

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Промышленная электроника»**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**

**Практикум**

**по выполнению лабораторных работ по одноименной  
дисциплине для студентов специальности  
1-36 04 02 «Промышленная электроника»  
дневной и заочной форм обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2021**

УДК 621.317(075.8)  
ББК 30я73  
Т33

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 4 от 28.12.2020 г.)*

Составители: *В. В. Щуплов, Н. А. Красовская*

Рецензент: доц. каф. «Автоматизированный электропривод» ГГТУ им. П. О. Сухого  
канд. техн. наук, доц. *В. С. Захаренко*

Т33 **Теоретические** основы информационно-измерительной техники : практикум по выполнению лаборатор. работ по одноим. дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / сост.: В. В. Щуплов, Н. А. Красовская. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 68 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-457-5.

Содержит описание семи лабораторных работ, в которых исследуются методы спектрального анализа, их корреляционные свойства, а также методы цифровой фильтрации сигналов. Даны необходимые сведения для освоения теоретического материала и практического закрепления знаний, а также задания по экспериментальным исследованиям и контрольные вопросы.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.317(075.8)  
ББК 30я73

ISBN 978-985-535-457-5

© Щуплов В. В., Красовская Н. А.,  
составление, 2021  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2021

*Лабораторная работа № 1*  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ ДИСКРЕТНЫХ  
СИГНАЛОВ**

*Цель работы:* моделирование дискретных сигналов и шума. Изучение влияния шага дискретизации гармонического сигнала на его восстановление по отсчетам.

### 1. Краткие теоретические сведения

С информационной точки зрения сигналы можно разделить на детерминированные и случайные.

*Детерминированным* называют любой сигнал, мгновенное значение которого в тот или иной момент времени можно предсказать с вероятностью единица. Примерами детерминированных сигналов могут служить импульсы или пачки импульсов, форма, амплитуда и положение во времени которых известны, а также непрерывный сигнал с заданными амплитудными и фазовыми соотношениями внутри его спектра.

К *случайным* относят сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Такими сигналами являются, например, электрическое напряжение, соответствующее речи, музыке, последовательности знаков телеграфного кода при передаче неповторяющегося текста. По существу, любой сигнал, несущий в себе информацию, должен рассматриваться как случайный.

Наряду с полезными случайными сигналами в теории и практике приходится иметь дело со случайными помехами – *шумами*.

Применяемые в современной радиоэлектронике сигналы можно разделить на следующие классы:

- произвольные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.1, *а*);
- произвольные по величине и дискретные по времени (рис. 1.1, *б*);
- квантованные по величине и непрерывные по времени (рис. 1.1, *в*);
- квантованные по величине и дискретные по времени (рис. 1.1, *г*).

Сигналы первого класса (рис. 1.1, *а*) иногда называют *аналоговыми*, так как их можно толковать как электрические модели физических величин, или непрерывными, так как они задаются по оси времени на несчетном множестве точек. Такие множества называются континуальными. При этом по оси ординат сигналы могут принимать

любое значение в определенном интервале. Поскольку эти сигналы могут иметь разрывы, как на рис. 1.1, *а*, то, чтобы избежать некорректности при описании, лучше такие сигналы обозначать термином *континуальный*.

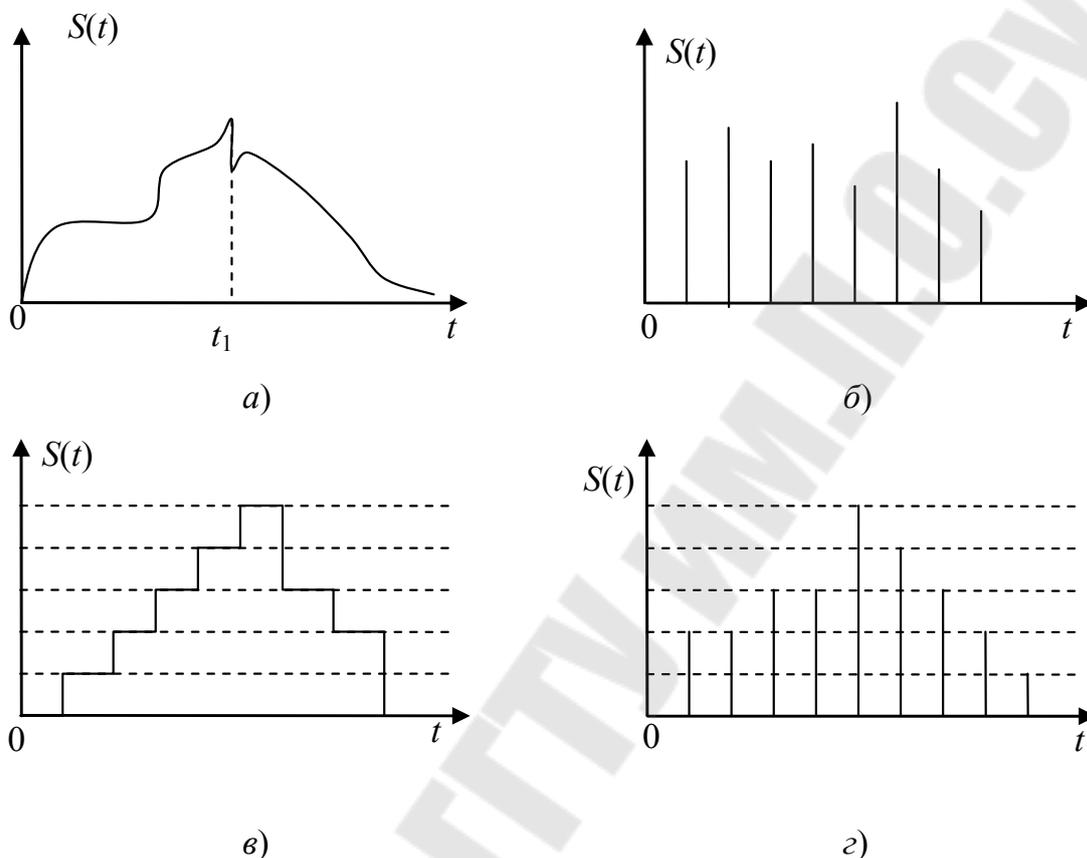


Рис. 1.1. Сигналы:

- а* – произвольные по величине и по времени;
- б* – произвольные по величине и дискретные по времени;
- в* – квантованные по величине и непрерывные по времени;
- г* – квантованные по величине и дискретные по времени

Итак, *аналоговый* сигнал  $s(t)$  является функцией непрерывной переменной  $t$ , а *дискретный* сигнал  $s(x)$  – функцией дискретной переменной  $x$ , принимающей только фиксированные значения. Дискретные сигналы могут создаваться непосредственно источником информации (например, дискретными датчиками в системах управления или телеметрии) или образовываться в результате дискретизации континуальных сигналов.

На рис. 1.1, *б* представлен сигнал, заданный при дискретных значениях времени  $t$  (на счетном множестве точек); величина сигнала в этих точках может принимать любое значение в определенном ин-

тервале по оси ординат (как и на рис. 1.1, а). Таким образом, термин *дискретный* характеризует не сам сигнал, а способ задания его на временной оси.

Сигнал на рис. 1.1, в задан на всей временной оси, однако его величина может принимать лишь дискретные значения. В подобных случаях говорят о сигнале, *квантованном по уровню*. В дальнейшем термин *дискретный* будет применяться только по отношению к дискретизации по времени; дискретность по уровню будет обозначаться термином *квантование*.

Дискретные сигналы, уровни которых могут принимать лишь счетное множество значений, называют *квантованными* сигналами.

*Квантование* используют при представлении сигналов в цифровой форме с помощью цифрового кодирования, поскольку уровни можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов. Поэтому дискретный по времени и квантованный по уровню сигнал (рис. 1.1, з) называют *цифровым*.

Таким образом, можно различать континуальные (рис. 1.1, а), дискретные (рис. 1.1, б), квантованные (рис. 1.1, в) и цифровые (рис. 1.2, з) сигналы.

Итак, основное свойство дискретного сигнала: его значения определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек. Если аналоговый сигнал имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно-непрерывной функции, то отвечающий ему дискретный сигнал  $x_d(t)$  представляет собой последовательность  $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  отсчетных значений сигнала  $x(t)$  в точках  $(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$  соответственно. На практике, как правило, отсчеты дискретных сигналов берут во времени через равный промежуток  $\Delta t$ , называемый *интервалом (шагом) дискретизации*.

Шаг дискретизации должен удовлетворять теореме Котельникова.

*Теорема Котельникова* (теорема отсчетов) гласит: если наивысшая частота в спектре функции  $s(t)$  меньше, чем  $f_{\max}$ , то функция  $s(t)$  полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга не более чем на  $1/2f_{\max}$  секунды.

В соответствии с этой теоремой сигнал  $s(t)$ , ограниченный по спектру наивысшей частотой  $\omega = 2\pi f_{\max}$ , можно представить рядом:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\varphi_n(t).$$

В этом выражении  $\Delta t = 1/2f_m$  обозначает интервал между двумя отсчетными точками на оси времени, а  $s(n\Delta t)$  – выборки функции  $s(t)$  в моменты времени  $t = n\Delta t$ .

Таким образом, под дискретизацией сигнала  $s(t)$  подразумевается аналитическое его представление с помощью совокупности отсчетов в дискретные моменты времени, равные  $n\Delta t$ .

Введем понятие *дельта-функции*, или *функции Дирака*.

Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы (рис. 1.2), заданный следующим образом:

$$v(t; \xi) = \frac{1}{\xi} \left[ \delta\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right].$$

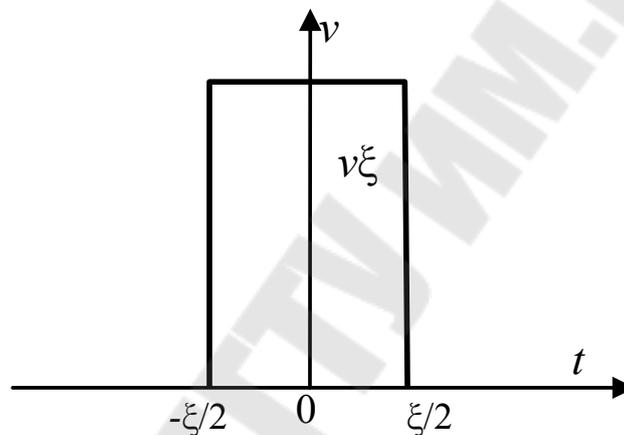


Рис. 1.2. Импульс прямоугольной формы

При любом выборе параметра  $\xi$  площадь этого импульса равна единице:

$$\Pi_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1.$$

Например, если  $v$  – напряжение, то  $\Pi_v = 1$  В · с. Пусть теперь величина  $\xi$  стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел последовательности таких функций при  $\xi \rightarrow 0$  носит название *дельта-функции*, или *функции Дирака*:

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t; \xi). \quad (1.1)$$

Будучи равной нулю всюду, за исключением точки  $t = 0$  (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), дельта-функция обладает единичным интегралом:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Символическое изображение дельта-функции приведено на рис. 1.3.

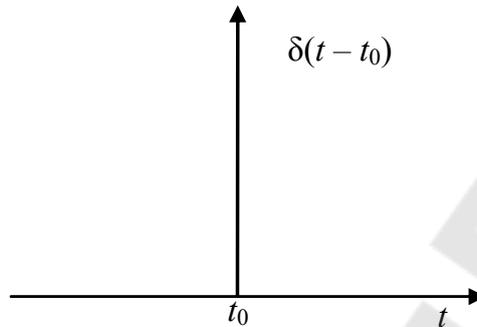


Рис. 1.3. Символическое изображение дельта-функции

Основная причина, делающая дельта-функцию столь удобной в физических задачах, состоит в следующем: дельта-функция является математической моделью короткого внешнего воздействия с единичным импульсом. При помощи дельта-функции можно дискретизировать непрерывный сигнал:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Важное свойство дельта-функции: ее физическая размерность такая же, как и размерность частоты, т. е.  $c^{-1}$ .

Итак, если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен  $\delta$ -импульс. Принято говорить, что в этом состоит фильтрующее свойство дельта-функции.

Операцию дискретизации, т. е. переход от аналогового сигнала  $s(t)$  к дискретному сигналу  $s_d(t)$ , можно описать, введя в рассмотрение обобщенную функцию, называемую дискретизирующей последовательностью:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t). \quad (1.3)$$

Очевидно, дискретный сигнал  $s_d(t)$  представляет собой функционал, определенный на множестве всевозможных аналоговых сигналов  $s(t)$  и равный скалярному произведению функции  $s(t)$  и  $\eta(t)$ :

$$s_d(t) = (x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta t) dt = (\dots, x(-2\Delta t), x(-\Delta t), x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots). \quad (1.4)$$

Формула (1.4) указывает путь реализации дискретизации аналогового сигнала. Дискретизация основана на операции стробирования – перемножения обрабатываемого сигнала  $s(t)$  и «гребенчатой» функции  $\eta(t)$ . Поскольку длительность отдельных импульсов, из которых складывается дискретизирующая последовательность, равна нулю, на выходе идеального дискретизатора в равноотстоящие моменты времени возникают отсчетные значения обрабатываемого аналогового сигнала. Такой сигнал называется *модулированной импульсной последовательностью (МИП)*. Естественно, что дискретный сигнал является математической моделью МИП. Такая математическая модель модулированной импульсной последовательности, образованной бесконечно короткими импульсами, окажется заданной выражением

$$s_{\text{МИП}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \delta(t - k\Delta t), \quad (1.5)$$

где  $s_k = s(k\Delta t)$  – выборочные значения аналогового сигнала.

В данной лабораторной работе используются три испытательных сигнала, которые впоследствии будут подаваться на вход цифрового фильтра – это дискретный аналог меандра и дискретный аналог гармонического (синусоидального) сигнала, амплитуды которых равны 1, и случайный сигнал  $n(k)$ , ограниченный по амплитуде в пределах  $-1 \leq n(k) \leq 1$ , где число  $k$  – это заданное число отсчетов

Меандр – это импульсный сигнал прямоугольной формы, представленный на рис. 1.4.

Линейный цифровой фильтр, по определению, есть дискретная система (физическое устройство или программа для компьютера), которая преобразует последовательность  $\{x_k\}$  числовых отсчетов входного сигнала в последовательность  $\{y_k\}$  отсчетов выходного сигнала.

