

УДК 536.2.01

**ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ  
ЧАСТЬ 3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ,  
РЕЗОНАНС И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН**

**О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

*Для 2D и 3D систем «среда – источник энергии» получены точные решения, описывающие нелинейную суперпозицию двух встречных волн. Основными элементами структуры построенных температурных полей являются сильные разрывы, вдоль которых действуют возбуждающие источники энергии волнового типа. В частности, представлен случай возбуждающего слоя конечной ширины. Рассмотрены гармонический и ангармонический по пространственным переменным режимы колебаний. Изучена устойчивость волны переключения (кинк-решение) между двумя состояниями равновесия системы. Определены условия возникновения теплового резонанса. Обнаружено, что малое возмущение исходного кинк-решения генерирует еще одну волну, причем произведение скоростей перемещения обеих волн равно квадрату скорости распространения малых возмущений. Представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие физические процессы, которые возникают при колебательно-волновом воздействии на материал.*

**Ключевые слова:** генерация волн, динамика неустойчивости, стоячая волна, разрыв теплового поля, 3D структура.

**DIFFUSION-KINETIC PROCESSES  
IN NON-EQUALIBLE THERMAL-PHYSICAL  
SYSTEMS WITH ENERGY SOURCES.  
PART 3. INTEGRABLE SYSTEMS,  
RESONANCE AND INTERACTION OF WAVES**

**O. N. SHABLOVSKY, D. G. KROL, I. A. KONTSEVOI**

*Educational Institution “Sukhoi State Technical University  
of Gomel”, the Republic of Belarus*

*The exact solutions are obtained for 2D and 3D systems “environment-energy source”, that describe the nonlinear superposition of two counter waves. Strong disparities are the main structural elements of the constructed temperature fields with causative wave-type energy sources acting along it. In particular, a case of causative layer of a finite width is presented. The article considers the harmonic and anharmonic by spatial variables modes of oscillation. The stability of a switching wave (kink solution) is studied between two equilibrium states of the system. The conditions of the occurrence of thermal resonance are determined. It was found that a small perturbation of the original kink solution generates one more wave, and the product of the velocities of movement of both waves is equal to the square of the propagation velocity of minor perturbations. The results of numerical simulations are presented, illustrating the physical processes that arise when vibrational-wave influence on the material.*

**Keywords:** wave generation, dynamics of instability, standing wave, thermal field disparity, 3D structure.

### Введение

Продолжим исследование [1], [2] нелинейных колебаний и волн в среде, содержащей объемные источники энергии. В данной работе объектами исследования являются закономерности взаимодействия тепловых волн, возбуждаемых слоем конечной толщины, и динамика неустойчивости волны переключения между двумя состояниями равновесия. Прикладные аспекты работы связаны с перспективными технологическими задачами нестационарного теплового воздействия источников и стоков энергии на материалы, проявляющие локально-неравновесные тепловые свойства. Состояние исследований по этой проблеме и библиография даны в [1], [2].

Цель третьей (заключительной) части статьи: изучить свойства встречных волн в 2D и 3D системах; определить эволюционные свойства поля изотерм для гармонического и ангармонического режимов теплового воздействия; указать условия возникновения резонанса в системе с кубической нелинейностью источника.

**Бегущая волна на границе возбуждающего слоя.** Двумерное волновое уравнение [см. (2)<sub>1</sub>]:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right) + k_v, \quad k_v = q_v / (c\gamma)$$

запишем в виде

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \beta^2} = -\frac{k_v}{w^2 - b^2}, \quad (1)$$

где  $\tau = \tau(\eta, \beta)$ ,  $\eta = x(w^2 - b^2)^{1/2} / w$ ,  $\beta = y + bt$ ,  $b \equiv \text{const}$ . Смысл обозначений раскрыт в [1]. При упоминании номеров формул из [1] снабжаем эти номера дополнительным нижним индексом «1», указывающим, что речь идет о первой части данной работы. Далее мы изучаем дозвуковой вариант  $b^2 < w^2$ . Рассмотрим класс температурных полей, для которого:

$$\tau = \tau(\xi), \quad \xi = \exp(\delta_1 \eta) \sin(\delta_1 \beta), \quad \delta_1 \equiv \text{const}; \quad (2)$$

$$q_v / (c\gamma) \equiv k_v(\tau, x) = \tilde{k}_v(\tau) \exp(2\delta x), \quad \delta = \delta_1 (w^2 - b^2)^{1/2} / w, \quad (3)$$

причем  $\delta_1$  – свободный параметр;  $\eta \delta_1 = x\delta$ . Итогом аналитических преобразований является динамическая система с одной степенью свободы:

$$d^2 \tau / d\xi^2 = Q(\tau) \equiv -\tilde{k}_v(\tau) / [\delta_1^2 (w^2 - b^2)]. \quad (4)$$

Для теплофизической интерпретации решения (2), (3) следует принять линию  $x = 0$  за разрыв вида (21)<sub>1</sub>, на котором действует возбуждающий источник  $W(\beta)$ , зависящий от волновой координаты.

Если  $\tilde{k}_v(\tau) = k_v^{(1)} \tau$ ,  $k_v^{(1)} < 0$ , то уравнение (4) имеет точное решение [3]:

$$\tau = A_1 \exp(\varphi \xi^+) + A_2 \exp(-\varphi \xi^+) + B_1 \exp(\varphi \xi^-) + B_2 \exp(-\varphi \xi^-), \quad (5)$$

$$\xi^\pm = \exp(\delta x) \sin[\delta_1 (y \pm bt)],$$

где  $\varphi^2 = -k_v^{(1)} / (\delta^2 w^2)$ ;  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – произвольные постоянные. В структуре этого решения учтено, что константа  $b$  входит в формулы (2)–(4) четным образом (только во второй степени). Выражение (5) представляет собой суперпозицию двух решений, содержащих две волны, распространяющиеся в противоположных друг другу направлениях. Каждое слагаемое в (5) является периодическим по волновой координате. Возбуждающий источник  $W$  генерирует две встречные волны  $\beta = y \pm bt$ .

Результаты расчета тепловых полей вида (5) представлены на рис. 1. Здесь показаны колебания температуры  $\tau = \tau(x=0, y, t=t_i)$ , где  $t_0 = 0, t_1 = P/4, t_2 = P/2, t_3 = 3P/4; P = 2\pi / (b\delta_1)$  – период колебаний по времени.

Если  $\tilde{k}_v^{(1)}(\tau) = k_v^{(1)}\tau, k_v^{(1)} > 0$ , то уравнение (4) имеет точное решение [3]:

$$\tau = A_1 \exp(\varphi\xi^+ + \beta_1) + A_2 \exp(\varphi\xi^- + \beta_1), \quad \xi^\pm = \exp(\delta x) \sin[\delta_1(y \pm bt)], \quad (6)$$

где  $\varphi^2 = k_v^{(1)} / (\delta^2 w^2)$ ;  $A_1, A_2, \beta_1, \beta_2$  – произвольные постоянные. Нетрудно видеть, что при  $A_1 = A_2$  в структуре данного решения содержатся стоячие волны:

$$\tau = 2A_1 \sin\left[\frac{\varphi}{2}(\xi^+ + \xi^-) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right] \cos\left[\frac{\varphi}{2}(\xi^+ - \xi^-) + \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)\right];$$

$$\xi^+ \pm \xi^- = \exp(\delta x) [\sin \delta_1(y + bt) \pm \sin \delta_1(y - bt)].$$

Здесь аргументом синуса и косинуса является сумма/разность двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Результаты расчета тепловых полей вида (6) представлены на рис. 1. В левом и правом столбцах этого рисунка четыре фрагмента соответствуют четырем последовательным моментам времени.

Теперь рассмотрим нелинейный источник  $k_v(\tau) = -k_v^{(2)} \text{sh}\tau, k_v^{(2)} > 0$ , зависящий только от температуры. После преобразования растяжения получаем из (1) уравнение Пуассона с правой частью  $\text{sh}\tau$ . Для этого уравнения возьмем известное решение (см. [4] и указанную там библиографию) и запишем его в виде:

$$\tau = \ln\left(\frac{1+H}{1-H}\right)^2, \quad H = \sqrt{\frac{m-1}{m}} \frac{\sin(\beta_1 \sqrt{1-m})}{\text{ch}(\eta_1 \sqrt{1-m})}. \quad (7)$$

$$\eta_1 = \eta / \Delta, \quad \beta_1 = \beta / \Delta, \quad \Delta^2 = (w^2 - b^2) / k_v^{(2)}, \quad m < 0.$$

Это решение имеет физический смысл при  $H^2 < 1$ , поэтому должно быть выполнено неравенство

$$0 < \sqrt{(m-1)/m} / \text{ch}(\eta_1 \sqrt{1-m}) \leq D_{12} < 1. \quad (8)$$

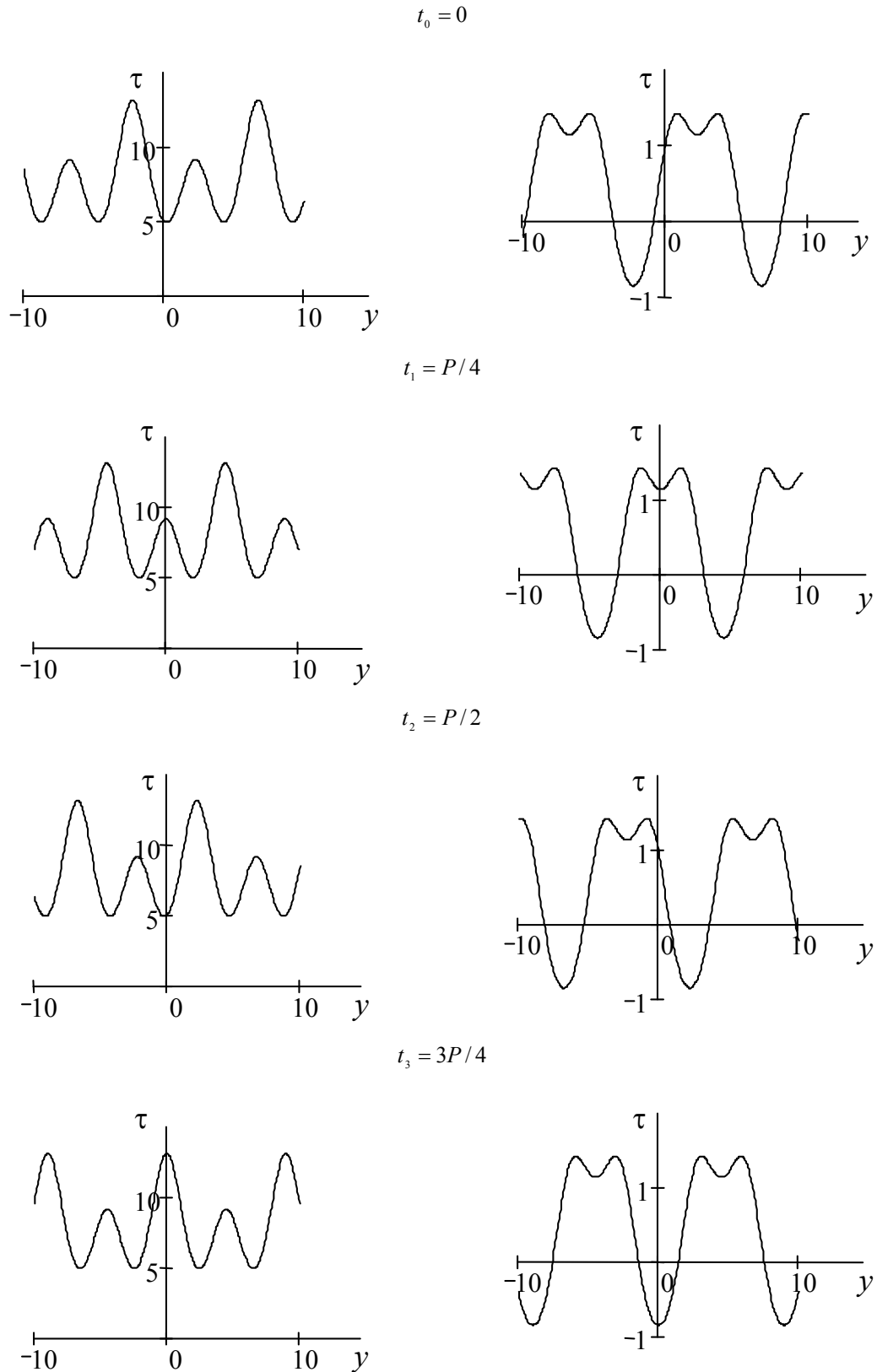


Рис. 1. Колебания теплового поля, обусловленные взаимодействием двух встречных волн. Левый столбец: решение (5),  $dk_v/dt < 0$ ;  $A_1 = 1$ ;  $A_2 = 2$ ;  $B_1 = 1$ ;  $B_2 = 1$ ;  $\delta_1 = 0,7$ ;  $k_v^{(1)} = -1$ ;  $b = 0,1$ ; правый столбец: решение (6),  $dk_v/dt > 0$ ;  $A_1 = 1$ ;  $m = 1$ ;  $\beta_1 = 0$ ;  $\beta_2 = \pi/2$ ;  $\delta_1 = 0,7$ ;  $k_v^{(1)} = 1$ ;  $b = 0,1$

Рассмотрим возбуждающий слой конечной толщины, который занимает полосу  $\{x \in [-x_1, x_1], y \in (-\infty, \infty)\}$ , где граничное значение  $|x_1|$  удовлетворяет оценке (8) и коррелирует с априорно задаваемой константой  $D_{12} \in (0, 1)$ . Формула (7) определяет температурное поле вне слоя, в правой ( $x \geq x_1$ ) и левой [ $x \leq (-x_1)$ ] полуплоскостях. Границы слоя  $x = \pm x_1$  представляют собой разрывы вида (21)<sub>1</sub>. Возбуждающие источники энергии  $W^\pm(\beta)$  есть периодические функции волновой координаты. На рис. 2 представлены свойства теплового поля (7), возбуждаемые нелинейным источником энергии, зависящим от температуры по закону типа «гиперболический синус»; здесь  $\beta = y + bt$  – волновая координата. Хорошо видна роль параметра частоты  $m$ , существенно влияющего на структуру поля температуры и поля источника энергии на плоскости  $(x, \beta)$ .

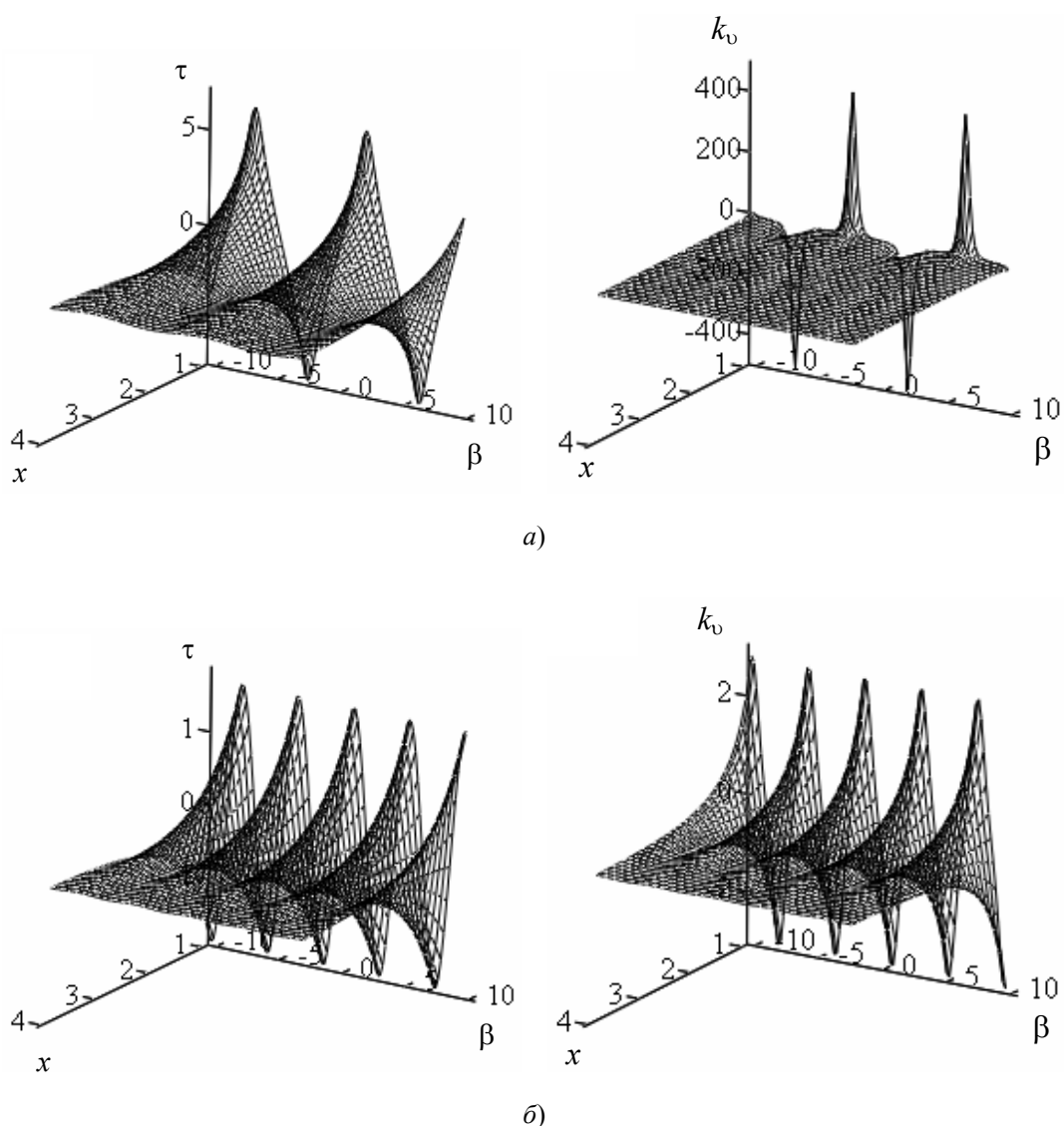


Рис. 2. Решение (7): волновая структура поля температуры и поля источника энергии при  $t = 0$ :  
 а –  $m = -0,5$ ;  $b = 0,1$ ; б –  $m = -2$ ;  $b = 0,1$

**Нелинейная суперпозиция встречных волн в 3D системах.** Выполним обобщение преобразования (2) на случай трехмерных температурных полей. По-прежнему рассматриваем дозвуковой режим распространения бегущей волны:

$$\eta = x \frac{(w^2 - b^2)^{1/2}}{w}, \quad \beta = y + bt, \quad \zeta = z \frac{(w^2 - b^2)^{1/2}}{w}, \quad 0 < b^2 < w^2,$$

где  $x, y, z$  – прямоугольные декартовы координаты. Трехмерный вариант волнового уравнения (2)<sub>1</sub> после преобразования независимых переменных  $(x, y, z) \rightarrow (\eta, \beta, \zeta)$  записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -\frac{k_v}{(w^2 - b^2)}, \quad \tau = \tau(\beta, \eta, \zeta). \quad (9)$$

Далее применяем новые аргументы:

$$\xi = E \sin \delta \beta, \quad \chi = E \sin \delta \zeta, \quad E = \exp \delta \eta, \quad (10)$$

которые позволяют записать уравнение (9) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \chi^2} = -2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi \partial \chi} \sin \delta \beta \sin \delta \zeta - \frac{k_v}{(w^2 - b^2) \delta^2 E^2}. \quad (11)$$

Отметим, что в записи аргументов (10) применяется константа  $\delta$ , а в (2) – константа  $\delta_1 \sim \delta$ . Такое переобозначение константы удобно для дальнейшей записи формул. Данное здесь преобразование независимых переменных содержит константу  $b$  во второй степени, т. е. четным образом. Это обстоятельство позволяет анализировать трехмерный процесс, в котором имеются две встречные волны  $y \pm bt$ . Для теплофизического истолкования получаемых здесь решений поступаем аналогично предыдущему. Рассматриваем плоскость  $x = 0$  как разрыв вида (21)<sub>1</sub>, на котором действует источник  $W(\beta, \zeta)$ , зависящий от координаты  $z$  и волновой переменной  $\beta = y \pm bt$ , причем  $t \geq 0$ ,  $y \in (-\infty, \infty)$ ,  $z \in (-\infty, \infty)$ . Справа от разрыва  $x \geq 0$ ,  $\delta < 0$ ; слева от разрыва  $x \leq 0$ ,  $\delta > 0$ .

Для уравнения (11) построим, следуя [3], частные решения, позволяющие понизить размерность задачи (9). Применяем объемный источник энергии, который обладает экспоненциальной неоднородностью по координате  $x$  и линейно зависит от температуры:  $k_v = k_v^1 \tau (w^2 - b^2) \delta^2 E^2$ .

Уравнение (11) допускает разделение переменных  $\xi$  и  $\chi$ , если

$$\tau(\xi, \chi) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\chi). \quad (12)$$

В этом случае получаем:

$$\frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + k_v^1 \theta_1 = 0, \quad \frac{d^2 \theta_2}{d\chi^2} + k_v^1 \theta_2 = 0. \quad (13)$$

Если  $k_v^1 > 0$ , то каждое из уравнений (13) есть уравнение свободных колебаний; их решения можно записать в виде гармонических колебаний по аргументам  $\chi$  и  $\xi^\pm = E \sin \delta\beta^\pm$ ,  $\beta^\pm = y \pm bt$  [см. (10)]. Таким образом, имеем:

$$\theta_1 = \theta_1^{(1)} \sin(\xi^+ \sqrt{k_v^1} + \beta_1^{(1)}) + \theta_1^{(2)} \sin(\xi^- \sqrt{k_v^1} + \beta_1^{(2)}), \quad \theta_2 = \theta_2^{(1)} \sin(\chi \sqrt{k_v^1} + \beta_2^{(2)}). \quad (14)$$

Здесь  $\chi = E \sin \delta\zeta$ ;  $\theta_1^{(1)}$ ,  $\theta_1^{(2)}$ ,  $\theta_2^{(1)}$ ,  $\beta_1^{(1)}$ ,  $\beta_1^{(2)}$ ,  $\beta_2^{(2)}$  – произвольные постоянные.

Если  $k_v^1 < 0$ , то решения уравнений (13) имеют ангармонический вид по отношению к аргументам  $\xi, \chi$  [см. (10)]. Запись решения выглядит так:

$$\theta_1 = \theta_1^{(1)} \exp(r\xi^+) + \theta_1^{(2)} \exp(-r\xi^+) + \theta_1^{(3)} \exp(r\xi^-) + \theta_1^{(4)} \exp(-r\xi^-), \quad (15)$$

$$r = \sqrt{-k_v^1}, \quad \xi^\pm = E \sin \delta\beta^\pm, \quad \beta^\pm = y \pm bt,$$

$$\theta_2 = \theta_2^{(1)} \exp(r\chi) + \theta_2^{(2)} \exp(-r\chi), \quad \chi = E \sin \delta\zeta.$$

Здесь  $\theta_1^{(1)}$ ,  $\theta_1^{(2)}$ ,  $\theta_1^{(3)}$ ,  $\theta_1^{(4)}$ ,  $\theta_2^{(1)}$ ,  $\theta_2^{(2)}$  – произвольные постоянные. Выражения (14), (15) представляют собой нелинейную суперпозицию встречных волн  $\sin[\delta(y \pm bt)]$ . Трехмерная структура построенных температурных полей определяется характером периодической неоднородности, которая есть результат возбуждающего воздействия источника  $W = W(\beta, \zeta)$  при  $x = 0$ . Поле изотерм, присущее этой периодической неоднородности, строим на основе формулы (12). Результаты расчетов представлены на рис. 3, а, б.

Нетрудно видеть, что уравнение (11) имеет точное решение [3]:

$$\tau = \tau^1 \xi \chi, \quad k_v = k_v^{(2)} \tau, \quad \tau^1 \equiv \text{const}, \quad (16)$$

где  $k_v^{(2)} < 0$ , а параметр решения  $\delta$  вычисляется по формуле

$$\delta^2 = \frac{-k_v^{(2)}}{2(w^2 - b^2)} > 0,$$

причем  $\tau^1$  – произвольная постоянная. По-прежнему считаем, что плоскость  $x = 0$  – это разрыв с источником  $W = W(\beta, \zeta)$ . Решение (16) содержит константу  $b$  четным образом, потому что  $\delta$  и  $\zeta$  зависят от  $b^2$ . Поэтому берем далее для линейного уравнения (11) суперпозицию двух решений вида (16) с аргументами  $\beta = y \pm bt$ . В итоге получаем при  $x = 0$  выражение для температуры:

$$\tau = (\tau_1^1 \xi^+ + \tau_2^1 \xi^-) \chi, \quad \xi^\pm = \sin[\delta(y \pm bt)], \quad \chi = \sin \delta\zeta, \quad (17)$$

где  $\tau_1^1$ ,  $\tau_2^1$  – две произвольные постоянные. Таким образом, решение (17) описывает двумерную конфигурацию стоячих волн, возбуждаемых внешним для среды источником энергии  $W$ . Эволюционные свойства трехмерного температурного поля (17) показаны на рис. 3, в. Хорошо видно, что на плоскости  $(y, z)$  происходят пульсации «сгустков» изотерм.

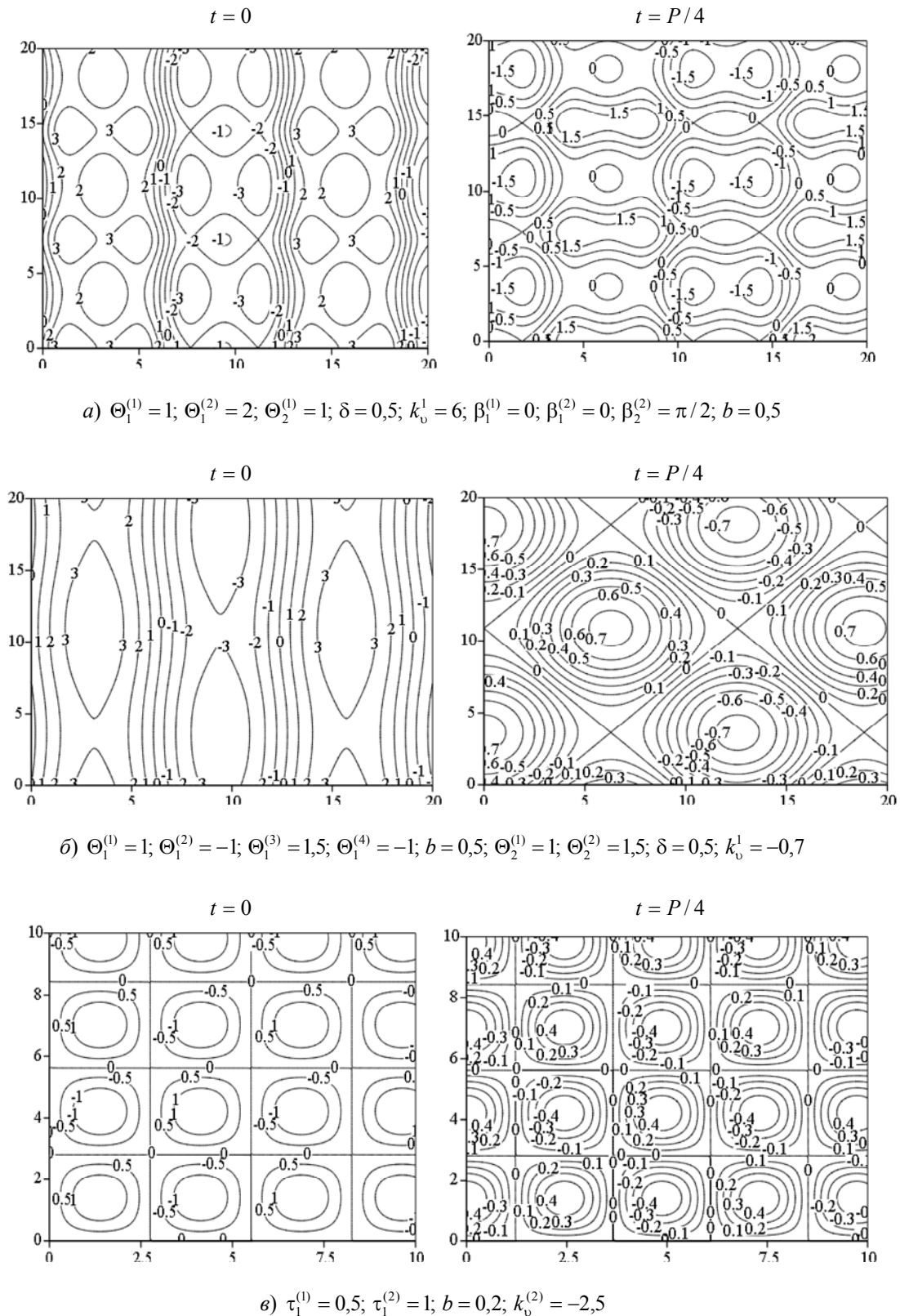


Рис. 3. Эволюция семейства изотерм  $\tau(y, z) = \text{const}$  при  $x = 0$  в течение одной четверти периода колебаний по времени:  
 а – гармонический вариант (14); б – ангармонический вариант (15);  
 в – суперпозиция волн (17)



**Тепловой резонанс.** Запишем волновое уравнение (3)<sub>1</sub> в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial (\bar{x}')^2} = \bar{k}_v(\bar{\tau}). \quad (18)$$

Дадим перечень обозначений, которые применяются далее при записи и анализе решений:  $f_1, r$  – произвольные постоянные, имеющие размерность  $[t^{-1}]$ ;  $x' = x/w$ ;  $\zeta = (f_1 + r)x' + (f_1 - r)t$  – аргумент типа «бегущая волна». Чертой сверху отмечаем безразмерные величины; нижний индекс  $b$  относится к масштабам величин, применяемых при обезразмеривании:  $\bar{x}' = x'/t_b$ ;  $\bar{t} = t/t_b$ ;  $\bar{\tau} = \tau/\tau_b$ ;  $\bar{k}_v = k_v t_b^2/\tau_b$ ;  $\bar{f}_1 = f_1/(f_1 + r)$ ;  $\bar{r} = r/(f_1 + r)$ ;  $\bar{t}_b^2 = 1/(f_1 + r)^2$ . Таким образом,  $\Omega = \bar{x}' - M_1 \bar{t}$ ,  $M_1 = 2\bar{r} - 1$ ,  $M_1^2 = N_1^2/w^2$ , где  $N_1 = w(2\bar{r} - 1)$  есть скорость перемещения линии  $\zeta = \text{const}$ ;  $M_1$  – тепловое число Маха. Процесс сверхзвуковой ( $M_1^2 > 1$ ) на двух интервалах: при  $\bar{r} < 0$  и  $\bar{r} > 1$ ; процесс дозвуковой ( $M_1^2 < 1$ ) при  $0 < \bar{r} < 1$ .

Функцию источника возьмем в виде

$$\bar{k}_v = \mu R_v(\bar{\tau}), \quad \mu = m^2(1 - M_1^2), \quad (19)$$

где  $m^2 \equiv \text{const}$  – безразмерный параметр. Рассмотрим кубическую нелинейность источника:

$$R_v(\bar{\tau}) = \bar{\tau}(\bar{\tau} - 1)(1 - 2\bar{\tau}). \quad (20)$$

В этом случае волновое уравнение (18) имеет точное кинк-решение [5], описывающее переход между двумя состояниями равновесия системы:

$$\tau \equiv K = \bar{\varphi} E_1 / (1 + \varphi E_1), \quad E_1 = \exp(m\zeta), \quad \bar{\varphi} = B_1 B_2, \quad (21)$$

где  $B_1 B_2 > 0$ , а в остальном  $B_1, B_2$  – произвольные постоянные;  $\tau_b = 1/B_1$ . Известные в литературе решения типа «кинк» наиболее подробно изучены для уравнения синус-Гордона [6]. Некоторые интересные физические свойства решения (20)–(21) получены в [7]. Представим решение уравнения (18) в виде  $\bar{\tau} = K + \varepsilon_1 \Delta$ , где  $\varepsilon_1$  – некоторый малый положительный параметр, а функция  $\Delta = \Delta(\bar{x}', \bar{t})$  есть возмущение основного решения. Стандартная процедура линеаризации дает уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial (\bar{x}')^2} = (1 - M_1^2) S \Delta, \quad (22)$$

$$6m^2 = \Lambda^2, \quad S(K) = (K_1 - K)(K - K_2), \quad K_{1,2} = (3 \pm \sqrt{3})/6, \quad K_2 < K < K_1.$$

Ясно, что  $6S(K) = (dR_v/d\bar{\tau})_{\bar{\tau}=K}$ . Для случая  $\Lambda^2 \gg 1$  решение уравнения (22) построим в следующей форме [8]:

$$\Delta = g \exp(i\Lambda h), \quad g = g(\bar{x}', \bar{t}), \quad h = h(\bar{x}', \bar{t}). \quad (23)$$

После подстановки (23) в (22) удерживаем слагаемые наивысшего порядка по отношению к  $\Lambda$ : в действительной части – это члены с  $\Lambda^2$ , а в мнимой части – члены с  $\Lambda$ . Тогда для  $h$  получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{x}'}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{t}}\right)^2 = (1 - M_1^2)S,$$

в котором следует перейти к аргументу  $\zeta$ :

$$\left(\frac{dh}{d\zeta}\right)^2 = S(K). \quad (24)$$

Выполнив преобразование независимых переменных  $(\bar{x}', t) \rightarrow (\zeta, t)$ , получаем, что функция  $g = g(\zeta, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta}(1 - 2\bar{r})\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + 4\bar{r}(\bar{r} - 1)\frac{dh}{d\zeta}\frac{\partial g}{\partial \zeta} + 4\bar{r}(\bar{r} - 1)\frac{d^2 h}{d\zeta^2}g = 0,$$

которое имеет интеграл:

$$g^2 = F(\psi)/(dh/d\zeta), \quad \psi = (1 - 2\bar{r})\bar{x}' + \bar{t}, \quad dh/d\zeta = S^{1/2}. \quad (25)$$

Здесь  $F(\psi)$  – произвольная положительная ограниченная функция. Линия  $\psi = \text{const}$  перемещается со скоростью  $N_2 = w/(2\bar{r} - 1)$ , и ей соответствует число Маха  $M_2 = N_2/w$ . Значит,  $M_1 M_2 = 1$ .

Отсюда вывод: если при  $t = 0$  исходное кинк-решение получает малое возмущение  $\varepsilon_1 \Delta(t = 0, \bar{x}')$ , определяемое решением  $g(\bar{t} = 0, \bar{x}') \exp[i\Lambda h(\bar{t} = 0, \bar{x}')]$ , то это возмущение возбуждает еще одну волну ( $\psi = \text{const}$ ), которая распространяется со скоростью  $N_2 \neq N_1$ , причем  $N_1 N_2 = w^2$ ; здесь  $N_1$  есть скорость волны переключения между двумя состояниями равновесия [см. (21)]. Например, если  $F(\psi) \sim \exp(-r_2 \psi^2)$ ,  $r_2 > 0$ , то при  $t = 0$  возмущение  $\Delta(\bar{t} = 0, \bar{x}')$  имеет импульсивный всплеск амплитуды  $g$  при  $\bar{x}' = 0$ . Другой пример: если возмущение  $F(\psi)$  происходит по гармоническому закону  $F(\psi) \sim \sin^2(r_2 \psi)$ , то  $\Delta = g[\cos(\Lambda h) + i \sin(\Lambda h)]$  содержит в своей структуре стоячую волну вида  $\cos(2r_2 \psi) \cos(\Lambda h)$ .

Решение (23)–(25) устойчиво там, где выполнено неравенство  $S(K) > 0$ ,  $K \in (K_2, K_1)$ . Значения  $\bar{\tau} = K_2$  и  $\bar{\tau} = K_1$  есть левая и правая границы температурного интервала устойчивости: на границах интервала амплитуда становится неограниченно большой ( $g \rightarrow \infty$ ), и в этих двух температурных точках возникает резонанс. Это означает, что дозвуковой процесс устойчив при  $d\bar{k}_0/d\bar{\tau} > 0$ , сверхзвуковой процесс устойчив при  $d\bar{k}_0/d\bar{\tau} < 0$ .

Расчеты были проведены на основе решения (23)–(25). Поведение квадрата амплитуды определяется зависимостью  $A^2 \equiv g^2/F_0 = \tilde{F}(\psi)/(dh/d\zeta)$ , где  $F = F_0 \tilde{F}(\psi)$  – функция возмущения волны (21), соответствующей кубической (20) нелинейности источника

энергии. Были рассмотрены следующие четыре варианта: I.  $\tilde{F}(\psi) = \psi^n \exp(-r_2 \psi^2)$ ; II.  $\tilde{F}(\psi) = \sin^2(r_2 \psi)$ ; III.  $\tilde{F}(\psi) = [\text{th}(r_2 \psi)]^2$ ; IV.  $\tilde{F}(\psi) = 1/[\text{ch}(r_2 \psi)]^2$ . Далее приведем результаты расчетов для варианта IV при  $\Lambda = 10$ .

На рис. 4 хорошо видна волновая структура амплитуды  $A^2$ , которая в значительной степени формируется под влиянием возмущающего воздействия  $\tilde{F}(\psi)$ . Количественные различия в характере пространственной неоднородности амплитуды показаны на рис. 5 для дозвукового и сверхзвукового процессов. Важным параметром воздействия служит неоднородность самой возмущающей функции. Для варианта IV в условиях дозвукового либо сверхзвукового процессов различия в числовых значениях параметра  $r_2$  приводят к качественным (монотонность либо немонотонность) различиям в структуре пространственной неоднородности амплитуды  $A^2$ .

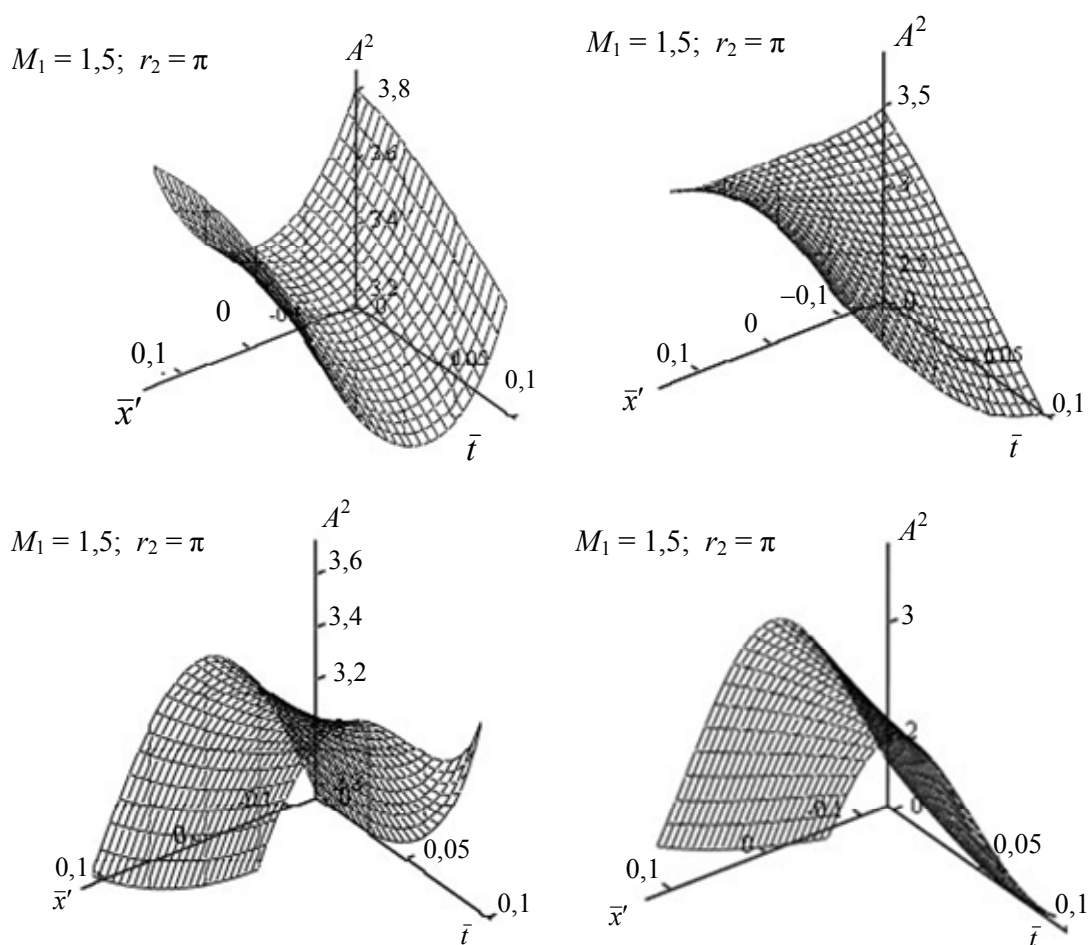


Рис. 4. Кубическая нелинейность источника: пространственно-временные свойства амплитуды в дозвуковом и сверхзвуковом процессах

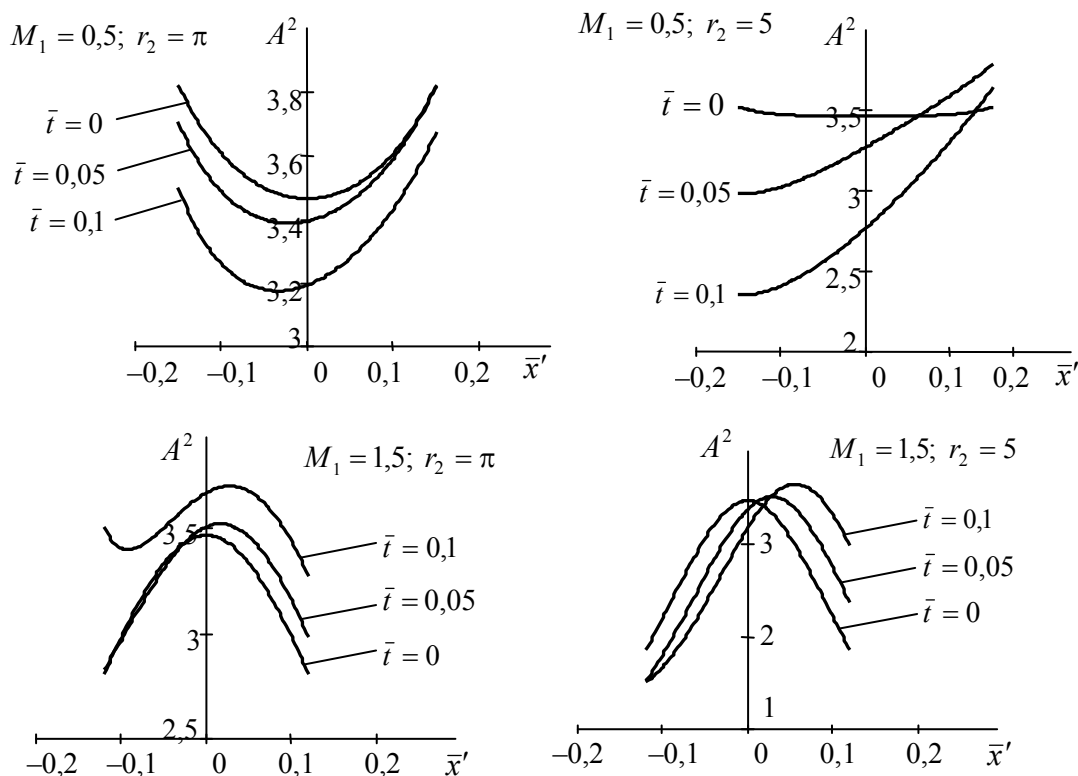


Рис. 5. Кубическая нелинейность источника: пространственная неоднородность амплитуды для отдельных моментов времени

### Заключение

Для 2D и 3D систем «среда – источник энергии» получены точные решения, описывающие нелинейную суперпозицию двух встречных волн. Основными элементами структуры построенных температурных полей являются сильные разрывы, вдоль которых действуют возбуждающие источники энергии волнового типа. В частности, представлен случай возбуждающего слоя конечной ширины. Рассмотрены гармонический и ангармонический по пространственным переменным режимы колебаний. Изучена устойчивость волны переключения (кинк-решение) между двумя состояниями равновесия системы. Определены условия возникновения теплового резонанса. Обнаружено, что малое возмущение исходного кинк-решения генерирует еще одну волну, причем произведение скоростей перемещения обеих волн равно квадрату скорости распространения малых возмущений. Представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие физические процессы, которые возникают при колебательно-волновом воздействии на материал.

### Литература

1. Шабловский, О. Н. Диффузионно-кинетические процессы в неравновесных теплофизических системах с источниками энергии. Ч. 1. Дисперсия нелинейных тепловых волн / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2020. – № 1. – С. 3–14.
2. Шабловский, О. Н. Диффузионно-кинетические процессы в неравновесных теплофизических системах с источниками энергии. Ч. 2. Аналитическая структура однокомпонентных и двухкомпонентных систем / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2020. – № 2. – С. 3–14.

3. Шабловский, О. Н. Формирование пространственных структур при возбуждении колебаний на разрыве теплового поля / О. Н. Шабловский // *Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем.* – М., 2016. – Вып. 17. – С. 333–343.
4. Капцов, О. В. Некоторые классы плоских вихревых течений идеальной жидкости / О. В. Капцов // *Приклад. механика и техн. физика.* – 1989. – № 1. – С. 109–117.
5. Шабловский, О. Н. Кинк-решения нелинейных и нелокальных волновых уравнений с источниками / О. Н. Шабловский // *Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем.* – М., 2016. – Вып. 17. – С. 325–332.
6. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике : пер. с англ. / М. Табор ; науч. ред. В. А. Журавлев. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
7. Шабловский, О. Н. Нелокальность и возникновение резонансов в динамике волн / О. Н. Шабловский // *Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем.* – М., 2017. – Вып. 18. – С. 125–138.
8. Маслов, В. П. Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса / В. П. Маслов // *Успехи мат. наук.* – 1986. – Т. 41, вып. 6. – С. 19–35.

*Получено 15.12.2020 г.*