ЭУМК «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА »

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Содержание

1	Матрицы. Определители	2
2	Системы линейных уравнений	5
3	Векторы и операции над ними	6
4	Прямая на плоскости. Кривые второго порядка на плоскости	8
5	Прямая и плоскость в пространстве	11
6	Поверхности второго порядка в пространстве	13
7	Линейные пространства. Евклидовы пространства	14
8	Линейные операторы	18
9	Квадратичные формы	22
	Контрольная работа 1	23
	Контрольная работа 2	40
	Ответы	69
	Литература	77

1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей? Как определяется размерность матрицы?
2. Какая матрица называется квадратной? диагональной? треугольной? единичной? Приведите примеры.
3. Какую матрицу называют транспонированной?
4. Сформулируйте правило сложения двух матриц.
5. Как составляется произведение двух матриц?
6. Какими свойствами обладает умножение матриц?
7. Что такое определитель?
8. Сформулируйте правила вычисления определителей второго и третьего порядков.
9. Как изменится определитель матрицы, если поменять местами два соседних столбца?
10. Чему равен определитель, у которого две строки пропорциональны?
11. Чему равен определитель произведения двух матриц?
12. Как изменится определитель, если какую-либо строку матрицы умножить на произвольное число?
13. Как меняется определитель при транспонировании?
14. Что называется минором элемента a_{ij}?
15. Что называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}?
16. Сформулируйте правило Лапласа для вычисления определителей.
17. Как вычислить определитель четвертого порядка?
18. Какая матрица называется невырожденной?
19. Дайте определение обратной матрицы?
20. Как найти матрицу, обратную к заданной невырожденной квадратной матрице?
21. Что называется рангом матрицы?
22. Какие преобразования матрицы не меняют ее ранга?
23. Как можно вычислить ранг матрицы?

Задачи и упражнения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Найти $A+B$, $3A-2B$, A^T.

2. Найти X из уравнения $3X+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A_{1\times 3}$, $B_{5\times 1}$ и $C_{3\times 5}$. Существует ли произведение: а) AB; б) AC; в) BA; г) CA; д) ABC; е) CBA?

4. Найти AB и BA, если: а) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

5. Вычислить $A^T B+3C$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

6. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Найти: а) $AB-2C^T$; б) ABC; в) CBA; г); CAB; д) B^T+2CA.

7. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=-x^2+4x-6$, а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

8. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}$; б) $A=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 121 & 283 \\ 221 & 183 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & -8 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

9. При каком значении a равен нулю определитель а) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 3-a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$?

10. Найти матрицу, обратную к данной, если она существует. Сделать проверку. а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$.

11. Вычислить определитель, пользуясь правилом Лапласа: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

12. Решить уравнение: а) $X\begin{pmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Найти ранг матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

14. Доказать, что произведение двух матриц вида $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$, где $\beta \in R,\ |\beta| < 1$, является матрицей такого же вида.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система уравнений называется линейной?
2. Что называется решением системы линейных уравнений?
3. В каком случае система линейных уравнений называется совместной? несовместной?
4. Какая система линейных уравнений называется невырожденной?
5. В чем заключается матричный метод решения невырожденных систем линейных уравнений?
6. Запишите формулы Крамера для решения невырожденных систем линейных уравнений?
7. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
8. В чем состоит суть метода Гаусса для решения произвольных систем линейных уравнений?
9. Какая система линейных уравнений называется однородной? Сколько решений может иметь однородная система уравнений?

Задачи и упражнения

1. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса: а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

3. Решить систему методом Гаусса

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

4. Решить системы однородных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины называются скалярными?
2. Какие величины называются векторными?
3. Что называется вектором?
4. Какие векторы называются ортогональными? коллинеарными? компланарными?
5. Как определяется произведение вектора на число?
6. Что называется суммой двух векторов?
7. Как определятся разность двух векторов?
8. Дайте определение проекции вектора на ось?
9. Какие векторы называются линейно зависимыми?
10. Дайте определение базиса на плоскости; в пространстве.
11. Что называется координатами вектора в заданном базисе?

12. Как определить координаты вектора в прямоугольной системе координат? Как вычислить координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

13. Как найти модуль вектора, заданного своими координатами?

14. Что называется скалярным произведением двух векторов?

15. Как выражается скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов?

16. Как найти угол между векторами, заданными своими координатами?

17. Что называется векторным произведением двух векторов?

18. Как выражается векторное произведение через координаты перемножаемых векторов?

19. Что называется смешанным произведением трёх векторов?

20. Каков геометрический смысл модуля смешанного произведения трёх некомпланарных векторов?

Задачи и упражнения

1. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}+\vec{b}$; г) $-3\vec{a}+\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(3;-2;6)$ и $\vec{b}=(-2;1;0)$. Найти координаты векторов $2\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$; $2\vec{a}+3\vec{b}$.

3. В некотором базисе векторы заданы координатами:
$\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{e}_1=(2;2;1)$, $\vec{e}_2=(0;4;8)$, $\vec{e}_3=(-1;-1;3)$. Убедиться, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3;4;-5)$, $B(-1;8;-3)$.

5. Разложить вектор $\vec{a}=8\vec{i}+10\vec{j}$ по базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, если $\vec{e}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e}_2=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

6. Зная, что $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$, вычислите: а) $\vec{a}^2$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; в) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

7. Найти косинусы углов BAC и ABC, если $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;-3)$.

8. Каким должно быть число α, чтобы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ были ортогональны?

9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: а) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$; б) $\left|\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)\right|$.

10. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{b} - \vec{a}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

11. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$. Найти площадь треугольника ABC и длину высоты h_{AB}.

12. Являются ли компланарными векторы $\bar{a} = 5\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ и $\bar{c} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$?

13. Правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (5;1;-2)$, $\vec{b} = (-3;0;2)$, $\vec{c} = (2;1;-1)$?

14. Лежат ли точки $A(3;1;4)$, $B(-1;1;6)$, $C(5;2;2)$, $D(-1;6;1)$ в одной плоскости?

15. Объём пирамиды с вершинами в точках $A(4;1;-2)$, $B(6;3;7)$, $C(2;3;1)$, $D(x;-4;8)$ равен $51\frac{1}{3}$ куб. ед. Найти x.

4. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите общее уравнение прямой.
2. Каков геометрический смысл коэффициентов при x и y в общем уравнении прямой?
3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно к вектору $\vec{n}(A, B)$.
4. Записать каноническое и параметрические уравнения прямой и указать геометрический смысл входящих в них параметров.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом и указать геометрический смысл входящих в него параметров.
7. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых?

8. Что называется эллипсом? Записать каноническое уравнение эллипса.

9. Что называется гиперболой? Каково каноническое уравнение гиперболы?

10. Что называется асимптотой кривой?

11. Что называется параболой? Записать каноническое уравнение параболы.

12. Что называется эксцентриситетом эллипса? гиперболы?

Задачи и упражнения

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$:

а) параллельно оси Ox; Oy;

б) параллельно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

в) перпендикулярно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

г) и точку пересечения прямых $3x-2y-4=0$ и $2x-y-3=0$;

д) и образующей с осью абсцисс угол, равный $3\pi/4$;

е) и отсекающей на оси Ox отрезок, равный $a=-2$;

ж) параллельно прямой $3x-2y-4=0$;

з) перпендикулярно прямой $3x-2y-4=0$.

2. Найти один из углов между прямыми:

а) $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7$;

б) $4x+10y-3=0$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{5}$;

в) $\begin{cases} x=4, \\ y=t+7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=\sqrt{3}t+2. \end{cases}$

3. Определить при каком значении параметра α прямые $(\alpha-1)x+2\alpha y+5=0$ и $\alpha x+4\alpha y-6=0$: а) параллельны; б) совпадают; взаимно перпендикулярны.