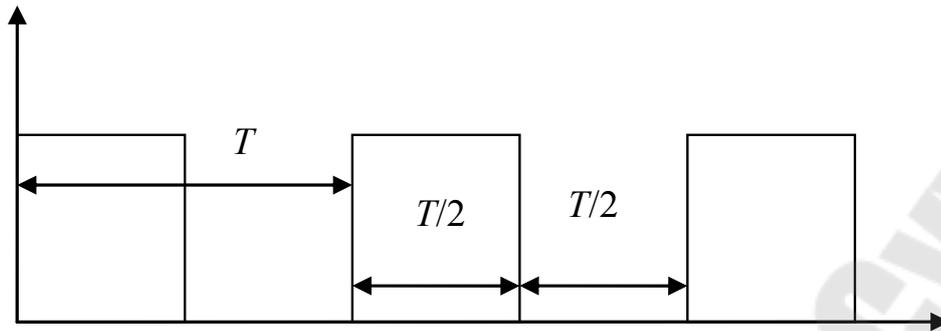


Рис. 1.4. Прямоугольный импульсный сигнал, называемый меандром

Как известно, в теории линейных систем особую роль играют комплексные сигналы вида  $x(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ , отображающие гармонические колебания. При дискретизации такого сигнала по времени получается так называемая гармоническая последовательность  $\{x_k\} = \{Ae^{j(\omega k\Delta + \varphi)}\}$ , такая, что:

$$\operatorname{Re}\{x_k\} = \{A \cos(\omega k\Delta + \varphi)\}, \quad \operatorname{Im}\{x_k\} = \{A \sin(\omega k\Delta + \varphi)\}.$$

При моделировании дискретной гармонической последовательности по аналоговому сигналу  $s(t) = \sin(\omega t)$  удобнее брать отсчеты не через временной шаг дискретизации –  $\Delta t$ , а через фазовый угол –  $\Delta\varphi$ :  $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ .

Таким образом, если временной шаг дискретизации является константой для конкретного цифрового фильтра, то уменьшение угла  $\varphi$  эквивалентно уменьшению частоты аналогового сигнала  $s(t)$ , из которого берутся отсчеты (и увеличению числа отсчетов за период). Такой подход дает возможность при анализе АЧХ цифровых фильтров не привязываться к тактовой частоте фильтра (шагу дискретизации) и вместо оси частот использовать ось  $\varphi$ -фазового угла интервала дискретизации при текущем значении частоты. Одно и то же значение угла  $\varphi$  могут иметь фильтры с разным шагом дискретизации, но для разных частот  $\omega$ .

## 2. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Разработать алгоритм, моделирующий дискретный аналог меандра для 4–6 периодов. Число единичных (и нулевых) отсчетов взять от 5 до 8.

Построить график дискретного аналога меандра.

2. Используя тригонометрические функции, разработать алгоритм, моделирующий дискретный аналог гармонического колебания для 3–4 периодов:  $-1 \leq n(k) \leq +1$ . Шаг дискретизации по фазе взять равным 10, 45, 90 и 120 градусов. Для каждого шага дискретизации построить график.

3. Используя программу генерирования случайных чисел с равномерным законом распределения, смоделировать отсчеты случайного процесса (шума) в амплитудном диапазоне  $-1 \leq n(k) \leq 1$ . Число отсчетов взять равным от 50 до 100.

4. Смоделировать отсчеты аддитивной смеси двух гармонических сигналов и шума для отношения с/ш = 5 по напряжению для 128 отсчетов. Гармонические дискретные сигналы заданы выражениями:

$$s1_k = \cos\left(\frac{16}{128}\pi k\right);$$
$$s2_k = \sin\left(\frac{12}{128}\pi k\right),$$

где  $k$  – номер отсчета.

Построить графики суммы двух сигналов, шума, суммы сигналов с шумом.

5. Распечатать графики дискретных аналогов меандра, дискретной гармонической последовательности для различных фазовых углов дискретизации, дискретной последовательности отсчетов суммы сигналов, шума и суммы сигналов с шумом.

### 3. Содержание отчета

Отчет должен содержать распечатки программ моделирования сигналов и графики моделей дискретных сигналов, рассмотренных в п. 2–4.

#### Контрольные вопросы

1. Какой сигнал называется меандром?
2. Какой сигнал называется детерминированным?
3. Какой сигнал называется случайным?
4. Какой сигнал называется дискретной гармонической последовательностью?

5. Почему удобнее задавать шаг дискретизации через фазовый угол?

6. О чем говорит теорема Котельникова?

7. В какую сторону нужно изменить фазовый угол дискретизации, чтобы увеличить или уменьшить частоту сигнала при неизменном временном шаге дискретизации?

### **Литература**

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.

## Лабораторная работа № 2

# ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛОВ НА ЭВМ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*Цель работы:* научиться находить спектр сигнала с помощью БПФ и по известному спектру находить исходный сигнал с помощью обратного БПФ.

## 1. Краткие теоретические сведения

### 1.1. Векторное представление сигнала

В линейном пространстве сигналов можно выделить специальное подмножество, играющее роль координатных осей. Говорят, что совокупность векторов  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , принадлежащих множеству  $M$ , является линейно независимой, если равенство  $\sum_i \alpha_i e_i = 0$  возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов  $\alpha_i$ .

Система линейно независимых векторов образует координатный базис в линейном пространстве. Если дано разложение некоторого сигнала  $s(t)$  в виде  $s(t) = \sum_i c_i e_i$ , то числа  $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$  являются проекциями сигнала  $s(t)$  относительно выбранного базиса.

Длину вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов  $L$  является *нормированным*, если каждому вектору  $s(t) \in L$  однозначно сопоставлено число  $\|s\|$  – норма этого вектора.

В теории сигналов чаще всего полагают, что вещественные аналоговые сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}. \quad (2.1)$$

Данная формула в равной мере относится как к аналоговым, так и к дискретным сигналам (из двух возможных значений корня выбирается положительное).

Функция  $u(t)$ , для которой выполняется условие

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(t) dt = 1, \quad (2.2)$$

называется *нормированной* функцией, а система нормированных функций  $u_1(t), u_2(t) \dots$ , в которой две различные функции взаимно ортогональны, называется *ортонормированной системой*.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*:

$$E = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (2.3)$$

Определять норму сигнала с помощью формулы (2.1) целесообразно по следующим причинам:

1) в теории сигналов о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например, количества теплоты, выделяемой в резисторе;

2) энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, может быть, и значительным, но происходящим на коротких отрезках времени.

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисов для представления радиотехнических сигналов, исключительное место занимают гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции.

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодический сигнал  $s(t)$  со следующим свойством:

$$s(t) = s(t \pm nT), \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Здесь  $T$  – период сигнала.

Два сигнала  $u$  и  $v$  называются *ортгональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = 0. \quad (2.5)$$

Выражение (2.4) называют *принципом ортогональности* двух сигналов.

Пусть  $H$  – гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени  $[t_1, t_2]$ , конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций  $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ , ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан ортонормированный базис.

### 1.2. Спектральное представление периодического сигнала

Разложим произвольный сигнал  $s(t) \in H$  в ряд, согласно следующему выражению:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(t). \quad (2.7)$$

Представление (2.7) называется обобщенным рядом Фурье сигнала  $s(t)$  в выбранном базисе. Коэффициенты  $C_n$  определяются по формуле

$$C_n = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_n(t) dt = (s, u_n). \quad (2.8)$$

Совокупность полученных коэффициентов  $C_n$  называют *спектром* сигнала  $s(t)$  в ортогональной системе  $u(t)$  и полностью определяют этот сигнал.

Введем основную частоту  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения по формуле (2.8), запишем ряд Фурье для периодического сигнала:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (2.9)$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt; \\ a_1 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\omega_1 t dt; \\ b_1 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\omega_1 t dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит не зависящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник с частотами  $\omega_n = n\omega_1$ , где ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), кратными основной частоте последовательности.

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой  $A_n$  и начальной фазой  $\varphi_n$ . Для этого коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n.$$

Так что:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{b_n}{a_n}. \quad (2.11)$$

Подставив эти выражения в (2.9), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

*Спектральной диаграммой периодического сигнала* принято называть графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы.

Для того чтобы получить комплексную форму ряда Фурье, необходимо выполнить спектральное разложение периодического сигнала, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

В этом случае форма записи ряда Фурье будет выглядеть следующим образом:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (2.13)$$

А коэффициенты определяются по формуле

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.14)$$

Совокупность коэффициентов  $C_n$  ряда Фурье в базисе тригонометрических функций называется *частотным спектром* периодического сигнала.

При разложении периодического сигнала  $s(t)$  в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в качестве ортогональной системы берут

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t \quad (2.15)$$

или

$$e^{-nj\omega_1 t}, \dots, e^{-2j\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, e^{j\omega_1 t}, e^{2j\omega_1 t}, \dots, e^{n\omega_1 t}. \quad (2.16)$$

Интервал ортогональности в обоих случаях совпадает с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$  функции  $s(t)$ .

Система функций (2.15) приводит к тригонометрической форме ряда Фурье, а система (2.16) – к комплексной форме. Между этими двумя формами существует простая связь.

Выражение (2.13) является разложением в ряд Фурье по системе функций (2.16). Данное выражение легко преобразуется к виду:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta)}. \quad (2.17)$$

Причем  $|C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$ ,  $\theta = -\arctg \frac{C_{ns}}{C_{nc}}$ , где  $C_{nc}$  и  $C_{ns}$  – косинусная (действительная) и синусная (мнимая) части коэффициента  $C_n$ , определяемы следующим образом:

$$C_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad C_{ns} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (2.18)$$

Модуль  $|C_n|$  является функцией, четной относительно  $n$ , а аргумент  $\theta_n$  – нечетной, т. е.  $C_{nc}$  является четной, а  $C_{ns}$  – нечетной функциями  $n$ .

Теперь нетрудно перейти к тригонометрической форме ряда Фурье. Выделив из ряда (2.17) пару слагаемых, соответствующую какому-либо заданному значению  $|n|$ , например,  $|n| = 2$ , и, учтя соотношения  $\theta_{-2} = -\theta_2$  и  $|C_{-2}| = |C_2|$ , получим для суммы этих слагаемых выражение, равное  $2|C_2| \cos(2\omega_1 t + \theta_2)$ .

Отсюда видно, что при переходе к тригонометрической форме ряд (2.17) необходимо записать следующим образом:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \theta). \quad (2.19)$$

Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_0 e^{j\varphi_n} \quad \text{и} \quad C_{-n} = A_0 e^{-j\varphi_n}. \quad (2.20)$$

Каждой такой паре отвечает гармоническое колебание

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

с комплексной амплитудой  $A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$ .

### 1.3. Спектральное представление непериодического сигнала

Рассмотрим малый интервал частот  $\Delta\omega$ , образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты  $\omega_0$ . В пределах этого интервала будет содержаться  $N = \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\Delta\omega T}{2\pi}$  отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому составляющие можно складывать так, как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами:

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt. \quad (2.21)$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала  $\Delta\omega$ :

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt. \quad (2.22)$$

Функция

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.23)$$

носит название *спектральной плотности сигнала*  $s(t)$ . Формула (2.23) осуществляет *преобразование Фурье* данного сигнала.

#### **Физический смысл понятия спектральной плотности**

Интерпретацию полученных результатов удобно провести, перейдя от угловой частоты  $\omega$  к циклической частоте  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

При этом формула (2.22) приобретет вид:

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0) \Delta f. \quad (2.24)$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность  $2S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$  есть коэффициент пропорциональности между длиной малого интервала частот  $\Delta f$  и отвечающей ему комплексной амплитудой  $\Delta A_{f_0}$

гармонического сигнала с частотой  $f_0$ . Коэффициент 2 означает, что вклад в амплитуду дают в равной мере и положительные, и отрицательные частоты, образующие окрестности точек  $\pm f_0$ .

Возможна и обратная процедура – определение сигнала  $s(t)$  по его спектральной плотности  $S(\omega)$ :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.25)$$

Формула (2.25) называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала  $s(t)$ .

#### 1.4. Свойства преобразования Фурье

К свойствам преобразования Фурье относятся:

##### 1. Линейность.

Это важнейшее свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов  $s_1(t), s_2(t), \dots$ , причем  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega), s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega), \dots$ , то взвешенная сумма сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega). \quad (2.26)$$

Здесь  $a_i$  – произвольные числовые коэффициенты.

2. *Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности.*

Пусть  $s(t)$  – сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

Причем вещественная часть  $A(\omega)$  спектральной плотности сигнала есть четная, а мнимая часть  $B(\omega)$  – нечетная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega). \quad (2.27)$$

3. *Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени.*

Пусть известно, что для сигнала  $s(t)$  существует соответствие  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на  $t_0$  секунд

позднее. Примем точку  $t_0$  за новое начало отсчета времени, обозначим этот смещенный сигнал как  $s(t - t_0)$ . Тогда

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.28)$$

4. *Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени.*

Предположим, что исходный сигнал  $s(t)$  подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени  $t$  играет новая независимая переменная  $kt$  (где  $k$  – некоторое вещественное число). Если  $k > 1$ , то происходит «сжатие» исходного сигнала; если же  $0 < k < 1$ , то сигнал «растягивается» во времени. Причем если  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ , то

$$s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (2.29)$$

5. *Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла.*

Пусть сигнал  $s(t)$  и его спектральная плотность  $S(\omega)$  заданы. Рассмотрим новый сигнал  $f(t) = \frac{ds}{dt}$  и найдем его спектральную плотность  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = j\omega S(\omega). \quad (2.30)$$

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает. Как следствие, модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем спектра исходного сигнала.

Формула (2.30) обобщается на случай спектра производной  $n$ -го порядка. Очевидно, что если  $f(t) = \frac{d^n s}{dt^n}$ , то

$$G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega). \quad (2.31)$$

Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель  $j\omega$ . Поэтому принято говорить, что мнимое число  $j\omega$  является оператором дифференцирования, действующим в частотной

области. Рассмотренная функция  $s(t) = \int f(t)dt$  является первообразной (неопределенным интегралом) по отношению к функции  $f(t)$ . Из (2.30) формально следует, что спектр первообразной функции

$$S(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad (2.32)$$

Таким образом, множитель  $1/j\omega$  служит оператором интегрирования в частотной области.

#### 6. Спектральная плотность сигнала на выходе интегратора.

Во многих радиотехнических устройствах находят применение так называемые *интеграторы* – физические системы, выходной сигнал которых пропорционален интегралу от входного воздействия. Рассмотрим интегратор, осуществляющий преобразование входного сигнала  $s_{\text{вх}}(t)$  в выходной сигнал  $s_{\text{вых}}(t)$  по следующему закону:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t s_{\text{вх}}(\xi) d\xi. \quad (2.33)$$

Здесь  $T > 0$  – фиксированный параметр. Определенный интеграл, входящий в (2.33), равен разности двух значений первообразной сигнала  $s_{\text{вх}}(t)$ , одно из которых вычисляется при аргументе  $t$ , а другое – при аргументе  $(t - T)$ . Используя соотношения (2.26) и (2.28), получаем формулу связи между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$S(\omega) = \frac{S_{\text{вх}}(\omega)}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (2.34)$$

Сомножитель в скобках ограничен при любых частотах, в то же время модуль знаменателя линейно растет с увеличением частоты. Это свидетельствует о том, что рассматриваемый интегратор действует подобно фильтру нижних частот, ослабляя высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала.

#### 7. Спектральная плотность произведения сигналов.

Как известно, при суммировании сигналов их спектры складываются. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей. Пусть  $u(t)$  и  $v(t)$  – два сигнала, для которых известны соответствия  $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$

и  $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$ . Образум произведение этих сигналов:  $s(t) = u(t)v(t)$  и вычислим его спектральную плотность. По общему правилу:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.35)$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал  $v(t)$  через его спектральную плотность и подставим результат в (2.35). Откуда получим следующее выражение:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)U(\omega - \xi)d\xi. \quad (2.36)$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют сверткой функций  $U$  и  $V$ . Операция свертки символически обозначается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)U(\omega - \xi)d\xi = U(\omega)V(\omega). \quad (2.37)$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} U(\omega)V(\omega). \quad (2.38)$$

Приведенная выше теорема о свертке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения  $S(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$ , причем  $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$  и  $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$ , то сигнал  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$  является сверткой сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , но уже не в частотной, а во временной области:

$$S(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi)s_2(\xi)d\xi. \quad (2.39)$$

Для количественного определения степени отличия сигнала и  $s(t)$  и его смещенной во времени копии  $s(t - \tau)$  принято вводить *функцию корреляции*, или *автокорреляционную функцию* (АКФ) сигнала  $s(t)$ , равную скалярному произведению сигнала и копии:

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt. \quad (2.40)$$

Из выражения (2.40) видно, что  $B_s(t)$  характеризует степень связи (корреляции) сигнала  $s(t)$  со своей копией, сдвинутой на величину  $\tau$  по оси времени. Ясно, что функция  $B_s(t)$  достигает максимума при  $\tau = 0$ , так как любой сигнал полностью коррелирован с самим собой. При этом

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E, \quad (2.41)$$

т. е. максимальное значение корреляционной функции равно энергии сигнала.

Квадрат модуля спектральной плотности, как известно, представляет собой энергетический спектр сигнала. Итак, энергетический спектр и автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье:

$$B_s(\tau) \leftrightarrow |S(\omega)|^2. \quad (2.42)$$

Ясно, что имеется и обратное соотношение:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.43)$$

Эти результаты принципиально важны по двум причинам. Во-первых, оказывается возможным оценивать корреляционные свойства сигналов, исходя из распределения их энергии по спектру. Чем шире полоса частот сигнала, тем уже основной лепесток автокорреляционной функции и тем совершеннее сигнал с точки зрения возможности точного измерения момента его начала.

## 2. Дискретное преобразование Фурье

Воспользуемся моделью в виде последовательности дельта-импульсов и сопоставим исходному колебанию  $s(t)$  его дискретное МИП-представление:

$$s_{\text{МИП}}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \delta(t - k\Delta t). \quad (2.44)$$

Представим дискретную модель (2.44) комплексным рядом Фурье:

$$s_{\text{МИП}}(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n t / T} \quad (2.45)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T\Delta t} \int_0^T s_{\text{МИП}}(t) e^{-j2\pi nt/T} dt. \quad (2.46)$$

Подставив формулу (2.44) в (2.46), а также используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-j2\pi nk/N}. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) определяет последовательность коэффициентов, образующих *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ) рассматриваемого сигнала. Отметим некоторые очевидные свойства ДПФ:

1. Дискретное преобразование Фурье есть линейное преобразование, т. е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.

2. Число различных коэффициентов  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ , вычисляемых по формуле (2.47), равно числу  $N$  отсчетов за период; при  $n = N$  коэффициент  $C_N = C_0$ .

3. Коэффициент  $C_0$  (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k. \quad (2.48)$$

4. Если  $N$  – четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k (-1)^k. \quad (2.49)$$

5. Пусть отсчетные значения  $s_k$  – вещественные числа. Тогда коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно  $N/2$ , образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-j2\pi(N-n)k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{j2\pi nk/N} = C_n^*. \quad (2.50)$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты  $C_{N/2+1}, \dots, C_{N-1}$  отвечают отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра сигнала они не дают новых сведений.

Задача дискретного спектрального анализа может быть поставлена и по-иному. Допустим, что коэффициенты  $C_n$ , образующие ДПФ,

заданы. Положим в формуле (2.47)  $t = k\Delta t$  и учтем, что суммируется лишь конечное число членов ряда, которые отвечают гармоникам, содержащимся в спектре исходного сигнала. Таким образом, получаем формулу для вычисления отсчетных значений:

$$s_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j2\pi nk/N}, \quad (2.51)$$

выражающую алгоритм обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ).

Взаимно дополняющие друг друга формулы (2.47) и (2.51) являются дискретными аналогами обычной пары преобразований Фурье для непрерывных сигналов.

В настоящее время дискретный спектральный анализ является одним из наиболее распространенных методов исследования сигналов с помощью компьютеров. Алгоритмы вычисления ДПФ и БПФ реализованы в таких широко распространенных прикладных математических пакетах, как Maple и MathCAD и др.

Как видно из формулы (2.47) или (2.51), чтобы вычислить ДПФ или ОДПФ последовательности из  $N$  элементов, требуется выполнить  $N^2$  операций с комплексными числами. Если длины обрабатываемых массивов имеют порядок тысячи или более, то использовать эти алгоритмы дискретного спектрального анализа в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного быстродействия вычислительных устройств.

Выходом из положения явился алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), предложенный в 60-х годах. Существенно сократить число выполняемых операций здесь удастся за счет того, что обработка входного массива сводится к нахождению ДПФ (или ОДПФ) массивов с меньшим числом членов.

Будем предполагать, и это существенно для метода БПФ, что число отсчетов  $N = 2^p$ , где  $p$  – целое число.

Разобьем входную последовательность  $\{s_k\}$  на две части с четными и нечетными номерами:

$$\begin{aligned} \{s_k\}_{\text{чт}} &= \{s_{2k}\}, & \{s_k\}_{\text{нч}} &= \{s_{2k+1}\}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

и представим  $n$ -й коэффициент ДПФ в виде

$$C_n = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=0}^{N/2-1} s_{k_{\text{чт}}} e^{-j \frac{2\pi nk}{N/2}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N} N/2} \sum_{k=0}^{N/2-1} s_{k_{\text{нч}}} e^{-j \frac{2\pi nk}{N/2}} \right).$$

Непосредственно видно, что первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до  $N/2 - 1$  выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$C_n = C_{n_{\text{чт}}} + e^{-j \frac{2\pi n}{N} N/2} C_{n_{\text{нч}}}, \quad (2.53)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Теперь учтем, что последовательности коэффициентов, относящихся к четной и нечетной частям входного массива, являются периодическими с периодом  $N/2$ :

$$C_{n_{\text{чт}}} = C_{n+N/2_{\text{чт}}}, \quad C_{n_{\text{нч}}} = C_{n+N/2_{\text{нч}}}.$$

Кроме того, входящий в формулу (2.53) множитель при  $n \geq N/2$  можно преобразовать так:

$$e^{-j \frac{2\pi(N/2+n)}{N}} = -e^{-j \frac{2\pi n}{N}}.$$

Отсюда находим выражение для второй половины множества коэффициентов ДПФ:

$$C_{N/2+n} = C_{n_{\text{чт}}} - e^{-j \frac{2\pi n}{N}} C_{n_{\text{нч}}}, \quad (2.54)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Формулы (2.53) и (2.54) лежат в основе алгоритма БПФ. Далее вычисления строят по итерационному принципу: последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами вновь разбивают на две части. Процесс продолжают до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из единственного элемента. Легко видеть, что ДПФ этого элемента совпадает с ним самим.

Можно показать, что число операций, необходимых для вычисления БПФ, оценивается как  $N \log_2 N$ .

БПФ обладает всеми свойствами дискретного преобразования Фурье:

- БПФ есть линейное преобразование, т. е. сумме сигналов отвечает сумма их БПФ.
- Число различных коэффициентов  $C_0, C_1, C_3, \dots, C_N$ , вычисляемых с помощью БПФ равно числу  $N$  отсчетов за период. Причем  $C_n = C_0$ .
- Коэффициент  $C_0$  есть постоянная составляющая.
- Если отсчетные значения сигнала – вещественные числа, то коэффициенты, симметричные относительно номера  $N/2$  образуют сопряженные пары. Поэтому коэффициенты с номерами  $N/2 + 1, \dots, N - 1$  отвечают отрицательным частотам. При изучении спектра они не дают новых сведений о сигнале и не вычисляются. Если коэффициенты  $C_n$ , образующие БПФ, заданы, то по ним, используя алгоритм обратного БПФ, можно получить отсчетные значения сигнала на периоде.

По известным коэффициентам БПФ  $C_0, C_1, \dots, C_{N/2}$  можно восстановить исходный непрерывный сигнал  $s(t)$  с ограниченным спектром, который был подвергнут дискретизации:

$$s(t) = C_0 + 2C_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) + 2C_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi_2\right) + \dots + C_{N/2} \cos\left(\frac{N\pi t}{T} + \varphi_{N/2}\right),$$

где  $\varphi_i = \arg C_i$  – фазовый угол коэффициента БПФ.

### 3. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Задать алгоритм, моделирующий отсчеты одиночного импульса. Общее число отсчетов взять равным 128, из которых первых восемь равны 1, остальные – 0.
2. Используя функцию вычисления БПФ, определить коэффициенты БПФ.
3. Так как коэффициенты являются комплексными, то по ним определите АЧХ и ФЧХ дискретного спектра прямоугольного импульса.

4. Вывести на экран графики АЧХ и ФЧХ для различных длительностей импульса, меняя число единичных отсчетов.

5. Задать отсчеты (128 отсчетов) сигнала  $s(k)$  и вывести на экран его график:

$$s(k) = \sin\left(\frac{14}{128}k\pi\right) + \cos\left(\frac{19}{128}k\pi\right),$$

где  $k$  – номер отсчета.

6. С помощью БПФ найти спектр этого сигнала и проанализировать его.

7. Увеличить число отсчетов в два раза и снова найти спектр сигнала. Сравнить со спектром при 128 отсчетах.

8. Добавить шум к дискретному сигналу  $s(k)$ .

9. Вывести на экран график смеси сигнала с шумом.

10. С помощью БПФ найти спектр шума и смеси сигнала с шумом.

11. С помощью обратного БПФ найти исходный сигнал/

12. Задать отсчеты сигнала типа синусоиды со случайной амплитудой:

$$v_k = A(k)\sin(x_k),$$

где  $A(k)$  – отсчеты шума с распределением в диапазоне от 0 до 1.

13. Найти спектр сигнала.

## 5. Содержание отчета

Отчет должен содержать распечатки графиков сигналов и их спектров (АЧХ и ФЧХ).

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные свойства преобразования Фурье.
2. Что называется спектром детерминированного сигнала?
3. Какие базисные функции называются ортогональными, ортонормированными?
4. Что называется нормой базисной функции и чему она равна для тригонометрических функций?
5. Как выглядят спектры для одного и того же сигнала по системе экспоненциальных и тригонометрических функций?

6. Назовите физический смысл спектральной плотности для непериодического сигнала.

7. В чем заключается идея БПФ и какой частоте кратны гармоники спектра, полученного с помощью БПФ?

8. Что понимается под энергетическим спектром случайного сигнала и как он связан с корреляционной функцией?

### **Литература**

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.

2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 5-е, стер. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.

### Лабораторная работа № 3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

*Цель работы:* изучить сигналы с угловой модуляцией на примере линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) сигнала.

### 1. Краткие теоретические сведения

Линейно-частотно-модулированный сигнал является сигналом с угловой модуляцией  $S(t) = A_0 \cos(\psi(t))$ .

Пусть в течение времени  $T$  сигнал  $S(t)$  меняет мгновенное значение своей частоты линейно, и нарастает она от  $f_0 - \frac{f_d}{2}$  до  $f_0 + \frac{f_d}{2}$ , где  $f_0$  – центральная частота сигнала, а  $f_d$  – девиация частоты. Примем за начало отсчета  $t = 0$  момент времени, соответствующий середине изменения частоты, и запишем выражение для закона частоты и фазы в диапазоне времени  $t$ , равном:

$$-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}.$$

Тогда  $f(t) = f_0 + \frac{f_d t}{T}$ .

Найдем выражение для  $\psi(t)$ :

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \Theta_0.$$

Примем  $\Theta_0 = 0$ .

$$\psi(t) = 2\pi \int_0^t \left( f_0 + \frac{f_d t}{T} \right) dt = 2\pi f_0 t + \frac{f_d t^2}{2T} 2\pi = \omega_0 t + \frac{\omega_d t^2}{2T}.$$

Сигнал  $S(t)$  представляет собой ЛЧМ импульс и показан на рис. 3.1.

$$S(t) = A_0 \cos(\psi(t)) = A_0 \cos\left( \omega_0 t + \frac{\omega_d t^2}{2T} \right), \quad |t| \leq \frac{T}{2}.$$

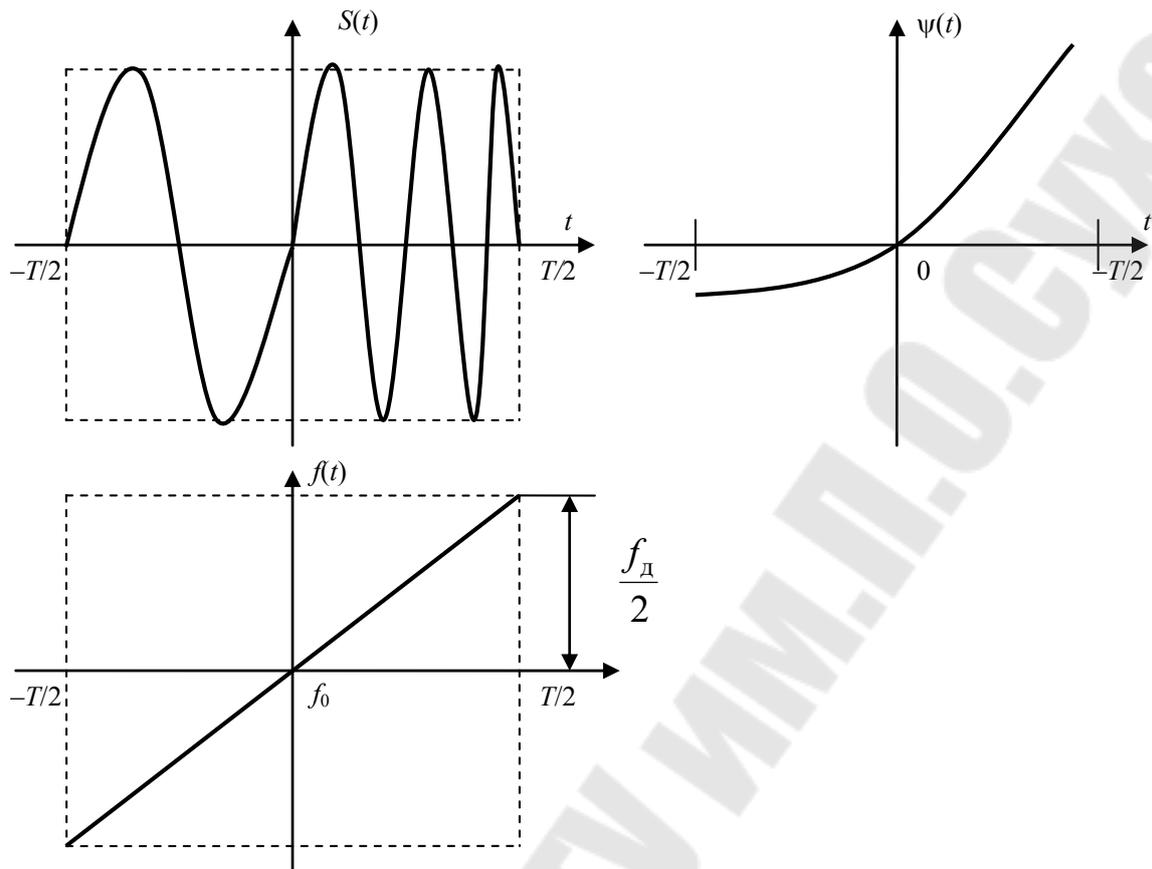


Рис. 3.1. Линейно-частотно-модулированный сигнал

Используя понятие аналитического сигнала, ЛЧМ сигнал можно записать в виде:

$$S(t) = \operatorname{Re} \left[ A_0 \exp \left( j \left( \omega_0 t + \frac{\omega_d t^2}{2T} \right) \right) \right].$$

В нашем случае частота модулируется по линейно-нарастающему закону в течение интервала времени  $T$  и в первом приближении за ширину спектра модулирующего сообщения можно принять величину  $\frac{1}{T}$ . А полный диапазон изменения частоты сигнала равен  $f_d \left( f_d \gg \frac{1}{T} \right)$ .

