УДК 539.3:004.032.26

НЕЙРОСЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Курочка Константин Сергеевич
к.т.н., доцент
Гомельский государственный университет имени П.О. Сухого
(Республика Беларусь, Гомель)
Болбуков Юрий Викторович
студент 4 курса
Гомельский государственный университет имени П.О. Сухого
(Республика Беларусь, Гомель)

Моделирование реальных физических или технических механических систем включает широкое использование программных пакетов, которые в основном базируются на методе конечных элементов для решения краевых задач. Последние достижения в области алгоритмов машинного обучения и их успешное применение в различных областях демонстрируют, что при правильном обучении эти модели могут значительно улучшить традиционные методы. В данной работе предложена и апробирована архитектура нейронной сети прямого распространения для моделирования прогибов тонкой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки.

Ключевые слова: тонкая пластина, дифференциальные уравнения в частных производных, нейронные сети.

NEURAL NETWORK MODELLING OF A THIN PLATE DEFLECTIONS UNDER THE ACTION OF VERTICAL LOAD

Kurochka Konstantin Sergeevich
Cand. Tech. Science, docent
Sukhoi State Technical University of Gomel
(Republic of Belarus, Gomel)

Balbukou Yrii Viktorovich
4-year student
Sukhoi State Technical University of Gomel
(Republic of Belarus, Gomel)

Modeling of real physical or technical mechanical systems involves the widespread use of software packages, which are mainly based on the finite element method for solving boundary value problems. Recent advances in machine learning algorithms and their successful application in various fields demonstrate that, with proper training, these models can significantly improve traditional methods. In paper, we propose and test the architecture of a direct distribution neural network for modeling deflections of a thin plate under the action of a uniformly distributed load.

Keywords: thin plate, partial differential equations, neural network.

I. Введение

В математической физике имеется достаточно широкий круг задач, которые приводят к изучению краевых или начально-краевых задач для уравнений в частных производных (или интегро-дифференциальных уравнений) [1]. Существующие приближённые методы решения либо позволяют получить лишь поточечную аппроксимацию подобно сеточным методам, либо предъявляют специальные требования к набору аппроксимирующих функций и требуют решения важной вспомогательной задачи разбиения исходной области подобно тому, как это происходит в методе конечных элементов (МКЭ) [2]. Поэтому, в настоящее время разрабатываются новые методы решения дифференциальных уравнений, позволяющие снизить временные затраты для нахождения решения [3]. Особый интерес представляет применение нейросетевого подхода. Важной особенностью нейросетевого подхода является устойчивость нейросетевой модели по отношению к ошибкам в данных, а именно неточностям в задании коэффициентов уравнений, граничных и начальных условий, возмущениям границы, погрешностям вычислений.

Моделирование реальных физических или технических механических систем включает широкое использование программных пакетов, которые в основном базируются на методе конечных элементов (МКЭ) для решения краевых задач [4]. Последние достижения в области алгоритмов машинного обучения и их успешное применение в различных областях демонстрируют, что при правильном выборе и обучении эти модели могут значительно улучшить традиционные методы [5].

Применение МКЭ для решения задач теории упругости, как правило, приводят к СЛАУ больших размерностей, время решения которых на современных вычислительных системах может измеряться часами [6]. При проведении исследований реальных физических объектов, при решении задач подбора оптимальных значений параметров подобные СЛАУ приходится решать многократно [7]. Поэтому требуется найти алгоритмы и подходы, позволяющие снизить временные затраты для нахождения решения [8]. В данной работе представлена и апробирована архитектура нейронной сети прямого распространения, с помощью которой были определены прогибы тонкой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки.

II. Основная часть

Предметом данного исследования является применение искусственной нейронной сети для определения прогибов тонкой прямоугольной пластины. Задача была решена с использованием нейронной сети и аналитическим способом. Решение задачи аналитическим способом представлено решением Навье в двойных тригонометрических рядах.

Поперечная нагрузка $q(x,y)$ на пластинку, шарнирно опертую по всему контуру, предполагается изменяющейся по любому закону. На рисунке 1 представлена общая схема тонких пластин, для которых было проведено данное исследование.