4. Найти длину высоты, проведённой из вершины A треугольника ABC, если: $A(4;-3)$, $B(1;1)$, $C(-3;-2)$.

5. Найти расстояние между прямыми $12x-5y-26=0$ и $12x-5y+13=0$.

6. Прямые $3x+4y-30=0$ и $3x-4y+12=0$ касаются окружности, радиус которой равен $R=5$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведенными в точки касания.

7. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси *Ox*, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3;

б) большая ось равна 26, эксцентриситет равен 5/13;

9. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$ и имеющей центр в точке $A(0;6)$.

10. Записать уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2+5y^2=30$.

11. Построить параболу, найти ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы $x^2=6y$.

12. Определить, при каком значении k прямая $y=kx+2$:

а) пересекает параболу $y^2=4x$; б) касается ее; в) проходит вне параболы.

13. Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить в системе координат *xOy*:

а) $x^2+y^2-4x+6y+1=0$;

б) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$;

в) $4x^2+y^2-40x+2y+101=0$;

г) $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$;

д) $x^2+y^2-x=0$;

е) $2y^2-4y+5=0$.

5. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы для самоконтроля

1. Записать общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл коэффициентов при x, y, z в общем уравнении плоскости?
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
3. Запишите уравнение плоскости по трем точкам; в отрезках по осям; нормальное уравнение
4. Сформулируйте условия параллельности (перпендикулярности) двух плоскостей.
5. Как найти угол между двумя плоскостями?
6. Как найти расстояние от точки до плоскости?
7. Записать канонические уравнения прямой в пространстве и указать геометрический смысл входящих в него параметров.
8. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
9. Запишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно данному вектору.
10. Как перейти от общего уравнения прямой в пространстве к каноническим?
11. Как найти угол между прямыми в пространстве?
12. Сформулируйте условия параллельности двух прямых в пространстве.
13. Как найти расстояние от точки до прямой в пространстве?

Задачи и упражнения

1. Записать уравнение плоскости:

а) проходящую через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{DC}$, если $C(3;-5;0)$, $D(2;3;4)$; б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3;1;-5)$;

в) проходящую через точку $M_0(7;-3;5)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки; г) параллельную оси Ox и проходящую через точки $M_1(7;-3;5)$ и $M_2(-3;1;-5)$.

2. Найти длины отрезков отсекаемых на осях координат плоскостью $3x-2y+z-6=0$.

3. Проверить, лежат ли точки $M_1(2;-1;3)$, $M_2(1;4;5)$, $M_3(2;0;5)$, $M_4(1;2;3)$ в одной плоскости.

4. Найти угол между плоскостями $x+2y-z+5=0$ и $2x-y+z-3=0$.

5. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+6z-21=0$ и $4x-6y+12z+35=0$.

6. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно вектору $\bar{s}(3;-7;5)$;

б) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно оси Ox;

в) проходящей через точку $N(-2;0;4)$ перпендикулярно к плоскости xOy;

г) проходящей через точку $M(-4;2;1)$ перпендикулярно векторам $\vec{a}(3;1;-1)$ и $\vec{b}(1;-2;1)$.

7. Записать в каноническом виде уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t-3, \\ z = 3t-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+x-1=0, \\ 3x+2y+z-2=0; \end{cases}$

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами в точках $A(-3;2;1)$, $B(1;-1;0)$, $C(2;3;-5)$.

9. Найти угол между прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-5}{-1}$; б) $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 6x-3y+2z=0 \end{cases}$ и осью Oy.

10. Найти расстояние между прямыми:

а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ и $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.

11. Установить взаимное расположение прямых:

а) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{5}$;

б) $\begin{cases} x-y+3z-6=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-t \\ y=-5+2t \\ z=3t \end{cases}$

12. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ и плоскостью $x+2y-z+5=0$.

13. Найти значение параметра α, при котором прямая $\dfrac{x-5}{\alpha}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$ перпендикулярна к плоскости $2x+8y-16z+7=0$.

14. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-4=0, \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ и плоскости $x-2y+z=0$.

15. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $C(1;3;5)$ и прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$.

6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы для самоконтроля

1. Какая поверхность называется эллипсоидом?
2. Какая поверхность называется однополосным гиперболоидом? двуполостным гиперболоидом?
3. Какая поверхность называется эллиптическим параболоидом? гиперболическим параболоидом?
4. Какая поверхность называется цилиндрической? дать определения образующей и направляющей.
5. Какая поверхность называется конической?
6. Какая поверхность называется поверхностью вращения?

Задачи и упражнения

1. Выяснить, какие фигуры заданы в прямоугольной системе координат в пространстве следующими уравнениями:

а) $x^2+y^2-z^2-2x-4y+2z+4=0$;

б) $x^2+y^2+z^2-12x-6y-37=0$;

в) $3x^2-9y^2+4z^2+36=0$;

г) $x^2+2y^2+6x-18y-12z+47=0$;

д) $4x^2+2y^2-z^2-16x-4y-8z-6=0$;

е) $3x^2-y^2-2z^2+42x-8y-20z+81=0$;

ж) $x^2+y^2+x+y=0$;

з) $5x^2-2z^2-30x-10y-4z+13=0$;

и) $2x^2+3y^2+4z^2-8x-18y+8z+39=0$;

2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$ вокруг оси Oy.

3. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного пространства.
2. Сформулируйте аксиомы сложения и умножения на число в линейном пространстве.
3. Какие следствия из аксиом линейного пространства Вы знаете?
4. Приведите примеры линейных пространств.
5. Сформулируйте определение линейного подпространства.
6. Необходимое и достаточное условие того, чтобы подмножество линейного пространства было подпространством.
7. Что называется размерностью линейного пространства?
8. В каком случае пространство является бесконечномерным?
9. В каком случае пространство является конечномерным?
10. Дайте определение базиса в линейном пространстве.
11. Что называется координатами вектора в выбранном базисе?
12. Чему равны координаты суммы векторов?
13. Чему равны координаты разности векторов?
14. В каком случае два вектора равны друг другу?
15. Как изменятся координаты вектора при умножении вектора на число?

16. Что называется скалярным произведением векторов в линейном пространстве?

17. Сформулируйте определение евклидова пространства.

18. Что называется длиной вектора в евклидовом пространстве?

19. Что называется углом между векторами в евклидовом пространстве?

20. Сформулируйте неравенство Коши-Буняковского.

21. Неравенство треугольника.

22. Какая система векторов называется ортонормированной?

23. Алгоритм ортогонализации системы линейно независимых векторов.

24. Запись скалярного произведения векторов в матричной форме.

25. Какова связь между координатами вектора в старом базисе и координатами вектора в новом, если матрицей перехода от старого базиса к новому является матрица P ?

26. Какова связь между координатами вектора в новом базисе и координатами вектора в старом, если матрицей перехода от старого базиса к новому является матрица P ?

Задачи и упражнения

1. Являются ли действительными линейными пространствами следующие множества чисел с обычными операциями сложения и умножения:

а) $\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел;

б) $\mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел;

в) $\mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел?

2. Являются ли действительными линейными пространствами множества обычных векторов в пространстве, если сложение векторов и умножение на число определяются правилами векторной алгебры:

а) V_1 – множество всех векторов, параллельных заданной прямой;

б) V_2 – множество всех векторов, параллельных заданной плоскости;

в) V_3 – множество всех векторов, не параллельных заданной прямой?

3. Являются ли действительными линейными пространствами множества матриц с обычными операциями сложения и умножение на число? В случае положительного ответа укажите какой-либо базис.

а) множество всех матриц;

б) множество всех прямоугольных $m \times n$ матриц с действительными элементами;

в) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha,\ \beta,\ \gamma \in R \right\}$;

г) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha,\ \beta \in R \right\}$.

