матики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 9–10.

УДК 378.147:51

МЕТОД СВЯЗНЫХ ПАР В ТЕОРИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И НОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

Теория решения задач (ТРЗ) (авторский проект) изучает закономерности процесса поиска решения задач (доказательства теорем). Как правило, исследование проходит следующие стадии:

1) выделение (обнаружение) закономерности;
2) осознание ее значимости (полезности);
3) оценка степени ее универсальности (принцип, метод, способ, прием);
4) формулировка закономерности;
5) апробация на конкретном материале: применение к решению задач (доказательству теорем).

Краеугольным камнем ТРЗ является авторское определение математики [1, 2].

Три составляющие этого определения: игра по правилам, логические цепочки, полезная информация – частично разъясняются в [1, 2]. Здесь же сделаем небольшие дополнения. Правила бывают двух видов: первичные (сродни аксиомам) – они результат нашего соглашения – и вторичные – выводимые из предыдущих правил и фактов.

Построение логической цепочки начинается с выбора некоторого объекта (совокупности объектов). Затем отыскивается (выбор-2) определенная операция, которую выполняют над этим объектом с целью получения либо новой формы исходного объекта, либо нового объекта. Исходя из полученной связной пары (СП), добывают новую информацию. Затем процесс продолжается.

Под информацией мы будем понимать совокупность фактов. *Факт* – это высказывание о наличии связи между объектами. *Объект*, *связь* – основные неопределяемые понятия ТРЗ. Полезной считается та информация, которая способствует продвижению к достижению цели.

Итак, решение задачи и доказательство теоремы есть не что иное, как процесс «добычи» полезной информации, и все упирается в его удачную организацию.

Одним из универсальных способов получения полезной информации является метод связных пар (МСП). Его точная формулировка дана в [2, с. 26], а смысл построения СП в том, что вместе с ней может появиться новая информация.

Продемонстрируем действие МСП на типичном примере.

Задача 1. Вычислить предел $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{x^3 - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right).$

Решение

После перевода иррациональности вниз и очевидных последующих преобразований получим

$$L = -\frac{1}{9} \lim_{x-1\to 0} \frac{2^{x-1} - 1}{x - 1} = |x - 1 = t| = -\frac{1}{9} \lim_{t\to 0} \frac{2^t - 1}{t} = -\frac{1}{9} \ln 2.$$

Замечание 1. При решении этого примера мы использовали как МСП, так и основную схему решения задач (ОСРЗ) [2, с. 26].

В качестве стандартной ситуации (СС) выступает паттерн из теории пределов функции одной переменной $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Замечание 2. Переход от моей ситуации к стандартной в ОСРЗ (я называю его *адаптационной зоной*) есть не что иное, как построение связной пары. Это один из главных моментов в конструировании решения.

Новым инструментом ТРЗ является принцип фантомного объекта (ПФО). ***Фантомным*** будем называть объект, который присутствует в задаче скрытно, и проблема состоит в том, чтобы его обнаружить. Рассмотрим на примере одну из его возможных реализаций под названием «метод фантомного множителя».

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + x - 16} + \sqrt{x - x^2 + 16} = x^2 - 7x + 17.$

Решение

Обычные способы решения иррациональных уравнений результата, похоже, не дают. Применим метод оценок, используя фантомный множитель. В силу неравенства Коши имеем

$$\sqrt{x^2 + x - 16} = \sqrt{(x^2 + x - 16)\cdot 1} \le \frac{(x^2 + x - 16) + 1}{2} = \frac{x^2 + x - 15}{2}.$$

Аналогично $\sqrt{x-x^2+16}=\sqrt{(x-x^2+16)\cdot 1}\le\frac{(x-x^2+16)+1}{2}=\frac{x^2-7x+17}{2}$.

Складывая неравенства, получаем $\sqrt{x^2+x-16}+\sqrt{x-x^2+16}\le x+1$.

Из исходного уравнения следует, что $x^2-7x+17\le x+1$ или $(x-4)^2\le 0$, т. е. $x=4$.

Подставляя $x = 4$ в левую часть уравнения, убеждаемся, что она равна 4, а правая часть при этом значении дает 5.

$4\neq 5$.

Ответ: решений нет.

Примечание – Автором решения является Э. Н. Балаян [3]. Но, не сделав проверку, он пришел к неверному ответу: $x = 4$.

Еще одним подходом (опять же универсальным) к решению задач является принцип структурных изменений (ψ-принцип).

Определение, что есть ***задача*** как упорядоченная четверка, дано в [2].

Изменения могут касаться носителя Ω, условия A, заключения B, решения X.

Задача 3 (о трех квадратах). Даны три равных квадрата, в которых проведены диагонали, как показано на рис. 1. Найти сумму углов.

Решение

Изменим носитель задачи и проведем дополнительные построения (рис. 2). Теперь имеем

$$\Delta AEC=\Delta BDC \Rightarrow \angle ACE=\angle CBD=\beta \text{ и } AC=BC;$$

$$\Delta AED=\Delta AFB \Rightarrow \angle ADE=\angle BAF=\gamma.$$

$$\angle CAB=\beta+\gamma\Rightarrow\angle ABC=\beta+\gamma, \text{ т. к. } \Delta ACB \text{ – равнобедренный.}$$

Очевидно, $\angle ABK=\gamma$ и $\angle KBD=90^\circ$.

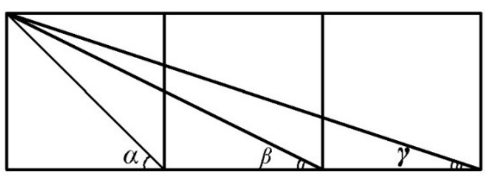

Рис. 1

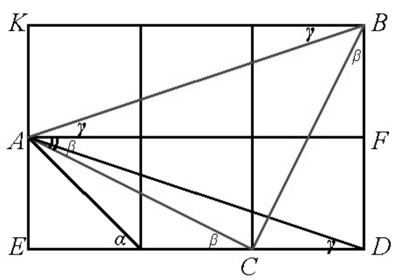

Рис. 2

Значит, $\angle KBD = \beta + \gamma + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Примечание – Нетрудно придумать идейно более простой способ решения этой задачи, основанный на «взрослом» знании тригонометрии.

Замечание. По сути, при решении этой задачи мы опять использовали МСП, а именно: построили связную пару посредством приема копирования (дублирования). Действительно, к трем квадратам добавили еще три таких же и здесь же появились новые возможности. Кстати, три новых квадрата – это как раз и есть фантомный объект в нашей задаче.

Вообще говоря, каждая СС, к которой мы стремимся в процессе решения, – фантомный объект для нашей задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Информационный подход к математике и ее преподаванию / Л. Л. Великович // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: сб. науч. ст. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ имени А. А. Кулешова, Могилев, 20–22 февр. 2013 г. – Могилев, 2013. – С. 97–101.

2. **Великович, Л. Л.** Математика технического университета и ее преподавание с позиций теории решения задач / Л. Л. Великович // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 25–28.

3. **Балаян, Э. Н.** 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9–11 классы / Э. Н. Балаян. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. – 317 с.

УДК 378.147

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ
Могилевский государственный университет продовольствия
Могилев, Беларусь

Интуитивная простота интерфейса большинства современных компьютерно-информационных систем позволяет продуктивно использовать их в системе высшего образования. Такие системы предоставляют студентам обширный набор инструментов для решения (не только) учебных задач почти любого раздела курса математики технического вуза. От-