О наименьшей поверхности вращения***




Требуется минимизировать функционал, представляющий собой площадь поверхности вращения:

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Подынтегральная функция не зависит от ***x*** (случай **II**), поэтому первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид

$$F - y'F'_{y'} = C_1 \quad \Rightarrow \quad y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Проще всего это дифференциальное уравнение интегрируется с помощью подстановки $y' = \operatorname{sh} t$, тогда:

$$y = C_1\sqrt{1 + y'^2} = C_1 \operatorname{ch} t,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt \quad \Rightarrow \quad x = C_1 t + C_2.$$

Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

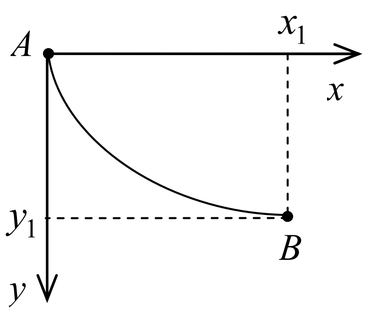
$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1 \operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Исключая параметр $t$, получим

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_1}{C_2} \text{ – цепная линия.}$$

***Пример 2. Задача о брахистохроне***

Даны две точки $A$ и $B$ в вертикальной плоскости. Найти для движущейся частицы $M$ путь $AB$, спускаясь вдоль которого под действием силы тяжести она может в кратчайшее время достичь точки $B$ из точки $A$. [Подробно условие задачи приведено в § 5.1, формула (5.1).]




Положим $A = A(0,0)$, $B = B(x_1, y_1)$ и пусть $y = y(x)$ – уравнение дуги, соединяющей точки $A$ и $B$. Скорость движения вдоль кривой равна $v = \dfrac{ds}{dt}$, $dt = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$. Тогда экстремаль будет решением следующей вариационной задачи:

$$\begin{cases} T[y(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^{x_1} \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx, \\ y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

Подынтегральная функция не зависит от $x$ (случай **II**), следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = C \quad \Rightarrow \quad y\left(1+y'^2\right) = C_1.$$

Уравнение проинтегрируем с помощью подстановки

$$y' = \operatorname{ctg} t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C_1}{1+y'^2} = y = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t)dt,$$

$$x=\int C_1(1-\cos 2t)dt=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2.$$

Полагая для упрощения $2t=t_1$, получим

$$\begin{cases} x-\underbrace{C_2}_{=0}=\dfrac{C_1}{2}(t_1-\sin t_1), \\ \quad y=\dfrac{C_1}{2}(t_1-\cos t_1) \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(t-\cos t) \end{cases}$$

– уравнение циклоиды, если начальная точка имеет координаты $(0,0)$.

Константа $a$ находится по координатам точки $B(x_1,y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида. ▲

## 5.4. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи

**I. *Функционал от вектор-функции***

Пусть функционал простейшей вариационной задачи зависит от вектор-функции $\bar{y}(x)=\{y_1(x), y_2(x), \ ..., y_n(x)\}$:

$$J[\bar{y}(x)]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))dx.$$

Вектор-функция представляет собой совокупность независимых функций $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Поэтому в данном случае мы имеем простейшую вариационную задачу, в которой функция $F$ зависит от набора функций:

$$J[\bar{y}]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx. \qquad (5.12)$$

При этом граничные условия записываются как

$$y_k(x_1)=y_k^{(0)}, \quad y_k(x_2)=y_k^{(1)}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_k'}\right)=0, \quad k=1,2,...,n. \qquad (5.13)$$

***Пример 1.*** Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a,b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J = [y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2\right) dx$$

при граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

*Решение*

Система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + y_2 = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y_2 = -y_1'' \quad \Rightarrow \quad y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Общее решение:

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$y_2(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$. Поэтому

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \sin x. \ \blacktriangle$$

**II. *Функционалы, зависящие от производных высших порядков***

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y(x),\ y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) dx \qquad (5.14)$$

с граничными условиями:

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad \ldots, \quad y'(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

$$y(x_2) = y_2, \quad y'(x_2) = y_2', \quad \ldots, \quad y'(x_2) = y_2^{(n-1)}.$$

Экстремалями функционала (5.14), имеющими производную порядка $2n$, являются решения уравнения Эйлера–Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F_{y'''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (5.15)$$

***Пример 2.*** Найти экстремали функционала $J[y]=\int\limits_0^1 (y'')^2\,dx$, при граничных условиях: $y(0)=0,\quad y'(0)=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=1.$

*Решение*

Уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0, \quad y^{(4)}=0,$$

его общее решение $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. Из граничных условий находим: $C_1=0,\ \ C_2=0,\ \ C_3=1,\ \ C_4=0$. Следовательно, экстремум функционала может достигаться только на прямой $y=x$. ▲

**III. *Вариационная задача с подвижными границами***

Для того чтобы функция $y=\tilde{y}(x)$ доставляла экстремум функционалу

$$J[y(x)]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$$

среди всех кривых $y=y(x)$ из $G\in C_1[a,b]$, соединяющих точки двух заданных линий $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, необходимо, чтобы:

1) кривая $y=\tilde{y}(x)$ была решением уравнения Эйлера для функционала $J[y(x)]$ (являлась экстремалью);

2) в точках $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ пересечения экстремали $y=\tilde{y}(x)$ с кривыми $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ выполнялись условия трансверсальности:

$$F+(\varphi'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_0}=0, \quad F+(\psi'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0. \qquad (5.16)$$

Условия (5.16), которых недостаточно для определения четырех параметров $C_1, C_2, x_1, x_2$, нужно дополнить двумя очевидными условиями:

$$\tilde{y}(x_0)=\varphi(x_0), \quad \tilde{y}(x_1)=\psi(x_1). \qquad (5.17)$$

**IV. *Изопериметрическая задача***

Вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$J[y_1, ..., y_n] = \int_a^b F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx \tag{5.18}$$

при наличии условий вида

$$\int_a^b F_i(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx = C_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{5.19}$$

называются *изопериметрическими задачами*.

При решении изометрической задачи используют следующее необходимое условие экстремума.

Введем *функцию Лагранжа для изопериметрической задачи*:

$$\widetilde{L} = (x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'), \tag{5.20}$$

где множители Лагранжа $\lambda_i$ $(i = \overline{1, m})$ – действительные числа.

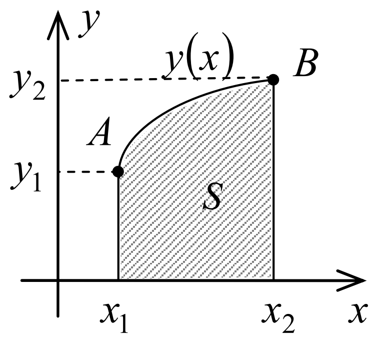
Если на функциях $y_1(x), ..., y_2(x)$ достигает своего слабого экстремума функционал (5.18) при условиях (5.19) и (5.20), то существуют такие числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\widetilde{L}_{y_k} - \frac{d}{dx}(L_{y_k'}) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.21}$$

Множители Лагранжа $\lambda_i$ и функции $y_1(x), ..., y_2(x)$ находятся из системы $n + m$ уравнений (5.21) и (5.19).

***Пример 3. Задача Дидоны***

Найти кривую $y = y(x)$ заданной длины $l$, для которой площадь $S$ под кривой достигает максимума. Кривая проходит через две фиксированные точки плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.




*Решение*

Согласно § 5.1 необходимо исследовать на экстремум функционал

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

при изопериметрическом условии

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l.$$

Функция Лагранжа (5.20) имеет вид

$$\widetilde{L} = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Так как она не содержит явно $x$, то первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа (5.21) дает

$$F - y'F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Положим $y'(x) = \operatorname{tg} t$. Тогда

$$y - C_1 = -\lambda \cos t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt,$$

$$x = \int \lambda \cos t dt = \lambda \sin t + C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x - C_2 = \lambda \sin t \\ y - C_1 = -\lambda \cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2 \ (\textit{окружность}).$$

***Ответ*:** Константы $C_1$, $C_2$ и $\lambda$ находятся из граничных условий. ▲

## ЗАДАНИЯ

Найти экстремали для следующих вариационных задач:

**1.** $J[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(12xy-y'^2\right)dx;\quad y(-1)=1,\quad y(0)=0.$

**2.** $J[y]=\int\limits_{0}^{1}(y'^2+2yy'+y^2)dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1.$

**3.** $J[y]=\int\limits_{0}^{\pi/2}(4y\cos 2x+y'^2-y^2)dx;\quad y(0)=0,\quad y(\pi/2)=0.$

**4.** $J[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2-y^2-y\right)e^{2x}dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=e^{-1}.$

**5.** $J[y]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(8y^2+ye^{2x}+y'^2\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y(\pi/2)=0.$

**6.** $J[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(4y^2+3xye^{2x}+y'^2\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=0.$

**7.** $J[y]=\int\limits_{1}^{e}\left(xy'^2+yy'\right)dx;\quad y(1)=0,\quad y(e)=1.$

**8.** $J[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(x+y''^2\right)dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=1,\ y'(1)=1.$

**9.** $J[y]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(x^2-y^2+y''^2\right)d;$

$y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'(0)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$

**10.** $J[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(240y-y'''^2\right)dx;$

$y(-1)=1,\ y(0)=0,\ y'(-1)=-4{,}5,\ y'(0)=0,\ y''(-1)=16,\ y''(0)=0.$

**11.** $J[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx;$

$y(0)=0,\ y(\pi/2)=1,\ z(0)=0,\ z(\pi/2)=1.$

**12.** $J[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}\left(2xy-y'^2+\frac{z'^3}{3}\right)dx;$

$y(1)=0,\ \ y(-1)=2,\ \ z(1)=1,\ \ z(-1)=-1.$

**13.** $J[y,z]=\int\limits_{1/2}^{1}\left(y'^2-2xyz'\right)dx;$

$y(1/2)=2,\ y(1)=1,\ z(1/2)=15,\ z(1)=1.$

**14.** Найти минимум интеграла $J[y]=\int\limits_0^{\pi} y'^2(x)dx$ при условии

$$\int\limits_0^{\pi} y^2(x)dx=1,\quad y(0)=y(\pi)=0.$$

**15.** Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,0,-1)$ и $B(1,0,1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=0$.

**16.** Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

**17.** Найти расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y=\frac{2}{x}(x>0)$.

**18.** Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

**19.** Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $y^2=x$.

**20.** Найти кратчайшее расстояние от точки $M(0,0,3)$ до поверхности $z=x^2+y^2$.

## Литература

1. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и $z$-преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
2. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие для втузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 302 с.
3. Сборник задач по математике для втузов. : учеб. пособие : в 4 ч. / Э. А. Вуколов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. – 304 с.
4. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 504 с.
5. Карпук, А. А. Сборник задач по специальным главам высшей математики: Уравнения математической физики. Разностные уравнения. $Z$-преобразование. Дискретное преобразование Фурье / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : Харвест, 2006. – 112 с.
6. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева [и др.]. – М. : Физматлит, 2005. – 432 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Бабич** Александр Антонович
**Корсун** Лидия Дмитриевна

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

## Учебно-методическое пособие

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 11.06.21.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Цифровая печать. Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 3,47.
Изд. № 27.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель