

УДК 621.3.013+621.3.01

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОВОДЯЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГРАНИЦАХ, МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Д. В. КОМНАТНЫЙ, Н. А. КУСЕНКОВ, Е. В. ТИШКОВ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Рассмотрен расчет характеристик электростатического поля, созданного протяженными проводниками в присутствии проводящих границ в форме двугранного угла или проводящего паза. Расчеты выполнены методом эквивалентных зарядов, который основан на первой группе формул Максвелла. Потенциальные коэффициенты при наличии двугранного угла получены методом зеркальных отображений; при наличии прямоугольного паза – методом конформных преобразований. Осуществлен расчет распределения линейной плотности электрического заряда по поверхности плоской тонкой пластины, расположенной в двугранном угле, и провода эллиптического сечения, находящегося в прямоугольном пазу. Построены графики изменения относительной погрешности расчета потенциала в контрольной точке на поверхности проводников. Анализ графиков показывает, что данный метод позволяет получить решение с достаточной для практики точностью. Поэтому метод эквивалентных электродов можно рекомендовать для решения практических задач, возникающих в энергетике, на транспорте и в других отраслях.

Ключевые слова: электростатическое поле, метод эквивалентных электродов, потенциальные коэффициенты, двугранный угол, прямоугольный паз, метод зеркальных отображений, метод конформных преобразований.

CALCULATION OF THE ELECTROSTATIC FIELD OF EXTENDED CONDUCTORS LOCATED IN CONDUCTIVE RECTANGULAR BOUNDARIES BY THE METHOD OF EQUIVALENT ELECTRODES

D. V. KOMNATNY, N. A. KUSENKOV, E. V. TISHKOV

*Educational Institution “Sukhoi State Technical University
of Gomel”, the Republic of Belarus*

The article considers the calculation of the characteristics of the electrostatic field created by extended conductors in the presence of conductive boundaries in the form of a dihedral angle or a conductive groove. The calculations are carried out by the method of equivalent charges, which is based on the first group of Maxwell formulas. The potential coefficients in case of a dihedral angle were obtained by the method of image charges; in case of a rectangular groove – by the method of conformal transformations. Calculation of the distribution of linear electric charge density over the surface of a flat thin plate, located in a dihedral angle, and an elliptical cross-section wire, located in a rectangular groove. The article describes the graphs of the change in the relative error of calculating the potential at the control point on the conductors' surface. The analysis of the graphs shows that this method allows us to obtain the solution with sufficient accuracy for putting it into practice. Therefore, the method of equivalent electrodes can be recommended for solving practical problems arising in power engineering, transport and other industries.

Keywords: electrostatic field, method of equivalent electrodes, potential ratios, dihedral angle, conductive groove, method of image charges, method of conformal transformations.

Введение

Среди задач расчета электростатических полей, имеющих прикладное значение, можно выделить группу задач о поле системы протяженных проводников, находящихся вблизи проводящих границ [1], [2]. В частности, решения этих задач востребованы для расчета емкости и реактивного сопротивления шинопроводов различных конструкций, которые широко применяются в системах электроснабжения промышленных предприятий [3], [4]. Расчет электростатического поля в электродинамической системе с многими границами может быть выполнен численно-аналитическим и численными методами.

Расчеты численно-аналитическим методом выполнялись для системы проводов круглого сечения в присутствии проводящей плоскости [5] и двугранного прямого угла [6]. Также изучалось электростатическое поле и конденсаторная емкость системы эллиптических оболочек, размещенных внутри круглой оболочки [7]. Кроме того, известны расчеты емкости в системе эллиптических оболочек и пластин, расположенных в свободном пространстве [8]. Как видно, решения для произвольной комбинации границ (круглая оболочка, плоскость, двугранный угол) и систем проводников (круглых, эллиптических, прямоугольных) не получены. Также не рассмотрено поле проводников, расположенных в прямоугольном пазу из проводящих поверхностей. Кроме того, численно-аналитические методы требуют выполнения сложных преобразований, а результаты получаются в форме бесконечных рядов. Это затрудняет решение прикладных задач энергетики и электротранспорта.

Среди численных методов [9] метод эквивалентных электродов [10], [11] отличается наиболее простым математическим аппаратом, так как основан на классической первой группе формул Максвелла. Но до настоящего времени этот метод не применялся для расчета электростатического поля проводников при наличии проводящей границы в виде двугранного угла или прямоугольного паза. Следовательно, метод эквивалентных электродов не обладает должной универсальностью.

Поэтому целью настоящей статьи является дальнейшее развитие метода эквивалентных электродов с тем, чтобы этот метод давал возможность осуществлять расчеты электростатического поля во всех наиболее часто встречающихся в приложениях конфигурациях границ.

Для достижения этой цели необходимо разработать расчетные соотношения метода для границ в форме двугранного прямого угла и в форме прямоугольного паза.

Описание метода эквивалентных электродов

При разработке расчета электростатического поля методом эквивалентных электродов предполагается, что поле создается протяженными проводниками и может считаться плоскопараллельным.

В методе эквивалентных электродов на поверхностях заданных проводников вводится сетка граничных элементов. Линейная плотность электрического заряда в пределах каждого граничного элемента принимается постоянной. В геометрических центрах граничных элементов размещаются проводники круглого сечения, которые являются эквивалентными электродами. Радиус эквивалентного электрода вычисляется из условия равенства периметра электрода и длины граничного элемента [12]:

$$r_{э.э} = \frac{l_{г.э}}{2\pi}, \quad (1)$$

где $r_{э.э}$ – радиус эквивалентного электрода, м; $l_{г.э}$ – длина граничного элемента, м.

Предполагается, что потенциалы эквивалентных электродов равны потенциалу того проводника, на поверхности которого эти электроды расположены. Тогда ли-

нейные плотности зарядов электродов можно найти путем решения системы линейных алгебраических уравнений, записанной на основе известной первой группы формул Максвелла [11]:

$$[\varphi] = [\alpha][\tau], \quad (2)$$

где $[\varphi]$ – матрица-столбец потенциалов эквивалентных электродов; $[\alpha]$ – квадратная матрица потенциальных коэффициентов; $[\tau]$ – матрица-столбец линейной плотности зарядов эквивалентных электродов.

Потенциальные коэффициенты, учитывающие наличие плоских проводящих границ, могут быть найдены методом зеркальных отражений или методом конформных преобразований. Поэтому не требуется вводить на этих границах сетку граничных элементов, что снижает размерность системы линейных алгебраических уравнений (2) и упрощает получение ее решения. Как известно [13], [14], указанные методы имеют глубокую теоретическую связь. Каждый из этих методов применим для расчета характеристик электростатического поля при наличии одной и той же граничной поверхности [15]. При решении конкретной задачи следует выбирать тот метод, который приводит к результату наиболее простым путем и выражает результат в наиболее компактной форме, удобной для компьютерной реализации.

В случае границы в форме двугранного прямого угла потенциальные коэффициенты находятся методом зеркальных отражений. Система исходного и зеркально отображенных зарядов эквивалентного электрода показана на рис. 1.

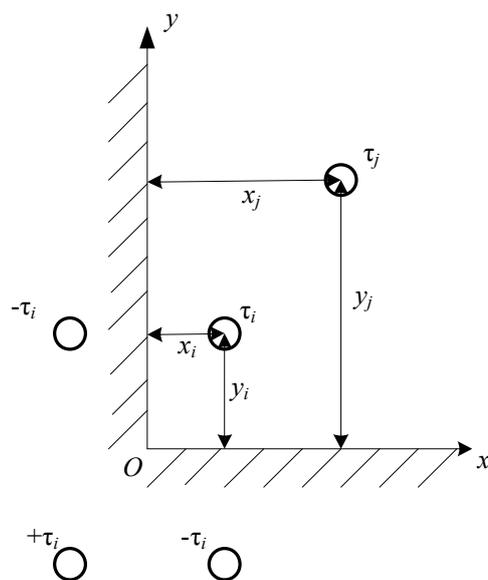


Рис. 1. Система зеркальных отображений заряда эквивалентного электрода в двугранном проводящем угле

Формулы для потенциальных коэффициентов в этом случае имеют вид [16]:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2x_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_i}{y_i}\right)^2}}; \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \ln \frac{(x_i + x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}{(x_i + x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}, \quad (4)$$

где α_{ii} – собственный потенциальный коэффициент, м/Ф; α_{ij} – взаимный потенциальный коэффициент, м/Ф; ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м; x_i, y_i – координаты влияющего электрода, м; x_j, y_j – координаты подверженного влиянию электрода, м.

В случае границы – прямоугольного паза выполнение зеркальных отражений усложняется, а результат получается в виде бесконечного ряда. Его суммирование возможно, но оказывается крайне трудным. Поэтому следует использовать метод конформных преобразований, который позволяет получить результат в замкнутой форме. В [15] приведено выражение для комплексного потенциала, осуществляющее отображение поля тонкого провода в прямоугольном пазу на полуплоскость:

$$\underline{\Phi} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{\underline{s} - jh}{\underline{s} + jh}; \quad (5)$$

$$\underline{s} = h \frac{\sin \frac{\pi\sigma}{2d} - \sin a'chb'}{\cos a'shb'}; \quad a' = \frac{\pi a}{2d}, \quad b' = \frac{\pi b}{2d},$$

где $\underline{\Phi}$ – комплексный потенциал, В; τ – линейная плотность заряда эквивалентного электрода, Кл/м; $\underline{s} = x + jy$ – комплексная координата полуплоскости, м; h – высота электрода над полуплоскостью, м; $\sigma = \xi + j\eta$ – комплексная координата паза, м; a, b – координаты эквивалентного электрода, м; d – ширина паза, м.

Плоскости соответствующих комплексных переменных и геометрические параметры электрода в пазу показаны на рис. 2 [15].

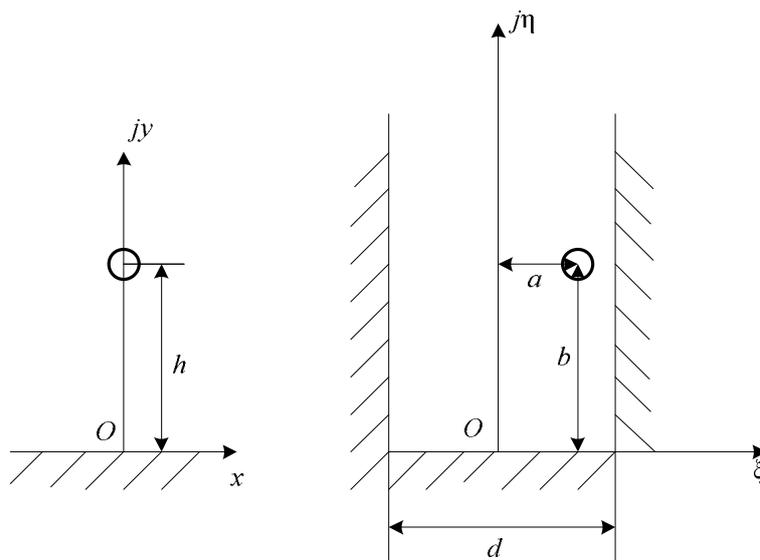


Рис. 2. Конформное преобразование для поля заряженной нити в прямоугольном пазу

Чтобы получить выражение для взаимного потенциального коэффициента, требуется выделить модуль комплексного потенциала (5) и в полученном выражении заменить a и b на координаты влияющего электрода x_i , y_i , а координаты ξ и η – на координаты x_j , y_j подверженного влиянию электрода [16].

В результате указанных преобразований формула для взаимного потенциального коэффициента имеет вид:

$$\alpha_{ij} = \frac{-1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}; \quad (6)$$

$$A = \left(\sin \frac{\pi x_j}{2d} \operatorname{ch} \frac{\pi x_j}{2d} - \sin a' \operatorname{ch} b' \right)^2 + \cos^2 \frac{\pi y_j}{2d} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y_j}{2d} - \cos^2 a' \operatorname{sh}^2 b';$$

$$B = \left(\sin \frac{\pi x_j}{2d} \operatorname{ch} \frac{\pi x_j}{2d} - \sin a' \operatorname{ch} b' \right) (-2 \cos a' \operatorname{sh} b');$$

$$C = \left(\sin \frac{\pi x_j}{2d} \operatorname{ch} \frac{\pi x_j}{2d} - \sin a' \operatorname{ch} b' \right)^2 + \left(\cos \frac{\pi y_j}{2d} \operatorname{sh} \frac{\pi y_j}{2d} + \cos a' \operatorname{sh} b' \right)^2;$$

$$a' = \frac{\pi x_i}{2d}; \quad b' = \frac{\pi y_i}{2d}.$$

Формула собственного потенциального коэффициента получается из (6), если подставить в (6) координаты точки влияния x_i , y_i , а координаты точки наблюдения $x_j = x_i + r_{3,3}$; $y_j = y_i$. Это следует из того, что при выводе формул для собственного потенциального коэффициента круглого провода предполагается, что заряд провода сосредоточен на его оси, а потенциал вычисляется в точке на его поверхности [15].

Полученные выражения для собственного и взаимного потенциальных коэффициентов позволяют записать систему линейных алгебраических уравнений (2) для рассматриваемых в статье конфигураций граничных поверхностей задачи о расчете электростатического поля и найти распределение линейной плотности электрического заряда по эквивалентным электродам.

Зная линейные плотности зарядов эквивалентных электродов, можно рассчитать характеристики электростатического поля в любой точке [15], [16]. Так, при наличии границы в форме двугранного прямого угла потенциал поля в любой точке вне граничных поверхностей рассчитывается по формуле

$$\varphi_M = \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{4\pi\epsilon_a} \ln \frac{(x_i + x_M)^2 + (y_i - y_M)^2 (x_i - x_M)^2 + (y_i + y_M)^2}{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2 (x_i + x_M)^2 + (y_i + y_M)^2}, \quad (7)$$

где φ_M – потенциал в точке наблюдения M , В; N – число эквивалентных электродов; x_M , y_M – координаты точки наблюдения, м.

При наличии границы в виде прямоугольного паза потенциал в точке наблюдения, лежащей вне граничных поверхностей, определяется по формуле

$$\varphi_M = \sum_{i=1}^N \frac{-\tau_i}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{C_1^2}. \quad (8)$$

Коэффициенты A_1 , B_1 , C_1 получаются из коэффициентов A , B , C формулы (6) путем подстановки $x_j = x_M$, $y_j = y_M$.

Численные расчеты модельных задач

Для проверки предлагаемых расчетных соотношений метода был выполнен расчет распределения линейной плотности электрического заряда для двух конфигураций проводников и граничных поверхностей. В обоих случаях предполагалось, что потенциал проводника численно равен 1 В, а потенциал границы численно равен 0 В. Также предполагается, что проводники изолированы от проводящих границ слоем воздуха, поэтому абсолютная диэлектрическая проницаемость среды численно равна диэлектрической постоянной. Размеры рассматриваемых проводников и расстояния до граничных поверхностей выбраны как средние для конструкций маломощных электрических машин [17]. Выбор объясняется тем, что проектирование таких машин представляет собой актуальную техническую задачу.

В первом случае рассматривается плоская тонкая пластина, расположенная вблизи двугранного прямого проводящего угла (рис. 3). Пластина находится на расстоянии от оси Oy $x_{el} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м, на расстоянии от оси Ox $h = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м, длина пластины $d_{el} = 3 \cdot 10^{-2}$ м.

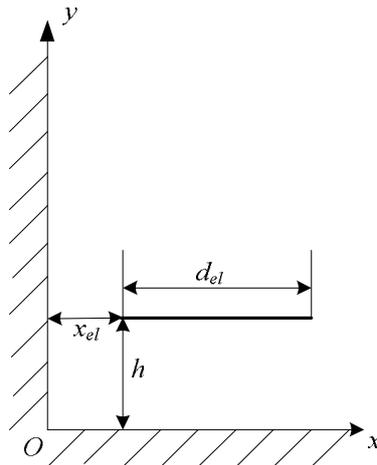


Рис. 3. Плоская пластина вблизи двугранного угла

Построение сетки граничных элементов на пластине осуществляется на основе параметрического уравнения отрезка [18]. Для проверки результата осуществлялось вычисление относительной погрешности расчета потенциала в контрольной точке на поверхности пластины по полученным при решении системы (2) линейным плотностям электрических зарядов электродов в зависимости от числа эквивалентных электродов N . Контрольная точка выбиралась исходя из следующих соображений. Во-первых, она не должна изменять своего положения при пересчете сетки эквивалентных электродов на более густую. Во-вторых, не должна совпадать с центрами эквивалентных электродов, чтобы не вызвать ошибки переполнения при расчете в программе компьютерной математики. Поэтому контрольная точка размещена в ближайшей к оси Oy точке пластины. Алгоритм построения сетки эквивалентных электродов [18] таков, что эта точка оказывается всегда в начале первого граничного элемента. Преимущество такого выбора и в том, что на краях пластины сосредотачивается наибольший заряд; выбирая контрольную точку в этом месте, можно прове-

речь, насколько погрешность аппроксимации распределения линейной плотности заряда пластины влияет на результат приближенного расчета ее потенциала. Результаты расчета относительной погрешности представлены на рис. 4.

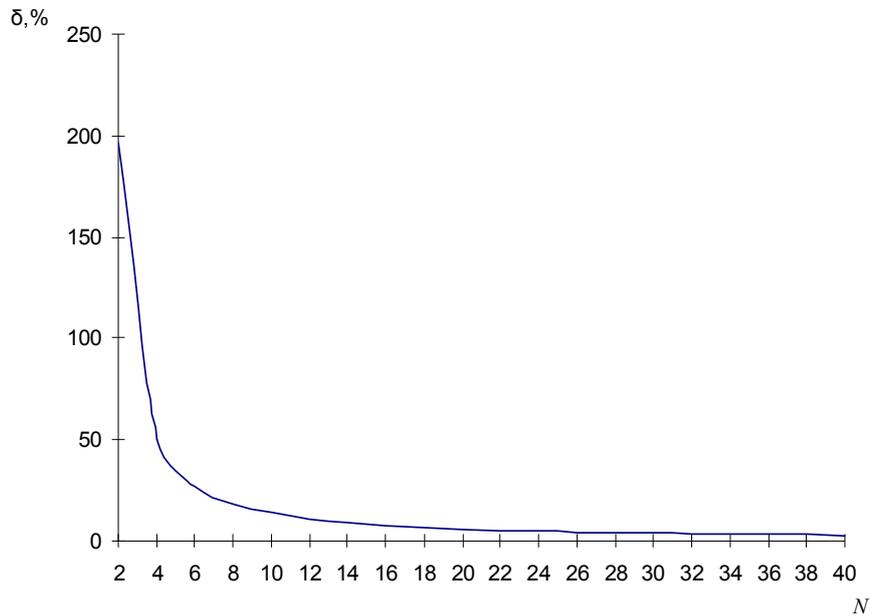


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности расчета потенциала пластины от числа эквивалентных электродов

Из рис. 4 видно, что относительная погрешность плавно убывает с ростом числа эквивалентных электродов и достигает приемлемого значения в 2,7 %.

Во втором случае рассматривался провод эллиптического сечения с незначительным эксцентриситетом, расположенный в прямоугольном проводящем пазу (рис. 5). Ширина паза составила $d = 8 \cdot 10^{-2}$ м, высота центра эллипса над дном паза $h = 5 \cdot 10^{-2}$ м, большая полуось эллипса составляла $2 \cdot 10^{-2}$ м; малая полуось — $1,5 \cdot 10^{-2}$ м.

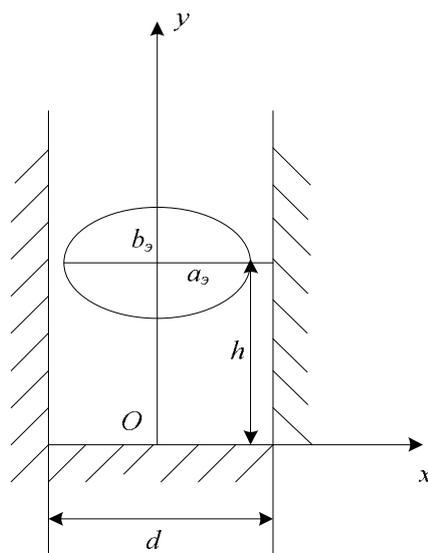


Рис. 5. Проводник эллиптического сечения в прямоугольном пазу

Незначительный эксцентриситет позволил вычислить координаты эквивалентных электродов по параметрическим уравнениям эллипса; полученная при этом сетка электродов была достаточно равномерной. Длина граничного элемента в (1) рассчитывалась путем численного интегрирования известного выражения для дуги кривой в параметрической форме.

Проверка результатов расчета осуществлялась так же как и в предыдущем случае – по относительной погрешности расчета потенциала в контрольной точке. Контрольная точка выбиралась из соображений, аналогичных случаю пластины, и была размещена в точке на большой полуоси эллипса, лежащей вблизи правой стенки паза. Результаты расчета относительной погрешности представлены на рис. 6.

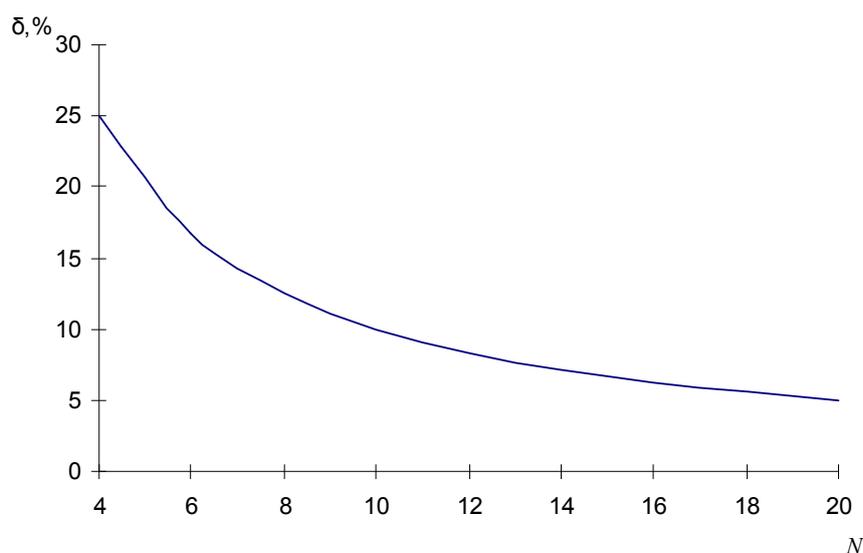


Рис. 6. Зависимость относительной погрешности расчета потенциала эллиптического проводника от числа эквивалентных электродов

Из рис. 6 следует, что и в этом случае относительная погрешность плавно убывает с ростом числа эквивалентных электродов N и достигает практически приемлемого значения в 5 %.

Заключение

Приведенные результаты расчетов модельных задач показывают, что применение метода эквивалентных электродов для расчета характеристик электростатического поля проводников различной формы сечения в присутствии проводящих границ в виде двугранного угла или прямоугольного паза позволяет получить распределения линейной плотности электрического заряда по поверхности проводников, с достаточной для практики точностью удовлетворяющие условию эквипотенциальности поверхности проводника. Следовательно, на основании теоремы единственности решения уравнения Лапласа [15], [16] можно считать, что получены распределения линейной плотности, приближающиеся к реально имеющимся на рассмотренных пластине и проводе.

Графики зависимости относительной погрешности расчета потенциала в контрольной точке показывают, что погрешность монотонно убывает с ростом числа эквивалентных электродов. Следовательно, решения методом эквивалентных электродов являются сходящимися.

Приведенные в исследовании выражения для расчета собственных потенциальных коэффициентов не вызывали ошибок в работе программного обеспечения по причине

расходимостей. Следовательно, эти выражения верно учитывают особенности в расчете потенциала электрода, созданного его собственным зарядом.

Вышеизложенное позволяет заключить, что поставленная в статье цель по развитию метода эквивалентных электродов является достигнутой. Представленный в данной работе и иных публикациях [11] метод дает возможность расчета характеристик электростатического поля при наиболее часто встречающихся на практике конфигурациях проводящих граничных поверхностей. При этом форма проводников может быть не только круглой, прямоугольной или эллиптической, но и более сложной. Таким образом, данный метод охватывает не меньшее число конфигураций, чем численно-аналитические методы, и не уступает последним. Поэтому рассмотренный метод эквивалентных электродов может найти широкое применение при решении инженерных задач электростатики.

Литература

1. Косарев, Б. И. Электробезопасность в системе электроснабжения железных дорог / Б. И. Косарев, Я. А. Зельвянский, Ю. Г. Сибаров. – М. : Транспорт, 1983. – 200 с.
2. Соколов, С. А. Воздействие внешних электромагнитных полей на оптические кабели связи и гибридные линии / С. А. Соколов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2018. – 214 с.
3. Князевский, Б. А. Электроснабжение промышленных предприятий / Б. А. Князевский, Б. Ю. Митин. – М. : Высш. шк., 1986. – 400 с.
4. Радкевич, В. Н. Электроснабжение промышленных предприятий / В. Н. Радкевич, В. Б. Козловская, И. В. Колосова. – Минск : ИВЦ Минфина, 2017. – 589 с.
5. Наркун, З. М. Электрическая емкость N -проводниковой линии проводов круглого сечения в присутствии проводящей плоскости / З. М. Наркун // Изв. вузов. Электромеханика. – 2002. – № 2. – С. 19–28.
6. Бойко, В. К. Расчет электростатической емкости системы параллельных бесконечно длинных проводов эллиптического сечения и пластин / В. К. Бойко, З. М. Наркун // Электричество. – 1991. – № 2. – С. 76–78.
7. Наркун, З. М. Расчет электрической емкости системы проводов круглого сечения, расположенных в двугранном угле / З. М. Наркун // Электричество. – 1999. – № 2. – С. 52–54.
8. Наркун, З. М. Конденсаторная емкость системы эллиптических оболочек, расположенных внутри круглой оболочки / З. М. Наркун // Электричество. – 2000. – № 10. – С. 65–68.
9. Моделирование электромагнитных полей в электротехнических устройствах / А. Е. Степанов [и др.] ; под ред. А. Е. Степанова и Р. Сикоры. – Киев : Техника ; Щецин : Науч. изд-во Щецин. политехн. ин-та, 1990. – 188 с.
10. Velichkovich, D. M. Rectangular coax with axial slit and with rectangular or circular center conductor / D. M. Velichkovich, Z. J. Mancic, D. G. Zuklic // International Symposium on Electromagnetic Compatibility / University of Rome “La Sapienza” – Milan, 1998. – P. 384–389.
11. Бочков, К. А. Элементы моделирования электромагнитной совместимости устройств железнодорожной автоматики и телемеханики / К. А. Бочков, Д. В. Комнатный. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 185 с.
12. Александров, Г. И. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды / Г. И. Александров. – Л. : Энергоатомиздат, 1989. – 360 с.

13. Бинс, К. Анализ и расчет электрических и магнитных полей / К. Бинс, П. Лауренсон. – М. : Энергия, 1970. – 376 с.
14. Бухгольц, Г. Расчет электрических и магнитных полей / Г. Бухгольц. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 712 с.
15. Основы электротехники / К. А. Круг [и др.] ; под ред. К. А. Круга. – М. : ГЭИ, 1952. – 432 с.
16. Аполлонский, С. М. Расчеты электромагнитных полей / С. М. Аполлонский, А. Н. Горский. – М. : Маршрут, 2006. – 992 с.
17. Гольдберг, О. Д. Проектирование электрических машин / О. Д. Гольдберг, Я. С. Гурин, И. С. Свириденко. – М. : Высш. шк., 2001. – 430 с.
18. Ильин, В. П. Численные методы решения задач электрофизики / В. П. Ильин. – М. : Наука, 1985. – 334 с.

Получено 01.04.2020 г.