Следовательно, индекс угловой модуляции  $m$  равен:

$$m = \frac{\omega_d}{\Omega} = \frac{f_d}{f_{\text{мод}}} = \left| f_{\text{мод}} = \frac{1}{T} \right| = f_d T \gg 1.$$

В этом случае ширина спектра ЛЧМ сигнала равна  $\Delta f_{\text{ЛЧМ}} \approx f_d$ .

Задача сводится к определению корреляционной функции комплексной огибающей ЛЧМ сигнала:

$$\rho(\tau)_{\text{ЛЧМ}} = \frac{R(\tau)_{\text{ЛЧМ}}}{R(0)_{\text{ЛЧМ}}} - \text{нормированная корреляционная функция.}$$

$$R(0)_{\text{ЛЧМ}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \frac{A_0^2 T}{2}.$$

При вычислении  $\rho(\tau)$  учтем, что для любых  $\tau$  из интервала  $[0; T]$  произведение  $S(t)S(t-\tau)$  отлично от нуля лишь при  $t$ , находящихся в пределах  $-\frac{T}{2} + \tau < t < \frac{T}{2}$ .

С учетом этого

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left(j \frac{\pi f_d}{T} [t^2 - (t-\tau)^2]\right) dt.$$

После интегрирования получим:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \sin\left(\pi f_d \tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\right); \\ 0, |\tau| > T. \end{cases}$$

Так как  $f_d \gg \frac{1}{T}$  ( $m \gg 1$ ), то  $\rho(\tau) \approx \frac{\sin(\pi f_d \tau)}{\pi f_d \tau}$ .

На рис. 3.2 показан вид корреляционной функции.

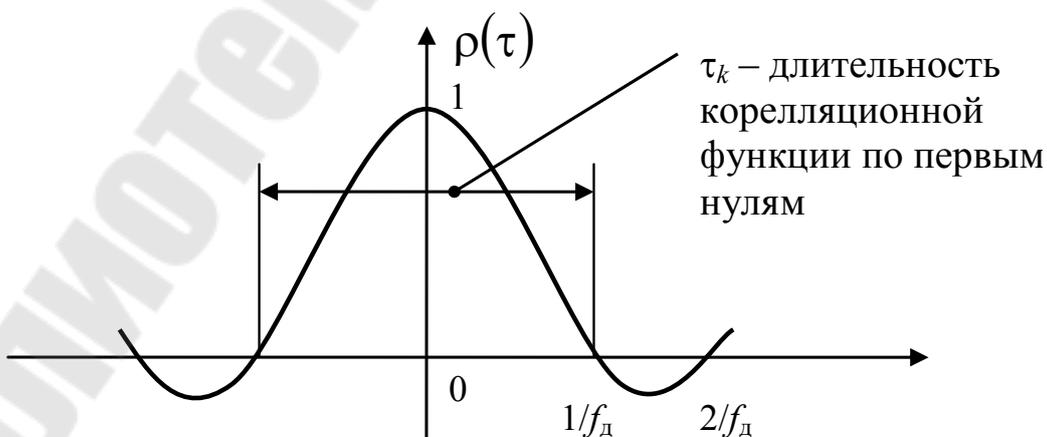


Рис. 3.2. Корреляционная функция комплексной огибающей

Замечательное свойство ЛЧМ сигналов, определяющее их практическую значимость, состоит в следующем. Предположим, что имеется некоторое физическое устройство, осуществляющее задержку сигналов, подаваемых на его вход.

Если время задержки зависит от частоты сигнала, причем с ростом частоты это время уменьшается, то при определенных условиях, подавая на вход такого устройства ЛЧМ импульс большой длительности, можно добиться существенного «сжатия» его во времени.

Этот эффект обусловлен тем, что на выходе устройства задержки одновременно будут появляться составляющие как более низкочастотные, относящиеся к началу импульса, так и более высокочастотные, наблюдаемые в его конце.

Длительность основного лепестка корреляционной функции много меньше длительности  $T$  ЛЧМ сигнала, т. е. если ЛЧМ сигнал подавать на устройство, выходной сигнал которого является корреляционной функцией входного сигнала, то можно говорить об эффекте сжатия ЛЧМ импульса (рис. 3.3).

Для ЛЧМ импульса длительностью 10–100 мкс и девиации частоты до десятков МГц согласованные фильтры строят с использованием дисперсионных линий задержек на поверхностных акустических волнах.



Рис. 3.3. Пример эффекта сжатия ЛЧМ сигнала

При рассмотрении корреляционной функции за длительность  $\tau_k$  была принята ширина основного лепестка корреляционной функции. Однако выбросы корреляционной функции за пределами основного лепестка достигают значительного уровня: второй лепесток всего лишь в 4,7 (13 дБ) ниже основного. Поэтому боковые лепестки могут повысить риск при измерении времени запаздывания ЛЧМ сигнала и затруднить разрешение двух ЛЧМ импульсов с разносом времени, близким к  $\tau_k$ .

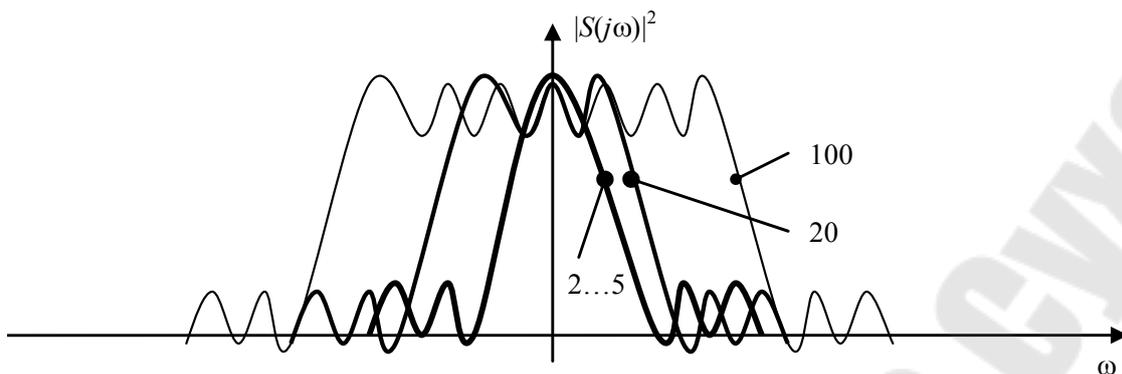


Рис. 3.4. Вид энергетического спектра для разных значений индекса угловой модуляции  $m$  (2...5, 20, 100)

Из анализа корреляционной функции мы видим, что спектральная плотность ЛЧМ сигнала близка к прямоугольной форме (рис. 3.4).

## 2. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. По заданной преподавателем  $f_d$ ,  $f_0$  и  $m$  в соответствии с теоремой Котельникова определить шаг дискретизации, длительность ЛЧМ сигнала и число отсчетов  $N$  из сигнала.
2. Определить выборки из ЛЧМ сигнала.
3. Вычислить дискретное преобразование Фурье по выборкам сигнала.
4. Рассчитать корреляционную функцию комплексной огибающей заданного сигнала.
5. Повторить п. 2–5 для значений  $m = 10, 25$ .

## 3. Содержание отчета

Отчет должен содержать исходные данные, порядок расчетов, графики спектров и корреляционных функций, а также график ЛЧМ сигнала.

## Контрольные вопросы

1. Какими соотношениями связаны мгновенная частота и фаза сигнала?
2. Что называется индексом угловой модуляции?

3. Чему равна ширина спектра сигнала с угловой модуляцией при  $m \ll 1$  и при  $m \gg 1$ .
4. В чем заключается эффект сжатия ЛЧМ сигнала?
5. Какой сигнал называется аналитическим?
6. Назовите свойства аналитического сигнала.
7. Как определяется фаза аналитического сигнала?

### Литература

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Ширман, Я. Д. Разрешение и сжатие сигналов / Я. Д. Ширман. – М. : Сов. радио, 1974. – 360 с.

## Лабораторная работа № 4

# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

*Цель работы:* исследование алгоритмов работы простейших трансверсальных цифровых фильтров (ЦФ), а также расчет их АЧХ и ФЧХ.

### 1. Краткие теоретические сведения

Математическая теория ЦФ переносит на случай дискретных сигналов все основные положения теории линейных систем, преобразующих непрерывные сигналы. Как известно, линейная стационарная система преобразует непрерывный входной сигнал  $x(t)$  таким образом, что на ее выходе возникает колебание  $y(t)$ , равное свертке функции  $x(t)$  и импульсной характеристике  $h(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t - \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Линейный ЦФ, по определению, есть дискретная система (физическое устройство или программа для компьютера), которая преобразует последовательность  $\{x_k\}$  числовых отсчетов входного сигнала в последовательность  $\{y_k\}$  отсчетов выходного сигнала.

Для того чтобы обобщить формулу (4.1) на случай дискретных сигналов, вводят понятие импульсной характеристики ЦФ. По определению, она представляет собой дискретный сигнал  $\{h_k\}$ , который является реакцией ЦФ на «единичный импульс»  $(1, 0, 0, \dots)$ :

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots). \quad (4.2)$$

Физически осуществимые ЦФ, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в  $i$ -й дискретный момент времени могут использовать следующие данные:

а) значение входного сигнала в момент  $i$ -го отсчета, а также некоторое число «прошлых» входных отсчетов  $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$ ;

б) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$ . Целые числа  $m$  и  $n$  определяют порядок ЦФ. Классификация ЦФ проводится по-разному в зависимости от того, как используется информация о прошлых состояниях системы.

Алгоритм работы линейного ЦФ имеет в общем случае следующий вид:

$$y(k) = a_0s(k) + a_1s(k-1) + a_2s(k-2) + \dots + a_ms(k-m) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + \dots + b_ny(k-n), \quad (4.3)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$  – последовательность коэффициентов;  $y(k)$  – выходной сигнал фильтра.

Если все коэффициенты  $b_i$  равны нулю, то фильтр называется *трансверсальным* и не имеет обратных связей.

Если  $b_i$  не равны нулю все одновременно, то фильтр называется *рекурсивным*.

Алгоритм функционирования трансверсального ЦФ имеет в общем случае следующий вид:

$$y(k) = a_0s(k) + a_1s(k-1) + a_2s(k-2) + \dots + a_ms(k-m) \quad (4.4)$$

поясняется структурной схемой, приведенной на рис. 4.1.

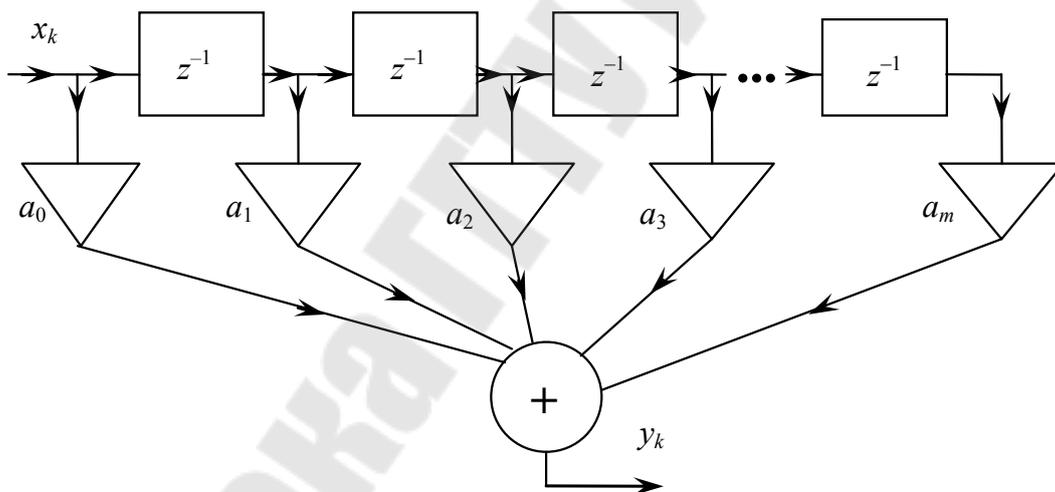


Рис. 4.1. Структурная схема трансверсального цифрового фильтра

Основными элементами фильтра служат блоки задержки отсчетных значений на один интервал дискретизации (прямоугольники с символами  $z^{-1}$ ), а также масштабные блоки, выполняющие в цифровой форме операции умножения на соответствующие коэффициенты. С выходов масштабных блоков сигналы поступают в сумматор, где, складываясь, образуют отсчет выходного сигнала. Вид представленной здесь схемы объясняет смысл термина «трансверсальный фильтр» (от англ. *transverse* – поперечный).

Если взять  $z$ -преобразование от обеих частей выражения (4.4), описывающего алгоритм работы, то можно получить выражение для системной функции  $H(z)$ :

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}. \quad (4.5)$$

От системной функции легко перейти к частотному коэффициенту передачи  $K(j\omega)$  фильтра путем замены в выражении для  $H(z)$ :

$$z = e^{j\omega T}, \quad (4.6)$$

где  $T$  – шаг дискретизации сигнала по времени.

Особенностью комплексного коэффициента передачи  $K(j\omega)$  ЦФ является то, что данный коэффициент является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации сигнала  $\omega_d$ :

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.7)$$

Изменяя коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  можно получить ЦФ с различными амплитудно-частотными характеристиками.

## 2. Трансверсальный фильтр первого порядка

Алгоритм работы этого фильтра в соответствии с (4.4) имеет вид:

$$y(i) = a_0 s(i) + a_1 s(i-1).$$

Системная функция в этом случае равна:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1},$$

а частотный коэффициент передачи равен:

$$K(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\varphi},$$

где  $\varphi = j\omega T$ .

Масштабный коэффициент  $a_0$  без ограничения общности можно положить равным единице.

Фазо-частотная характеристика этого фильтра:

$$\text{ФЧХ} = -\arctg \frac{a_1 \sin(\omega T)}{1 + a_1 \cos(\omega T)}. \quad (4.8)$$

При  $a_1 = 1$  фильтр можно использовать для подавления колебаний с частотами, близкими к  $\omega T = \pi$ , а при  $a_1 = -1$  — близкими к  $\omega T = 0$  и  $2\pi$ . Подобные фильтры часто называют гребенчатыми режекторными фильтрами.

Следует отметить, что при  $a_1 = -1$  фазо-частотная характеристика фильтра линейна:

$$\text{ФЧХ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}, \quad 0 \leq \omega T \leq 2\pi.$$

### 3. Трансверсальный фильтр второго порядка

Алгоритм работы фильтра имеет вид:

$$y(i) = a_0 s(i) + a_1 s(i-1) + a_2 s(i-2).$$

Системная функция этого фильтра равна:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}.$$

Положим  $a_0 = 1$ . Тогда  $H(z)$  имеет нули в точках:

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Двухкратный полюс, расположенный в точке  $z = 0$ , не влияет на поведение системной функции на  $z$ -плоскости.

Особый интерес представляет случай  $a_2 = 1$ ,  $|a_1| < 2$ . В этом случае модуль  $z_{1,2}$  равен единице, так что комплексно-сопряженные нули  $z_1$  и  $z_2$  лежат на окружности единичного радиуса.

При  $a_0 = a_2 = 1$  коэффициент передачи фильтра будет равен:

$$K(j\varphi) = 1 + a_1 e^{-j\varphi} + e^{-j2\varphi}.$$

Изменением коэффициента  $a_1$  можно перемещать нули  $z_1$ ,  $z_2$  по окружности, что эквивалентно перемещению нулей на оси частот.

Трансверсальные ЦФ не являются динамическими системами и устойчивы при любом выборе коэффициентов.

Рассмотренный фильтр можно рассматривать как режекторный фильтр второго порядка. Его можно реализовать также каскадным соединением двух фильтров первого порядка. Фазочастотная характеристика этого фильтра линейна и может быть получена удвоением формулы (4.9).

#### 4. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Записать в общем виде системную функцию и частотный коэффициент передачи фильтра с алгоритмом:

$$y(i) = a_0 s(i) + a_1 s(i-1).$$

2. Построить АЧХ и ФЧХ этих фильтров при  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  и  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$  для  $\varphi$  от 0 до  $4\pi$ .

3. Построить АЧХ и ФЧХ усредняющего фильтра:

$$y(i) = \frac{1}{5} (s(i) + s(i-1) + s(i-2) + s(i-3) + s(i-4)).$$

#### 5. Содержание отчета

Отчет должен содержать алгоритмы работы и выражения для  $K(j\varphi)$ , графики АЧХ и ФЧХ фильтров.

#### Контрольные вопросы

1. Что называется системной функцией фильтра?
2. Как по системной функции найти частотный коэффициент передачи фильтра?
3. Чему равен период частотной характеристики фильтра?
4. Почему удобнее для расчета АЧХ фильтра вместо оси частот  $\omega$  использовать ось угла  $\varphi = \omega T$ ?
5. Как определить какой частоте соответствует точка на оси угла  $\varphi$ ?
6. Что называется импульсной характеристикой цифрового фильтра?

#### Литература

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 5-е, стер. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.

## Лабораторная работа № 5

# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

*Цель работы:* исследование алгоритмов работы простейших рекурсивных цифровых фильтров, а также расчет их АЧХ и ФЧХ. В работе исследуются рекурсивные цифровые фильтры первого и второго порядков.

### 1. Краткие теоретические сведения

Математическая теория цифровых фильтров (ЦФ) переносит на случай дискретных сигналов все основные положения теории линейных систем, преобразующих непрерывные сигналы. Как известно, линейная стационарная система преобразует непрерывный входной сигнал  $x(t)$  таким образом, что на ее выходе возникает колебание  $y(t)$ , равное свертке функции  $x(t)$  и импульсной характеристики  $h(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t - \tau)d\tau. \quad (5.1)$$

Линейный ЦФ, по определению, есть дискретная система (физическое устройство или программа для компьютера), которая преобразует последовательность  $\{x_k\}$  числовых отсчетов входного сигнала в последовательность  $\{y_k\}$  отсчетов выходного сигнала.

Для того чтобы обобщить формулу (5.1) на случай дискретных сигналов, вводят понятие импульсной характеристики ЦФ. По определению, она представляет собой дискретный сигнал  $\{h_k\}$ , который является реакцией ЦФ на «единичный импульс»  $(1, 0, 0, \dots)$ :

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots). \quad (5.2)$$

Физически осуществимые ЦФ, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в  $i$ -й дискретный момент времени могут использовать следующие данные:

- а) значение входного сигнала в момент  $i$ -го отсчета, а также некоторое число «прошлых» входных отсчетов  $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$ ;
- б) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$ . Целые числа  $m$  и  $n$  определяют порядок ЦФ.

Классификация ЦФ проводится по-разному в зависимости от того, как используется информация о прошлых состояниях системы.

Алгоритм работы линейного цифрового фильтра имеет в общем случае следующий вид:

$$y(k) = a_0s(k) + a_1s(k-1) + a_2s(k-2) + \dots + a_ms(k-m) + b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + \dots + b_ny(k-n), \quad (5.3)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$  – последовательность коэффициентов;  $y(k)$  – выходной сигнал фильтра.

Если все коэффициенты  $b_i$  равны нулю, то фильтр называется *трансверсальным* и не имеет обратных связей.

Если  $b_i$  не равны нулю все одновременно, то фильтр называется *рекурсивным*.

Если взять  $z$ -преобразование от обеих частей выражения, описывающего алгоритм работы, то можно получить выражение для системной функции рекурсивного фильтра  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-m}}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - \dots - a_nz^{-n}}. \quad (5.4)$$

От системной функции легко перейти к частотному коэффициенту передачи  $K(j\omega)$  фильтра путем замены в выражении для  $H(z)$ :

$$z = e^{j\omega T}, \quad (5.5)$$

где  $T$  – шаг дискретизации сигнала по времени.

Особенностью комплексного коэффициента передачи  $K(j\omega)$  ЦФ является то, что она является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации сигнала  $\omega_d$ :

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.6)$$

Изменяя коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ , можно получить ЦФ с различными амплитудно-частотными характеристиками.

Построить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, зная комплексный коэффициент передачи, можно следующим образом:

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| \quad \text{и} \quad \text{ФЧХ} = \arg(K(j\omega)).$$

## 2. Рекурсивный фильтр

На рис. 5.1 изображена схема алгоритма вычислений, проводимых в соответствии с формулой (5.3). Верхняя часть структурной схемы отвечает трансверсальной (нерекурсивной) части алгоритма фильтрации. Для ее реализации требуется в общем случае  $m+1$  масштабных блоков (операций умножения) и  $m$  ячеек памяти, в которых хранятся входные отсчеты. Рекурсивной части алгоритма соответствует нижняя часть структурной схемы. Здесь используются  $n$  последовательных значений выходного сигнала, которые в процессе работы фильтра перемещаются из ячейки в ячейку путем сдвига.

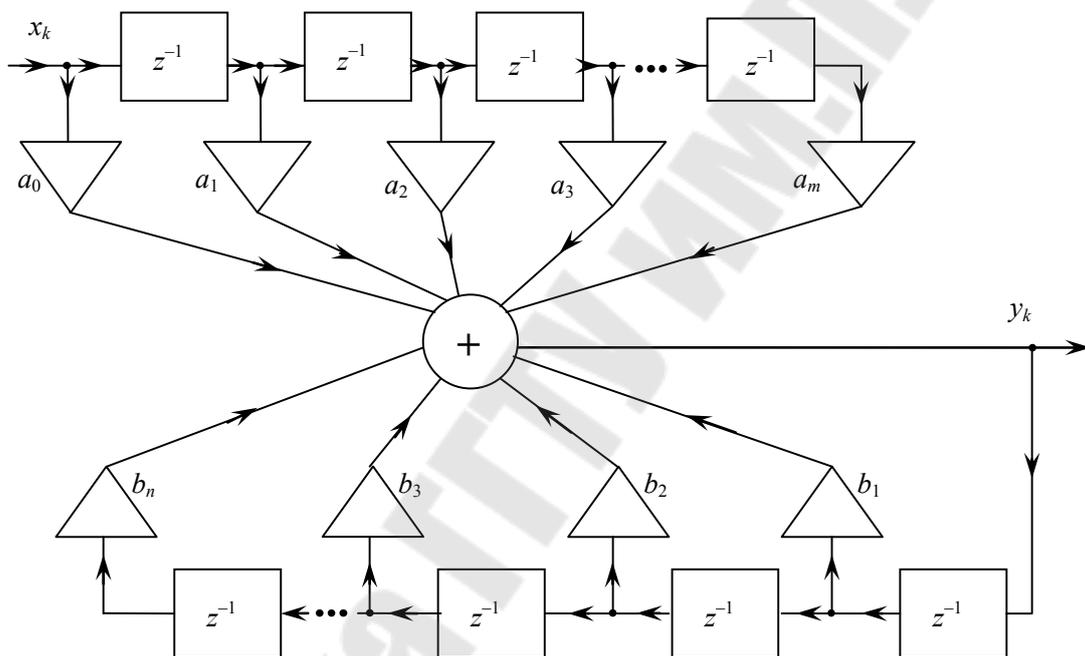


Рис. 5.1. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра

Недостатком данного принципа реализации является потребность в большом числе ячеек памяти, отдельно для рекурсивной и нерекурсивной частей. Более совершенны канонические схемы рекурсивных ЦФ, в которых используется минимально возможное количество ячеек памяти, равное наибольшему из чисел  $m$  и  $n$ . В качестве примера на рис. 5.2 изображена структурная схема канонического рекурсивного фильтра второго порядка.

Рекурсивный ЦФ является дискретным аналогом динамической системы с обратной связью, поскольку в ячейках памяти хранятся значения его предшествующих состояний. Если заданы некоторые начальные условия, т. е. совокупность значений  $y_{i-1}$ ,  $y_{i-2}$ , ...,  $y_{i-n}$ ,

то в отсутствие входного сигнала фильтр будет образовывать элементы бесконечной последовательности  $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots$ , играющей роль свободных колебаний.

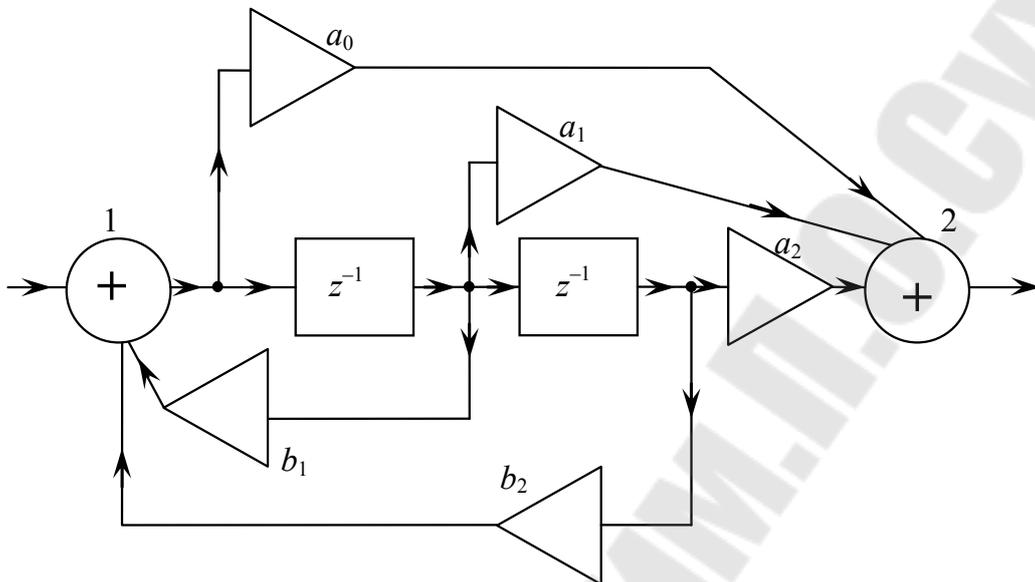


Рис. 5.2. Структурная схема канонического рекурсивного цифрового фильтра второго порядка

Цифровой фильтр называется *устойчивым*, если возникающий в нем свободный процесс есть невозрастающая последовательность, т. е. значения  $|y_n|$  при  $n \rightarrow \infty$  не превышают некоторого положительного числа  $M$  независимо от выбора начальных условий.

Если все полюсы системной функции  $H(z)$ , т. е. числа  $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2, \dots, z_n = \alpha_n$  по модулю не превосходят единицы, располагаясь внутри единичного круга с центром в точке  $z = 0$ , то любой свободный процесс в ЦФ будет описываться членами убывающих геометрических прогрессий и фильтр будет устойчив. Ясно, что практически применяться могут только устойчивые ЦФ.

Характерная черта, отличающая рекурсивный ЦФ, состоит в том, что из-за наличия обратной связи его импульсная характеристика имеет вид неограниченно-протяженной последовательности.

### 3. Рекурсивный фильтр первого порядка

Алгоритм работы этого фильтра имеет вид:

$$y(i) = s(i) + b_1 y(i-1).$$

При любом знаке  $b_1$  для устойчивой работы должно выполняться условие  $|b_1| < 1$ . Системная функция  $H(z)$  имеет один полюс в точке  $z_1 = b_1$ . Амплитудно-частотная характеристика фильтра сильно зависит от знака весового коэффициента  $b_1$ , с приближением  $|b_1|$  к единице полоса прозрачности фильтра уменьшается, а усиление резко возрастает.

Интересно отметить, что системная функция этого фильтра

$$H(z) = \frac{z}{z - b_1}$$

совпадает с  $z$ -преобразованием от отсчетов, взятых через интервал  $T$  из экспоненты  $s(t) = e^{-\nu t}$ , т. е.  $S(z) = \frac{z}{z - e^{-\nu T}}$ .

Таким образом, импульсная характеристика рассматриваемого фильтра совпадает с последовательностью отсчетов из импульсной характеристики аналоговой цепи (например,  $RC$ -цепи), постоянная времени которой  $1/\nu = RC$  отвечает условию:

$$e^{-\nu T} = b_1 = e^{-\frac{T}{RC}} \quad \text{или} \quad RC = \frac{T}{\ln\left(\frac{1}{b_1}\right)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика цепей при этом на участке  $0 < \omega T < \pi$  ( $RC \gg T$ ) почти совпадают, а при  $\omega T > \pi$  существенно различны.

#### 4. Рекурсивный фильтр второго порядка

Алгоритм работы этого фильтра записывается в виде:

$$y(i) = a_0 s(i) + a_1 s(i-1) + a_2 s(i-2) + b_1 y(i-1) + b_2 y(i-2).$$

Рассмотрим случай, когда  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ . Тогда системная функция  $H(z)$  будет:

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{(z - z_{n1})(z - z_{n2})}.$$

Нули этой функции имеются только в точке  $z = 0$ , т. е. в центре окружности единичного радиуса. Полюсы равны:

$$z_{n1,n2} = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}.$$

При  $b_2 < 0$  и  $|b_2| > (b_1^2 / 4)$  полюса являются комплексно-сопряженными числами:

$$z_{n1} = \frac{b_1}{2} + j\sqrt{|b_2| - \frac{b_1^2}{4}}, \quad z_{n2} = z_{n1}^*.$$

В этом случае

$$(z - z_{n1})(z - z_{n2}) = z^2 - 2 \operatorname{Re}(z_{n1,n2})z + |z_{n1,n2}|^2,$$

откуда вытекают следующие соотношения:

$$b_1 = 2 \operatorname{Re}(z_{n1,n2}), \quad b_2 = -|z_{n1,n2}|^2.$$

Представив  $z_{n1,n2}$  в форме  $z_{n1,n2} = r e^{\pm j\varphi_n}$ , где  $r = |z_{n1,n2}|$  – расстояние полюса от начала координат, а  $\varphi_n = \omega_n T$  – азимут полюса, получим:

$$b_1 = 2r \cos(\omega_n T), \quad b_2 = -r^2.$$

Для частного случая  $\omega_n T = \pi / 2$  частотный коэффициент передачи приводится к виду:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2r^2 \cos(2\omega T) + r^4}}.$$

С приближением  $r$  к единице рассматриваемый фильтр приближается к резонатору с высокой добротностью.

## 5. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Исследовать рекурсивный фильтр первого порядка, алгоритм работы которого в общем виде имеет вид:

$$y(i) = s(i) + b_1 y(i-1).$$

2. Вычислить и вывести на экран графики АЧХ этого фильтра при  $b_1 = 0,83$  и при  $b_1 = -0,83$  (объяснить, почему для устойчивости фильтра должно выполняться условие  $|b_1| < 1$ ).

3. Сравнить АЧХ этого фильтра с АЧХ аналоговой цепи, имеющей

$$K_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{RC}{T}\right)^2 (\omega T)^2}},$$

для  $RC/T = 5$  (что соответствует  $b_1 = 0,83$ ).

4. Исследовать рекурсивный фильтр второго порядка, алгоритм работы которого в общем виде имеет вид:

$$y(i) = a_0 s(i) + a_1 s(i-1) + a_2 s(i-2) + b_1 y(i-1) + b_2 y(i-2),$$

где  $a_0 = a_2 = 0$ ,  $a_1 = 1$ .

Коэффициенты  $b_1$ ,  $b_2$  связаны с полюсами системной функции выражениями:

$$b_1 = 2r \cos(\omega_n T), \quad b_2 = -r^2,$$

где  $r$  – расстояние полюса от начала координат, а  $\varphi_n = \omega_n T$  – азимут полюса.

5. Вычислить и вывести на экран графики АЧХ фильтра для  $\omega_n T = \pi/2$  и  $r = (0,75; 0,875; 0,9375)$ .

6. Вычислить и вывести на экран АЧХ фильтра для  $a_0 = a_2 = 1$ ,  $a_1 = -2$ ,  $b_1 = 0,21875$ ,  $b_2 = -0,4375$ .

## 6. Содержание отчета

Отчет должен содержать программы вычисления АЧХ фильтров и графики АЧХ и ФЧХ.

## Контрольные вопросы

1. Как записывается алгоритм работы рекурсивного фильтра в общем виде?
2. Как выглядит структурная схема рекурсивного фильтра?
3. Что называется системной функцией фильтра?
4. Как по системной функции найти частотный коэффициент передачи фильтра?

5. Чему равен период частотной характеристики фильтра?
6. Почему удобнее для расчета АЧХ фильтра вместо оси частот использовать ось угла  $\varphi = \omega T$ ?
7. Чем определяется форма АЧХ цифрового фильтра?
8. Как определить, устойчив ли рекурсивный фильтр?
9. Что называется импульсной характеристикой цифрового фильтра и конечна ли она по протяженности для этого фильтра?
10. Какие схемы называются каноническими и в чем их преимущество?

### Литература

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 5-е, стер. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.

*Лабораторная работа № 6*  
**СИНТЕЗ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА**

*Цель работы:* изучение метода синтеза низкочастотного, высокочастотного и полосового цифровых фильтров (ЦФ) методом инвариантных частотных характеристик, а также расчет их АЧХ и ФЧХ. В лабораторной работе в качестве аналогового прототипа используется низкочастотный фильтр Баттерворта, а также – низкочастотный фильтр Чебышева.

### 1. Краткие теоретические сведения

Важное практическое значение имеют методы синтеза ЦФ, обеспечивающие заранее заданные свойства, например, требуемый вид импульсной или частотной характеристики. Рассмотрим несколько приемов синтеза, которые существенным образом опираются на свойства аналоговых цепей, служащих модельными аналогами (прототипами) цифровых устройств.

Рассмотрим некоторые аналоговые прототипы низкочастотных фильтров.

Основное назначение таких устройств — с минимальным ослаблением передавать на выход колебания, частоты которых не превосходят заданной граничной частоты, называемой *частотой среза* фильтра  $\omega_c$ . В то же время колебания с более высокими частотами должны существенно ослабляться.

Очевидно, для фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза  $\omega_c$  идеальная частотная зависимость коэффициента передачи мощности имеет вид (имеются в виду физические частоты  $\omega > 0$ ):

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c, \\ 0, & \omega > \omega_c. \end{cases}$$

Это графически показано на рис. 6.1.

Такая частотная характеристика заведомо нереализуема, а следовательно, возникает задача подбора допустимой аппроксимирующей функции.

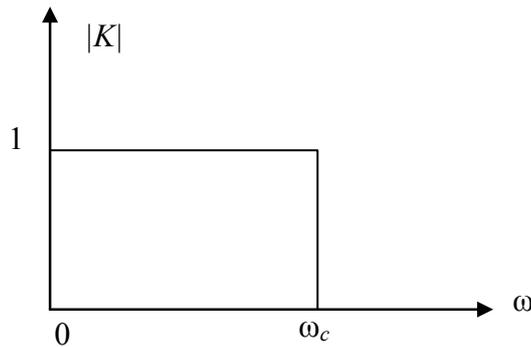


Рис. 6.1. Пример идеальной АЧХ для фильтра нижних частот

Один из возможных способов аппроксимации идеальной характеристики ФНЧ построен на использовании коэффициента передачи мощности:

$$K_p(\omega_n) = \frac{1}{1 + \omega_n^{2n}},$$

где  $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$  – безразмерная нормированная частота.

Фильтр нижних частот, имеющий такие частотные свойства, называют фильтром с максимально-плоской характеристикой, или *фильтром Баттерворта*. Целое число  $n = 1, 2, 3, \dots$  является порядком фильтра. Причем, при любом  $n$  такой фильтр реализуем.

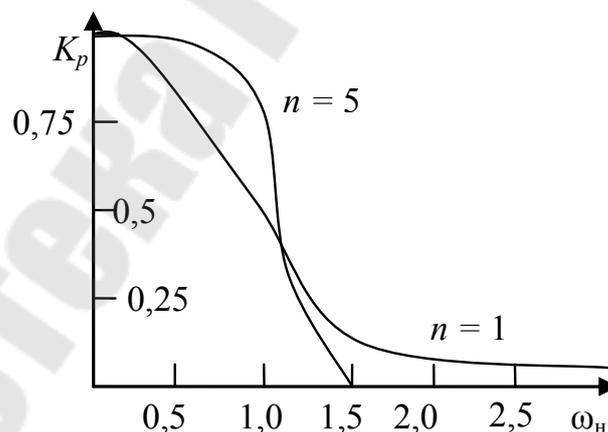


Рис. 6.2. Частотные характеристики для фильтров Баттерворта при  $n = 1$  и  $n = 5$

В полосе пропускания фильтра, т. е. при  $0 < \omega_n < 1$ , квадрат модуля коэффициента передачи плавно уменьшается с ростом частоты. На частоте среза (при  $\omega_n = 1$ ) ослабление, вносимое фильтром,

составляет  $10 \lg 0,5$ , что приблизительно составляет 3 дБ независимо от порядка системы. Чем больше  $n$ , тем точнее аппроксимируется идеальная форма частотной характеристики. Порядок фильтра обычно подбирают, исходя из требований, предъявляемых к ослаблению сигналов с частотами  $\omega > \omega_c$ .

Широкое применение находит также другой способ аппроксимации частотной характеристики идеального ФНЧ, получивший название *чебышевской аппроксимации*. Коэффициент передачи мощности ФНЧ такого вида задается формулой

$$K_p(\omega_H) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_H)}, \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon \leq 1$  – постоянное число, называемое коэффициентом неравномерности характеристики в полосе пропускания;  $T_n(\omega_H)$  – многочлен Чебышева  $n$ -го порядка, определяемый выражением  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

С помощью таких функций можно удачно аппроксимировать идеальную характеристику ФНЧ: из формулы (6.1) видно, что в пределах полосы пропускания величина  $K_p$  колеблется от 1 до  $1/(1 + \varepsilon^2)$ , если же  $\omega_H \gg 1$ , то фильтр обеспечивает большое ослабление сигнала.

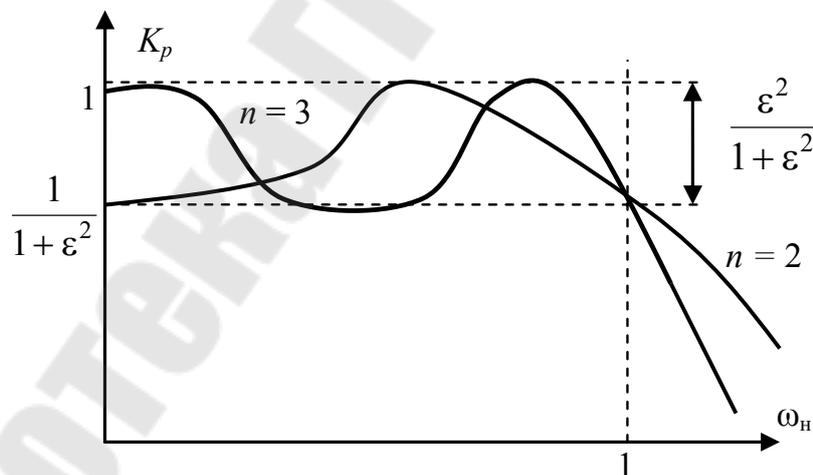


Рис. 6.3. Типичные графики частотных характеристик передачи мощности для двух чебышевских фильтров при  $n = 2$  и  $n = 3$

Из графиков (рис. 6.3) видно, что в полосе пропускания частотные характеристики чебышевских фильтров немонотонны. Величина пульсаций ослабления тем выше, чем больше  $\varepsilon$ .

Как следует из формулы (6.1), увеличение  $\varepsilon$  ведет к большему ослаблению сигналов вне полосы пропускания. Подбором двух параметров  $n$  и  $\varepsilon$  можно добиться выполнения исходных условий, предъявляемых к синтезируемому фильтру.

Наибольшее распространение в практике синтеза цифровых фильтров получили три метода, описанных ниже.

## 2. Метод инвариантных импульсных характеристик

В основе метода инвариантных импульсных характеристик лежит предположение о том, что синтезируемый ЦФ должен обладать импульсной характеристикой, которая является результатом дискретизации импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра-прототипа. Имея в виду синтез физически реализуемых систем, для которых импульсная характеристика обращается в нуль при  $t < 0$ , получим следующее выражение импульсной характеристики ЦФ:

$$\{h_k\} = \{h(0), h(T), h(2T), \dots\},$$

где  $T$  – шаг дискретизации по времени.

Следует обратить внимание на то, что число отдельных членов в выражении импульсной характеристики ЦФ может быть как конечным, так и бесконечным. Это определяет структура синтезируемого фильтра: импульсной характеристике с конечным числом отсчетов отвечает трансверсальный фильтр, в то время как для реализации неограниченно протяженной импульсной характеристики требуется рекурсивный ЦФ.

Связь между коэффициентом импульсной характеристики и структурой ЦФ особенно проста для трансверсального фильтра. В общем случае синтез структуры фильтра осуществляется путем применения  $z$ -преобразования к последовательности вида, приведенного выше. Найдя системную функцию  $H(z)$  фильтра, следует сравнить ее с общим выражением и определить коэффициенты трансверсальной и рекурсивной частей. Степень приближения АЧХ синтезированного ЦФ к характеристике аналогового прототипа зависит от выбранного шага дискретизации. При необходимости следует вычислить частотный коэффициент передачи ЦФ, осуществив в системной функции  $H(z)$  замену переменной по формуле  $z = e^{j\omega T}$ , и затем сравнить результат с частотным коэффициентом передачи аналоговой цепи.

### 3. Синтез цифровых фильтров на основе дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи

К структуре ЦФ, приближенно соответствующего известной аналоговой цепи, можно прийти, осуществив дискретизацию дифференциального уравнения, описывающего аналоговый прототип. Как пример использования этого метода рассмотрим синтез ЦФ, отвечающего колебательной динамической системе второго порядка, для которой связь между выходным колебанием  $y(t)$  и входным колебанием  $x(t)$  устанавливается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2a \frac{dy(t)}{dt} + \omega^2 y(t) = x(t). \quad (6.2)$$

Предположим, что шаг дискретизации равен  $\Delta t$ , и рассмотрим совокупности дискретных отсчетов  $\{y_n\}$  и  $\{x_n\}$ . Если в формуле заменить производные их конечно-разностными выражениями, то дифференциальное уравнение превратится в разностное уравнение

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta t^2} + 2a \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} + \omega^2 y_n = x_n. \quad (6.3)$$

Перегруппировав слагаемые, получим:

$$y_n = \frac{\Delta t^2 x_n + 2(1 - a\Delta t)y_{n-1} - y_{n-2}}{1 - 2a\Delta t + \omega^2 \Delta t^2}. \quad (6.4)$$

Разностное уравнение задает алгоритм рекурсивного фильтра второго порядка, который моделирует аналоговую колебательную систему и называется цифровым резонатором. При соответствующем выборе коэффициентов цифровой резонатор может выполнять роль частотно-избирательного фильтра, подобного колебательному контуру.

### 4. Метод инвариантных частотных характеристик

Принципиально невозможно создать ЦФ, частотная характеристика которого в точности повторяла бы частотную характеристику некоторой аналоговой цепи. Причина состоит в том, что, как известно, частотный коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, определяемым шагом дискретизации.

Говоря о подобии (инвариантности) частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров, можно требовать лишь то, чтобы весь бесконечный интервал частот  $\omega_a$ , относящихся к аналоговой системе, был преобразован в отрезок частот  $\omega_{\text{ц}}$  цифрового фильтра, удовлетворяющих неравенству  $-\frac{\pi}{\Delta t} < \omega_{\text{ц}} < \frac{\pi}{\Delta t}$  при сохранении общего вида АЧХ.

Пусть  $K_a(p)$  – передаточная функция аналогового фильтра, задаваемого дробно-рациональным выражением по степеням  $p$ . Если воспользоваться связью между переменными  $z$  и  $p$ , то можно записать:

$$z = e^{pT}, \quad p = \frac{1}{T} \ln(z). \quad (6.5)$$

С помощью этого закона связи между  $p$  и  $z$  нельзя получить физически реализуемую системную функцию фильтра, так как подстановка в выражение  $K_a(p)$  даст системную функцию, не выражающуюся в виде частного двух многочленов. Поэтому для синтезов фильтров нижних частот получила распространение связь вида

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (6.6)$$

которая также переводит точки единичной окружности, лежащей в плоскости  $z$ , в точки мнимой оси на плоскости  $p$ . Тогда

$$j\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega_{\text{ц}}} - 1}{e^{j\omega_{\text{ц}}} + 1}, \quad (6.7)$$

откуда вытекает соотношение между частотными переменными  $\omega$  аналоговой и цифровой систем:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{\text{ц}} T}{2}\right). \quad (6.8)$$

Если частота дискретизации достаточно велика ( $\omega_{\text{ц}} T \ll 1$ ), то, как легко видно из формулы (6.7),  $\omega_a \approx \omega_{\text{ц}}$ . Таким образом, на низких частотах характеристики аналогового и цифрового фильтров практически совпадают. В общем случае нужно принимать во внимание трансформацию масштаба по оси частот ЦФ.

Практически процедура синтеза ЦФ состоит в том, что в функции  $K_a(p)$  аналоговой цепи выполняется замена переменной по фор-

муле (6.5). Полученная при этом системная функция ЦФ оказывается дробно-рациональной, и поэтому позволяет непосредственно записать алгоритм цифровой фильтрации.

## 5. Порядок выполнения

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Синтезировать методом инвариантных частотных характеристик низкочастотный ЦФ с частотной характеристикой, подобной характеристике аналогового ФНЧ второго порядка типа Баттерворта. Частота среза для ЦФ  $\omega_{с.ц} = 1600 \text{ с}^{-1}$ , частота дискретизации  $\omega_{д} = 20000 \text{ с}^{-1}$ .

2. Передаточная функция аналогового ФНЧ второго порядка типа Баттерворта имеет вид:

$$K_a(p) = \frac{\omega_{с.а}^2}{p^2 + 1,41 \cdot \omega_{с.а} p + \omega_{с.а}^2},$$

где  $\omega_{с.а}$  – частота среза аналогового прототипа, определяется по  $\omega_{с.ц}$  через формулу связи аналоговых и цифровых частот.

3. Определить  $K(j\omega)$  ЦФ для  $\omega$  от 0 до  $50000 \text{ с}^{-1}$ .

4. Вычислить и вывести на экран АЧХ цифрового и аналогового фильтров.

5. При выводе графика использовать логарифмический масштаб по оси частот.

6. Синтезировать полосовой и режекторный ЦФ, аналоговые прототипы которых имеют передаточные функции:

$$K_{\text{апф}}(p) = \frac{\frac{\omega_{с.а}}{Q} p}{p^2 + \frac{\omega_{с.а}}{Q} p + \omega_{с.а}^2}, \quad K_{\text{арф}}(p) = \frac{1000(p^2 + \omega_{с.а}^2)}{p^2 + \frac{\omega_{с.а}}{Q} p + \omega_{с.а}^2},$$

где частота настройки для цифрового фильтра  $\omega_{с.ц} = 2000 \text{ с}^{-1}$ , добротность фильтра  $Q = 50$ , частота дискретизации  $\omega_{д} = 20000 \text{ с}^{-1}$ .

7. Вычислить и вывести на экран графики АЧХ цифрового и аналогового фильтров. Проверить, как изменяются избирательные свойства фильтров при увеличении или уменьшении значения добротности  $Q$ .

8. Методом инвариантных частотных характеристик синтезировать три цифровых низкочастотных фильтра Чебышева второго порядка для трех различных уровней пульсаций в полосе пропускания (0,5 dB; 3 dB). Частота среза  $\omega_{c,ц} = 2000 \text{ с}^{-1}$ , частота дискретизации  $\omega_d = 20000 \text{ с}^{-1}$ .

Передаточные функции аналоговых прототипов имеют вид:

$$K(p) = \frac{N}{\frac{p^2}{\omega_{c,a}^2} + a \frac{p}{\omega_{c,a}} + b},$$

где значения  $N, a, b$  зависят от уровня пульсаций в полосе пропускания.

Для пульсаций 0,5 dB –  $N = 1,431, a = 1,426, b = 1,516$ .

Для пульсаций 3 dB –  $N = 0,500, a = 0,644, b = 0,707$ .

9. Вычислить и вывести на экран графики АЧХ цифрового и аналогового фильтров.

10. Преобразовать фильтр нижних частот в полосовой фильтр. Для этого в выражении для  $K(p)$  произвести замену:

$$\frac{p}{\omega_{c,a}} \rightarrow \frac{p^2 + \omega_{c,a}^2}{Pp},$$

где  $\omega_{c,a}$  – центральная частота полосы пропускания аналогового прототипа, для цифрового фильтра  $\omega_{c,ц} = 3000 \text{ с}^{-1}$ ;  $P$  – ширина полосы пропускания фильтра, для расчета взять значение  $P = 100$  и  $500$ .

*Примечание.* Преобразование фильтра нижних частот в полосовой фильтр удваивает его порядок.

11. Вычислить и вывести на экран графики АЧХ цифрового и аналогового полосовых фильтров.

### Контрольные вопросы

1. В чем суть метода дискретизации дифференциального уравнения?
2. В чем суть метода инвариантных импульсных характеристик?
3. Почему для нахождения системной функции  $H(z)$  по выражению для  $K(p)$  используют соотношение (6.6), а не (6.5)?
4. Как связаны частоты аналогового прототипа и синтезируемого цифрового фильтра?

5. Как классифицируются фильтры?
6. Какие фильтры называются фильтрами Баттерворта?
7. Какие фильтры называются фильтрами Чебышева?
8. К рекурсивным или трансверсальным относятся цифровые фильтры, рассмотренные в лабораторной работе?
9. Как перейти от низкочастотного фильтра к полосовому фильтру?

### **Литература**

1. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский . – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – Изд. 5-е, стер.– М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.

## Лабораторная работа № 7

# АДАПТИВНЫЙ РЕЖЕКТОРНЫЙ ФИЛЬТР

*Цель работы:* изучение работы адаптивной системы на примере фильтрации мешающего сигнала адаптивным режекторным фильтром.

## 1. Принципы адаптивной фильтрации

Адаптироваться – значит приспособливаться к различным условиям.

Адаптивная система представляет собой устройство, структура которой изменяется или приспособливается так, чтобы функционирование улучшалось.

Простой пример адаптивной системы – автоматическая регулировка усиления.

Адаптивная система имеет ряд свойств:

- 1) адаптация к изменениям условий окружающей среды и требований к ним;
- 2) обучение для осуществления заданного вида фильтрации;
- 3) отсутствие тщательно разработанных методов синтеза;
- 4) самовосстановление (т. е. адаптация к внутренним дефектам).

В настоящее время адаптивные системы применяются в связи, радиолокации, гидролокации, сейсмологии, навигации, биомедицинской электронике.

Основным свойством адаптивной системы является изменяющееся во времени функционирование с саморегулированием.

Адаптивные системы – это нелинейные системы. Некоторые виды адаптивных систем становятся линейными, если их структура после адаптации остается постоянной.

## 2. Классификация адаптивных систем

Лучше всего начать классификацию с разделения на адаптацию без обратной связи (ОС) и с ОС (рис. 7.1 и 7.2).

Достоинства алгоритмов адаптации с ОС:

– работоспособность, когда физические величины переменны или известны не точно;

б) работоспособность при частичном повреждении системы (повышенная надежность).

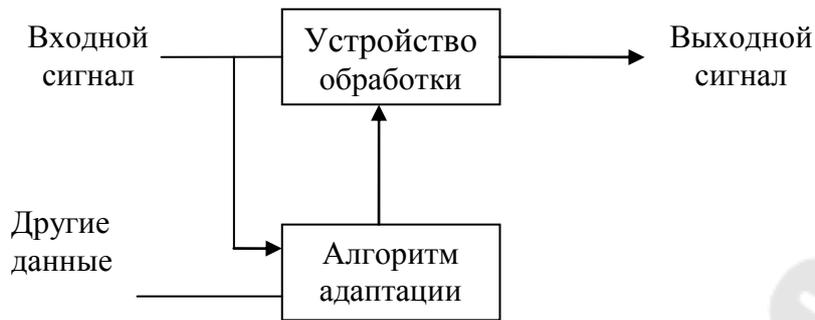


Рис. 7.1. Система адаптации без обратной связи

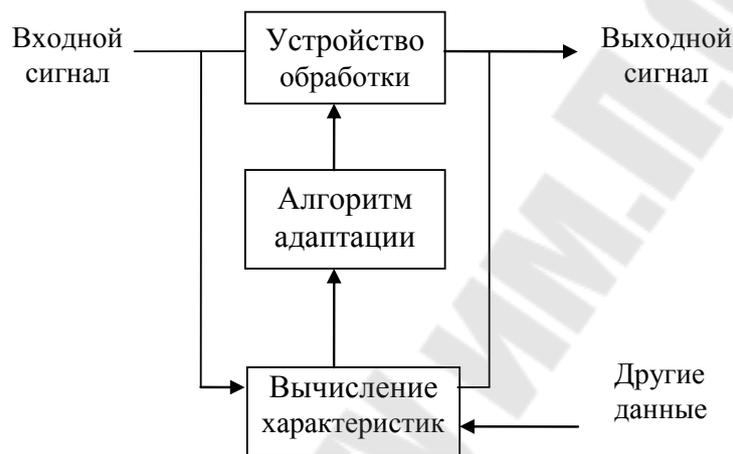


Рис. 7.2. Система адаптации с обратной связью

Рассмотрим схему адаптивной системы (рис. 7.3).

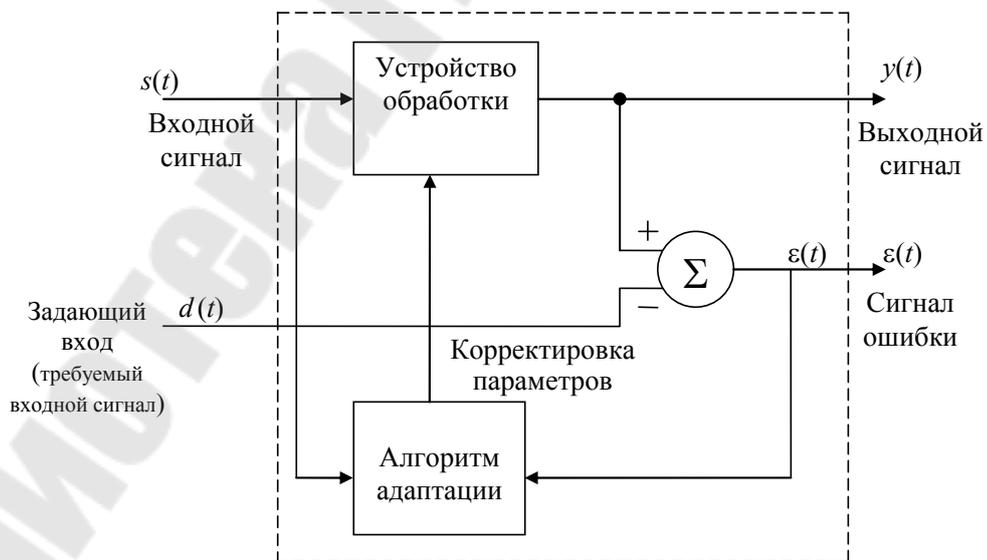


Рис. 7.3. Схема адаптивной системы

Входной сигнал  $s(t)$  фильтруется для получения выходного сигнала  $y(t)$ , который затем сравнивается с полезным, стандартным или обучающим сигналом  $d(t)$  для нахождения сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$ .

Сигнал ошибки используется для корректирования весовых параметров программируемого фильтра (процессора) с целью минимизации ошибки.

Таким образом, алгоритм адаптации действует по принципу минимизации некоторой функции стоимости.

Вид функции стоимости зависит от области применения фильтра, но обычно ее вывод производится с помощью источника второго сигнала  $d(t)$ , который может быть полезным сигналом, стандартным или обучающим.

### 3. Адаптивный линейный сумматор

Адаптивный линейный сумматор, или нерекурсивный адаптивный фильтр, является фундаментальным фильтром в адаптивной обработке сигнала и единственным наиболее важным элементом обучения систем и устройств.

Схема адаптивного линейного сумматора представлена на рис. 7.4.

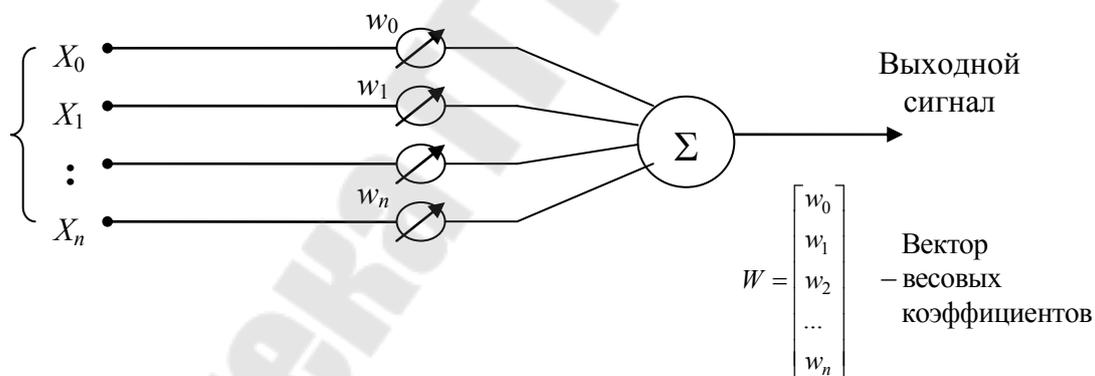


Рис. 7.4. Адаптивный сумматор

Процесс адаптации сводится к регулированию весовых коэффициентов.

Существуют две физические интерпретации элементов вектора входного сигнала:

1. Вектор входного сигнала – это одновременно действующие входные сигналы от  $N + 1$  различных источников (рис. 7.5).

2. Вектор входного сигнала – это  $N + 1$  последовательных отсчетов сигнала одного источника (рис. 7.6).

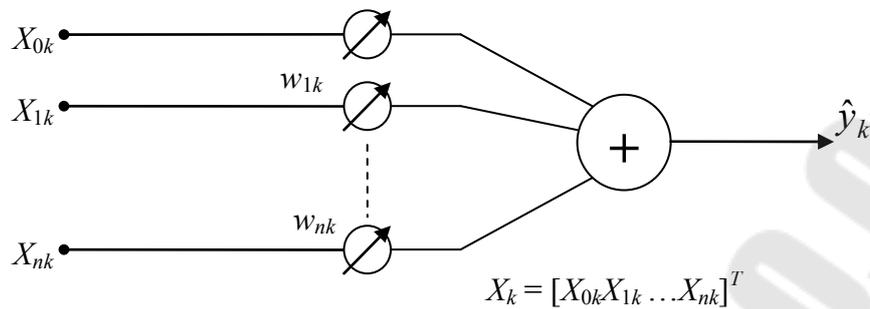


Рис. 7.5. Схема со многими входами

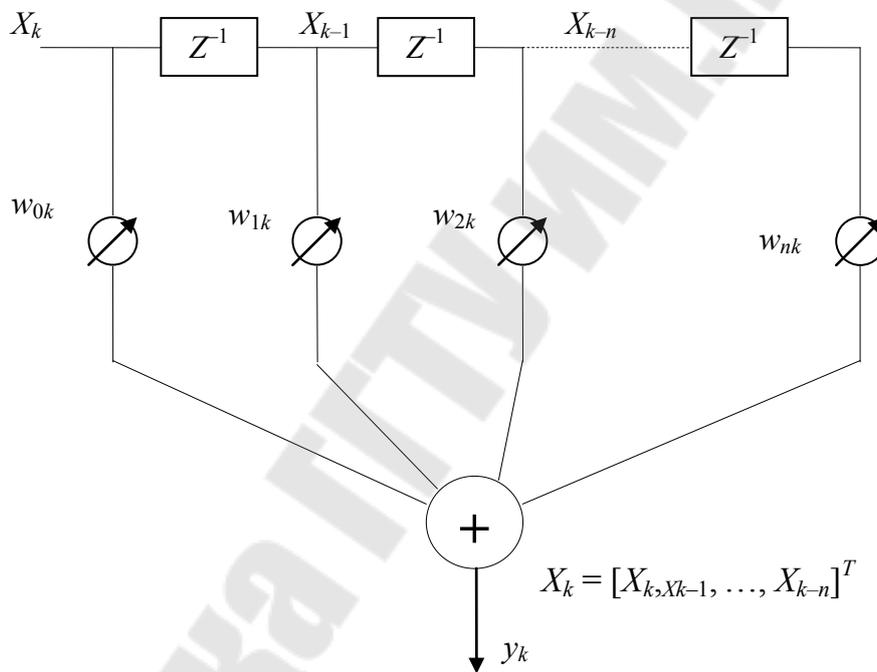


Рис. 7.6. Схема с одним входом  
(адаптивный трансверсальный фильтр)

Адаптивный линейный сумматор можно использовать в системах как с ОС, так и без ОС.