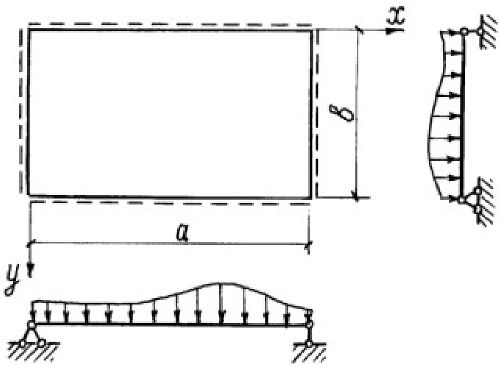

Рис. 1. Общая схема тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру

Решение задачи заключается в определении коэффициентов A_{mn} ряда

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b}$$

В первую очередь проверяется выполнение граничных условий. При шарнирном опирании пластины

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \rightarrow w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \rightarrow w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Для генерации обучающих выборок было реализовано программное обеспечение, выполняющее разбиение пластины на конечные элементы и определение прогиба в каждом из узлов элементов с последующим экспортом данных в файлы для применения в обучении нейронной сети. На рисунке 2 представлено решение задачи аналитически с использованием разработанного ПО для пластины с следующими параметрами: ширина = 6 m, длина = 1 m, толщина = 0.2 m, модуль упругости = 7.1 * 10^{10} GPa, коэффициент Пуассона = 0.34. Нагрузка равна 100000 N.

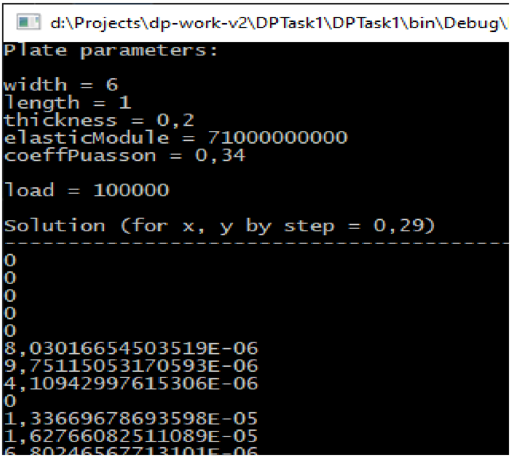

Рис. 2. Решение задачи аналитически с использованием разработанного ПО

В ходе исследования было получено время решения задачи аналитическим методом на примере данной пластины: FEM_time = 1.2361614 s. На рисунке 3 показан результат замера времени выполнения (вывод массива результатов для всей пластины убран для чистоты эксперимента)

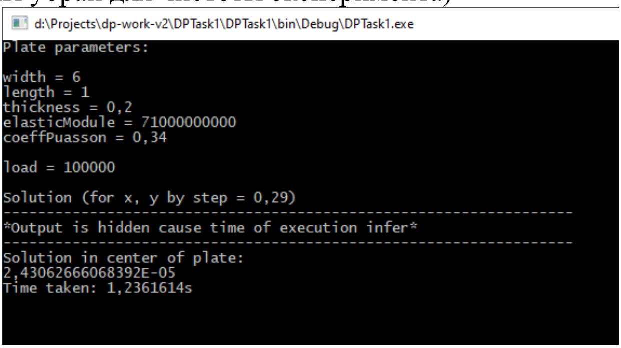

Рис. 3. Результат замера времени решения задачи аналитическим методом

Теперь можно перейти к решению задачи нейронной сетью. Модель представленной сети – многослойный персептрон. В качестве входных параметров сети (признаков) – координаты точки приложения нагрузки, размеры пластинки, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала, и величина прикладываемой нагрузки. Работа сети охарактеризована по принципу «чёрного ящика» – на вход подается вектор значений, на выходе сети – искомое значение (в данном контексте – значение прогиба пластинки). Функцией активации, определяющей выходной сигнал нейронной сети, является активационная функция *ReLu*: $A(x) = \max(0, x)$. Данная функция является хорошим аппроксиматором, так как любая функция может быть аппроксимирована комбинацией *ReLu*. К тому же, *ReLu* позволяет реализовать «разреженную» активацию, когда активируются не все нейроны, а только часть из них, тем самым облегчив сеть. На рисунке 4 представлена общая схема представленной нейронной сети.

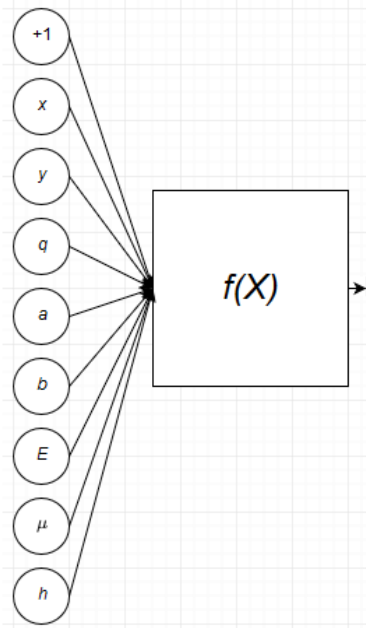

Рис. 4. Общая схема представленной нейронной сети

Принцип обучения сети, использованный в ходе исследования, таков: генерируются наборы данных в МКЭ-приложениях, эти данные подготавливаются/нормализуются, затем данные делятся на обучающую выборку и тестовую (в текущем исследовании – в соотношении 80% к 20%), затем происходит этап обучения сети на обучающей выборке. После завершения прохода по всей обучающей выборке обученная модель проверяется на тестовых данных (данных, которые модель не видела в ходе обучения), оценивается точность модели. Если ошибка модели на тестовых данных слишком большая, то происходит либо повторение этапа обучения модели, либо берутся другие данные, и весь процесс начинается заново. На рисунке 5 наглядно представлен процесс полного обучения сети.

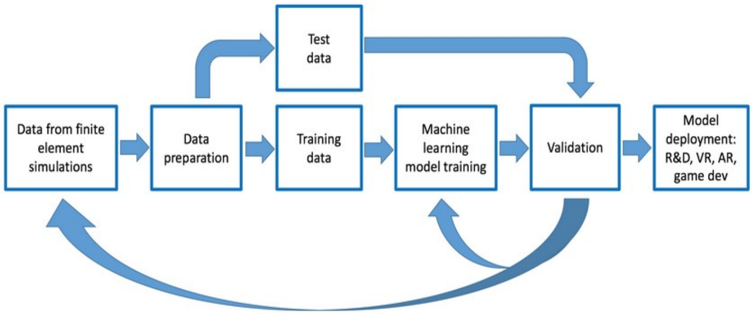

Рис. 5. Принцип обучения модели машинного обучения на основе данных, сгенерированных конечно-элементным ПО

В ходе исследования для обучения нейронной сети были использованы данные по 5 различным видам пластин с различными размерами, толщиной, значением прикладываемой силы и материалами. Для обучения нейронной сети был сгенерирован набор данных в количестве 425556 записей. На рисунке 6 представлены значения метрик, использованных для оценки эффективности сети: *MSE* (*mean squared error*), *R2* и *Variance score*.

```
MSE train : 8.248617208383566e-07
MSE test : 4.949222384436414e-08
R2 score : 0.9998077988114826
Variance score : 0.9998078810346278
```

Рис. 6. Метрики оценки эффективности сети

На рисунке 7 представлено сравнение тестовых значений с предсказанными (на всех тестовых данных и на 30 случайных). Данные графики наглядно показывают близкую сходимость решения задачи.

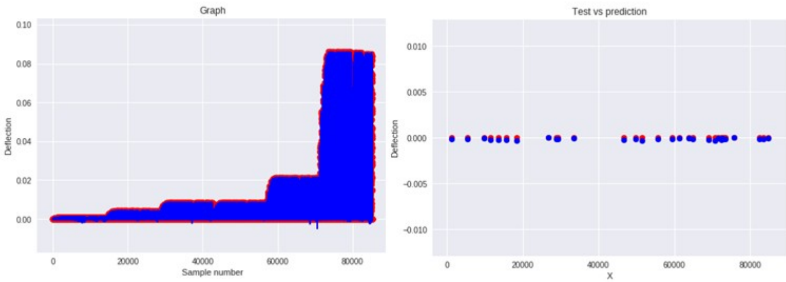

Рис. 7. Сравнение тестовых данных с предсказанными

Так же в ходе исследования было получено время решения задачи нейронной сетью: *NN_time* = 0.1437525749206543 с.

III. Заключение

В результате исследования было получено время решения задачи для выборки размером 425556 записей нейронной сетью и модулем численного решения задачи: нейросеть – 0.1438 с, модуль численного решения – 1.2361 с.

Список литературы

1. Черноморец А. А. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных / А. А. Черноморец, А. Н. Коваленко, М. А. Петина. // Информатика, – 2017, № 9 (258), С. 103-110.

2. Васильев А. Н. Нейросетевой подход к задачам математической физики / А. Н. Васильев, Д. А. Тархов, Т. А. Шемякина. – СПб.: Нестор-История, 2015. – 260 с.

3. Reddy, J. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells / J. Reddy – CRC Press, – 2006. – 2nd Edition. – 568.

4. Javadi A. A. Neural network for constitutive modelling in finite element analysis / A. A. Javadi, T. P. Tan, M. X. Zhang // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, – 2003. – Vol. 10. – P. 523 — 529.

5. Nguyen-Thien, T. Approximation of functions and their derivatives: A neural network implementation with applications / T. Nguyen-Thien, T. Tran-Cong // Applied Mathematical Modelling. – 2003. – P. 197— 220.

6. Курочка, К. С. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния сложных систем неоднородных упругопластических дисперсных и сплошных твердых тел / К. С. Курочка // Информатика, – 2007, №2 (14), С. 117-128.

7. Курочка, К. С. Исследование математических моделей в ГРИД-средах / К. С. Курочка // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, – 2008, №5 (50), Ч. 1, С. 69-73.

8. He, S. Multilayer neural networks for solving a class of partial differential equations / S. He, K. Reif, R. Unbehauen // Neural Networks, – 2000. – Vol. 13. – P. 385—396.

© Курочка К.С., Болбуков Ю.В., 2020