4. Над функциями $f(x)$ и $g(x)$ определены операции сложения и умножения на число по обычным правилам. Выяснить, являются ли линейными пространствами множества функций:

а) множество всех многочленов степени не более, чем n, дополненное нулевым многочленом;

б) множество всех многочленов степени n;

в) множество всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=1$;

г) множество всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(0)=0$;

д) множество всех непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций;

е) множество всех разрывных на отрезке $[a;\ b]$ функций;

ж) множество всех интегрируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций.

5. Исследовать, являются ли данные векторы (функции) линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

а) $\{5;3;1\}, \{1;1;1\}, \{1;4;2\}$;

б) $\{1;2;5\}, \{5;3;1\}, \{-15;-2;21\}$;

в) $x^2+5, x^2-4x+3, x^2+16x+13$;

г) $z_1 = 2+5i, z_2 = 1-i, z_3 = 6+29i$;

д) $\sin x, \cos x, \sin 2x$;

е) $\sin x, \sin(x+2), \cos(x-5)$.

6. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и матрицу перехода от базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если:

а) $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = e_3$, $c = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$;

б) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $\vec{b} = 3\vec{e}_3 - \vec{e}_2$, $\vec{c} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

7. Найти координаты вектора x в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, если $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + +3\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$, $\vec{x} = \vec{e}_1' - 3\vec{e}_2'$.

8. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + +3\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$.

9. Даны два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$, если:

а) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$, $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + +\vec{e}_3$;

б) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' == \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

10. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ к базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

а) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, $\vec{b}_1 = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{e}_2$;

б) $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$, $\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_1$.

11. Записать матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$, найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этих базисах, если:

а) $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_1' = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{e}_2' = -5\vec{i} - 4\vec{j}$,

$\vec{a} = 10\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i}$;

б) $\vec{e}_1 = \{1; 2; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 3; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{3; 7; 1\}$, $\vec{e}_1' = \{3; 1; 4\}$, $\vec{e}_2' = \{5; 2; 1\}$, $\vec{e}_3' = \{1; 1; -6\}$, $\vec{a} = \{9; 4; -1\}$;

в) $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$, $\vec{e}_1' = 2$, $\vec{e}_2' = x - 1$, $\vec{e}_3' = (x-1)^2$, $\vec{a} = 6x^2 - 4x + 5$, $\vec{b} = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$.

12. Является ли евклидовым пространство R^2, если паре векторов $\vec{x} = \{x_1; x_2\}$, $\vec{y} = \{y_1; y_2\}$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1 + x_2y_2$; б) $x_1x_2y_1y_2$?

13. В пространстве $C_{[a;b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций скалярное произведение задано формулой:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Найти:

а) длину вектора $\sin x + \cos x$, если $a = -\pi, b = \pi$;

б) скалярное произведение векторов x и e^x;

в) угол между векторами $\sin x$ и $\cos x$, если $a = -\pi, b = \pi$.

14. Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве следующие системы векторов, заданные в ортонормированном базисе:

а) $\{0; 1; 0\}, \{-6; 0; 4\}$;

б) $\{1; 1; 3\}, \{-1; -2; 1\}, \{7; -4; -1\}$;

в) $\{2; 1; -1\}, \{-1; 2; 0\}, \{0,1,1\}$?

15. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве $C_{[-1;1]}$:

а) $1, x^2$; б) x^2, x^3;

в) $1, \sin \pi x, \cos \pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \ldots, \sin n\pi x, \cos n\pi x$?

16. Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе:

а) $\vec{x}_1 = \{3; 4\}, \vec{x}_2 = \{-1; 2\}$;

б) $\vec{x}_1 = \{1; 2; 3\}, \vec{x}_2 = \{0; 2; 0\}, \vec{x}_3 = \{0; 0; 3\}$;

в) $\vec{x}_1 = \{1; 2; 3\}, \vec{x}_2 = \{0; 3; -2\}, \vec{x}_3 = \{0; 1; -1\}$.

17. Даны векторы евклидова пространства E^n,.заданные координатами в некотором ортонормированном базисе. Найти длины векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, скалярное произведение векторов, косинус угла φ между векторами, если

а) $\vec{x} = (2;\ -1),\ \vec{y} = (0;\ -3)$;

б) $\vec{x} = (0;\ 3;\ 1),\ \vec{y} = (-1;\ 0;\ 2)$;

в) $\vec{x} = (5;\ 0;\ -12;\ 0),\ \vec{y} = (-3;\ 1;\ 0;\ 2)$.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение линейного оператора.
2. Что из себя представляет матрица линейного оператора в выбранном базисе?
3. Запишите линейный оператор в матричной форме.
4. Что называется суммой линейных операторов?
5. Чему равна матрица суммы линейных операторов?
6. Как изменится матрица линейного оператора при умножении на число?
7. Чему равна матрица произведения линейных операторов?
8. Что называется обратным оператором? Чему равна его матрица?
9. Как изменится матрица линейного оператора при переходе к новому базису?
10. Какие линейные операторы называются ортогональными? Приведите примеры.
11. Дайте определение собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.
12. Свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.
13. Сформулируйте алгоритм отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы линейного оператора.
14. Что называется характеристическим многочленом матрицы?
15. Зависит ли характеристический многочлен матрицы от выбранного базиса?

16. Какая матрица называется подобной заданной матрице A ?

17. Какая матрица называется симметрической?

18. Какой оператор называется самосопряженным.

19. Необходимое и достаточное условие того, чтобы линейный оператор был самосопряженным?

20. Свойства самосопряженных операторов.

21. Сформулируйте алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.

Задачи и упражнения

1. Является ли линейным каждый из операторов $f: R \to R$, заданных следующим образом:

а) $f(x) = 3x$; б) $f(x) = 2^x$; в) $f(x) = 2x + 5$.

2. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ определяет линейный оператор двумерного векторного пространства на плоскости как зеркальное отражение относительно биссектрисы $y = x$.

3. Записать матрицу зеркального отражения векторов плоскости xOy относительно прямой $y = -x$.

4. Выяснить, какие из указанных операторов $f: V_3 \to V_3$, где V_3 – пространство свободных векторов, являются линейными. Найти матрицы линейных операторов в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Каждый оператор описывается своим действием на произвольный вектор $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$:

а) $f(\vec{x}) = \vec{0}$;

б) $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{i}$;

в) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x})\vec{x}$, где $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

г) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x})\vec{a}$, где $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

д) $f(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$, где $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

е) $f(\vec{x}) = x_1\vec{i}$;

ж) $f(\vec{x}) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$.

Указать геометрический смысл преобразований е) и ж).

5. В базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ заданы вектор $\vec{x}$ и матрица A линейного оператора f. Найти координаты вектора $f(\vec{x})$ в этом базисе:

а) $\vec{x}=(1;2;-1)$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

б) $\vec{x}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+3\vec{e}_3$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

6. Выяснить, существует ли линейный оператор в двумерном пространстве, переводящий векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ соответственно в векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, и найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, если $\vec{a}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $\vec{a}_2=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{b}_1=6\vec{e}_1+9\vec{e}_2$, $\vec{b}_2=11\vec{e}_1-8\vec{e}_2$.

7. Выяснить, существует ли линейный оператор в трехмерном пространстве, переводящий векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ соответственно в векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов, если:

а) $\vec{a}_1=(2;3;5)$, $\vec{a}_2=(0;1;2)$, $\vec{a}_3=(1;0;0)$,
$\vec{b}_1=(1;1;1)$, $\vec{b}_2=(1;1;-1)$, $\vec{b}_3=(2;1;2)$;

б) $\vec{a}_1=(1;2;0)$, $\vec{a}_2=(1;1;1)$, $\vec{a}_3=(2;3;1)$,
$\vec{b}_1=(1;1;1)$, $\vec{b}_2=(1;1;0)$, $\vec{b}_3=(1;0;0)$.

8. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases}x_1=3y_1+y_2-2y_3\\ x_2=3y_3\\ x_3=y_1-2y_2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}y_1=z_1-2z_2\\ y_2=2z_1-3z_2+4z_3\\ y_3=3z_1+z_2-2z_3\end{cases}$$

Найти линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

9. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+3y_3\\ x_2=2y_1+y_2-2y_3\\ x_3=y_1-y_3\end{cases} \text{ и } \begin{cases}y_1=2z_1-z_2\\ y_2=z_1+z_2-z_3\\ y_3=3z_1-2z_2+4z_3\end{cases}$$

Найти линейное преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

10. Дано линейное преобразование

$$\begin{cases}x_1=3y_1+y_2-5y_3,\\ x_2=y_1+2y_2-4y_3,\\ x_3=3y_1+2y_2-y_3.\end{cases}$$

Найти обратное преобразование.

11. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

г) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + +\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

12. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов вещественного линейного пространства, заданных матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Выяснить, приводится ли в вещественном пространстве матрица к диагональному виду (в случае приводимости записать диагональный вид матрицы с точностью до диагональных элементов):

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. В некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейный оператор f задан матрицей A. В вещественном линейном пространстве найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$.

15. Найти ортогональную матрицу, диагонализирующую симметрическую матрицу A, и записать диагональный вид этой матрицы, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение квадратичной формы.
2. Что называется матрицей квадратичной формы?
3. Какая квадратичная форма называется квадратичной формой канонического вида?
4. Сформулируйте алгоритм приведения канонической формы к каноническому виду.
5. Что называется главными направлениями квадратичной формы?

Задачи и упражнения

1. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы, если:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

б) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_2^2$;

в) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1x_2$;

г) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

е) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

ж) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. Привести к каноническому виду следующие уравнения второго порядка.

а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 12y + 10 = 0$;

б) $x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y - 1 = 0$;

в) $5x^2 + 12xy + 3\sqrt{13}x - 36 = 0$;

г) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$.

3. Исследовать на знакоопределенность каждую из данных квадратичных форм.

а) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

в) $x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3$;

г) $6x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

д) $-8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Найти значение многочлена $f(x)=3x^2+2x-6$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Найти длину вектора $\vec{a}=3\vec{m}+4\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\overline{2p}+3\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=3, |\vec{q}|=4,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(3;1;-1), *B*(2;2;1), *C*(3;-3;0), *D*(2;1;4).

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-2;0), В(1;2), *C*(-1;-2). Найти: а) точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Выяснить, принадлежат ли точки $M_1(3;0;1), M_2(-1;2;0), M_3(0;0;-1)$, $M_4(2;3;1)$ одной плоскости.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 10, а эксцентриситет 0,6.

Вариант 2

1. Найти значение многочлена $f(x)=x^2-2x+3$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$$

3. Найти $\left(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны вершины пирамиды *A*(0;6;4), *B*(3;5;3), *C*(-2;11;-5), *D*(1;-1;4). Найти длину высоты, проведённой из вершины *A* к грани *BCD*.

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(2;-4), *B*(-3;-2), *C*(0;-2). Найти длины высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Найти расстояние от точки *D* до плоскости *ABC*, если *A*(2;4;1), *B*(-3;-2;4), *C*(3;5;-2), *D*(4;2;-3).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 3, а эксцентриситет 5/3.

Вариант 3

1. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(4;6;3), *B*(5;2;6), *C*(4;-4;-3), *D*(8;-2;4).

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(2;4), *B*(3;1), *C*(-1;2). Найти: точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Найти расстояние между плоскостями $x - 2y - 2z + 7 = 0$, $2x - 4y - 4z + 17 = 0$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8 и расстояние между фокусами 8.

Вариант 4

1. Найти значение многочлена $f(x)=3x^2-x-4$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-8\\ 3x_1+x_2+2x_3=5\\ 2x_1-x_2+5x_3=-7\end{cases}$$

3. Найти длину вектора $2\vec{m}+\vec{n}$, если $|\vec{m}|=\sqrt{2}$, $|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=3\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(-7;-5;6), *B*(-2;5;-3), *C*(3;-2;4), *D*(1;2;2).

6. Найти расстояние между прямыми $3x-4y+25=0$ и $6x-8y-50=0$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A*(2;4;1), *B*(-3;-2;4), *C*(3;5;-2), *D*(4;2;-3).

8. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку (4;6), фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы $x^2-y^2=8$.

Вариант 5

1. Найти значение многочлена $f(x)=-x^2+2x-3$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=-4\\ 3x_1-2x_2+4x_3=7\\ x_1-5x_2+3x_3=3\end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = m\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ ортогональны?

4. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить длину высоты пирамиды *ABCD*, проведённой из вершины *D* на грань *ABC*, если *A*(4;6;3), *B*(5;2;6), *C*(4;-4;-3), *D*(8;-2;4).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 2.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A*(3;4;5), *B*(1;2;1), *C*(-2;-3;6), *D*(3;-6;-3).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(6;\sqrt{22})$, если ее действительная полуось равна 5.

Вариант 6

1. Найти значение многочлена $f(x) = -2x^2 + x - 10$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-1;-2;4), *B*(-4;-2;0), *C*(3;-2;1). Вычислить внешний угол при вершине *B*.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(-4;-5;-3), *B*(3;1;2), *C*(5;7;-6), *D*(6;-1;5).

6. Даны вершины треугольника ABC: *A*(-4;2), *B*(3;5), *C*(0;1). Найти точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (0;1;-4) параллельно прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2+y^2+4x-2y-4=0$.

Вариант 7

1. Найти значение многочлена $f(x)=4x^2-x+1$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3=3 \\ x_1+2x_2-x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-3 \end{cases}$$

3. Найти $\left(2\vec{a}-5\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны вершины пирамиды A(2;-3;1), B(0;1;4), C(5;2;-3), D(3;-6;-3). Найти длину высоты, проведённой из вершины A к грани BCD.

6. Даны вершины треугольника ABC: A(1;1), B(-2;3), C(4;7). Составить уравнение медианы, проведённой из вершины A.

7. Найти расстояние между плоскостями $2x-y+3z-5=0$ и $4x-2y+6z+3=0$.

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $4x^2-y^2-8x-4y-4=0$.

Вариант 8

1. Найти значение многочлена $f(x)=2x^2+2x-1$ от матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -5 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A(-4;-5;-3), B(3;1;2), C(5;7;-6), D(6;-1;5).

6. Даны вершины треугольника ABC: A(-4;2), B(3;5), C(0;1). Найти точку пересечения высоты CN и медианы AM.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(1;-2;3) параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(3;4;5)$, $M_1(2;0;-1)$.

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(6;\sqrt{22})$, если ее действительная полуось равна 5.

Вариант 9

1. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных с помощью формул Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b})$, где $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$; $\vec{m}$, $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны точки A(2;-3;1), B(0;1;4), C(5;2;-3), D(3;-6;-3). Найти угол ABC.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M(5;0) и точку пересечения прямой $3x-2y+4=0$ с осью y.

7. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC, если A(3;4;5), B(1;2;1), C(-2;-3;6), D(3;-6;-3).

8. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось равна 6, а эксцентриситет 0,5.

Вариант 10

1. Найти значение многочлена $f(x)=-2x^2+x+2$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=7\\ 3x_1-x_2-2x_3=-2\\ 2x_1-x_2-x_3=-3\end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a}=-5\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=m\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$ ортогональны?

4. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-3\vec{q}$.Известно,что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=4,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить длину высоты пирамиды $ABCD$, проведённой из вершины D на грань ABC, если A(4;6;3), B(5;2;6), C(4;-4;-3), D(8;-2;4).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (-3;2) перпендикулярно к прямой $3x+2y-4=0$.

7. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+z-1=0$, $6x-9y+3z+5=0$.

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2+y^2-x-y=0$.

Вариант 11

1. Найти значение многочлена $f(x)=2x^2+x-6$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=0\\ 3x_1+x_2+x_3=6\end{cases}$$

3. Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$, если $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=3, |\vec{q}|=1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A(2;-4;-2), B(7;3;0), C(3;5;-7), D(3;4;-4).

6. Даны вершины треугольника ABC: A(2;4) , B(3;1) , C(-1;2) Найти точку пересечения высоты CN и медианы AM.

7. Проверить, лежат ли точки $M_1(-1;2;3), M_2(0;4;-1), M_3(2;3;1)$, $M_4(-2;1;0)$ в одной плоскости.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 10, а эксцентриситет 0,6.

Вариант 12

1. Найти значение многочлена $f(x)=2x^2-5x+1$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}3x_1-x_2-3x_3=-2\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+3x_3=6\end{cases}$$

3. Найти $\left(2\vec{a}-3\vec{b},4\vec{a}-\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$ $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны вершины пирамиды *A*(0;6;4), *B*(3;5;3), *C*(-2;11;-5), *D*(1;-1;4). Найти объем пирамиды *ABCD*.

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4;6), *B*(5;2), *C*(4;-4). Найти длины высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A* (-8;2;7), *B* (3;-5;9), *C* (2;4;-6), *D* (4;6;-5).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 3, а эксцентриситет 5/3.

Вариант 13

1. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 \qquad + \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 8\vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(2;-4;-2), *B*(7;3;0), *C*(3;5;-7), *D*(3;4;-4).

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(2;4) , B(3;1) , *C*(-1;2). Найти точку пересечения высоты *CH* и медианы *AK*.

7. Найти расстояние между плоскостями $x - 2y - 2z + 7 = 0$, $2x - 4y - 4z + 17 = 0$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8 и расстояние между фокусами 8.

Вариант 14

1. Найти значение многочлена $f(x) = -4x^2 - x + 1$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

3. Найти длину вектора $2\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = \sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 2$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 3\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(1;3;2), *B*(-2;4;-1), *C*(1;3;-2), *D*(4;6;-7).

6. Найти расстояние между прямыми $3x - 4y + 25 = 0$ и $6x - 8y - 50 = 0$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A* (5;3;6), *B* (-3;-4;4), *C* (5;-6;8), *D* (4;0;-3).

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$.

Вариант 15

1. Найти значение многочлена $f(x) = -x^2 + x - 4$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера
$$\begin{cases} -x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

3. Найти $(\vec{a},\vec{b})$, если $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=3, |\vec{q}|=1$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить длину высоты пирамиды *ABCD*, проведённой из вершины *D* на грань *ABC*, если *A*(2;-4;-2), *B*(7;3;0), *C*(3;5;-7), *D*(3;4;-4).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 2.

7. Найти расстояние от точки *D* до плоскости *ABC*, если *A* (5;3;6), *B* (-3;-4;4), *C* (5;-6;8), *D* (4;0;-3).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(6;\sqrt{22})$, если ее действительная полуось равна 5.

Вариант 16

1. Найти значение многочлена $f(x)=-2x^2+x-9$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}5x_1-4x_2+x_3=-4\\ -4x_1+6x_2+2x_3=6\\ -x_1+4x_2+5x_3=0\end{cases}$$

3. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-1;-2;4), *B*(-4;-2;0), *C*(3;-2;1). Вычислить внешний угол при вершине *B*.

4. Даны векторы $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A* (-8;2;7), *B* (3;-5;9), *C* (2;4;-6), *D* (4;6;-5).

6. Даны вершины треугольника ABC: *A*(-4;2), *B*(3;5), *C*(0;1). Найти точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM* .

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3;4;-0) и прямую $\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 3+2y, \\ z = -1+3t. \end{cases}$

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

Вариант 17

1. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - x + 1$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Найти $\left(-2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{a} + 4\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$.Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны вершины пирамиды A(2;-4;-2), B(7;3;0), C(3;5;-7), D(3;4;-4). Найти длину высоты, проведённой из вершины A к грани BCD.

6. Даны вершины треугольника ABC: A(1;1), B(-2;3), C(4;7). Составить уравнение медианы, проведённой из вершины A.

7. Найти расстояние между плоскостями $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $4x - 2y + 6z + 3 = 0$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, который проходит через точки $(\sqrt{3};-2)$ и $(2\sqrt{3};1)$.Найти его эксцентриситет.

Вариант 18

1. Найти значение многочлена $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=-2\\ -x_1+2x_2-x_3=-2\\ 5x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+7\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=1, |\vec{q}|=2,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках A(3;-2;6), B(-6;-2;3), C(1;1;-4), D(4;6;-7).

6. Даны вершины треугольника ABC: A(-4;2), B(3;5), C(0;1). Найти точку пересечения высоты CN и медианы AM.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку А(1;-2;3) параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(3;4;5)$, $M_1(2;0;-1)$.

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2-4y^2=16$.

Вариант 19

1. Найти значение многочлена $f(x)=-2x^2+x-1$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных с помощью формул Крамера

$$\begin{cases}4x_1+x_2+3x_3=1\\ 8x_1-x_2+7x_3=7\\ 2x_1+4x_2+5x_3=4\end{cases}$$

3. Вычислить $(\vec{a},\vec{b})$, где $\vec{a}=3\vec{m}-4\vec{n}$; $\vec{b}=\vec{m}+3\vec{n}$; $\vec{m}$, $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны точки *A*(-2;0;1), *B*(1;2;0), *C*(-1;-2;2), *D* (4;6;-5). Найти угол *ABC*.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *M*(-2;4) перпендикулярно к прямой $3x-7y+2=0$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A* (-4;-7;-3), *B* (-4;-5;7), *C* (2;-3;3), *D* (3;2;1).

8. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояния от одного из фокусов до концов его большой оси равны 7 и 1.

Вариант 20

1. Найти значение многочлена $f(x)=-2x^2+3x+1$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=3\\ 2x_1-x_2+3x_3=0\\ 3x_1-5x_2+4x_3=-3\end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a}=-3\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=m\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$ ортогональны?

4. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-3\vec{q}$.Известно,что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=4,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить длину высоты пирамиды *ABCD*, проведённой из вершины *D* на грань *ABC*, если *A*(3;-2;6), *B*(-6;-2;3), *C*(1;1;-4), *D*(4;6;-7).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку (-2;2) перпендикулярно к прямой $x+2y-4=0$.

7. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+z-1=0$, $6x-9y+3z+5=0$.

8. Определить вид фигуры и изобразить ее $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

Вариант 21

1. Найти значение многочлена $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

3. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \pi/3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(3;2;-1), *B*(2;2;1), *C*(3;-3;0), *D*(-2;1;4).

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-1;0), B(1;3), *C*(-1;5). Найти точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Выяснить, принадлежат ли точки $M_1(3;2;1)$, $M_2(5;2;0)$, $M_3(0;0;-1)$, $M_4(2;3;1)$ одной плоскости.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 10, а эксцентриситет 0,6.

Вариант 22

1. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 - x + 4$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$

3. Найти $\left(2\vec{a}-3\vec{b},4\vec{a}-\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Даны вершины пирамиды *A*(0;6;4), *B*(3;5;3), *C*(-2;11;-5), *D*(1;-1;4). Найти длину высоты, проведённой из вершины *A* к грани *BCD*.

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(2;-2), *B*(6;-2), *C*(0;-2). Найти уравнение медианы *AM*.

7. Найти расстояние от точки *D* до плоскости *ABC*, если *A*(3;0;1), *B*(-3;-2;4), *C*(3;5;-2), *D*(4;2;-3).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 3, а эксцентриситет 5/3.

Вариант 23

1. Найти значение многочлена $f(x)=-3x^2+x-1$ от матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-1 \\ x_1-2x_2+3x_3=15 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+2\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-4\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(3;6;3), *B*(5;2;6), *C*(4;-4;-3), *D*(1;-2;4).

6. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(2;5), *B*(5;1), *C*(-1;2). Найти точку пересечения высоты *CN* и медианы *AM*.

7. Найти расстояние между плоскостями $x-2y-2z+7=0$, $2x-4y-4z+17=0$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8 и расстояние между фокусами 8.

Вариант 24

1. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - x - 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Найти длину вектора $2\vec{m} + 3\vec{n}$, если $|\vec{m}| = \sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках *A*(0;-5;6), *B*(-2;5;-3), *C*(3;-2;4), *D*(1;2;2).

6. Найти расстояние между прямыми $3x - 4y + 25 = 0$ и $6x - 8y - 50 = 0$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A*(3;4;1), *B*(-3;0;4), *C*(3;5;-2), *D*(4;2;-3).

8. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку (4;6), фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы $x^2 - y^2 = 8$.

Вариант 25

1. Найти значение многочлена $f(x) = -x^2 + x - 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = m\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$ ортогональны?

4. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1,$ угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Вычислить длину высоты пирамиды *ABCD*, проведённой из вершины *D* на грань *ABC*, если *A*(4;6;3), *B*(5;2;6), *C*(4;-4;-3), *D*(8;-2;4).

6. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 2.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *D*, перпендикулярно плоскости (*ABC*), если *A*(4;4;5), *B*(0;2;1), *C*(-2;-3;6), *D*(3;2;-3).

8. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(6;\sqrt{22})$, если ее действительная полуось равна 5.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$x^2 + 5,\ x^2 - 4x + 3,\ x^2 + 16x + 13.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(3,1,0),\ (1,1,1),\ (1,0,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Вариант 2

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$2x - 4,\ x^2 - 1,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + 3y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = -z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 + z_2 + 4z_3 \\ y_3 = z_1 + 2z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 3x_1{}^2 - 2x_1x_2 - x_2{}^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + 10x_3{}^2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3.$$

Вариант 3

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$7x^2-4x+1,\ 2x^2-2,\ 5x^2-4x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,0,1),\ (0,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 2y_2 - y_3 \\ x_2 = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = -2y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 3z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_1 + 3z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 3x_2^2 - 10x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Вариант 4

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2 + 2x - 3,\ -x^2 + 2x - 3,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_3 = 2z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=x_1^2-6x_1x_2+x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=-14x_1^2-2x_2^2-9x_3^2+6x_1x_2+18x_1x_3-8x_2x_3.$$

Вариант 5

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2+2x-3,\ -x^2+2x-3,\ 5x^2-8x+11.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases}x_1=-y_1-2y_2-y_3\\ x_2=y_1+2y_2+3y_3\\ x_3=y_1-5y_2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}y_1=-3z_1-2z_2+z_3\\ y_2=2z_1-z_2+3z_3\\ y_3=z_1+4z_2+3z_3\end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, если:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2,\ \vec{e}_2{}'=-2\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 16x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 18x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Вариант 6

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$x^2 + 2x - 5,\ x^2 - 1,\ 3x^2 - 6x + 9.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + 4y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = -2z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = -3z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \ \vec{e}\,'_1 = -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \ \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^{\,2} - 4x_1x_2 - 3x_2^{\,2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^{\,2} - 5x_2^{\,2} - 19x_3^{\,2} + 18x_1x_2 + 30x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

Вариант 7

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$4x^2 - 4, \ 5x^2 - 4x + 3, \ 7x^2 - 10x + 13.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (3,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = 5y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + 5z_3 \\ y_3 = z_1 - 3z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,\ \ \vec{e}\,'_2 = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -23x_1^2 - 2x_2^2 - 10x_3^2 + 6x_1x_2 + 24x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Вариант 8

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$8x^2-4x,\ 8x^2-6x+4,\ x^2-6x+11.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 5y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 7y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = 2z_1 + 2z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = z_1 - 5z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1\,' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2\,' = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=2x_1^{\,2}+x_1x_2+3x_2^{\,2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=7x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+10x_3^{\,2}-6x_1x_2-16x_1x_3+8x_2x_3.$$

Вариант 9

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$4x^2-4x+4,\ -4x^2+6x-8,\ -11x^2+6x-1.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,-1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,0,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=-3y_1+y_2-y_3 \\ x_2=3y_1+4y_2+3y_3 \\ x_3=y_1-2y_2-y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=z_1-2z_2+z_3 \\ y_2=2z_1+3z_2+z_3 \\ y_3=z_1+z_2-3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1'=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=-3\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=-3x_1^2-8x_1x_2-x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2-2x_2^2-6x_3^2+6x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3.$$

Вариант 10

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-6x^2+2x+2,\ 2x^2+2x-6,\ x^2-2x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,-1,-1),\ (-1,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=-5y_2-y_3 \\ x_2=y_1+3y_2+3y_3 \\ x_3=3y_1+2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=-z_1-2z_2+z_3 \\ y_2=-2z_1-z_2+4z_3 \\ y_3=-2z_1+z_2+3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}'=3\vec{e}_1-\vec{e}_2,\ \vec{e}_2{}'=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 10x_3^2 + 6x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Вариант 11

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$x^2+5,\ x^2-4x+3,\ x^2+16x+13.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (1,0,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 2y_2 - y_3 \\ x_2 = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = -2y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 3z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_1 + 3z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Вариант 12

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$4x^2 - 4x + 4,\ -4x^2 + 6x - 8,\ -11x^2 + 6x - 1.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,-1,-1),\ (-1,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 5x_2^2 - 19x_3^2 + 18x_1x_2 + 30x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

Вариант 13

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$4x^2-4,\ 5x^2-4x+3,\ 7x^2-10x+13.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве

R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=-3y_1+y_2-y_3 \\ x_2=3y_1+4y_2+3y_3 \\ x_3=y_1-2y_2-y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=z_1-2z_2+z_3 \\ y_2=2z_1+3z_2+z_3 \\ y_3=z_1+z_2-3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1'=3\vec{e}_1-\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -14x_1^2 - 2x_2^2 - 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 18x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Вариант 14

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2 + 2x - 3,\ -x^2 + 2x - 3,\ 5x^2 - 8x + 11.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = 5y_1 - 2y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + 5z_3 \\ y_3 = z_1 - 3z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}\,'_2 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=2x_1^2-4x_1x_2-x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+3x_2^2+10x_3^2-6x_1x_3+10x_2x_3.$$

Вариант 15

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$7x^2-4x+1,\ 2x^2-2,\ 5x^2-4x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=-y_1-2y_2-y_3 \\ x_2=y_1+2y_2+3y_3 \\ x_3=y_1-5y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=-3z_1-2z_2+z_3 \\ y_2=2z_1-z_2+3z_3 \\ y_3=z_1+4z_2+3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1'=-4\vec{e}_1-2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -3x_1^{\ 2} - 8x_1x_2 - x_2^{\ 2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^{\ 2} - 2x_2^{\ 2} - 10x_3^{\ 2} + 6x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Вариант 16

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$7x^2 - 4x + 1,\ 2x^2 - 2,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 5y_2 \end{cases} \text{и} \begin{cases} y_1 = -3z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 + 3z_3 \\ y_3 = z_1 + 4z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = -4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Вариант 17

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$2x - 4,\ x^2 - 1,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,0,1),\ (0,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_3 = 2z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \ \vec{e}\,'_2 = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Вариант 18

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2+2x-3,\ -x^2+2x-3,\ 5x^2-4x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + 4y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = -2z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = -3z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2{}' = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Вариант 19

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$2x - 4,\ x^2 - 1,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,0,1),\ (0,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_3 = 2z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{e}\,'_2 = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=2x_1{}^2+x_1x_2+3x_2{}^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=-3x_1{}^2-2x_2{}^2-6x_3{}^2+6x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3.$$

Вариант 20

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-6x^2+2x+2,\ 2x^2+2x-6,\ x^2-2x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(3,1,0),\ (1,1,1),\ (1,0,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2-y_3 \\ x_2=y_1+3y_2+3y_3 \\ x_3=y_1-y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=-z_1-2z_2+z_3 \\ y_2=2z_1+z_2+4z_3 \\ y_3=z_1+2z_2+3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2,\ \vec{e}_2{}'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=-2x_1^{\,2}-4x_1x_2-3x_2^{\,2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=-23x_1^{\,2}-2x_2^{\,2}-10x_3^{\,2}+6x_1x_2+24x_1x_3-8x_2x_3.$$

Вариант 21

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$8x^2-4x,\ 8x^2-6x+4,\ x^2-6x+11.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,-1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,0,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases}x_1=-5y_2-y_3\\ x_2=y_1+3y_2+3y_3\\ x_3=3y_1+2y_2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}y_1=-z_1-2z_2+z_3\\ y_2=-2z_1-z_2+4z_3\\ y_3=-2z_1+z_2+3z_3\end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2$, если:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \vec{e}\,'_1=-4\vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \ \vec{e}\,'_2=\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1,x_2)=x_1^{\,2}-6x_1x_2+x_2^{\,2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=16x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+5x_3^{\,2}-6x_1x_2-18x_1x_3+4x_2x_3.$$

Вариант 22

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$x^2+2x-5,\ x^2-1,\ 3x^2-6x+9.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (3,-1,1),\ (-1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=5y_2-y_3 \\ x_2=y_1+3y_3 \\ x_3=y_1-7y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=2z_1+2z_2+z_3 \\ y_2=z_1-z_2+4z_3 \\ y_3=z_1-5z_2+3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2' = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^2 - 3x_2^2 - 10x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Вариант 23

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2 + 2x - 3,\ -x^2 + 2x - 3,\ 5x^2 - 4x + 3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + 4y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 + z_3 \\ y_2 = -2z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = -3z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \ \vec{e}_2' = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Вариант 24

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$2x-4,\ x^2-1,\ 5x^2-4x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(-2,1,0),\ (2,0,1),\ (0,1,-2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + z_3 \\ y_3 = 2z_1 + z_2 + 3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \ \vec{e}_2' = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^{\,2}-2x_2^{\,2}-6x_3^{\,2}+6x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3.$$

Вариант 25

1. Исследуйте, являются ли векторы линейно зависимыми. В случае положительного ответа найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю:

$$-x^2+2x-3,\ -x^2+2x-3,\ 5x^2-4x+3.$$

2. Убедитесь, что данные векторы образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в этом пространстве, взяв за исходный базис указанные векторы.

$$(2,1,0),\ (2,-1,1),\ (1,1,2).$$

3. Даны линейные преобразования. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=5y_2-y_3 \\ x_2=y_1+3y_3 \\ x_3=y_1-7y_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1=2z_1+2z_2+z_3 \\ y_2=z_1-z_2+4z_3 \\ y_3=z_1-5z_2+3z_3 \end{cases}.$$

4. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. A – матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Найдите матрицу A' этого оператора в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ \vec{e}_1{}'=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_2{}'=-3\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ задан самосопряженный линейный оператор с матрицей A. Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу оператора к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду заданную квадратичную форму, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы. Сделать проверку

$$\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 - x_2^{\ 2}.$$

8. Исследовать на знакоопределенность данную квадратичную форму

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -14x_1^{\ 2} - 2x_2^{\ 2} - 9x_3^{\ 2} + 6x_1x_2 + 18x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

ОТВЕТЫ

<u>**Раздел 1**</u>. **1.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & -10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да.

4. а) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & 8 \\ 6 & -9 & 3 & 12 \\ 8 & -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, (15).

5. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$. **6**. а) $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 9 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 43 & 28 & -2 \\ -26 & -19 & -5 \end{pmatrix}$; в) не существует; г) $\begin{pmatrix} -7 & 33 \\ -2 & 38 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 10 & 21 & -7 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 14 & -42 \end{pmatrix}$. **8.** а) -13; б) 7; в) -40400; г) 0. **9.** а) $5/4$; б) 0; -3. **10.**а) $\begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$; б) нет; в) $\begin{pmatrix} 14/23 & 1/23 & -11/23 \\ -7/46 & 11/46 & 1/23 \\ -19/46 & -3/46 & 6/23 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_4 \end{pmatrix}$. **11.** а) -2; б) 108.

12. а) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}75 & -0{,}875 & -1{,}875 \\ 1{,}5 & -2{,}25 & -2{,}25 \end{pmatrix}$. **13.** а) 2; б) 2; в) 1.

<u>Раздел 2</u>. 1. а) $(2;3)$; б) $(1;6;5)$; в) $\left(-\frac{4}{3};6\frac{5}{9};-9\frac{4}{9}\right)$; г) $(2;-1;-2)$.

2. а) $\left(C;\frac{2-7C}{11};4+C\right), C\in R$; б) несовместна;

в) $\left(C_1;C_2;\frac{3+25C_2-5C_1}{9};\frac{10C_2-2C_1}{3}\right)$, $C_1,C_2\in R$. **3**. а) $(1;0;-2;-1)$;

б) $\left(C_1;\frac{3-3C_1}{5};C_2;\frac{C_1+5C_2+1}{5}\right)$, $C_1,C_2\in R$. **4.** а) $(0;0;0;0)$;

б) $(0;2C_1+C_2;C_1;C_2)$, $C_1,C_2\in R$.

<u>Раздел 3</u>. 2. (20/3, -13/3, 12); (0, -1, 12). **3.** $\vec{a}(1;0;1)$.

4. $\cos\alpha=-2/3, \cos\beta=2/3, \cos\gamma=-1/3$. **5.** $\vec{a}=2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$. **6.** а) 9; б) 13; в)-61. **7.** $\frac{23}{3\sqrt{111}}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$. **8.** $\alpha=1$. **9.** а) 12; б) 60. **10.** $10\sqrt{2}$. **11.** $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}/5$. **12.** Нет. **13.** Левая. **14.** Да. **15.** $x_1=-5$, $x_2=46\frac{1}{3}$.

<u>Раздел 4</u>. 1. а) $y=-2,\ x=3$; б) $2x+y-4=0$; в) $x-2y-7=0$; г) $3x+y-7=0$; д) $x+y-1=0$; е) $2x+5y+4=0$;

ж) $3x-2y-13=0$; з) $2x+3y=0$. **2**. а) $\cos\varphi=7/\sqrt{130}$;

б) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; в) $\varphi=\frac{\pi}{6}$. **3**. а) $\alpha=2$; б) ни при каком α; в) $\alpha=1/9$; **4**. 5; **5**. 3; **6**. ≈ 1.68; **8**. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

9. $x^2+(y-6)^2=8116/225$. **10**. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. **12**. а) $k<1/2$; б) $k=1/2$; в) $k>1/2$. **13**. а) окружность $(x-2)^2+(y+3)^2=12$; б) эллипс $\frac{(x+0.5)^2}{2.5}+\frac{(y-0.2)^2}{0.4}=1$; в) точка $(5;-1)$; г) гипербола $\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$; д) окружность $(x-0.5)^2+y^2=0.25$; е) пустое множество $(y-1)^2=-1.5$.

Раздел 5. **1**. а) $x-8y-4z-43=0$; б) $x-3y=0$; в) $x+y+z-9=0$; г) $5y+2z+5=0$. **2**. 2, 3, 6. **3**. да. **4**. $\cos\varphi=1/6$. **5**. 5,5. **6**. а) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z}{5}$; б) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{0}$; в) $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-4}{1}$; г) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{7}$. **7.** а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+5}{3}$; б) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$. **8.** $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{1}$, $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-6}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-5}$. **9**. $\pi/2$. **10.** $\frac{24}{5\sqrt{5}}$. **11**. а) прямые скрещиваются; б) пересекаются в точке $(1;-5;0)$. **12**. $\pi/6$. **13**. $\alpha=1/2$. **14**. $(1;1;1)$. **15**. $9x+6y-8z+13=0$.

Раздел 6. 1. а) конус; б) сфера; в) двуполостный гиперболоид; г) эллиптический параболоид; д) однополостный гиперболоид; е) конус; ж) круговой цилиндр; з) гиперболический параболоид; и) точка. **2**. $\frac{x^2+z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.**3**. 4,3; $(4;0;-1)$, $(-4;0;-1)$.

Раздел 7. **1**.а) нет; б) нет; в) да.
2. а) да; б) да; в) нет.
3. а) нет; б) да; в) нет; г) да.
4. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) нет; ж) да.
5. а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) да.
6. а) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&0&3\\0&-1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&9&3\\0&-4&0\\2&-6&-2\end{pmatrix}$.

7. $\vec{x}=5\vec{e}_1$. **8**. $\vec{x}=-\frac{3}{4}\vec{e}_1'+\frac{11}{4}\vec{e}_2'$. **9**. а) $\vec{x}=-2\vec{e}_1'+\frac{5}{3}\vec{e}_2'-\frac{11}{3}\vec{e}_3'$; б) $\vec{x}=\vec{e}_1'$.

10. а) $-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}32 & -3\\ -27 & 1\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}16 & -25\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

11. а) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $\vec{a}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{e}_1'-\frac{1}{2}\vec{e}_2'$, $\vec{b}=\frac{2}{3}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$, $\vec{b}=\frac{2}{15}(2\vec{e}_1'-\vec{e}_2')$;

б) $\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}$, $\vec{a}=-139\vec{e}_1+38\vec{e}_2+24\vec{e}_3$, $\vec{a}=\vec{e}_1'+\vec{e}_2'+\vec{e}_3'$;

в) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{a}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2+6\vec{e}_3$, $\vec{a}=\frac{7}{2}\vec{e}_1'+8\vec{e}_2'+6\vec{e}_3'$, $\vec{b}\notin V$.

12. а) да; б) нет. **13**. а) $\sqrt{2\pi}$; б) $e^b(b-1)-e^a(a-1)$; в) $\pi/2$.

14. а) да; б) да; в) нет. **15**. а) нет; б) да; в) да.

16. а) $\left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$, $\left\{-\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$, $\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}};\frac{5}{\sqrt{35}};-\frac{3}{\sqrt{35}}\right\}$, $\left\{-\frac{3}{\sqrt{10}};0;\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$, $\left\{0;\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $\left\{\frac{13}{\sqrt{182}};-\frac{2}{\sqrt{182}};-\frac{3}{\sqrt{182}}\right\}$.

17. а) $|\vec{x}|=\sqrt{5},\ |\vec{y}|=3,\ (\vec{x},\ \vec{y})=3,\ \cos\varphi=1/\sqrt{5}$;

б) $|\vec{x}|=\sqrt{10},\ |\vec{y}|=\sqrt{5},\ (\vec{x},\ \vec{y})=2,\ \cos\varphi=\sqrt{2}/5$;

в) $|\vec{x}|=13,\ |\vec{y}|=\sqrt{14},\ (\vec{x},\ \vec{y})=-15,\ \cos\varphi=-15/(13\sqrt{14})$;

Раздел 8. **1.** а) да; б) нет; в) нет. **3.** $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

4. а) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; б) нет; в) нет; г) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, проектирование на ось Ox параллельно плоскости yOz; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, проектирование на плоскость xOy параллельно оси Oz **5.** а) $(-1;-1;4)$; б) $(3;2;7)$. **6.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) не существует, т.к. система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима, а система $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ линейно независима.

8. $\begin{cases} x_1 = -z_1 - 11z_2 + 8z_3, \\ x_2 = 9z_1 + 3z_2 - 6z_3, \\ x_3 = -3z_1 + 4z_2 - 8z_3. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} z_1 = \dfrac{3}{44}x_1 + \dfrac{1}{2}11x_2 - \dfrac{39}{44}8x_3, \\ z_2 = -\dfrac{5}{44}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{67}{44}x_3, \\ z_3 = -\dfrac{1}{22}x_1 - \dfrac{9}{22}x_3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{9}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{9}x_3, \\ y_2 = -\dfrac{11}{27}x_1 + \dfrac{4}{9}x_2 - \dfrac{7}{27}x_3, \\ y_3 = -\dfrac{4}{27}x_1 - \dfrac{1}{9}x_2 + \dfrac{5}{27}x_3. \end{cases}$ **11.** а) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 27 & 14 \\ -41 & -21 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **12.** а) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $(a;a), a \in R^{\#}$; б) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $(a;a\sqrt{2}), (a;-a\sqrt{2}), a \in R^{\#}$; в) не существует;

г) $\lambda_1 = 1$, $(a;a;a)$, $\lambda_2 = 2$, $(a;0;a)$, $\lambda_3 = -1$, $(a;-3a;-5a), a \in R^{\#}$;

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $(2a+b;a;b)$, $a, b \in R$, $a^2 + b^2 > 0$, $\lambda_3 = -5$, $(a;3a;2a), a \in R^{\#}$; е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $(0;0;0;a), a \in R^{\#}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$,

$(0;a;b;0)$, $a,b \in R$, $a^2+b^2>0$. **13.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; б) не приводится; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. а) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; б) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$;

в) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_2$; г) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

15. Ответ определен неоднозначно. а) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Раздел 9. **1**. Ответ определен неоднозначно.

а) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$;

б) $x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} y_1 - \sqrt{\frac{3}{5}} y_2$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} y_1 + \sqrt{\frac{2}{5}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$;

в) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$, $\varphi(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$;

г) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$,

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$;

д) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3$,

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2$;

е) $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,$

$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,\ \varphi(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_3^2;$

ж) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3,$

$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3,\ \varphi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2.$

2. Ответ определяется неоднозначно. а)

$\frac{(x' + \sqrt{2})^2}{1} + \frac{(y' + \sqrt{2})^2}{0.5} = 1;$

б) $\frac{(y' + 3/2)^2}{2} - \frac{(x' + 1)^2}{4} = 1$; в) $\frac{(y' + 1/2)^2}{4} - \frac{(x' - 3/4)^2}{9} = 1;$

г) $(y' + \sqrt{2})^2 = 0$.

3. а) положительно определенная; б) не является знакоопределенной;

в) не является знакоопределенной; г) положительно определенная;

д) отрицательно определенная.

Литература

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – Москва: Наука, 1985. – 356 с.
2. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справ. пособие. В 2-х ч.: ч.1 / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 287 с.
3. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учеб. для инж.-тех. спец. вузов. / Е.И. Гурский – Мн.: Выш. шк., 1982. – 272 с.
4. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2-х ч.: ч.1 / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; Под общ. ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
5. Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т.: т.1 Учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.
6. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
7. Кузнецов, В.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В.А. Кузнецов. – Москва: Высшая школа, 1983. – 175 с.
8. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
9. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учеб. пособие. В 4-х ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004. – 270 с.