В процессе адаптации в системе с ОС вектор весовых коэффициентов линейного сумматора  $W_k$  корректируется таким образом, чтобы выходной сигнал  $y_k$  имел наилучшее приближение к полезному отклику. Для этого выходной сигнал сравнивается с полезным (рис. 7.7).

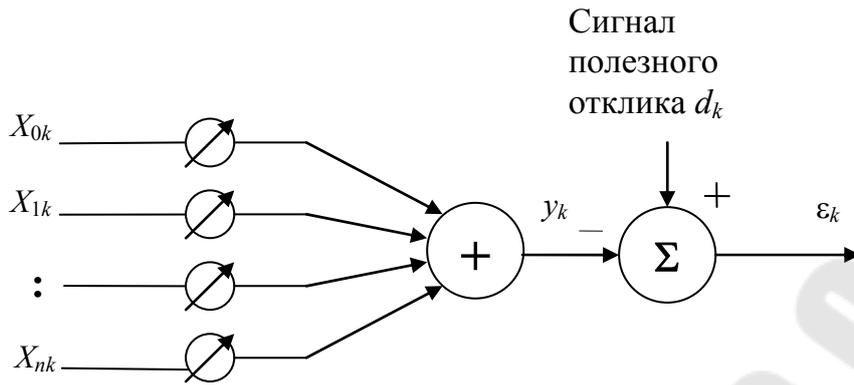


Рис. 7.7. Схема получения сигнала ошибки

В большинстве практических случаев процесс адаптации направлен на минимизацию среднего квадратичного значения ошибки.

#### 4. Оптимальный весовой вектор

Сигнал ошибки запишем как

$$\varepsilon_k = d_k - y_k$$

или

$$\varepsilon_k = d_k - X_k^T W = d_k - W^T X_k.$$

Здесь для удобства записи опущен индекс  $k$  вектора  $W_k$ .

Найдем  $\varepsilon_k^2$ :

$$\varepsilon_k^2 = d_k^2 + W^T X_k X_k^T W - 2d_k X_k^T W.$$

Будем считать, что  $\varepsilon_k$ ,  $d_k$  и  $X_k$  – стационарны в статическом смысле, и найдем среднеквадратическую ошибку:

$$E[\varepsilon_k^2] = E[d_k^2] + W^T E[X_k X_k^T] W - 2E[d_k \cdot X_k^T] W.$$

Введем обозначения:

–  $R = E[X_k X_k^T]$  – корреляционная матрица входного сигнала.

Элементы по диагонали равны среднеквадратичным значениям входных компонентов вектора  $X_k$ ;

–  $P = E[d_k X_k]$  – взаимокорреляционная функция отсчетов полезного отклика и отсчетов входного сигнала.

Тогда

$$E[\varepsilon_k^2] = E[d_k^2] + W^T R W - 2P^T W. \quad (7.1)$$

Чтобы найти весовой вектор  $W$ , при котором среднеквадратичное отклонение имеет минимум, нужно взять производную выражения (7.1) по  $W$ , приравнять к нулю и решить уравнение относительно  $W$ :

$$\nabla = \frac{\partial E[\varepsilon_k^2]}{\partial W} = 2RW - 2P = 0.$$

Откуда находим:

$$W_{\text{опт}} = R^{-1}P. \quad (7.2)$$

При этом

$$E[\varepsilon_k^2]_{\text{min}} = E[d_k^2] - P^T W_{\text{опт}}. \quad (7.3)$$

Из выражения (7.1) видно, что если отсчеты входного сигнала и полезного отклика – стационарные случайные процессы, то среднеквадратичное отклонение является квадратичной функцией вектора  $W$ .

## 5. Метод градиентного поиска оптимального вектора $W$

В практических системах поиск  $W_{\text{опт}}$  производится не по выражению (7.2), так как это технически нецелесообразно и трудоемко.

Наибольшее применение нашли методы нахождения  $W_{\text{опт}}$ , основанные на градиентных методах для определения направления перестройки весовых коэффициентов для достижения  $\min$  СКО. Наиболее известны – это метод Ньютона и наискорейшего спуска.

Рассмотрим принцип градиентного поиска для случая системы с одним весовым коэффициентом.

Итеративный процесс градиентного поиска можно представить в виде:

$$w_{k+1} = w_k + \mu(-\nabla_k), \quad (7.4)$$

где  $k$  – номер шага;  $\nabla_k$  – градиент при  $w = w_k$ .

Таким образом,  $w_k$  – текущее значение,  $w_{k+1}$  – новое значение,  $\mu$  – константа, определяющая устойчивость устройства и скорость сходимости.

При минимальном значении СКО градиент  $\nabla = 0$ .

Сходимость метода Ньютона зависит от выбора начального значения  $w_0$ . Для широкого класса функции он обладает быстрой сходимостью.

Зависимость СКО  $\xi = E[\varepsilon_k^2]$  от изменений весового вектора называется обучающей кривой. Общий вид ее показан на рис. 7.8.

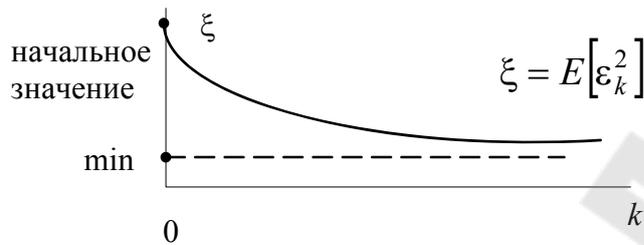


Рис. 7.8. Обучающая кривая:  $k$  – номер шага

Выражение для  $\xi = E[\varepsilon_k^2]$  можно записать в виде:

$$\xi = \xi_{\min} + \lambda(w - w_{\text{opt}})^2,$$

где  $\lambda$  – собственное значение  $r_{00}$  матрицы  $R$ .

Тогда

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = 2\lambda(w - w_{\text{opt}}).$$

Для случая с одним весовым коэффициентом получаем:

$$\nabla_k = \left. \frac{\partial \xi}{\partial w} \right|_{w=w_k} = 2\lambda(w_k - w_{\text{opt}}).$$

Тогда, подставляя в (7.4), получаем:

$$w_{k+1} = w_k - 2\mu\lambda(w_k - w_{\text{opt}})$$

или

$$w_{k+1} = w_{\text{opt}} + (1 - 2\mu\lambda)^k (w_k - w_{\text{opt}}),$$

где  $w_0$  – начальное приближение;  $(1 - 2\mu\lambda)$  – называется знаменателем прогрессии.

Алгоритм сходится, если  $(1 - 2\mu\lambda) < 1$ ,  $\frac{1}{\lambda} > \mu > 0$ .

## 6. Принцип работы фильтра

Адаптивный режекторный фильтр позволяет осуществлять точное слежение за значением частоты и фазы помехи. Структурная схема, поясняющая принцип работы фильтра, приведена на рис. 7.8.

Настройка весовых коэффициентов производится по методу наименьших квадратов.

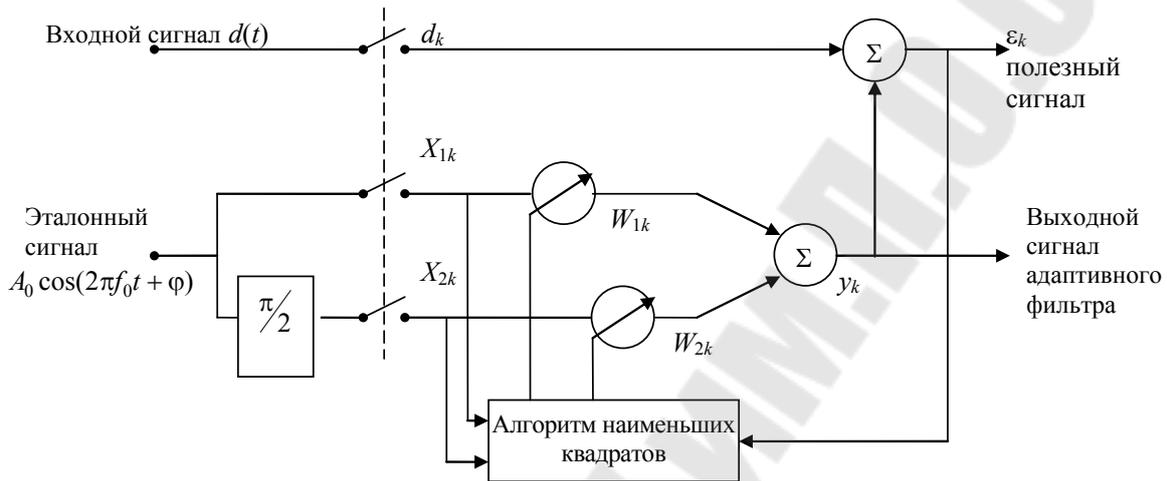


Рис. 7.8. Структурная схема адаптивного режекторного фильтра

Эталонный сигнал представляет собой помеховый сигнал  $n(t)$  (например, промышленная сеть частотой 50 Гц), который мешает наблюдению полезного сигнала  $s(t)$ .

Входной сигнал  $d(t)$  является аддитивной смесью полезного  $s(t)$  и мешающего  $n(t)$  сигналов:

$$d(t) = s(t) + bn(t), \quad (7.5)$$

где  $b$  – коэффициент, учитывающий уровень мешающего сигнала во входном сигнале.

Для слежения за фазой мешающего сигнала его представляют в виде аналитического сигнала, т. е. настройку ведут по двум квадратурным составляющим. Если воспользоваться нормировкой оси частот, то алгоритм настройки весовых коэффициентов можно записать в виде:

$$\begin{cases} X_{1k} = A_0 \cos(k\omega_0 + \varphi), \\ X_{2k} = A_0 \sin(k\omega_0 + \varphi), \end{cases} \quad \begin{cases} W_{1,k+1} = W_{1k} + 2\mu\varepsilon_k X_{1k}, \\ W_{2,k+1} = W_{2k} + 2\mu\varepsilon_k X_{2k}, \end{cases} \quad (7.6)$$

где  $\omega_0 = 2\pi f_0 T$  – нормированная частота режекции;  $\varphi$  – начальная фаза.

Выборки из сигналов берутся с шагом  $T$  в соответствии с теоремой Котельникова.

Нормированная АЧХ этого фильтра приведена на рис. 7.9.

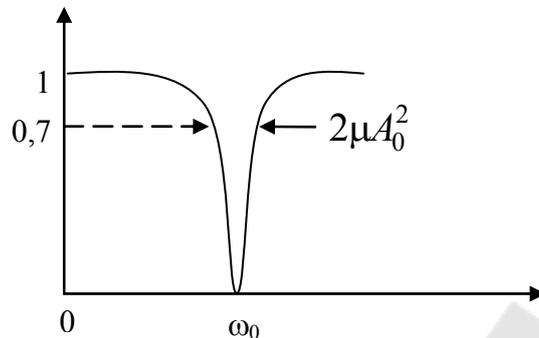


Рис. 7.9. Амплитудно-частотная характеристика адаптивного режекторного фильтра

Форма АЧХ в полосе режекции обычно определяется добротностью  $Q$ , которая находится как [1]:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\mu A_0^2}.$$

В [1] показано, что рассмотренный фильтр эквивалентен режекторному фильтру с системной функцией:

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z \cos\omega_0 + 1}{z^2 - 2(1 - \mu A_0^2)z \cos\omega_0 + 1 - 2\mu A_0^2}.$$

## 7. Порядок выполнения работы

Лабораторную работу необходимо выполнять в следующем порядке:

1. Для моделирования принять:  $A_0 = 1$ ,  $\mu = 0,0125$ .
2. Синусоидальный эталонный сигнал имеет частоту  $f_0 = 50$  Гц.
3. Полезный сигнал представляет собой синусоидальный сигнал с частотой, равной  $0,5f_0$ .
4. Входной сигнал представляет собой сумму полезного сигнала и помехи с отношением «сигнал/шум» по напряжению равным 5.
5. В соответствии с алгоритмом работы построить график полезного сигнала на выходе для нескольких шагов адаптации.

## 8. Содержание отчета

Отчет должен содержать листинг программы вычисления весового вектора и график сигнала на выходе режекторного фильтра в процессе адаптации, а также описание работы адаптивного фильтра.

### Контрольные вопросы

1. Классификация адаптивных фильтров.
2. Нарисуйте схему адаптивной системы и объясните принцип ее работы.
3. Какие две физические интерпретации существуют относительно входного вектора сигнала?
4. Что такое векторное представление сигнала?
5. Что называют обучающей кривой?
6. Чему равен оптимальный весовой вектор?
7. Запишите выражение итеративного процесса градиентного поиска.

### Литература

1. Адаптивные фильтры : пер. с англ. / под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М. : Мир, 1988. – 392 с

## Содержание

<i>Лабораторная работа № 1. Моделирование на ЭВМ дискретных сигналов.....</i>	<i>3</i>
<i>Лабораторная работа № 2. Вычисление спектра сигналов на ЭВМ с помощью быстрого преобразования Фурье.....</i>	<i>12</i>
<i>Лабораторная работа № 3. Исследование линейно-частотно-модулированного сигнала.....</i>	<i>30</i>
<i>Лабораторная работа № 4. Исследование характеристик трансверсального цифрового фильтра.....</i>	<i>36</i>
<i>Лабораторная работа № 5. Исследование характеристик рекурсивного цифрового фильтра .....</i>	<i>41</i>
<i>Лабораторная работа № 6. Синтез цифрового фильтра.....</i>	<i>49</i>
<i>Лабораторная работа № 7. Адаптивный режекторный фильтр.....</i>	<i>58</i>

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**

**Практикум  
по выполнению лабораторных работ по одноименной  
дисциплине для студентов специальности  
1-36 04 02 «Промышленная электроника»  
дневной и заочной форм обучения**

**Составители: Щуплов Вячеслав Валентинович  
Красовская Наталья Александровна**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. Г. Мансурова*  
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 22.02.21.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Цифровая печать. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,26.

Изд. № 1.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение  
Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого.  
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель