

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Детали машин»**

**Г. П. Тариков, А. Т. Бельский**

# **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2012**

УДК 621.01:531.8(075.8)  
ББК 34.41я73  
Т19

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию  
в области экономики и организации производства  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся по специальности  
1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направлениям)»  
(протокол № 3 от 25.04.2012 г.)*

Рецензенты: директор ОАО «Гомельский литейный завод «Цетролит» *М. А. Сайков*;  
канд. техн. наук, доц. каф. «Детали машин, путевые и строительные машины»  
БелГУТа *Е. М. Масловская*;  
зав. каф. «Детали машин, путевые и строительные машины» БелГУТа  
д-р техн. наук, проф. *В. А. Довгяло*

### **Тариков, Г. П.**

Т19 Прикладная механика : учеб. пособие / Г. П. Тариков, А. Т. Бельский ; М-во образования  
Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого,  
2012. – 172 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свобод-  
ное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа:  
<http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-103-1.

Рассмотрены вопросы из области кинематики и динамики твердого тела, а также основные поло-  
жения механики материалов, критерии работоспособности и расчета конструкций и их соединений.

Для студентов специальности 1-27 01 01 «Экономика и организация производства (по направле-  
ниям)» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.01:531.8(075.8)  
ББК 34.41я73

ISBN 978-985-535-103-1

© Тариков Г. П., Бельский А. Т., 2012  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2012

## Введение

Курс «Прикладная механика» представляет собой комплексную дисциплину, в которой излагаются необходимые сведения из области кинематики и динамики материальной системы, теоретических основ сопротивления материалов, а также методов расчета на прочность, жесткость соединений деталей машин.

Знание этого курса необходимо для самостоятельного инженерного решения конструкторских, технологических и производственных вопросов.

С древних времен старались создавать прочные и надежные механизмы, машины и конструкции. При этом для определения размеров элементов деталей, конструкции пользовались зависимостями, известными из полученных ранее практических результатов. В одних случаях это приводило к авариям, в других же удавалось строить вполне надежные сооружения (сохранившиеся до наших дней египетские пирамиды, римские виадуки и т. д.).

Обычно считают, что наука о прочности материалов возникла в XII в. благодаря великому итальянскому ученому Г. Галилею, который в книге «Беседы и математические доказательства двух новых отраслей науки» (1638) заложил основы сопротивления материалов. На протяжении последующих двух веков многие выдающиеся математики, физики и инженеры внесли вклад в развитие теоретических положений науки о прочности материалов: Я. Бернулли было выведено и решено уравнение изогнутой балки при изгибе; Р. Гуком открыт закон о прямой пропорциональности между нагрузкой и перемещением; О. Кулоном дано решение по расчету подпорных стен; Л. Эйлером – решение задачи об устойчивости центрально сжатых стержней и т. д. Однако эти положения, как правило, носили теоретический характер и не могли быть применены на практике.

В XIX в. в связи с бурным развитием промышленности, транспорта и строительства потребовались новые разработки прочности материалов. Навье и Коши получили полную систему уравнений для решения пространственной задачи изотропного тела. Сен-Венан решил задачу о косом изгибе бруса с произвольной формой поперечного сечения. Клайпероном был разработан метод расчета неразрезных балок при помощи уравнений трех моментов. Брессом получена методика расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок. Максвеллом и Мором предложен метод определения перемещений при изгибе.

Большой вклад в развитие науки внесли и русские ученые.

Д. И. Журавский разработал теорию расчета мостовых ферм, а также формулу для определения касательных напряжений при изгибе балки.

А. В. Годолин разработал методы расчета толстостенных цилиндров.

Х. С. Головин произвел расчет кривого бруса.

Ф. С. Есинский решил задачу по определению критических напряжений при продольном изгибе в неупругой работе материала.

# Статика твердого тела

## Задачи статики и основные определения

*Статикой* называется та часть механики, где изучаются условия, которым должны удовлетворять силы, действующие на систему материальных точек, для того чтобы система находилась в равновесии, и условия эквивалентности систем сил.

*Материальная точка* – геометрическая точка с массой.

*Абсолютно твердое тело* – совокупность материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными независимо от действующих сил.

*Сила* – количественная мера механического взаимодействия материальных тел, характеризующаяся модулем, направлением и точкой приложения и являющаяся векторной величиной.

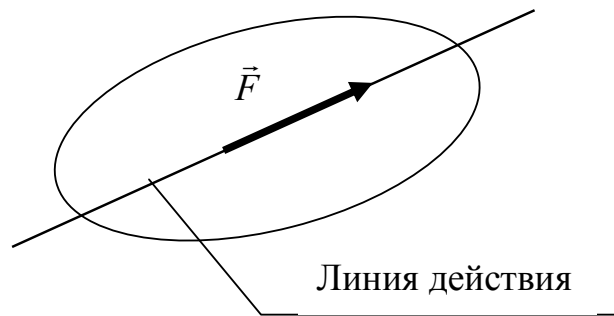


Рис. 1

*Линия действия силы* (рис. 1) – прямая, вдоль которой направлена сила.

*Системой сил* называется совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.

*Эквивалентными* называются такие две системы, каждую из которых можно заменить другой, не изменяя состояния покоя или характер движения.

*Равнодействующей силой* называется сила, действие которой эквивалентно действию на тело системы сил.

*Уравновешенной системой сил* называется система сил, которая после приложения к покоящемуся свободному твердому телу не нарушает его состояния покоя.

*Свободным* называется твердое тело, которому можно сообщить из данного положения любое перемещение в пространстве.

*Несвободным* называется тело, если свобода его перемещения в пространстве ограничена другими телами.

*Связями* называются геометрические условия, ограничивающие перемещение тела.

*Реакциями связей* называются силы, с которыми связи действуют на данное тело.

*Задаваемыми*, или *активными*, силами называются силы, не являющиеся реакциями связей.

*Распределенными* называются силы, которые приложены к телу во всех точках части поверхности или во всех точках объема тела.

*Сосредоточенной силой* называется сила, если она приложена в одной точке.

*Центр масс (центр инерции)* – точка, характеризующая распределение масс в механической системе, которая при перемещении системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы.

*Центр тяжести* – точка, неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы этого тела при любом его положении в пространстве. Центр тяжести совпадает с центром масс.

**Аксиомы статики твердого тела.** Обобщая опыт изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы статики, так как имеют в своей основе экспериментальные факты.

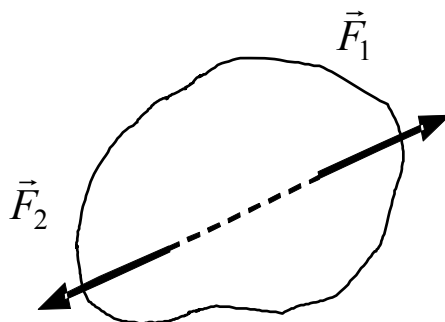


Рис. 2

**Аксиома 1 (о равновесии двух сил).** Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по величине, противоположно направлены и имеют общую линию действия (рис. 2).

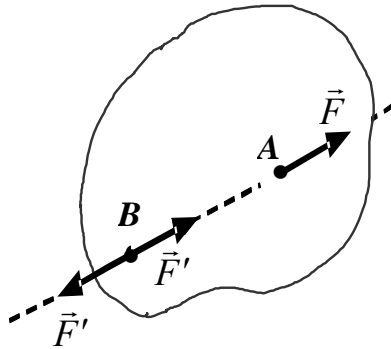


Рис. 3

**Аксиома 2 (о присоединении и исключении уравновешенных сил).** Действие данной системы сил на твердое тело не изменяется, если к ней присоединить или исключить из нее уравновешенную систему (рис. 3).

Из аксиом 1 и 2 логически получаем следствие: не изменяя действия силы на твердое тело, можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.

**Аксиома 3 (закон параллелограмма).** Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела под углом друг к другу, выражается по величине и по направлению диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

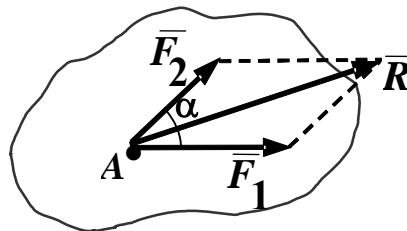


Рис. 4

Величину равнодействующей силы можно определить по теореме косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

**Аксиома 4 (о действии и противодействии).** Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис. 5).

Однако следует отметить, что эти силы приложены к разным телам.

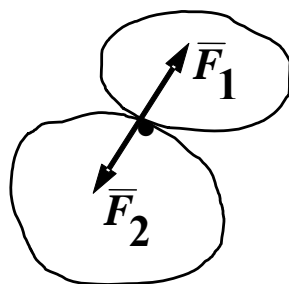


Рис. 5

**Аксиома 5 (аксиома освобожденности от связей).** Не изменяя состояния несвободного тела, можно отбросить наложенные на него связи, приложив их реакции, после чего рассматривать тело как свободное.

**Виды связей и их реакции.** Рассмотрим некоторые виды связей твердых тел.

- Реакция гладкой поверхности без трения направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 6, а). Такая реакция называется *нормальной*.

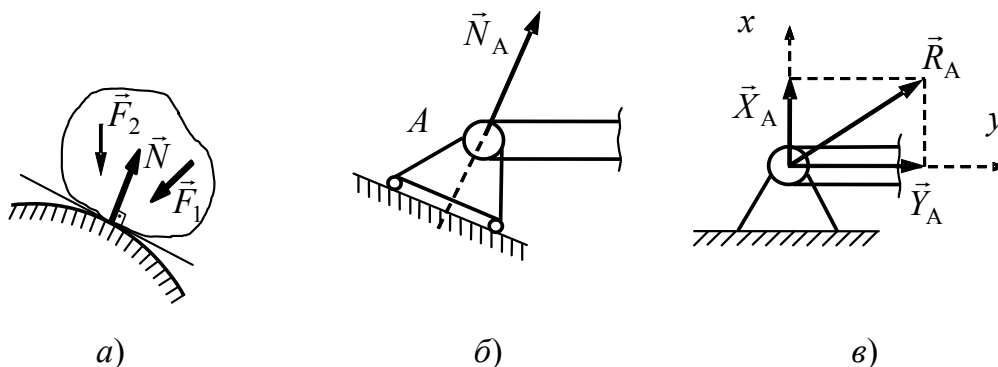


Рис. 6

- Реакция шарнирно-подвижной опоры без трения направлена перпендикулярно к опорной поверхности (рис. 6, б).

- Реакция шарнирно-неподвижной опоры без трения проходит через центр шарнира, но направление ее неизвестно. При решении задач реакцию такой опоры удобно разложить на две составляющие (рис. 6, в).

- Реакция гибкой нерастяжимой связи (нити, канаты, цепи) или стержневой связи (прямолинейного стержня, вес которого не учитывается, с шарнирами на концах) направлена вдоль этой связи (рис. 7 а, б).

- Реакции жесткой заделки (рис. 7, в).



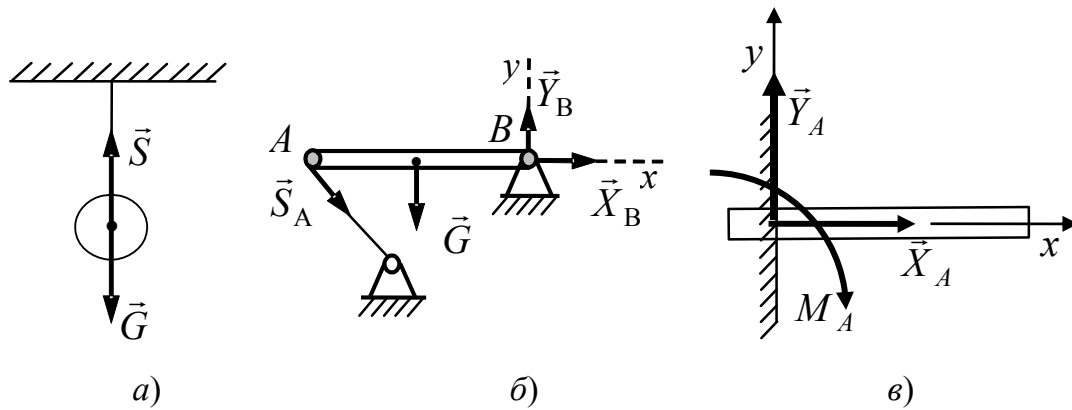


Рис. 7

**Система сходящихся сил.** Если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке, то система называется *системой сходящихся сил*, а точка пересечения  $O$  – *точкой схода* (рис. 8).

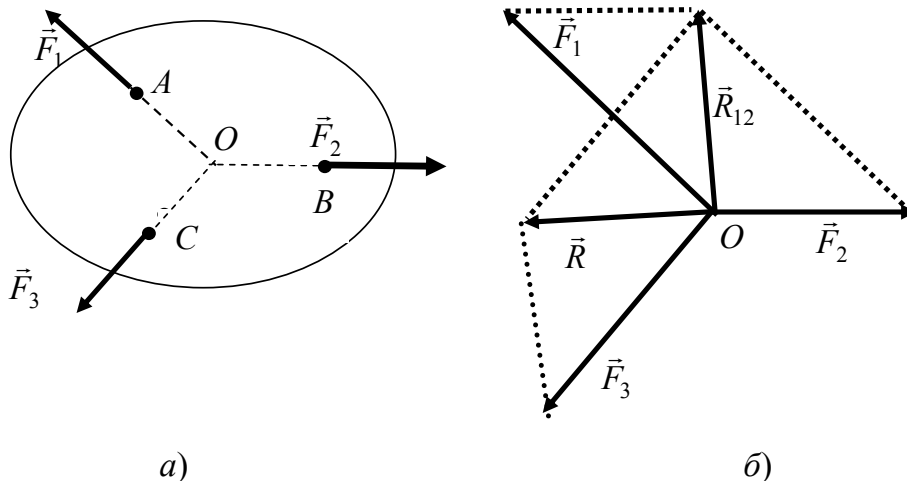


Рис. 8

Пусть к твердому телу (рис. 8, а) приложена некоторая система сходящихся сил. На основании следствия из аксиом 1 и 2 в результате переноса сил по линиям их действия получим пучок сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , приложенных в одной точке схода  $O$  (рис. 8, б).

Для определения равнодействующей  $\vec{R}$  этих сил сначала определим равнодействующую  $\vec{R}_{12}$  сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , а затем найдем искомую равнодействующую  $\vec{R}$  сил  $\vec{R}_{12}$  и  $\vec{F}_3$ :

$$\vec{R} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Аналогично может быть определена равнодействующая для любого числа сходящихся сил. Следовательно, система сходящихся сил

всегда имеет равнодействующую, равную их векторной сумме и приложенную в точке схода:

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i.$$

**Условие равновесия сходящихся сил.** Для сходящихся сил необходимое и достаточное условие равновесия состоит в равенстве нулю ее равнодействующей.

Геометрическая форма условия равновесия выражается одним векторным равенством  $\vec{R} = 0$ .

Аналитическая форма равновесия системы сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, заключается в том, что алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равны нулю:

$$\sum R_x = 0; \sum R_y = 0.$$

*Моментом силы* относительно точки называется взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на ее плечо относительно данной точки.

*Плечом силы* относительно точки называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы (рис. 9).

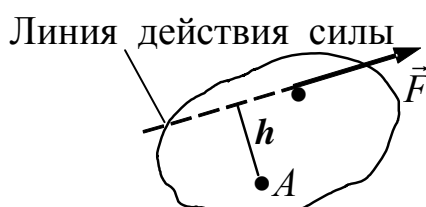


Рис. 9

Момент силы относительно данной точки принимают положительным, если сила стремится вращать тело вокруг этой точки против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае. Если линия действия силы проходит через некоторую точку, то относительно этой точки плечо силы и ее момент равны нулю. Момент силы относительно точки определяется по формуле

$$m_A = \pm Fh.$$

*Парой сил* называется совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил. Расстояние между линиями действия сил пары называется ее *плечом*.

Моментом пары называется произведение модуля сил, образующих пару, на ее плечо (рис. 10). Момент пары сил положителен, если пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицателен в противоположном случае. Момент пары определяется по формуле

$$m = Fd.$$

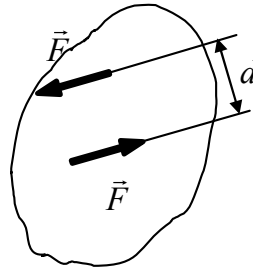


Рис. 10

Приведение силы к данной точке. Пусть к твердому телу в точке  $A$  приложена сила  $\vec{F}$  (рис. 11).

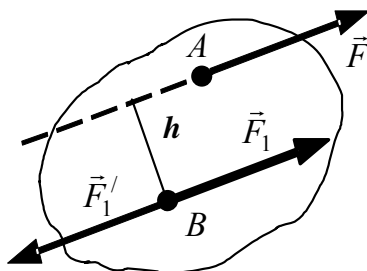


Рис. 11

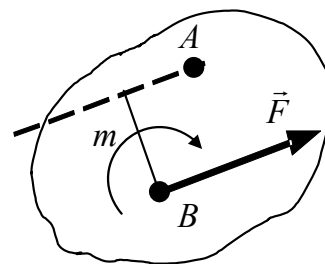


Рис. 12

Возьмем на теле произвольную точку  $B$ , которую будем называть центром приведения, и приложим к ней уравновешенные силы  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$ . При этом  $F_1 = F_1' = F$ . Заметим, что силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_1'$  образуют при этом пару сил с моментом  $m = Fh$ . Таким образом, чтобы перенести силу  $\vec{F}$ , приложенную в точке  $A$ , параллельно самой себе в точку  $B$  необходимо в точке  $B$  приложить силу  $\vec{F}$  и добавить момент  $m$ , равный по модулю произведению силы  $F$  на кратчайшее расстояние от точки  $B$  до линии действия силы  $\vec{F}$ , приложенной в точке  $A$  (рис. 12).

**Равновесие плоской системы сил.** Существуют три формы уравнений равновесия плоской системы сил. Первая форма условия равновесия плоской системы сил имеет вид:

$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum m_O(F_i).$$

Первые два уравнения называются уравнениями проекций сил на оси координат, третье – уравнением моментов. Точка  $O$  может быть выбрана произвольно.

Легко доказать, что необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил могут быть записаны еще в двух формах.

Вторая форма:

$$\sum F_{ix} = 0, \sum m_A(F_i), \sum m_B(F_i).$$

В этом случае точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на прямой перпендикулярной к оси  $x$ .

Третья форма:

$$\sum m_A(F_i), \sum m_B(F_i), \sum m_C(F_i).$$

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не должны лежать на одной прямой.

Отметим, что для любой из трех форм уравнений равновесия число независимых между собой уравнений равновесия равно трем. Задачи, в которых все неизвестные могут быть определены из уравнений равновесия твердого тела, называются *статически определенными*. Если же неизвестных больше, чем этих уравнений, то задача называется *статически неопределенной*.

**Момент силы относительно оси.** Моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  (рис. 13) называется алгебраическая величина, абсолютное значение которой равняется произведению модуля проекции силы  $\vec{F}$  на плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную к оси  $z$ , на расстояние  $h$  от точки  $O$  пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы  $\vec{F}_\alpha$ , т. е.  $m_z(F) = \pm F_\alpha h$ .

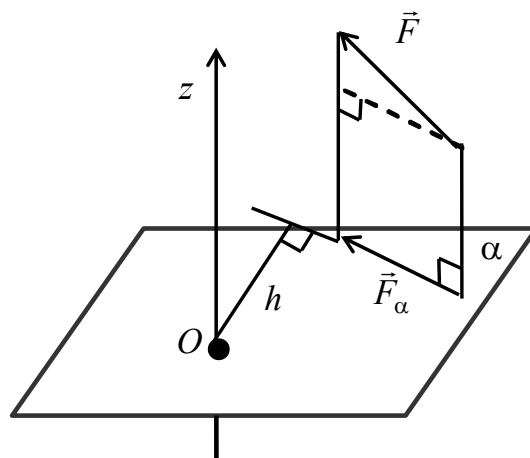


Рис. 13

Знак «плюс» – если направление вращения силы  $\vec{F}_\alpha$  вокруг точки  $O$  с конца оси  $z$  видно происходящим против часовой стрелки, если по часовой стрелке, то знак «минус». Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

**Задача 1.** Составить уравнения равновесия плоской системы, изображенной на рис. 14, для первой и второй форм уравнений равновесия.

*Решение*

Первая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0; F \cos \alpha + R_{Bx} = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; R_{Ay} + F \sin \alpha - qc + R_{By} = 0;$$

$$\Sigma m_A(F_i) = 0; Fa \sin \alpha + m + R_{By}(a + b + c) - qc(a + b + 0,5c) = 0.$$

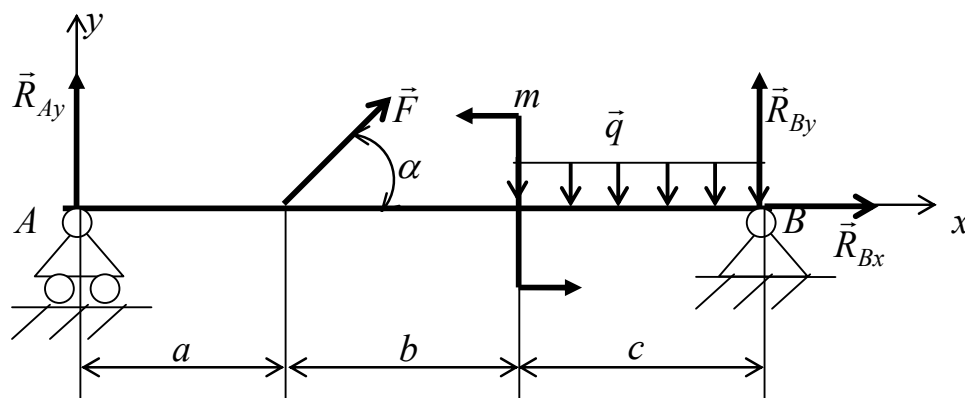


Рис. 14

Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0; F \cos \alpha + R_{Bx} = 0;$$

$$\Sigma m_A(F_i) = 0;$$

$$Fa \sin \alpha + m + R_{By}(a + b + c) - qc(a + b + 0,5c) = 0.$$

$$\Sigma m_B(F_i) = 0; -F(b + c) \sin \alpha + m - R_{Ay}(a + b + c) + qc0,5c = 0.$$

### Контрольные вопросы

1. Какими вопросами занимается статика?
2. Что собой представляют материальная точка и твердое тело?

3. Что собой представляет сила и чем она характеризуется?
4. Чем отличается свободное твердое тело от несвободного?
5. Какие аксиомы статики имеют место?
6. Какая система сил называется сходящейся?
7. Какие существуют формы равновесия сходящихся сил?
8. Что такое момент силы относительно точки и оси?
9. Какие существуют формы уравнений равновесия для плоской системы сил?

## Кинематика

*Кинематикой* называется та часть механики, в которой изучается механическое движение тел, без учета их масс и действия приложенных к ним сил.

*Механическим движением* называют изменение положения тела в пространстве с течением времени относительно других тел.

*Простейшим механическим движением* является движение материальной точки – тела, размеры и форму которого можно не учитывать при описании его движения.

**Способы задания движения точки.** Движение точки может быть задано тремя способами: естественным, векторным и координатным.

**Естественный способ.** При *естественном способе* задания движения задается траектория, т. е. линия, по которой движется точка (рис. 15).

На этой траектории выбирается некоторая точка  $A$ , принимаемая за начало отсчета. Выбираются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты  $s$ , определяющей положение точки на траектории. При движении точки расстояние  $s$  будет изменяться.

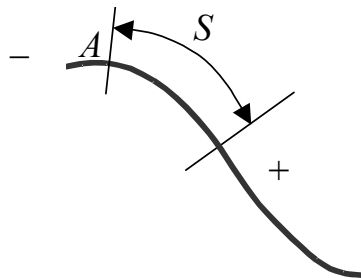


Рис. 15

Для определения положения точки в любой момент времени, достаточно задать дуговую координату  $s$  как функцию времени  $t$ :  $s = f(t)$ .

Это равенство называется *уравнением движения точки по данной траектории*.

**Векторный способ.** При векторном способе задания движения точки положение точки  $M$  определяется величиной и направлением радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из неподвижного центра  $O$  в данную точку  $M$  (рис. 16). При движении точки ее радиус-вектор  $\vec{r}$  изменяется по величине и направлению.

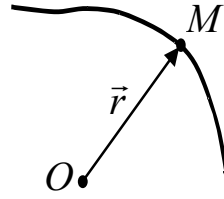


Рис. 16

Для определения положения точки  $M$  в любой момент времени достаточно задать ее радиус-вектор  $\vec{r}$  как функцию времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Данная зависимость называется *векторным уравнением движения точки*.

**Координатный способ.** При координатном способе задания движения положение точки по отношению к выбранной системе отсчета определяется при помощи прямоугольной системы декартовых координат (рис. 17). При движении точки ее координаты изменяются с течением времени.

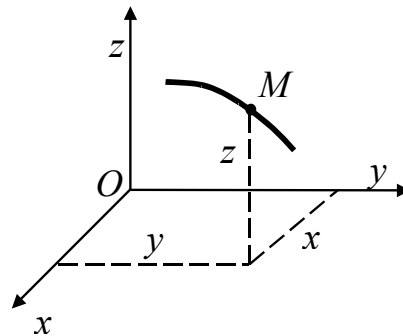


Рис. 17

Поэтому, чтобы определить положение точки в любой момент времени, достаточно задать координаты  $x, y, z$  как функции времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Эти равенства называются *уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах*.

**Скорость и ускорение точки.** Скорость точки является характеристикой быстроты и направления ее движения.

Пусть точка  $M$  (рис. 18, а) движется по криволинейной траектории согласно закону  $s = f(t)$ . В момент времени  $t$  точка занимает



положение  $M$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  положение  $M_1$ , пройдя за время  $\Delta t$  путь  $\Delta S$ .



Рис. 18

Отношение приращения дуговой координаты  $\Delta S$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за которое произошло это приращение, называется *средней скоростью точки за время  $\Delta t$* :

$$V_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Очевидно, что, чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ , тем ближе значение  $V_{\text{cp}}$  подходит к величине действительной скорости точки в момент времени  $t$ .

*Скоростью* называется предел, к которому стремится средняя скорость  $V_{\text{cp}}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Чтобы знать не только величину скорости, но и ее направление, введем понятие вектора скорости. Для этого будем определять движение в векторной форме  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . В момент времени  $t$  положение точки  $M$  (рис. 18, б) определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ , а в момент времени  $t + \Delta t$ , соответствующий положению  $M_1$ , – радиус-вектором  $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ .

Отношение приращения радиус-вектора  $\Delta\vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого произошло это приращение, называется *вектором средней скорости точки за время  $\Delta t$* , т. е.

$$\vec{V}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора  $\vec{V}_{\text{cp}}$  совпадает с направлением вектора  $\Delta\vec{r}$ .

*Вектор скорости* точки равен производной от радиус-вектора по времени и всегда направлен по касательной к траектории в точке  $M$ :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

*Ускорение точки* характеризует быстроту изменения ее скорости. Положим, что точка движется по криволинейной траектории (рис. 19). В момент времени  $t$  она занимает положение  $M$  и имеет скорость  $\vec{V}$ . В момент времени  $t + \Delta t$  точка занимает положение  $M_1$  и имеет скорость  $\vec{V}_1$ . Переносим вектор  $\vec{V}_1$  в точку  $M$  и соединяя концы векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{V}_1$ , получим вектор  $\Delta \vec{V}$ , выражающий приращение вектора скорости за время  $\Delta t$ .

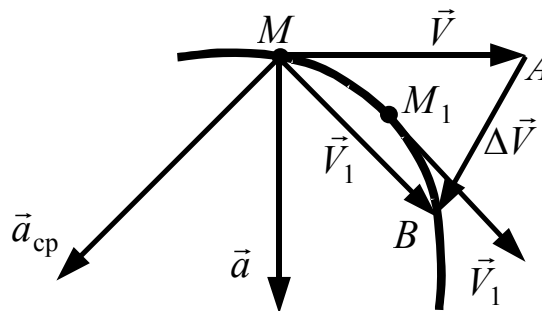


Рис. 19

Отношение приращения вектора скорости  $\Delta \vec{V}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого произошло это приращение, называется *средним ускорением*:

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}.$$

Действительное ускорение точки в момент времени в положении  $M$  представляет собой предел среднего ускорения, когда  $\Delta t$  стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Таким образом, вектор ускорения равен первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора по времени.

При естественном способе задания движения ускорение точки определяют его составляющими, которые направлены к естественным осям (рис. 20).

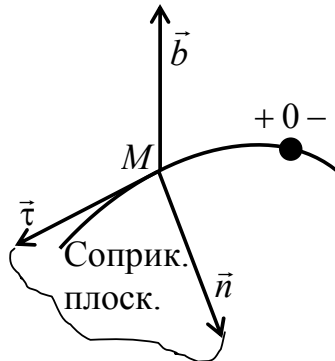


Рис. 20

Траектория движения точки, как и любая кривая, имеет три естественные оси:

- касательную (орт оси –  $\vec{\tau}$ ), направленную в сторону положительного отсчета;
- главную нормаль (орт оси –  $\vec{n}$ ) – линию пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей, направленную в сторону вогнутости кривой;
- бинормаль (орт оси –  $\vec{b}$ ), перпендикулярную касательной и главной нормали.

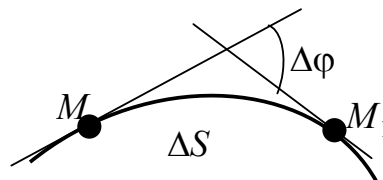


Рис. 21

Кривизной  $K$  кривой в данной точке называют предел отношения угла смежности  $\Delta\phi$  (рис. 21) к длине дуги  $\Delta S$ :

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta S}.$$

Величина, обратная кривизне  $K$ , называется радиусом кривизны:

$$\rho = \frac{1}{K}.$$

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и равно производной от вектора скорости по времени (рис. 22):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

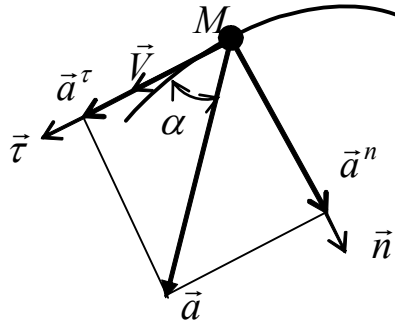


Рис. 22

Выразим вектор скорости  $\vec{V}$  как произведение ее численного значения  $V$  на орт  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{V} = V\vec{\tau},$$

тогда

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Первое слагаемое представляет касательное ускорение  $\vec{a}^\tau$  точки  $M$ , характеризующее изменение вектора скорости этой точки по модулю:

$$\vec{a}^\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}.$$

Величину  $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ , входящую во второе слагаемое, определим следующим образом.

Возьмем на кривой (рис. 23) два положения движущейся точки  $M$  и  $M_1$ , соответствующие моментам времени  $t$  и  $t + \Delta t$ . Орты касательной в этих точках, соответственно,  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau}_1$ . Переносим  $\vec{\tau}_1$  в точку  $M$ , определим приращение орта  $\vec{\tau}$   $\Delta\vec{\tau}$ .

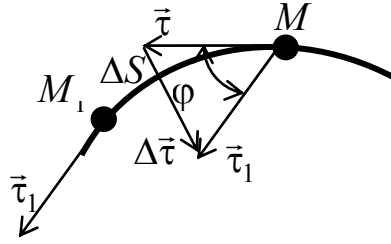


Рис. 23

Как видно из рис. 23,

$$\Delta \vec{\tau} = 2\vec{\tau} \sin \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

тогда

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \varphi \cdot \Delta S}{\Delta t \cdot \varphi \cdot \Delta S} = \frac{1}{\rho} V.$$

Угол  $\alpha$ , образованный вектором  $\Delta \vec{\tau}$  и касательной, равен:  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$   $\lim \varphi = 0$  и поэтому  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Откуда следует, что вектор  $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$  направлен по нормали к траектории, а так как он расположен в соприкасающейся плоскости, то эта нормаль является главной нормалью.

Тогда второе слагаемое будет иметь вид:

$$V \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V^2}{\rho} \vec{n} = \vec{a}^n.$$

Величина  $\vec{a}^n$  называется *нормальным ускорением*, которое направлено по главной нормали к траектории и характеризует изменение направления вектора скорости. Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории.

Полное ускорение точки  $M$ :

$$\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n.$$

Модуль ускорения и его направление определяют по формулам:

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^\tau}{a^n}.$$

Движение точки будет ускоренным (рис. 22), если направление векторов скорости  $\vec{V}$  и касательного ускорения  $\vec{a}^\tau$  совпадает, и замедленным, если наоборот.

Рассмотрим различные виды движения точки.

**Прямолинейное равномерное движение точки.** При данном движении ускорение точки равно нулю:

$$V = \text{const}, a^\tau = \frac{dV}{dt} = 0, \rho = \infty, a^n = \frac{V^2}{\rho} = 0.$$

**Прямолинейное неравномерное движение точки.** Данное движение характеризуется изменением скорости по модулю:

$$V \neq \text{const}, a^\tau = \frac{dV}{dt}, \rho = \infty, a^n = \frac{V^2}{\rho} = 0, a = a^\tau = \frac{dV}{dt}.$$

**Криволинейное равномерное движение точки.** При этом движении происходит изменение направления скорости:

$$\rho \neq \infty, a^n \neq 0, V = \text{const}, a^\tau = \frac{dV}{dt} = 0, a = a^n = \frac{V^2}{\rho}.$$

**Криволинейное неравномерное движение точки.** При данном виде движения происходит изменение скорости по модулю и направлению:

$$\rho \neq \infty, V \neq \text{const}, a^n = \frac{V^2}{\rho}, a^\tau = \frac{dV}{dt}, a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}.$$

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения. Пусть движение точки  $M$  задано уравнениями движения в прямоугольных декартовых координатах:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

В этом случае радиус-вектор точки  $M$  равен:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные вектора постоянные по величине и направлению.

Вектор скорости точки  $M$  равен:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Коэффициенты при ортах  $\vec{i}, \vec{j}$  и  $\vec{k}$  представляют собой проекции вектора скорости на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Следовательно,

$$V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции вектора скорости точки  $M$  на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль скорости вычисляется по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Проекции вектора ускорения точки  $M$  на координатные оси равны первым производным от соответствующих проекций вектора скорости или вторым производным соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При движении точки по произвольной плоской кривой ее ускорение всегда может быть представлено в виде суммы двух составляющих – тангенциальной и нормальной:

$$\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n.$$

Тангенциальное ускорение  $\vec{a}^\tau$  характеризует изменение скорости по модулю и направлено по касательной к траектории движения, а нормальное ускорение  $\vec{a}^n$  характеризует изменение скорости по направлению и направлено по нормали к центру кривизны. По модулю эти ускорения определяются по зависимостям:

$$a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}; a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2} = \frac{V^2}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории точки в данный момент времени.

**Виды движения абсолютно твердого тела.** Частными видами движения абсолютно твердого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

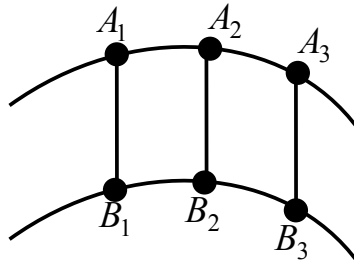


Рис. 24

**Поступательное движение.** *Поступательным движением абсолютно твердого тела* называется такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющий любые две точки тела, остается параллельным своему первоначальному положению во все время движения (рис. 24). При поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеют одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

**Вращательное движение абсолютно твердого тела.** Движение абсолютно твердого тела, при котором две его точки  $A$  и  $B$  остаются неподвижными, называется *вращением* (вращательным движением) вокруг неподвижной прямой  $AB$ , называемой осью вращения (рис. 25). При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, в плоскостях, перпендикулярных к ней.

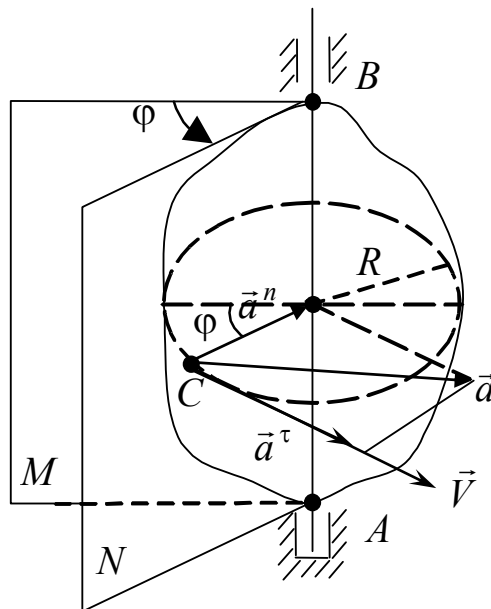


Рис. 25



Проведем через ось  $AB$  неподвижную полуплоскость  $M$  и движущуюся вместе с телом полуплоскость  $N$ . Вращение тела будет определяться величиной двугранного угла  $\varphi$  между полуплоскостями  $M$  и  $N$ . Угол  $\varphi$  называется *углом поворота*. При вращении угол поворота  $\varphi$  изменяется в зависимости от времени.

Зависимость  $\varphi = f(t)$  является уравнением вращения тела вокруг неподвижной оси. Оно позволяет определить положение тела в любой момент времени. Угол  $\varphi$  выражается в радианах. Пусть через промежуток времени  $\Delta t$  после момента времени  $t$  угол  $\varphi$  изменится на величину  $\Delta\varphi$ .

Отношение приращения угла поворота  $\Delta\varphi$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который произошло это приращение, называется *средней угловой скоростью*:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , можем записать:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Таким образом, угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени. Угловая скорость измеряется в рад/с.

Зная зависимость угловой скорости  $\omega$  от времени  $t$ , можно определить ее среднее приращение за единицу времени:

$$\varepsilon_{\text{cp}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Отношение приращения угловой скорости к приращению времени называется *средним угловым ускорением*.

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , записываем:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Итак, *угловое ускорение равно второй производной от угла поворота по времени или первой производной от угловой скорости по времени*. Угловое ускорение измеряется в рад/с<sup>2</sup>.

Возьмем в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси, некоторую точку  $C$ , находящуюся на расстоянии  $R$  от оси вращения. При вращении тела точка  $C$  движется по окружности радиуса  $R$  (рис. 25). При повороте тела на угол  $\varphi$  точка  $C$  окажется на расстоянии  $S = \varphi R$  от своего начального положения. Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{dS}{dt} = V = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$$

Таким образом,  $V = \omega R$ , т. е. *скорость любой точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения*. Так как скорость  $\vec{V}$  направлена по касательной к окружности, по которой движется точка  $C$ , то она будет перпендикулярна к радиусу, проведенному через точку и ось вращения.

Ускорение точки  $C$  складывается из касательной и нормальной составляющих. Касательная составляющая ускорения направлена по одной прямой со скоростью и в ту же сторону, что и скорость, если движение ускоренное, и в противоположную сторону, если движение замедленное. По модулю касательная составляющая определяется:

$$a^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R.$$

Нормальная составляющая ускорения направлена от точки  $C$  к оси вращения. Так как радиус кривизны в данном случае равен радиусу окружности, которую описывает точка, то

$$a^n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R.$$

Модуль полного ускорения на основании формулы будет равен:

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

**Плоскопараллельное движение твердого тела.** *Плоскопараллельным движением твердого тела* называется такое его движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости (рис. 26).

Положение отрезка  $AB$  можно определить, зная радиус-вектор  $\vec{r}_A$  точки  $A$  и угол  $\varphi$ , который образует отрезок  $AB$  с осью  $Ox$ . Точку  $A$  называют *полюсом*. При движении тела величины  $\vec{r}_A$  и  $\varphi$  будут изменять-

ся в зависимости от времени  $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Эти зависимости называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

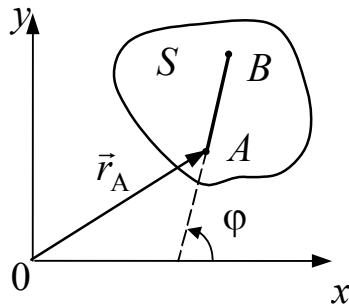


Рис. 26

Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости  $S$  можно представить как совокупность двух движений: поступательного движения, зависящего от выбора полюса, и вращательного движения вокруг полюса.

Скорость точки  $B$  плоской фигуры при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса (точка  $A$ ) и скорости точки  $B$  при вращении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где  $\vec{V}_A$  – скорость полюса (поступательное движение);  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки  $B$  в относительном движении (вращательное движение), которая по модулю равна  $V_{BA} = \omega l_{BA}$ .

Ускорение точки  $B$  плоской фигуры при плоскопараллельном движении равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки  $B$  при вращении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Но вектор ускорения  $\vec{a}_{BA}$  можно представить в виде векторной суммы нормального  $\vec{a}_{BA}^n$  и касательного  $\vec{a}_{BA}^\tau$  ускорений рассматриваемой точки  $B$  во вращательном движении ее вокруг полюса  $A$ .

Таким образом, ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

**Задача 1.** Точка движется по кривой со скоростью  $V = 0,5t$ . Определить ее координату в момент времени  $t = 10$  с, если при  $t_0 = 0$  координата точки  $S_0 = 0$ .

*Решение*

Учитывая, что  $V = \frac{dS}{dt} = 0,5t$ , получаем:  $dS = 0,5tdt$ . После интегрирования получаем:

$$S = 0,5 \frac{t^2}{2} + C = 0,25t^2 + C.$$

Постоянную константу интегрирования определяем из начальных условий: так как при  $t_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$ , то  $C = 0$ .

Искомая координата  $S$  в момент времени  $t = 10$  с в этом случае будет равна:  $S = 0,25t^2 = 0,25 \cdot 10^2 = 25$  м.

**Задача 2.** Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат:  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ . Определить вид траектории и время  $t$ , когда криволинейная координата  $S$  точки будет равна  $S = 7$  м, если при  $t_0 = 0$   $S_0 = 0$ . Точка движется в положительном направлении координаты  $S$ .

*Решение*

Закон движения точки задан в координатной форме. Для определения вида траектории движения исключим общий параметр  $t$ . Для этого возведем в квадрат правые и левые части уравнений и сложим их между собой. В результате получим:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Данная траектория представляет собой окружность с радиусом, равным 3 м.

Скорость движения точки при координатном способе движения равна:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где  $V_x = \dot{x} = -3 \sin t$ ;  $V_y = \dot{y} = 3 \cos t$ .

Тогда  $V = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = 3$  м/с.

Так как скорость постоянна, то касательное ускорение  $a_t = 0$ , а искомое время  $t$  определяется из уравнения  $S = S_0 + Vt$ . Учитывая начальные условия, имеем  $t = \frac{S}{V} = \frac{7}{3} = 2,33 \text{ с}$ .

**Задача 3.** По окружности движется точка согласно уравнению  $S = 5t - 0,4t^2$ . Определить время  $t$ , когда нормальное ускорение  $a_n = 0$ .

*Решение*

Нормальное ускорение определяется по формуле  $a_n = \frac{V^2}{R}$ . Из данной формулы видно, что нормальное ускорение будет равно нулю, если  $V = 0$ .

Скорость точки равна:

$$V = \frac{dS}{dt} = 5 - 0,8t.$$

Из равенства  $V = 0$  определяем искомое время  $t$ :

$$V = 5 - 0,8t = 0; \quad t = \frac{5}{0,8} = 6,25 \text{ с}.$$

### **Контрольные вопросы**

1. Что изучает кинематика?
2. Дайте определение скорости точки и ускорения точки.
3. Как определяется скорость и ускорение при координатном способе задания движения точки?
4. Какое движение называется вращательным?
5. Как определяется линейная скорость точки при вращательном движении?
6. Какое движение называется плоскопараллельным?
7. Какая связь между скоростями и ускорениями двух точек тела при плоскопараллельном движении?

## Динамика

В динамике рассматривается влияние сил на состояние движения материальных объектов.

Различают два вида задач:

- определение параметров движения по заданным силам;
- определение силы, действующей на тело, по заданным кинематическим параметрам.

**Законы механики.** Рассмотрим законы, на которых базируется динамика твердых тел.

**Первый закон Ньютона (принцип инерции).** Материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета до тех пор, пока действующие на нее силы не изменят это состояние.

Это состояние называют *состоянием инерции*. Всякая материальная система (точка) обладает инертностью. Мерой инертности является масса.

*Массой* называется количество вещества в объеме тела, и она измеряется в килограммах (кг).

**Второй закон Ньютона (основной закон динамики).** Сила  $\vec{F}$ , действующая на тело, равна произведению массы тела  $m$  на сообщаемое этой силой ускорение  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

На любое тело действует сила тяжести  $\vec{G}$ , которая сообщает телу ускорение свободного падения  $\vec{g}$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), направленное к центру Земли:

$$\vec{G} = m\vec{g}.$$

**Третий закон Ньютона (принцип равенства действия и противодействия).** Все тела действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению (сила действия равна силе противодействия):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

**Закон независимости действия сил.** Каждая из сил системы, приложенная к материальной точке, сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщала бы, действуя одна:

$$\vec{F}_\Sigma = \Sigma \vec{F}_i; \quad \vec{a} = \Sigma \vec{a}_i; \quad \vec{F}_\Sigma = m\vec{a}.$$

**Свободная и несвободная точки.** Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется *свободной*, а при наличии ограничения – *несвободной*. Для несвободной материальной точки все внешние силы делятся на активные силы  $\vec{F}$  и реакции связи  $\vec{R}$ .

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать вид:

$$\Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{R}_i = m\vec{a}.$$

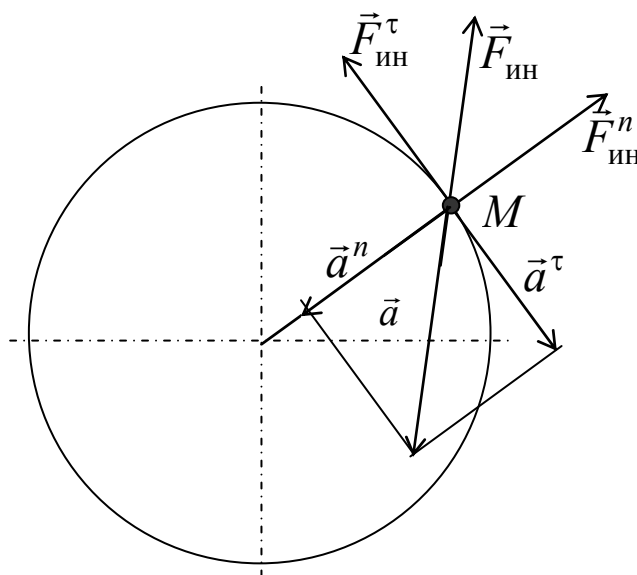


Рис. 27

**Сила инерции.** Сила, численно равная произведению массы  $m$  на приобретенное массой ускорение  $\vec{a}$  и направленная в сторону, противоположную ускорению (рис. 27), называется *силой инерции*  $\vec{F}_{\text{ин}}$ .

Тогда  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$ ;  $\vec{F}_{\text{ин}}^n = -m\vec{a}^n$ ;  $\vec{F}_{\text{ин}}^\tau = -m\vec{a}^\tau$ .

**Принцип Даламбера.** Перепишем векторное уравнение для несвободной точки  $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{R}_i$  в следующем виде:

$$\Sigma F_i + \Sigma R_i - m\vec{a} = 0.$$

Учитывая, что  $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$ , основное уравнение динамики примет вид:

$$\Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{R}_i + \vec{F}_{\text{ин}} = 0.$$

Данное уравнение и отражает принцип Даламбера для материальной точки: *в любой момент времени сумма активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.*

**Дифференциальное уравнение движения точки.** Пусть материальная точка движется под действием переменной силы  $\vec{F}$  по какой-то криволинейной траектории. Проекции этой силы на координатные оси обозначим  $F_x, F_y$  и  $F_z$ . Проектируя векторное уравнение второго закона Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$  на координатные оси, получим:

$$F_x = ma_x; F_y = ma_y; F_z = ma_z.$$

Учитывая, что

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; a_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*. Если на точку действуют несколько сил, то под величинами  $F_x, F_y$  и  $F_z$  понимают проекции равнодействующей сил.

**Работа постоянной силы.** Для характеристики эффективности силового воздействия на тело вводится величина, называемая механической работой. Пусть под действием постоянной силы  $F$  точка  $M$  переместилась из положения  $M_0$  в положение  $M_1$  (рис. 28).

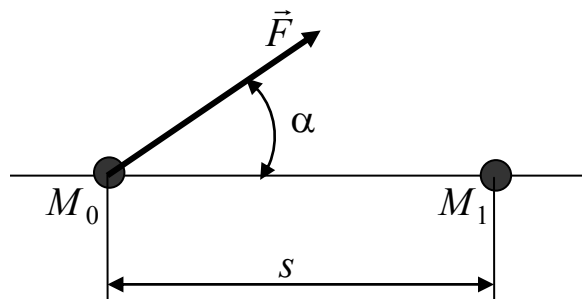


Рис. 28



Работой силы  $\vec{F}$  на перемещении  $s$  называется скалярная величина, определяемая в общем случае следующим выражением:

$$W = Fs \cos \alpha,$$

где  $F$  – модуль силы  $\vec{F}$ ;  $s$  – перемещение;  $\alpha$  – угол между направлением силы  $\vec{F}$  и направлением перемещения.

Если работа силы положительна  $W > 0$ , то сила  $\vec{F}$  называется движущей, а если отрицательна  $W < 0$  – силой сопротивления.

Единица измерения работы 1 Дж (джоуль) = Н · м.

**Работа переменной силы.** В случае движения под действием переменной силы всю траекторию мысленно разбивают на отдельные участки такой малой длины  $ds$ , что действующую на них силу можно считать постоянной. Тогда элементарная работа на перемещении  $ds$  будет равна:

$$dW = Fds.$$

Работа на конечном перемещении

$$W = \int_{s_0}^{s_1} Fds.$$

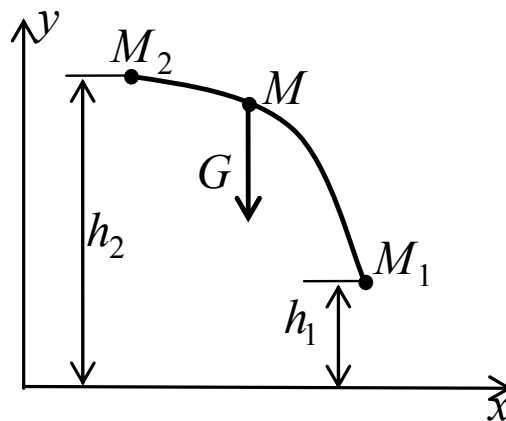


Рис. 29

**Работа силы тяжести.** Работа силы тяжести не зависит от траектории движения тела (рис. 29) и всегда равна произведению силы тяжести  $G$  на разность высот в исходном и конечном положениях:

$$W = G(h_1 - h_2).$$

**Работа силы упругости.** При растяжении пружины силой  $F$  в ней возникает сила упругости

$$F_y = -cx,$$

где  $c$  – жесткость пружины;  $x$  – перемещение (удлинение).

Сила  $F_y$  направлена противоположно перемещению  $x$  свободного конца пружины, а по модулю равна силе  $F$ .

Работа, совершаемая силой упругости пружины при перемещении от  $x_1$  до  $x_2$ , определяется по зависимости

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -cxdx = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

**Мощность.** Скалярная величина, характеризующая быстроту совершения работы, называется *средней мощностью* и определяется по формуле

$$P = \frac{W}{t}.$$

Учитывая, что работа  $W = Fs \cos \beta$ , получаем:

$$P = \frac{Fs \cos \alpha}{t} = FV \cos \alpha.$$

Единица измерения мощности Вт (ватт) =  $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ .

**Работа и мощность при вращательном движении.** При вращении диска (рис. 30) точка приложения силы  $\vec{F}$  вращается по окружности и элементарная работа этой силы  $dW = Fds$ .

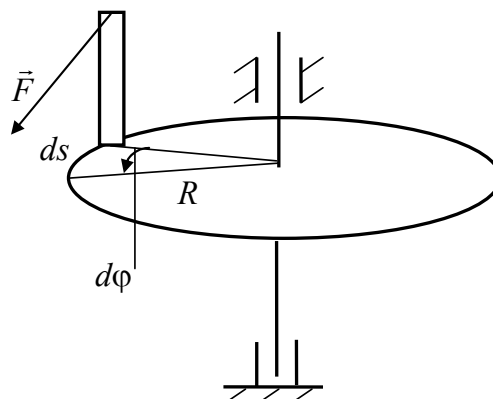


Рис. 30

Так как  $ds = R d\varphi$ , то  $dW = FR d\varphi$ .

Произведение  $FR = M$  называют *вращающим моментом*. Следовательно, при вращении тела элементарная работа равна:

$$dW = M d\varphi.$$

При повороте диска на угол  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  работа будет определяться выражением

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi.$$

Если вращающий момент  $M$  постоянный, то работа определяется выражением

$$W = M\varphi.$$

Следовательно, работа при вращении тела равна произведению вращающего момента  $M$  на угол поворота  $\varphi$ .

Разделив обе части равенства на время действия момента  $t$ , получим:

$$\frac{W}{t} = M \frac{\varphi}{t} \quad \text{или} \quad P = M\omega.$$

Мощность  $P$  при вращении тела равна произведению вращающего момента  $M$  на угловую скорость  $\omega$ .

**Механический коэффициент полезного действия.** Силы сопротивления  $\vec{F}_c$ , которые преодолевает машина, можно разделить на две группы. Сила полезного сопротивления  $\vec{F}_{п.с.}$ , для преодоления которых и создается машина, и сила вредного сопротивления  $\vec{F}_{в.с.}$ , которые дополнительно преодолевает машина в процессе работы. Работа  $W$ , совершаемая машиной:

$$W = W_{п.с.} + W_{в.с.}, \quad \text{откуда} \quad W_{п.с.} = W - W_{в.с.}$$

Разделив обе части равенства на  $W$ , получим:

$$\frac{W_{п.с.}}{W} = 1 - \frac{W_{в.с.}}{W} \quad \text{или} \quad \eta = 1 - \varphi,$$

где  $\eta$  – механический коэффициент полезного действия;  $\varphi$  – коэффициент потерь.

Таким образом, *механическим коэффициентом полезного действия*  $\eta$  называется отношение работы сил полезного сопротивления к совершенной работе.

**Импульс силы.** Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится в течение некоторого промежутка времени. Векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия  $\vec{F}dt$ , называется элементарным импульсом силы  $d\vec{S}$ . Импульс силы за конечный промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  получим, просуммировав элементарные импульсы:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \text{ или } \vec{S} = \vec{F}\Delta t, \text{ если } \vec{F} = \text{const.}$$

Проекции вектора  $\vec{S}$  на координатные оси имеют вид:

$$S_x = F_x \Delta t; \quad S_y = F_y \Delta t; \quad S_z = F_z \Delta t.$$

**Количество движения.** Векторная мера механического движения точки, равная произведению массы  $m$  на ее скорость  $\vec{V}$  в данный момент времени, называется *количеством движения*  $\vec{Q}$ :

$$\vec{Q} = m\vec{V}.$$

Проекции вектора  $\vec{Q}$  на координатные оси имеют вид:

$$Q_x = mV_x = m \frac{dx}{dt}; \quad Q_y = mV_y = m \frac{dy}{dt}; \quad Q_z = mV_z = m \frac{dz}{dt}.$$

**Кинетическая энергия.** Скалярная мера механического движения точки, равная половине произведения массы  $m$  на квадрат ее скорости  $V$ , называется *кинетической энергией*  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} mV^2.$$

**Теорема об изменении количества движения точки.** Пусть на точку массой  $m$  действует система постоянных сил, равнодействующая которых  $\vec{R}$ . Учитывая время действия сил, умножим обе части уравнения основного закона динамики на продолжительность их действия  $\Delta t$ :

$$\vec{R}\Delta t = m\vec{a}\Delta t.$$

Учитывая, что

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t},$$

получим:

$$\vec{R}\Delta t = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1.$$

Следовательно, изменение количества движения точки равно импульсу всех сил.

Спроектировав векторное уравнение на оси координат, получим систему трех скалярных уравнений:

$$R_x \Delta t = mV_{2x} - mV_{1x};$$

$$R_y \Delta t = mV_{2y} - mV_{1y};$$

$$R_z \Delta t = mV_{2z} - mV_{1z}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Пусть на точку массой  $m$  действует система постоянных сил, равнодействующая которых  $\vec{R}$ . Тогда основному закону динамики в векторной форме эквивалентно равенство

$$\vec{R} = m\vec{a}.$$

Умножим обе части равенства на перемещение точки  $\Delta S$ :

$$\vec{R}\Delta S = m\vec{a}\Delta S.$$

Так как при действии постоянных сил на прямолинейном пути:

$$a = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t}; \Delta S = V_{\text{cp}} \Delta t = \frac{V_2 + V_1}{2} \Delta t,$$

получаем:

$$R\Delta S = m \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} \frac{V_2 + V_1}{2} \Delta t = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = T_2 - T_1.$$

Отсюда с учетом того, что  $R \cdot \Delta S = W_{\Sigma} = \Sigma W$ , получаем:

$$T_2 - T_1 = \Sigma W.$$

Изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.

**Понятие о механической системе.** Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется *механической системой*. Силы, действующие на точки системы со стороны точек, не входящих в эту систему, называются *внешними* и обозначаются  $\vec{F}_e$ , а силы, действующие со стороны точек этой же системы, называются *внутренними* и обозначаются  $\vec{F}_i$ .

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, но также от суммарной массы системы  $m$  и от положения центра масс системы.

Движение центра масс определяется уравнением

$$\vec{F}_{e\Sigma} = m\vec{a}_c,$$

где  $\vec{F}_{e\Sigma}$  – результирующая всех внешних сил, приложенных к системе;  $m$  – масса системы;  $\vec{a}_c$  – ускорение центра масс системы.

Это уравнение аналогично основному уравнению динамики точки. Смысл его состоит в том, что центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложены все внешние силы.

**Основное уравнение динамики вращающегося тела.** Пусть твердое тело (рис. 31) под действием внешних сил  $\vec{F}_{ek}$  вращается вокруг оси  $Oz$  с угловым ускорением  $\varepsilon$ . Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно оси  $Oz$   $M_{ez} = \Sigma M_z(F_{ek})$  называется *вращающим моментом*.

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем его на множество материальных точек с массами  $\Delta m_k$ . При вращении тела каждая из этих точек движется по окружности радиуса  $\rho_k$  с ускорением  $\vec{a}_k$ . Разложим его на нормальное  $\vec{a}_k^n$  и тангенциальное  $\vec{a}_k^\tau$ . Приложим к каждой точке элементарные силы инерции: касательную  $\Delta F_{ин.к}^\tau$  и нормальную  $\Delta F_{ин.к}^n$ .

Согласно принципу Даламбера активные силы, силы реакций связи и силы инерции образуют уравновешенную систему. Поэтому алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно оси  $OZ$  должна быть равна нулю, т. е.

$$M_{ez} - \Sigma \Delta F_{ин.к}^\tau \rho_k = 0.$$

Учитывая, что  $\Delta F_{\text{ин.к}}^\tau = \Delta m \varepsilon \rho_{\text{к}}$ , получим:

$$M_{ez} = \varepsilon \Sigma \Delta m_{\text{к}} \rho_{\text{к}}^2.$$

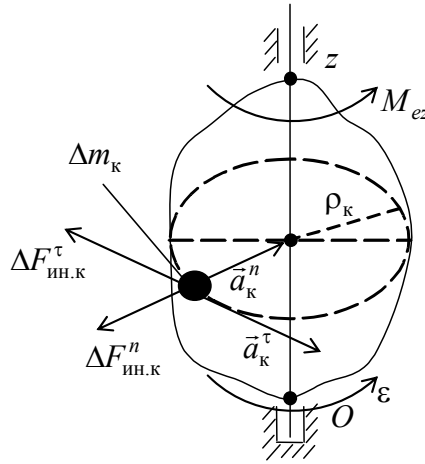


Рис. 31

Величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от оси вращения  $\Sigma \Delta m_{\text{к}} \rho_{\text{к}}^2$ , называется *моментом инерции тела* относительно этой оси и обозначается  $I_z$ .

Тогда основное уравнение динамики вращательного тела будет:

$$I_z \varepsilon = M_{ez}.$$

**Моменты инерции тел.** Выражению  $I_z = \Sigma \Delta m_{\text{к}} \rho_{\text{к}}^2$  можно придать интегральную форму:

$$I_z = \int_V dm_{\text{к}} \rho_{\text{к}}^2.$$

Рассмотрим пример определения момента инерции тела. Пусть стержень (рис. 32) вращается вокруг оси  $Oz$ .

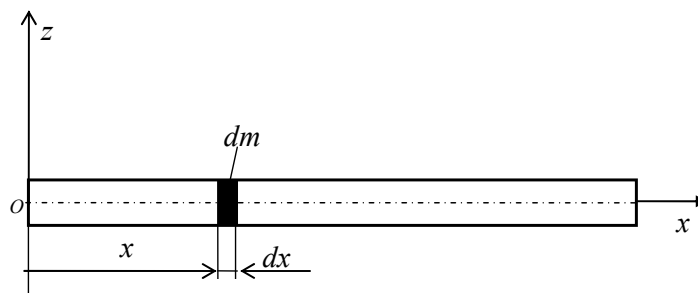


Рис. 32

В этом случае будем иметь:

$$I_z = \int_V x^2 dm = \int_0^l x^2 q dx = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{3}.$$

Аналогичным образом определяются моменты инерции других тел.

**Кинетическая энергия тела. Кинетический момент.** Кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетических энергий его отдельных точек.

При поступательном движении тела скорости всех его точек по модулю и направлению равны между собой. Поэтому кинетическая энергия тела при поступательном движении равна:

$$T_n = \frac{mV_c^2}{2},$$

где  $m$  – масса тела;  $V_c$  – скорость центра масс.

При вращательном движении тела с угловой скоростью  $\omega$  все его точки движутся по окружностям различных радиусов  $\rho_k$  и имеют по модулю скорости  $V_k = \omega \rho_k$ . Тогда кинетическая энергия тела будет равна:

$$T_{вр} = \sum \frac{\Delta m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_k \omega^2 \rho_k^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_k \rho_k^2 = I_z \frac{\omega^2}{2}.$$

При плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс  $V_c$  и кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

$$T = T_n + T_{вр} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Величина  $I_z \omega$  называется кинетическим *моментом вращающегося тела*.

**Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.** Изменение кинетической энергии системы на некотором перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении:

$$T - T_0 = \sum W_F^e + \sum W_F^i,$$



где  $T, T_0$  – кинетическая энергия механической системы в конечном и начальном положении;  $\Sigma W_F^e$  – сумма работ внешних сил на данном перемещении;  $\Sigma W_F^i$  – сумма работ внутренних сил на данном перемещении.

В неизменяемой механической системе сумма работ внутренних сил на любом перемещении равна нулю.

**Задача 1.** Точка массой  $m = 14$  кг движется по горизонтальной оси  $Ox$  с ускорением  $a_x = \ln t$ . Определить модуль силы, действующей на точку в направлении движения в момент времени  $t = 5$  с.

*Решение*

Дифференциальное уравнение движения точки будет:  $ma_x = F_x$ . Подставляя значение ускорения, определяем модуль действующей на точку силы в момент времени  $t = 5$  с:

$$F_x = m \ln t = 14 \cdot \ln 5 = 22,5 \text{ Н.}$$

**Задача 2.** Материальная точка массой 1,4 кг движется прямолинейно по закону  $x = 6t^2 + 6t + 3$ . Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.

*Решение*

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:  $ma_x = F_{x\Sigma}$ . Дважды дифференцируя уравнение движения точки, найдем ее ускорение:  $\frac{dx}{dt} = 12t + 6$ ;  $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = 12 \text{ м/с}^2$ . Искомый модуль равнодействующих сил  $F_{x\Sigma} = ma_x = 1,4 \cdot 12 = 16,8 \text{ Н}$ .

**Задача 3.** Ненагруженную пружину, коэффициент жесткости которой  $c = 100 \text{ Н/м}$ , растянули на 0,02 м. Определить работу силы упругости пружины.

*Решение*

Работа, совершаемая силой упругости пружины при перемещении от  $x_1$  до  $x_2$ , определяется по зависимости:  $W = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2)$ . Учитывая, что  $x_1 = 0$ , получаем:

$$W = -\frac{100}{2} 0,02^2 = 0,02 \text{ Дж.}$$

**Задача 4.** На тело (рис. 33) действует постоянная по направлению сила  $F = 4x^3$ . Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой  $x = 0$  в положение с координатой  $x = 1$  м.

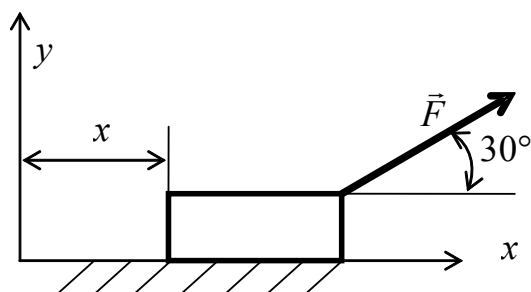


Рис. 33

*Решение*

Так как сила зависит от перемещения и наклонена к траектории движения под углом  $30^\circ$ , то работа силы будет равна:

$$W = \int_0^1 F \cos 30^\circ \cdot dx = \int_0^1 4x^3 \cos 30^\circ \cdot dx = x^4 \cos 30^\circ \Big|_0^1 = 0,866 \text{ Дж.}$$

**Задача 5.** Груз массой  $m = 0,4$  кг (рис. 34) подвешен на нити длиной  $l = 1$  м. Какую работу совершает сила тяжести груза при перемещении его в вертикальной плоскости из положения 2 в положение 1?

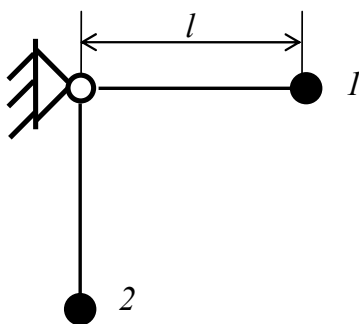


Рис. 34

*Решение*

Работа силы тяжести равна:  $W = G(h_1 - h_2)$ . Учитывая, что для рассматриваемого случая  $h_1 = 0$ ;  $h_2 = l$ ;  $G = mg$ , получаем:

$$W = -Gh_2 = -mgl = -0,4 \cdot 9,81 \cdot 1 = -3,92 \text{ Дж.}$$

**Задача 6.** На точку кривошипа (рис. 35), который вращается вокруг горизонтальной оси  $O$ , действует в вертикальной плоскости сила  $F = 100$  Н. Определить мощность силы  $\vec{F}$ , если скорость  $\vec{V}_A$  точки  $A$  равна 4 м/с.

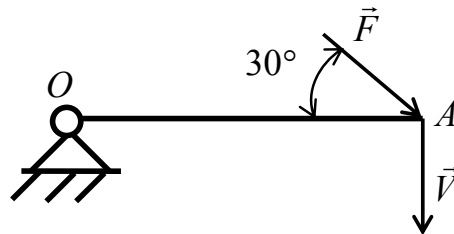


Рис. 35

*Решение*

Учитывая, что мощность силы определяется по зависимости  $P = FV \cos \alpha$ , получаем:

$$P = 100 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 200 \text{ Вт.}$$

**Задача 7.** Материальная точка массой 0,5 кг движется по прямой. Определить модуль импульса равнодействующих всех сил, действующих на точку за первые 2 с, если она движется по закону  $S = 4t^3$ .

*Решение*

На основании теоремы об изменении количества движения точки имеем:

$$mV_2 - mV_1 = R\Delta t,$$

откуда  $R = \frac{mV_2 - mV_1}{\Delta t}$ . В соответствии с законом движения

$V = \frac{dS}{dt} = 12t^2$ . В этом случае:  $V_1 = 0$ ;  $V_2 = 12 \cdot 2^2 = 48$  м/с. Окончательно получаем:

$$R = \frac{mV_2 - mV_1}{\Delta t} = \frac{0,5 \cdot 48 - 0,5 \cdot 0}{2} = 12 \text{ Н.}$$

**Задача 8.** На материальную точку массой 2 кг действует сила постоянного направления, значение которой изменяется по закону  $F = 6t^2$ . Определить скорость этой точки в момент времени  $t = 2$  с, если начальная скорость точки  $V_0 = 2$  м/с.

### Решение

На основании теоремы об изменении количества движения точки имеем:

$$mV - mV_0 = \int_0^2 F dt = \int_0^2 6t^2 dt = 2t^3 \Big|_0^2 = 16,$$

откуда  $V = \frac{16}{m} + V_0 = \frac{16}{2} + 2 = 10 \text{ м/с}$ .

**Задача 9.** Материальная точка массой  $m = 0,5 \text{ кг}$  брошена с поверхности земли (рис. 36) с начальной скоростью  $V_0 = 20 \text{ м/с}$  в положении  $M$  имеет скорость  $V = 12 \text{ м/с}$ . Определить работу силы тяжести при перемещении точки из положения  $M_0$  в положение  $M$ .

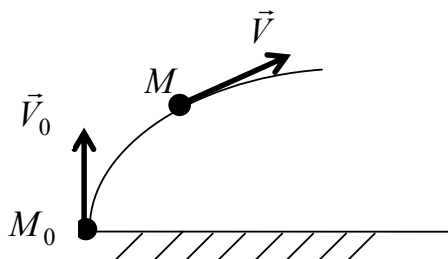


Рис. 36

### Решение

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки работа силы тяжести будет равна:

$$W_G = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 12^2}{2} - \frac{0,5 \cdot 20^2}{2} = -64 \text{ Дж.}$$

## Контрольные вопросы

1. Перечислите основные законы динамики.
2. Что собой представляет сила инерции?
3. В чем заключается принцип Даламбера?
4. Как записывается дифференциальное уравнение движения точки?
5. Как определяется работа постоянной и переменной силы?
6. Что характеризует мощность?
7. Как определяются работа и мощность при вращательном движении?

8. Что собой представляют импульс силы, количество движения и кинетическая энергия точки?
9. Как записывается основное уравнение динамики вращающегося тела?
10. Что собой представляет момент инерции тела?
11. Как определяется кинетическая энергия механической системы?

## Механика материалов

**Основные понятия механики материалов.** В механике материалов рассматриваются теоретико-экспериментальные основы и методы расчета наиболее распространенных элементов конструкций и машин на прочность, жесткость, устойчивость и выносливость.

*Прочность* – способность не разрушаться под действием нагрузки.

*Жесткость* – способность незначительно деформироваться под нагрузкой.

*Устойчивость* – способность сохранять первоначальную форму упругого равновесия.

*Выносливость* – способность длительное время выдерживать переменные нагрузки.

Гипотезы о деформируемом теле. При выполнении расчетов в механике материалов принимают следующие допущения:

1) материал однороден, т. е. в любой точке он имеет одинаковые физико-механические свойства;

2) материал представляет сплошную среду, т. е. не учитываются дефекты и его кристаллическое строение;

3) материал изотропен, т. е. его механические свойства не зависят от направления нагружения;

4) материал обладает идеальной упругостью, т. е. полностью восстанавливает форму и размеры после снятия нагрузки;

5) деформация материала в каждой точке пропорциональна напряжению в данной точке;

6) деформации конструкций настолько малы, что не влияют на взаимное положение нагрузок;

7) результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки;

8) поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузок.

Компенсация этих допущений осуществляется за счет введения коэффициента запаса прочности.

**Классификация сил.** Нагрузки, действующие на элементы конструкции или машины, подразделяются на:

1) статические нагрузки, которые не изменяются во времени или изменяются очень медленно;

2) повторно-переменные нагрузки, которые многократно меняют свое значение по модулю или по модулю и направлению;

3) динамические нагрузки, которые изменяются по модулю в короткий промежуток времени.

**Формы элементов конструкции.** Все многообразие форм конструкций и деталей машин сводится к трем видам.

*Брус* (рис. 37) – любое тело, у которого длина значительно больше других размеров.

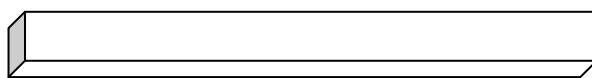


Рис. 37

*Пластина* (рис. 38) – любое тело, у которого толщина намного меньше двух других размеров.



Рис. 38

*Массивное тело* – тело, у которого три размера одного порядка.

**Перемещения и деформации.** Все тела под действием нагрузки деформируются. В результате деформации возникают перемещения.

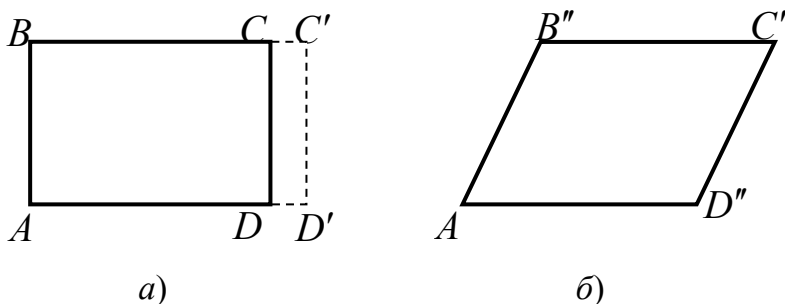


Рис. 39

В механике материалов рассматриваются только упругие деформации, которые подразделяются на два вида: линейные и угловые. В первом случае происходит уменьшение или увеличение длины отрезка (рис. 39, а), во втором случае наблюдается искажение прямого угла (рис. 39, б).

При растяжении бруса длиной  $l$  его длина увеличивается на величину  $\Delta l$ , а его диаметр  $d$  уменьшается на величину  $\Delta d$  (рис. 40).

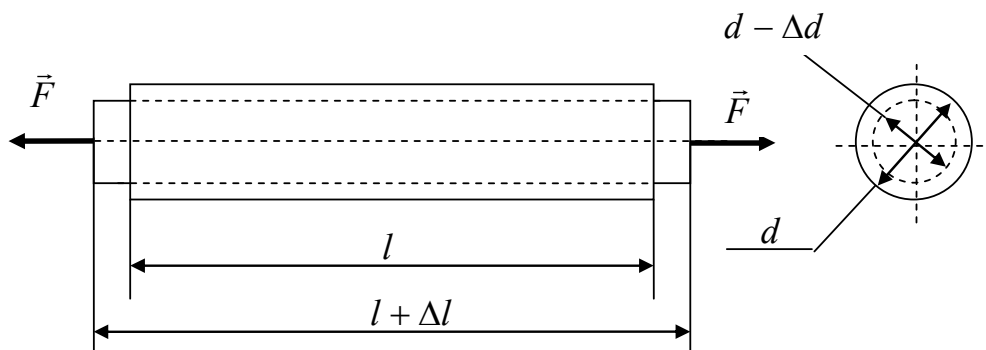


Рис. 40

Величина  $\Delta l$  называется *абсолютной продольной деформацией*, а  $\Delta d$  – *абсолютной поперечной деформацией*. О степени деформирования бруса нельзя судить по значениям  $\Delta l$  и  $\Delta d$ , так как они зависят не только от действующих сил, но и от начальных размеров бруса.

Для характеристики деформации бруса вводятся понятия *относительная продольная деформация*  $\varepsilon$  и *относительная поперечная деформация*  $\varepsilon'$ , которые рассчитываются по зависимостям:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

Отношение относительной продольной деформации  $\varepsilon$  к относительной поперечной деформации  $\varepsilon'$  называется *коэффициентом Пуассона*, который равен:

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

**Метод сечений.** Если к твердому телу (рис. 41, а) приложить внешние силы, то оно будет деформироваться. При этом изменяются расстояния между частицами тела, что, в свою очередь, приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия.

Для определения внутренних усилий используют метод сечения. Для этого тело мысленно рассекают плоскостью и рассматривают равновесие одной из его частей (рис. 41, б). Метод сечений позволяет выявить внутренние силовые факторы, но для оценки прочности необходимо знать внутренние силы в любой точке сечения. С этой целью введем числовую меру интенсивности внутренних сил – напряжение.



**Понятие о напряжениях.** Выделим в сечении площадку размером  $\Delta A$  (рис. 41, б). Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадку равна  $\Delta \vec{R}$ , модуль которой зависит от размера выделенной площадки. Равнодействующую  $\Delta \vec{R}$  разложим на две составляющие:  $\Delta \vec{N}$  – направленную по нормали к площадке и  $\Delta \vec{T}$  – действующую по площадке.

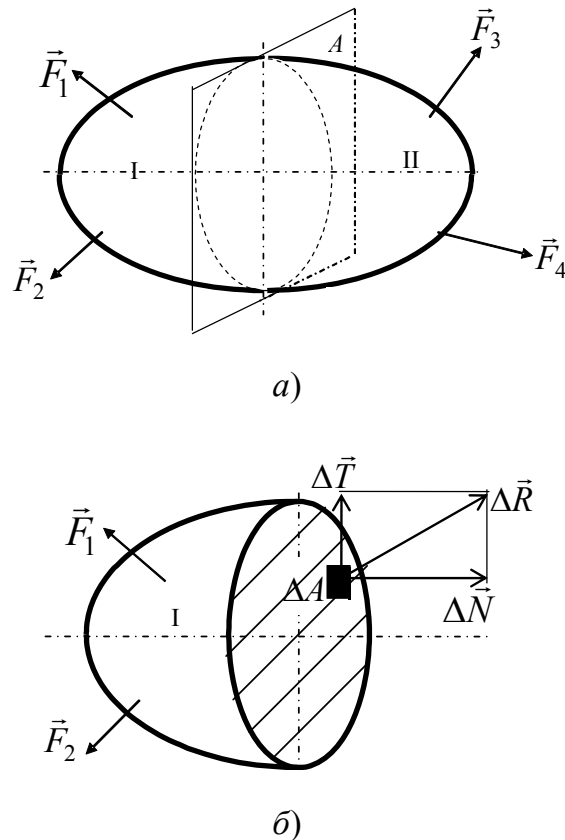


Рис. 41

Отношение  $\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = \vec{p}_{\text{ср}}$  называется *средним напряжением по площадке*  $\Delta A$ . Вектор среднего напряжения совпадает по направлению с вектором равнодействующей  $\Delta \vec{R}$ .

При уменьшении площадки  $\Delta A$  изменяются как модуль, так и направление равнодействующей  $\Delta \vec{R}$ , а вектор  $\vec{p}_{\text{ср}}$  приближается к истинному значению напряжения  $\vec{p}$  в заданной точке.

Числовое значение истинного напряжения выражается равенством

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Отношение  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma$  называется *нормальным напряжением*,  
а отношение  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \tau$  называется *касательным напряжением*.

Зависимость между напряжениями  $p$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  имеет вид:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что означают прочность, жесткость, устойчивость и выносливость?
2. Какие допущения принимаются при выполнении расчетов в механике материалов?
3. По каким признакам и как классифицируют нагрузку?
4. Какое тело называется бруском, пластиной и массивным телом?
5. Какие виды упругой деформации бывают?
6. В чем сущность метода сечений?
7. Что называется напряжением?
8. Как по отношению к площадке направлены нормальное и касательное напряжения?

## Теория напряженного состояния

**Напряженное состояние в точке.** Вырежем из напряженного тела в окрестности исследуемой точки произвольно бесконечно малый параллелепипед (рис. 42). На гранях параллелепипеда будут действовать нормальные и касательные напряжения. Направление нормальных напряжений совпадает с направлением внешней нормали. Касательные напряжения разложим на составляющие, параллельные осям.

*Напряженным состоянием тела в точке* называют совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, содержащим данную точку.

Обозначения нормальных напряжений содержат один индекс – наименование оси, которой параллельно данное напряжение. В обозначении касательных напряжений используются два индекса: первый совпадает с индексом нормального напряжения, действующего по данной площадке, а второй – наименование оси, которой параллельно данное касательное напряжение.

Нормальное напряжение  $\sigma$  считается положительным, если оно направлено от площадки. Касательное напряжение  $\tau$  считается положительным, если изображающий его вектор стремится вращать параллелепипед по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей внутри параллелепипеда. Отрицательными считаются напряжения обратных направлений.

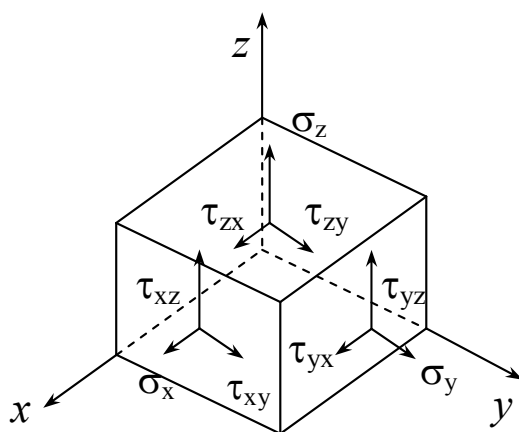


Рис. 42

**Закон парности касательных напряжений.** Закон парности касательных напряжений устанавливает зависимость между величинами и направлениями пар касательных напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам элементарного параллелепипеда.

Рассмотрим элементарный параллелепипед размеров  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 43).

Запишем уравнение равновесия параллелепипеда в виде суммы моментов относительно оси  $x$ , получим:

$$-\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dz dy = 0,$$

откуда получаем:

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz}.$$

Аналогично можно получить:  $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ ;  $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$ .

Данные выражения и представляют закон парности касательных напряжений.

Касательные напряжения по двум взаимно-перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.

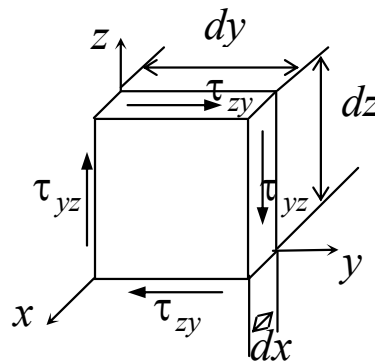


Рис. 43

Главные площадки и главные напряжения. Рассмотрим две взаимно-перпендикулярные площадки с касательными напряжениями  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ . Согласно закону парности касательных напряжений знаки  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  противоположны. Поэтому если площадку с напряжением  $\tau_{xy}$  поворачивать до совпадения с площадкой с напряжением  $\tau_{yx}$ , то обязательно найдется такое положение площадки, когда  $\tau = 0$ .

Площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, называются *главными*, а действующие по этим площадкам нормальные напряжения – *главными напряжениями*.

Главные напряжения обозначаются  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причем  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Элемент, выделенный главными площадками, изображен на рис. 44.

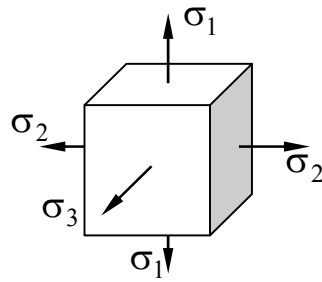


Рис. 44

**Виды напряженного состояния тела.** В зависимости от количества действующих главных напряжений различают три вида напряженных состояний: линейное, плоское и объемное.

**Линейное напряженное состояние.** *Линейным*, или *одноосным*, называется напряженное состояние, при котором два из трех главных напряжений равны нулю (рис. 45, а).

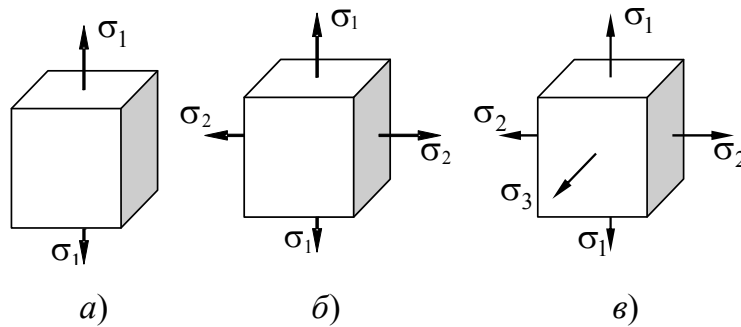


Рис. 45

Определим напряжения, возникающие при линейном напряженном состоянии в наклонном сечении  $AB$  (рис. 46), нормаль к которому повернута на угол  $\alpha$  к направлению  $\sigma_1$ .

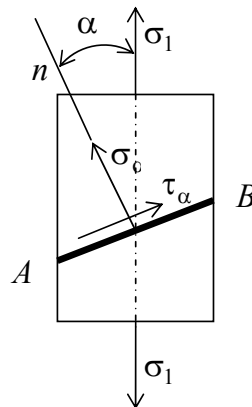


Рис. 46

За положительное направление отсчетов угла  $\alpha$  примем направление против часовой стрелки.

В общем случае в наклонном сечении будут действовать как нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$ , так и касательные напряжения  $\tau_\alpha$ , значения которых определяют из условия равновесия нижней части бруса.

Проектируя все силы на направления  $\sigma_\alpha$ , имеем:

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0,$$

учитывая, что  $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$ , получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha.$$

Из суммы проекций сил на направления  $\tau_\alpha$  получаем:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

**Плоское напряженное состояние.** *Плоским*, или *двухосным*, называется напряженное состояние, при котором одно из трех главных напряжений равно нулю (рис. 45, б).

Для плоского напряженного состояния различают две задачи – прямую и обратную.

В прямой задаче гранями рассматриваемого элемента являются главные площадки (рис. 47, а). Известны  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ ,  $\sigma_3 = 0$  и требуется определить напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  и  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\beta$  на произвольных площадках. В обратной задаче известны напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{xy}$  и требуется определить положение главных площадок и величины главных напряжений.

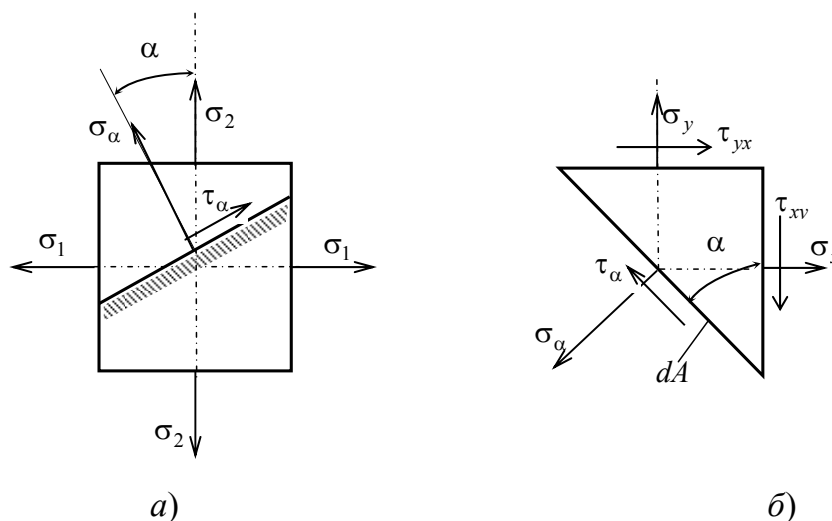


Рис. 47

**Прямая задача.** Для решения этой задачи воспользуемся принципом независимости действия сил. Представим плоское напряженное состояние в виде суммы двух независимых линейных напряженных состояний: первое – при действии только напряжений  $\sigma_1$ , второе – при действии только напряжений  $\sigma_2$ . От каждого из напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в произвольной площадке равны:

$$\sigma_{\alpha 1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\alpha 2} = \sigma_2 \cos^2 \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha 1} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha, \quad \tau_{\alpha 2} = \frac{\sigma_2}{2} \sin \left( 2\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Таким образом, суммируя напряжения, возникшие при каждом линейном напряженном состоянии, получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Определим напряжения, действующие на площадку с углом наклона  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ , т. е. перпендикулярную к площадке  $\alpha$ :

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Суммируя нормальные напряжения, действующие по произвольным взаимно-перпендикулярным площадкам, получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const.}$$

Сравнивая величины касательных напряжений, имеем  $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ .

**Обратная задача.** Определим сначала напряжения на наклонной площадке, наклоненной к исходной, при заданных напряжениях на двух взаимно произвольных перпендикулярных площадках  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{xy}$  (рис. 47, б).

Разрежем параллелепипед плоскостью, наклоненной под углом  $\alpha$  к вертикальной грани, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие правой части.

Если обозначить через  $dA$  площадь наклонной грани, то площади вертикальной и горизонтальной граней будут, соответственно, равны  $dA \cos \alpha$  и  $dA \sin \alpha$ .

Спроектируем силы на направления  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ :

$$\sigma_\alpha dA - \tau_{yx} dA \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y dA \sin \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} dA \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_x dA \cos \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha dA - \tau_{yx} dA \sin \alpha \sin \alpha + \sigma_y dA \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} dA \cos \alpha \cos \alpha - \sigma_x dA \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Сокращая на  $dA$  и учитывая, что  $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ , получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Для отыскания экстремального значения нормального напряжения продифференцируем  $\sigma_\alpha$  по  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= -2\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = -2\tau_\alpha. \end{aligned}$$

Экстремум напряжения  $\sigma_\alpha$  достигается при тех углах  $\alpha$ , при которых  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha = 0$ . Отсюда следует, что нормальные напряжения достигают экстремума на тех площадках, где касательные ускорения обращаются в нуль. Эти площадки называются *главными*, а напряжения, возникающие на них, – *главными напряжениями*.

Предполагая, что главные площадки наклонены к исходным площадкам на угол  $\alpha_0$ , получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Полученному равенству удовлетворяют два значения угла  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ . Таким образом, данная формула определяет две взаимно-перпендикулярные площадки, на которых нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Учитывая, что сумма нормальных напряжений по двум взаимно-перпендикулярным площадкам постоянна, то на одной площадке будет действовать максимальное нормальное напряжение, а по другой – минимальное.



Модули главных напряжений определяют по зависимости:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Для определения площадок, по которым действуют максимальные касательные напряжения, приравняем нулю производную  $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}$ :

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha_1} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha_1 = 0,$$

откуда  $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$ .

Площадки, по которым действуют максимальные касательные напряжения, называются *площадками сдвига*. Нетрудно заметить, что они наклонены к главным площадкам под углом  $45^\circ$ .

**Объемное напряженное состояние.** *Объемным*, или *трехосным*, называется напряженное состояние, при котором все три главных напряжения отличны от нуля (рис. 45, в). Для объемного напряженного состояния справедливо равенство

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const.}$$

**Обобщенный закон Гука.** Обобщенный закон Гука представляет собой связь между напряжениями и деформациями в случае объемного. Он может быть получен на основании закона Гука для линейного напряженного состояния и принципа независимости действия сил.

Представляя объемное напряженное состояние в виде суммы трех линейных напряженных состояний и учитывая, что при линейном напряженном состоянии  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  и  $\varepsilon' = \mu\varepsilon = \mu \frac{\sigma}{E}$ , выражения для деформации в направлении действия главных напряжений будут иметь вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Эти выражения носят название *обобщенного закона Гука*, записанного для главных площадок.

Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  в направлении главных напряжений называются *главными деформациями*.

**Объемная деформация.** Под действием внешней нагрузки тело деформируется, происходит изменение его объема, а также накопление потенциальной энергии.

Элементарный параллелепипед с ребрами  $dl_1, dl_2, dl_3$ , грани которого совпадают с главными площадками, в окрестности некоторой точки до деформации имеет объем:  $dV = dl_1 dl_2 dl_3$ .

При объемном напряженном состоянии после деформации длины ребер параллелепипеда изменяются и становятся равными:

$$dl_1(1 + \varepsilon_1), dl_2(1 + \varepsilon_2), dl_3(1 + \varepsilon_3),$$

а его объем будет:

$$dV + \Delta(dV) = dl_1(1 + \varepsilon_1)dl_2(1 + \varepsilon_2)dl_3(1 + \varepsilon_3),$$

где  $\Delta(dV)$  – приращение объема элементарного параллелепипеда.

Раскрывая скобки и пренебрегая произведением величин  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , так как они малы, получим:

$$\Delta(dV) = dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема  $\theta$ :

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Подставляя значения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , после преобразования получаем:

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \text{ или } \theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

**Потенциальная энергия деформации.** На основании закона сохранения энергии потенциальная энергия деформации элементарного параллелепипеда равна работе внешних сил, приложенных к его граням. Под действием внешних сил его ребра удлиняются на следующие значения:  $\Delta(dl_1)\varepsilon_1$ ,  $\Delta(dl_2)\varepsilon_2$  и  $\Delta(dl_3)\varepsilon_3$ .

В этом случае работа  $dW$  и равная ей потенциальная энергия  $dU$ :

$$dW = dU = \frac{\sigma_1 dl_2 dl_3 \Delta(dl_1)}{2} + \frac{\sigma_2 dl_3 dl_1 \Delta(dl_2)}{2} + \frac{\sigma_3 dl_1 dl_2 \Delta(dl_3)}{2}.$$

После подстановки значений и преобразования получим полную потенциальную энергию деформации  $u$ , приходящуюся на единицу объема тела:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)].$$

Напряженное состояние элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности некоторой точки, можно разбить на два напряженных состояния.

Будем считать, что в первом случае изменяется объем параллелепипеда, а форма остается неизменной. Накопленная в этом случае потенциальная энергия называется *потенциальной энергией изменения объема*.

Во втором случае объем не изменяется, а изменяется его форма. Потенциальная энергия, накопленная в этом случае, называется *потенциальной энергией изменения формы*.

В этом случае полная удельная потенциальная энергия

$$u = u_{об} + u_{ф}.$$

Сохранение формы параллелепипеда возможно только в том случае, если по его граням будут действовать одинаковые напряжения. Если их обозначить через  $\sigma_0$ , то нетрудно показать, что они будут равны:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае удельная потенциальная энергия изменения объема определяется выражением

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Изменение формы параллелепипеда происходит в результате действия на его грани напряжений:  $\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_0$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_0$  и  $\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_0$ . В этом случае удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_{ф} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3).$$

**Виды деформационных состояний.** В результате приведения внутренних сил к центру тяжести сечения в общем случае получаем шесть внутренних силовых факторов: продольную силу  $\vec{N}$ , поперечные силы  $\vec{Q}_x$  и  $\vec{Q}_z$ , крутящий момент  $T$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_z$  (рис. 48).

Модули нормальных и касательных напряжений связаны с внутренними силовыми факторами следующими соотношениями:

$$N = \int_A \sigma dA; Q_x = \int_A \tau_{yx} dA; Q_z = \int_A \tau_{yz} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma z dA; M_z = \int_A \sigma x dA; T = \int_A (\tau_{yx} z - \tau_{yz} x) dA.$$

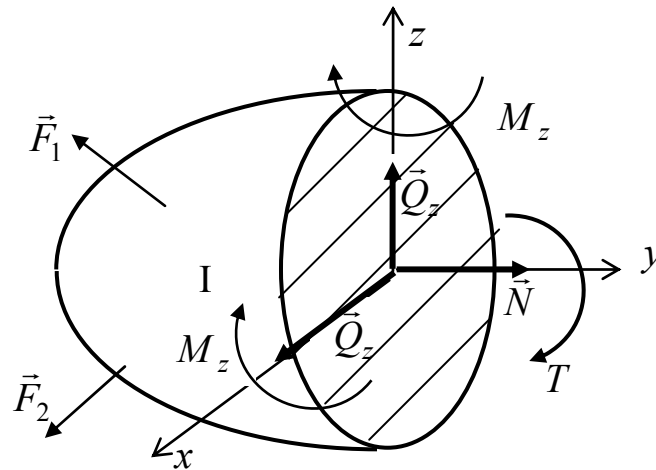


Рис. 48

В зависимости от действующих внутренних силовых факторов различают следующие основные виды нагружения бруса.

*Растяжение–сжатие* – когда в поперечном сечении действует только продольная сила  $\vec{N}$ .

*Чистый сдвиг* – когда в поперечном сечении действует только поперечная сила  $\vec{Q}_x$  или  $\vec{Q}_z$ .

*Кручение* – когда в поперечном сечении действует только крутящий момент  $T$ .

*Прямой чистый изгиб* – когда в поперечном сечении действует только изгибающий момент  $M_x$  или  $M_z$ .

*Прямой поперечный изгиб* – когда в поперечном сечении действуют только поперечная сила  $\vec{Q}_x$  и изгибающий момент  $M_x$  или  $\vec{Q}_z$  и  $M_z$ .

## Контрольные вопросы

1. Какие виды напряженных состояний бывают?
2. Каково правило знаков для нормального и касательного напряжений?
3. Что представляет собой закон парности касательных напряжений?
4. Что понимают под главным напряжением и главной площадкой?
5. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
6. Что собой представляют площадки сдвига и как они наклонены к главным площадкам?
7. Какими зависимостями выражается обобщенный закон Гука?
8. Из каких частей состоит полная удельная потенциальная энергия деформации?
9. Как различаются виды нагружения бруса в зависимости от действующих внутренних силовых факторов?

## Геометрические характеристики плоских сечений

**Площадь.** Простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения является площадь  $A$ .

Любое сечение (рис. 49) можно представить в виде суммы бесчисленного множества элементарных площадок  $dA$ , в этом случае площадь сечения  $A = \int_A dA$ .

**Статические моменты сечения.** Пусть положение элементарной площадки  $dA$  определяется координатами  $x$  и  $y$ . *Статическим моментом сечения  $S$*  называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояние до оси.

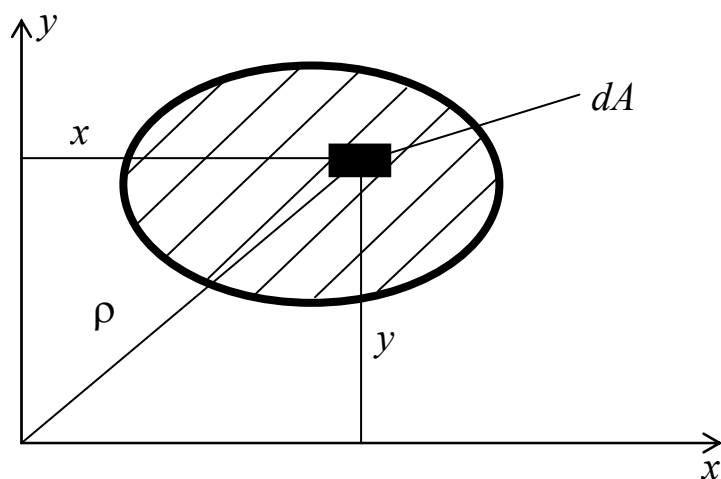


Рис. 49

Статические моменты сечения относительно осей  $x$  и  $y$  будут, соответственно, равны:

$$S_x = \int_A dAy; \quad S_y = \int_A dAx.$$

Статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов составляющих частей этого сечения относительно данной оси.

Проведем оси  $x'$  и  $y'$  (рис. 50), параллельные, соответственно, осям  $x$  и  $y$ . Выражения статических моментов относительно этих осей будут:

$$S_x = \int_A dAy; \quad S_{x'} = \int_A dAy'.$$

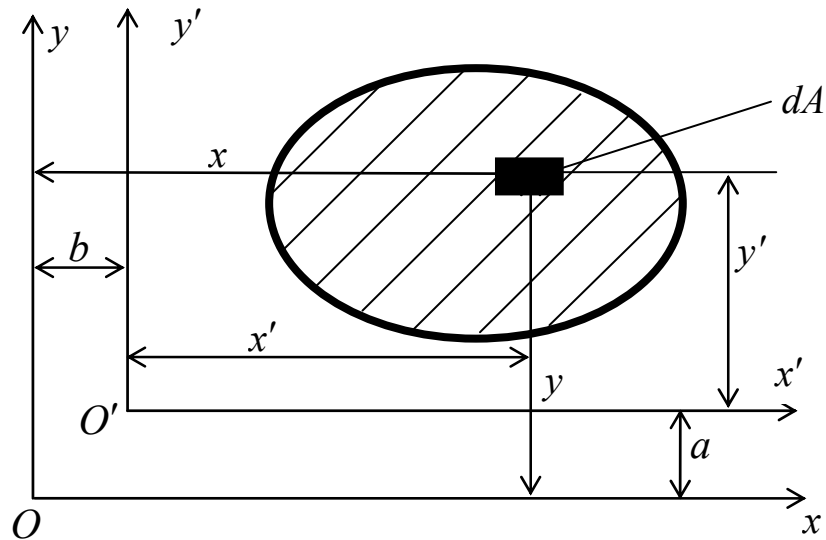


Рис. 50

Учитывая, что  $y' = y - a$ , получаем:

$$S_{x'} = \int_A dAy' = \int_A dA(y - a) = \int_A dAy - \int_A dAa = S_x - Aa,$$

аналогично

$$S_{y'} = \int_A dAx' = \int_A dA(x - b) = \int_A dAx - \int_A dAa = S_y - Ab.$$

Определим положение осей  $x_c$  и  $y_c$  (рис. 51), относительно которых статические моменты равны нулю:

$$S_{x_c} = S_x - Ay_c = 0; \quad S_{y_c} = S_y - Ax_c = 0,$$

откуда

$$y_c = \frac{S_x}{A}; \quad x_c = \frac{S_y}{A}.$$

Точка  $C$  пересечения осей  $x_c$  и  $y_c$  является центром тяжести сечения, а оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, статический момент равен нулю.

Точка  $C$  пересечения осей  $x_c$  и  $y_c$  является центром тяжести сечения, а оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *центральными осями*. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, статический момент равен нулю.

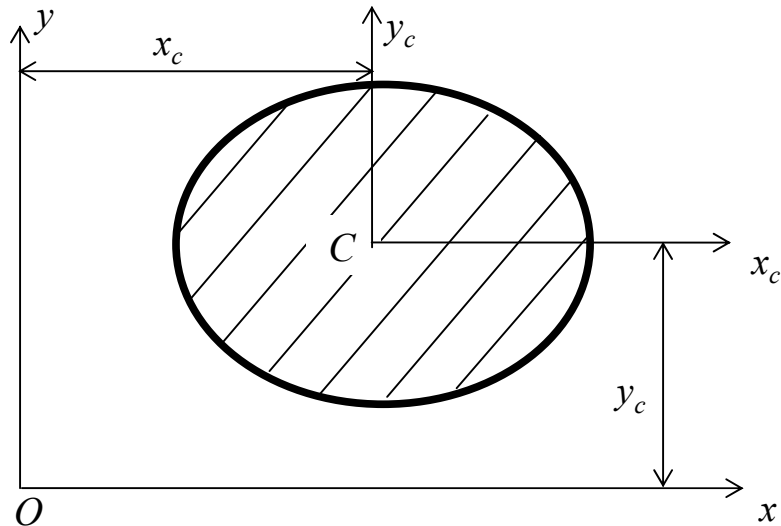


Рис. 51

**Моменты инерции сечения.** *Осевым моментом инерции сечения  $I$*  называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на квадрат расстояния до оси. Осевые моменты инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  будут, соответственно, равны:

$$I_x = \int_A dAy^2; \quad I_y = \int_A dAx^2.$$

*Полярным моментом инерции сечения  $I_\rho$*  называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на квадрат расстояния до начало координат:

$$I_\rho = \int_A dA\rho^2.$$

Из рис. 49 видно, что  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , тогда получаем:

$$I_\rho = \int_A dA(x^2 + y^2) = \int_A dAx^2 + \int_A dAy^2 = I_y + I_x.$$

Следовательно, полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции сечения.

*Центробежным моментом инерции сечения  $I_{xy}$*  называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояния до осей:

$$I_{xy} = \int_A dAxy.$$



Если сечение имеет ось симметрии, то центробежный момент инерции сечения равен нулю.

**Определение моментов инерции простых геометрических фигур.** Рассмотрим определения момента инерции прямоугольного сечения относительно оси  $x_c$ , проходящей через центр тяжести (рис. 52).

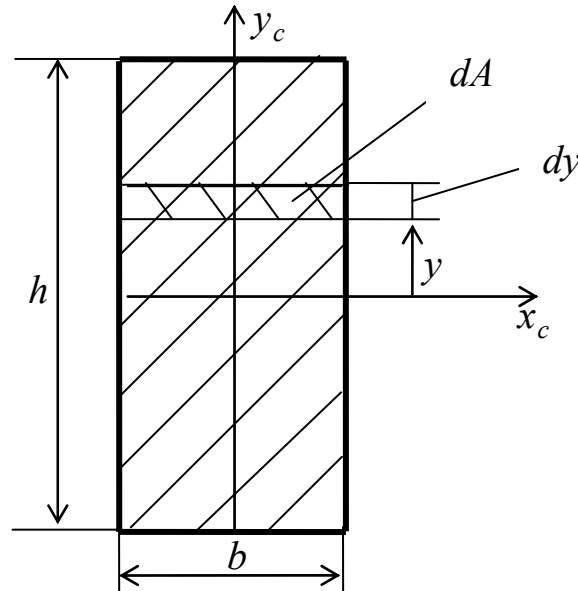


Рис. 52

Выделим элементарную площадь  $dA$  на расстоянии  $y$  от центральной оси  $x_c$  толщиной  $dy$ . Согласно определению, осевой момент инерции относительно оси  $x_c$  равен:

$$I_{x_c} = \int_A dA y^2.$$

В нашем случае элементарная площадь  $dA = bdy$ . Подставляя значения  $dA$  и изменяя пределы интегрирования, получаем:

$$I_{x_c} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично определяется момент инерции относительно оси  $I_{y_c}$ :

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}.$$

Рассмотрим определения момента инерции круглого сечения относительно оси  $x_c$ , проходящей через центр тяжести (рис. 53).

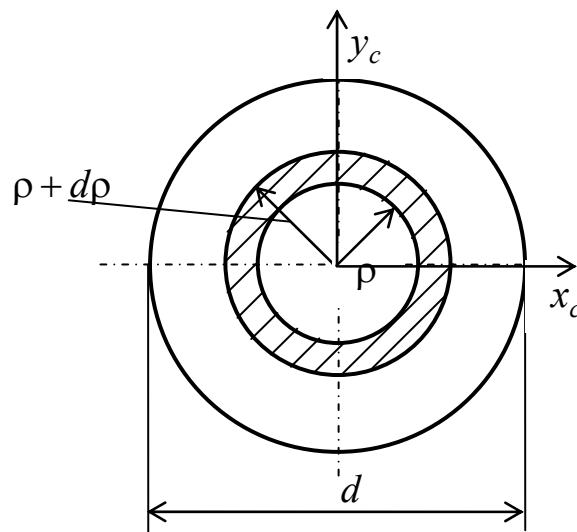


Рис. 53

Выделим элементарную площадь  $dA$  в виде кольца толщиной  $dr$  на расстоянии  $r$  от центра тяжести сечения. Согласно определению, полярный момент инерции равен:

$$I_\rho = \int_A dA r^2.$$

В нашем случае элементарная площадь  $dA = 2\pi r dr$ . Подставляя значения  $dA$  и изменяя пределы интегрирования, получаем:

$$I_\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r dr r^2 = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Учитывая, что  $I_\rho = I_y + I_x$ , получаем:

$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Если сечение имеет сложную геометрическую форму, то его разбивают на простые фигуры и его момент инерции рассчитывают, как сумму моментов инерции отдельных фигур.

**Определение момента инерции относительно осей, параллельных центральным осям.** Пусть оси  $x$  и  $y$  (рис. 54) смещены относительно центральных осей  $x_c$  и  $y_c$  на расстояния  $a$  и  $b$  соответственно.

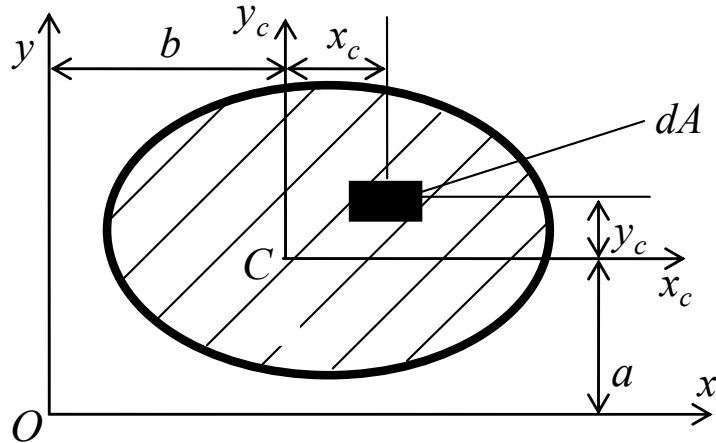


Рис. 54

Координаты элементарной площадки  $dA$  в системе координат  $x$  и  $y$  будут равны:

$$x = x_c + b, \quad y = y_c + a.$$

В этом случае осевой момент инерции сечения относительно оси  $x$ :

$$I_x = \int_A dA(y_c + a)^2 = I_{x_c} + 2a \int_A dAy_c + Aa^2,$$

где  $\int_A dAy_c = S_x = 0$  – статический момент сечения, который относительно центральной оси равен нулю.

Следовательно,  $I_x = I_{x_c} + Aa^2$ .

Рассуждая аналогичным образом, получим:

$$I_y = I_{y_c} + Ab^2.$$

Зависимость для определения центробежного момента инерции сечения будет иметь вид:

$$I_{xy} = \int_A dAxy = \int_A dA(x_c + b)(y_c + a) = I_{x_c y_c} + abA.$$

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  и моментами инерции относительно осей  $u$ ,  $v$ , повернутых на угол  $\alpha$ . Угол  $\alpha$  считается положительным, если поворот осуществляется и против часовой стрелки. Пусть координаты элементарной площадки до поворота –  $x$ ,  $y$ , после поворота –  $u$ ,  $v$  (рис. 55).

Из рис. 55 следует:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

В этом случае:

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dA = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\ &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

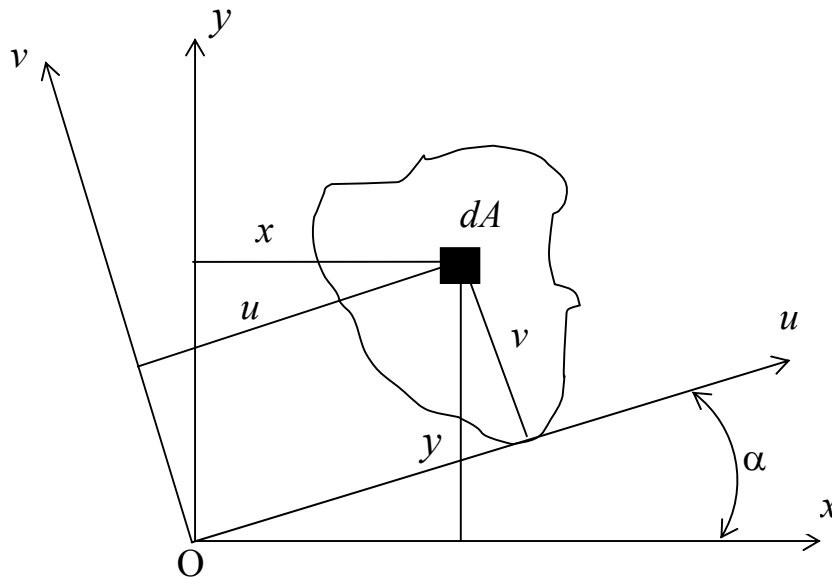


Рис. 55

Сложив значения моментов инерции относительно осей  $u$  и  $v$ , получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y.$$

Откуда видно, что сумма осевых моментов относительно двух взаимно-перпендикулярных осей остается постоянной при повороте осей на любой угол. Это объясняется тем, что сумма осевых моментов относительно двух взаимно-перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции, который не зависит от направления осей.

**Главные оси инерции и главные моменты инерции.** С изменением угла поворота осей  $\alpha$  каждая из величин  $I_u$  и  $I_v$  меняется, а сумма их остается неизменной. Следовательно, существует такое значение  $\alpha = \alpha_0$ , при котором моменты инерции достигают экстремальных значений, т. е. один из моментов инерции достигает своего максимального значения, в то время другой момент инерции принимает минимальное значение. Для нахождения значения  $\alpha_0$  возьмем первую производную от  $I_u$  по  $\alpha$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$ .

Нетрудно показать, что центробежный момент относительно осей, повернутых на угол  $\alpha_0$ , равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными осями*. Если эти оси являются также и центральными, то они называются *главными центральными осями*.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда является одной из главных центральных осей инерции сечения.

**Момент сопротивления сечения.** Момент сопротивления сечения относительно оси представляет собой отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения от этой же оси:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения (рис. 52) относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен:

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}.$$

Полярный момент инерции представляет собой отношение полярного момента инерции к наибольшему расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}}$$

**Задача 1.** Для сечения, изображенного на рис. 56, определить осевые моменты инерции и моменты сопротивления относительно осей  $x_{C1}$  и  $y_{C1}$ , если диаметр отверстия  $d = 20$  мм,  $a = 10$  мм,  $b = 100$  мм и  $h = 80$  мм.

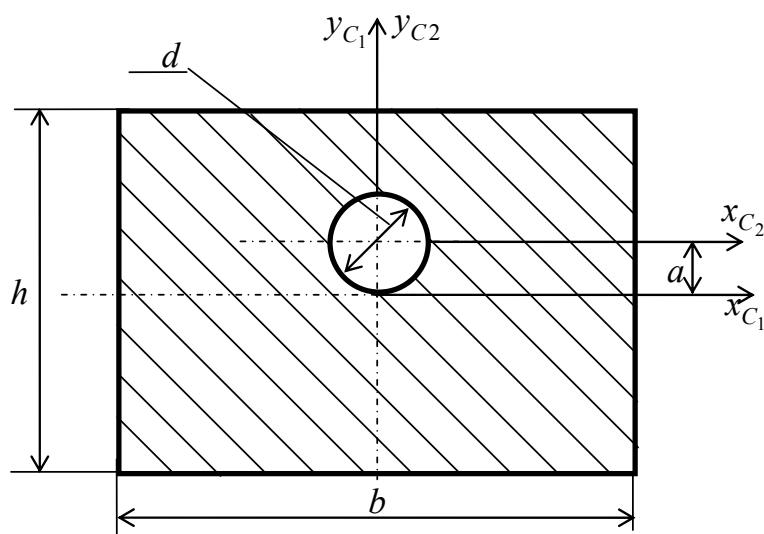


Рис. 56

$$I_{x_{C1}} = \frac{bh^3}{12} - \left( \frac{\pi d^4}{64} + \pi d^2 a^2 \right) = \frac{100 \cdot 80^3}{12} - \frac{\pi \cdot 20^4}{64} - \pi \cdot 20^2 \cdot 10^2 =$$

$$= 4,133 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$I_{y_{C1}} = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{80 \cdot 100^3}{12} - \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 6,659 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$W_{x_{C1}} = \frac{I_{x_{C1}}}{\frac{h}{2}} = \frac{4,133 \cdot 10^6}{40} = 1,033 \cdot 10^5 \text{ мм}^3;$$

$$W_{y_{C1}} = \frac{I_{y_{C1}}}{\frac{b}{2}} = \frac{6,659 \cdot 10^6}{50} = 1,322 \cdot 10^5 \text{ мм}^3.$$

## Контрольные вопросы

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси?
2. Как определяются координаты центра тяжести сечения?
3. Какие моменты инерции сечения бывают?
4. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух перпендикулярных осей при их повороте?
5. Какие оси называются главными осями инерции?
6. При увеличении диаметра сплошного вала в два раза во сколько раз увеличится полярный момент его сечения?
7. Если осевой момент инерции сечения сплошного вала  $I_x = 10 \text{ мм}^4$ , то чему равен полярный момент сечения  $I_p$ ?

## Растяжение–сжатие

**Нормальная сила.** При растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – нормальная сила  $\vec{N}$ , которая представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения.

В качестве примера рассмотрим ступенчатый брус (рис. 57), нагруженный силой  $\vec{F}$ . Для данного бруса можно выделить два характерных участка.

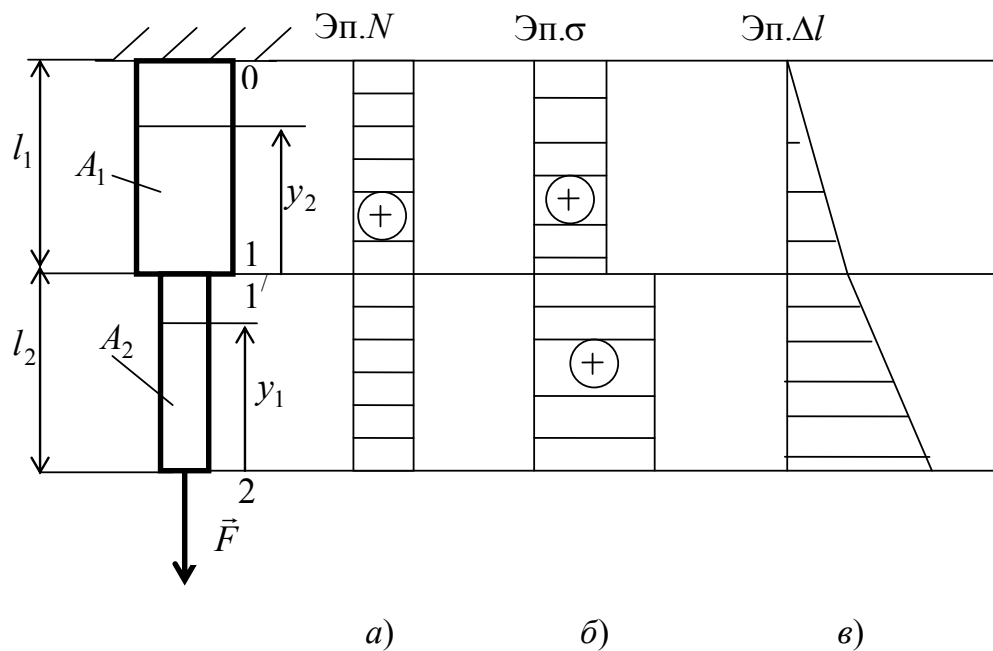


Рис. 57

Для определения значения нормальной силы  $\vec{N}$  воспользуемся методом сечения. На расстоянии  $y_1$  проведем сечение на первом участке и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 58). Нормальную силу всегда показывают от сечения, что соответствует растяжению бруса.

Условие равновесия на ось  $y$ :

$$N_1 - F = 0, \quad \text{откуда} \quad N_1 = F.$$

Проведем на втором участке сечение на расстоянии  $y_2$ . Рассматривая равновесие отсеченной части, получаем:  $N_2 = F$ . Строим эпюру нормальных сил (рис. 57, а).



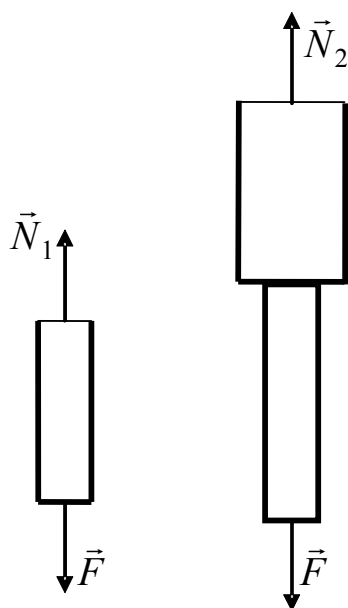


Рис. 58

**Напряжение и деформации при растяжении–сжатии.** Рассмотрим брус (рис. 59), нагруженный сосредоточенной силой  $\vec{F}$ . До нагружения его длина была равна  $l$ , а после приложения нагрузки она изменилась на величину  $\Delta l$ .

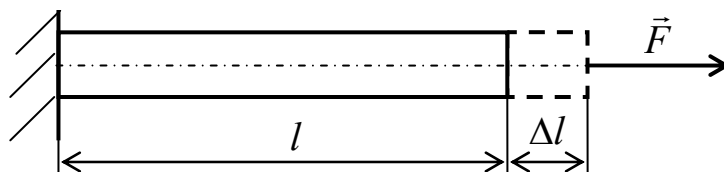


Рис. 59

Определим напряжения, которые возникают в поперечных сечениях бруса.

**Статическая сторона задачи при растяжении.** При данном виде нагружения в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний фактор – продольная сила  $N$ . Значение продольной силы будет определяться по зависимости:

$$N = \int_A \sigma dA.$$

**Геометрическая сторона задачи при растяжении.** Согласно гипотезе Бернулли (гипотеза плоских сечений), все продольные волокна бруса деформируются одинаково, а это означает, что сечения

под действием внешней нагрузки перемещаются параллельно поступательно. В этом случае абсолютная и относительная деформации:

$$\Delta l = \text{const} \text{ и } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}.$$

**Физическая сторона задачи при растяжении.** В соответствии с законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

В этом случае

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E\varepsilon dA = E\varepsilon \int_A dA = E\varepsilon A.$$

В этом случае относительная и абсолютная деформации:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}; \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Напряжения в поперечном сечении бруса

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{EN}{EA} = \frac{N}{A}.$$

Произведение  $EA$  называется *жесткостью бруса при растяжении (сжатии)*.

Рассчитывая напряжения и перемещения в каждом сечении, строим эпюру нормальных напряжений (рис. 57, б) и эпюру продольных перемещений сечений бруса (рис. 57, в):

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_1}; \quad \sigma_1 = \frac{N}{A_1}; \quad \sigma_{1'} = \frac{N}{A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2}.$$

$$\Delta l_0 = 0; \quad \Delta l_{10} = \frac{Nl_1}{EA_1}; \quad \Delta l_1 = \Delta l_0 + \Delta l_{10}; \quad \Delta l_{21} = \frac{Nl_2}{EA_2}; \quad \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{21}.$$

**Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации.** Внешняя сила  $F$  (рис. 59) при нагружении совершает работу  $W$  на вызываемом ей перемещении  $\Delta l$ . Уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$W = U + K,$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации;  $K$  – кинетическая энергия.

Учитывая, что нагружение бруса статическое, то кинетическая энергия  $K = 0$ . В этом случае работа внешних сил  $W$  полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации  $U$ .

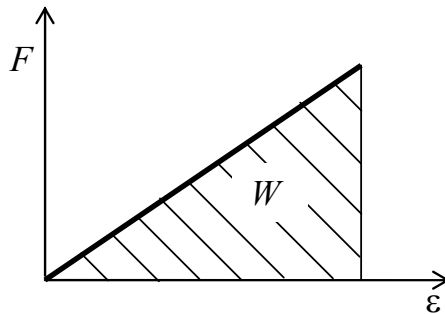


Рис. 60

Работу внешней силы (рис. 60) определим по теореме Клайперона:

$$W = U = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации, накопленная в единичном объеме, определяется по зависимости:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N \Delta l}{2Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon.$$

**Диаграмма растяжения. Основные механические свойства материала.** Основными механическими свойствами материалов являются прочность, упругость, пластичность и твердость. Необходимые сведения о различных механических свойствах материала получают экспериментальным путем.

Испытание на статическое растяжение представляет собой основной вид механических испытаний, который позволяет определить прочностные и пластические свойства материала.

Испытание производят на разрывной машине стандартного образца, который бывает цилиндрический (рис. 61) или плоский.

Цилиндрические образцы бывают двух видов: нормальные (с расчетной длиной  $l_{\text{расч}} = 10d$ ) и укороченные (с  $l_{\text{расч}} = 5d$ ).

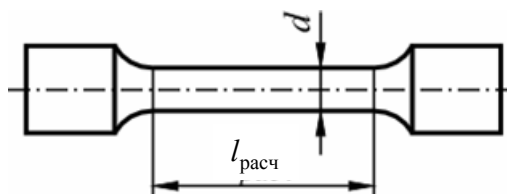


Рис. 61

При нагружении снимают показание растягивающей силы и длину образца. Затем строится условная диаграмма растяжения в координатах  $\varepsilon$  и  $\sigma$ . Напряжение в сечении определяют по зависимости:

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

где  $F$  – сила нагружения;  $A$  – площадь поперечного сечения образца.

Относительная линейная деформация определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где  $\Delta l = l_i - l$  – относительное удлинение образца;  $l$  – исходная длина образца;  $l_i$  – длина образца в данный момент отсчета.

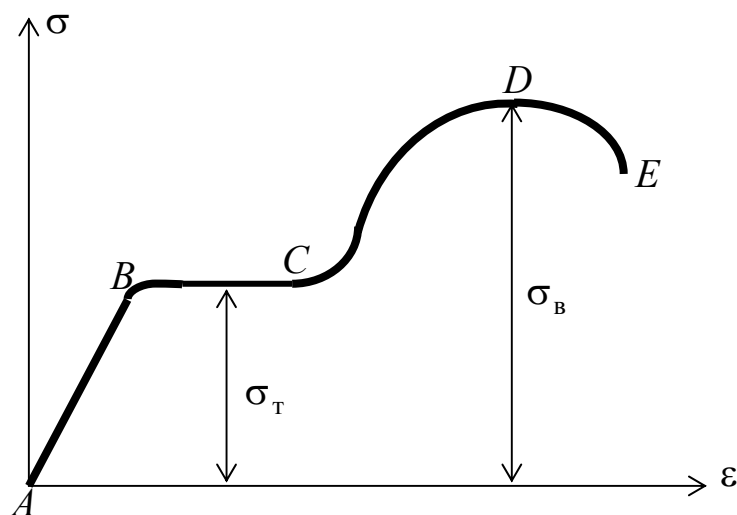


Рис. 62

Диаграмма растяжения для пластичных материалов имеет вид, показанный на рис. 62.

На диаграмме растяжения можно выделить четыре характерных участка.

Участок  $AB$  – участок пропорциональности. На этом участке выполняется закон Гука:

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Участок  $BC$  – площадка текучести. На этом участке происходит удлинение образца без изменения нагрузки. Напряжение, при котором

происходит течение образца, называется *пределом текучести* и обозначается  $\sigma_T$ .

Участок  $CB$  – участок упрочнения. На этом участке для дальнейшего удлинения образца необходимо увеличить нагрузку.

В точке  $D$  происходит образование шейки и на участке  $DE$  происходит местное удлинение образца. Напряжение, при котором образуется шейка, называется *пределом прочности* и обозначается  $\sigma_B$ .

Пластичность материала характеризуют максимальное удлинение  $\delta$  и максимальное сужение  $\psi$ , которые определяются по зависимостям:

$$\delta = \frac{\Delta l_{\max}}{l}; \quad \psi = \frac{A - A_p}{A},$$

где  $\Delta l_{\max}$  – максимальное остаточное удлинение;  $l$  – первоначальная длина образца;  $A$  – первоначальная площадь поперечного сечения образца;  $A_p$  – площадь поперечного сечения образца в месте разрыва.

Чем выше значения  $\delta$  и  $\psi$ , тем материал более пластичен.

**Допускаемые напряжения.** На участке  $AB$  имеют место упругие деформации, т. е. после снятия нагрузки образец примет первоначальные размеры. Поэтому для деталей, изготовленных из пластичных материалов, действующие напряжения не должны превышать напряжения текучести  $\sigma_T$ . С этой целью вводят понятия допускаемых напряжений, которые рассчитываются по зависимости:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[s]},$$

где  $[s]$  – допускаемый коэффициент запаса прочности, который зависит от назначения детали, точности расчетных формул и ряда других факторов.

**Условия прочности и жесткости конструкции при растяжении–сжатии.** Прочность конструкции будет обеспечена, если максимальное напряжение в ней не будет превышать допускаемого напряжения:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Для бруса, испытывающего напряжения растяжения, условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma_p].$$

Условие жесткости при растяжении бруса будет определяться зависимостью:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \leq [\Delta l],$$

где  $[\Delta l]$  – допустимая деформация бруса.

### **Контрольные вопросы**

1. Какой вид деформации называют растяжение–сжатие?
2. Как определяется напряжение при растяжении–сжатии?
3. По какой формуле определяют абсолютное перемещение?
4. Как определяются продольные перемещения сечений ступенчатого бруса?
5. Чему равна потенциальная энергия деформации при растяжении–сжатии?
6. Что собой представляет диаграмма растяжения?
7. Какими параметрами характеризуется пластичность материала?
8. Как определяют допускаемые напряжения?
9. Как записываются условия прочности и жесткости при растяжении–сжатии?

## Чистый сдвиг

**Напряжения при чистом сдвиге.** *Чистым сдвигом* называют такой вид нагружения, при котором в его поперечных сечениях действует только поперечная сила. Сдвиг как вид нагружения, встречается редко и имеет место в заклепочных и сварных соединениях.

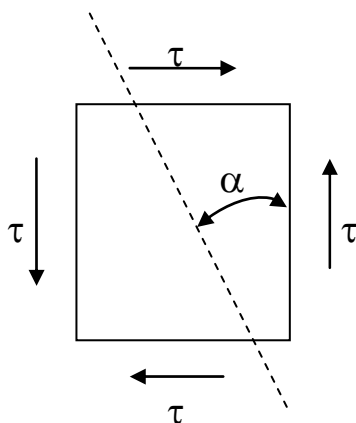


Рис. 63

При чистом сдвиге (рис. 63) в окрестности точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

Внутренняя поперечная сила при чистом сдвиге определяется методом сечений. Распределение касательных напряжений принимается равномерным и тогда связь между поперечной силой и касательным напряжением имеет вид:

$$Q = \int_A \tau dA; \tau = \text{const}; Q = \tau A,$$

откуда

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

При чистом сдвиге возникает плоское напряженное состояние. Тогда напряжения, действующие на площадке, составляющей угол  $\alpha$  с вертикальной исходной площадкой, равны:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha; \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha.$$

Касательные напряжения (рис. 63) по абсолютной величине больше касательных напряжений по любым другим площадкам. Сле-

довательно, они являются экстремальными, а площадки, по которым они действуют, – площадками сдвига. Так как по этим площадкам не действуют нормальные напряжения, то их называют *площадками чистого сдвига* и образуют с главными площадками углы, равные  $45^\circ$ .

Подставляя угол  $\alpha = 45^\circ$ , получаем:

$$\sigma_\alpha = \tau = \tau_{\max}.$$

Следовательно, при чистом сдвиге главные напряжения и экстремальные касательные напряжения равны друг другу.

Подставив в уравнения значения углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ , получаем:

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1; \quad \sigma_{\alpha_2} = \tau \sin(2\alpha_1 + 180^\circ) = -\tau \sin 2\alpha_1; \quad \sigma_{\alpha_1} = -\sigma_{\alpha_2}.$$

При чистом сдвиге нормальные напряжения на любых двух взаимно-перпендикулярных площадках равны друг другу по модулю и противоположны по направлению.

**Деформации при чистом сдвиге.** При чистом сдвиге длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями. Первоначально прямые углы становятся равными  $90^\circ + \gamma$  и  $90^\circ - \gamma$  (рис. 64).

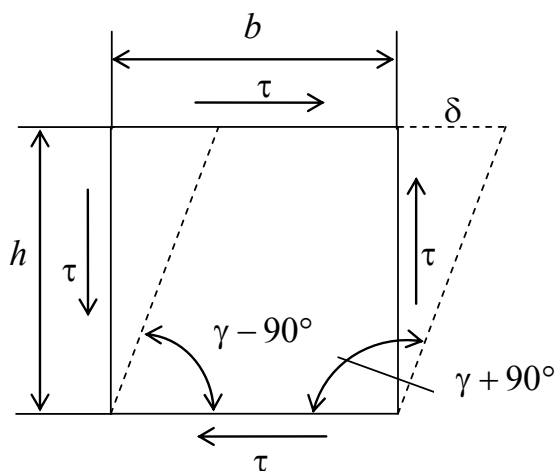


Рис. 64

Величина  $\delta$  называется *абсолютным сдвигом*. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется *относительным сдвигом*. При малых деформациях имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{h},$$

т. е. относительный сдвиг равен углу сдвига.



Угол сдвига  $\gamma$  пропорционален касательным напряжениям. Математическая зависимость между углом сдвига и касательным напряжением называется *законом Гука при сдвиге*:

$$\tau = \gamma G,$$

где  $G$  – коэффициент пропорциональности или модуль упругости второго рода.

**Объемная деформация и потенциальная энергия при сдвиге.** Относительное изменение объема при сдвиге определяется из объемного закона Гука:

$$\theta = \frac{1-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Величина  $\theta$  не зависит от того, как в окрестности точки выделен элементарный параллелепипед. Так как при чистом сдвиге боковые грани выделенного элементарного параллелепипеда являются площадками чистого сдвига, то  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ . Тогда относительное изменение объема при чистом сдвиге  $\theta = 0$ .

Полная удельная потенциальная энергия  $u$  равна сумме удельной потенциальной энергии изменения объема  $u_{об}$  и удельной потенциальной энергии изменения формы  $u_{ф}$ :

$$u = u_{об} + u_{ф}.$$

Учитывая, что при чистом сдвиге  $\sigma_1 = \tau_{\max}$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau_{\max}$ , получаем:

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\tau_{\max} + 0 - \tau_{\max})^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} u_{ф} &= \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{3E}(\tau_{\max}^2 + 0 + \tau_{\max}^2 - 0 + 0 + \tau_{\max}^2) = \frac{1+\mu}{E}\tau_{\max}^2; \end{aligned}$$

$$u = 0 + \frac{1+\mu}{E}\tau_{\max}^2 = \frac{1+\mu}{E}\tau_{\max}^2.$$

**Работа при чистом сдвиге.** В результате деформации выделенного параллелепипеда работа силы будет определяться по выражению

$$W = \frac{T}{2}\delta,$$

где  $T$  – сила, действующая на грань параллелепипеда.

Ее величина будет равна:

$$T = \tau bl = \tau_{\max} bl,$$

где  $l$  – размер параллелепипеда в направлении, перпендикулярном чертежу (рис. 64).

Учитывая, что

$$\delta = \gamma h = \frac{\tau}{G} h = \frac{\tau_{\max}}{G} h,$$

получаем:

$$W = \frac{\tau_{\max} bl}{2} \frac{\tau_{\max} h}{G} = \frac{\tau_{\max}^2 hbl}{2G} = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2G}.$$

Так как работа силы при статическом действии численно равна потенциальной энергии, имеем:

$$U = W = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2G}.$$

Удельная потенциальная энергия в этом случае равна:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2GV} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G}.$$

Приравнявая полученные выражения для удельной потенциальной энергии, получаем соотношение

$$\frac{1 + \mu}{E} \tau_{\max}^2 = \frac{\tau_{\max}^2}{2G},$$

откуда получаем связь между модулем упругости первого рода  $E$  и модулем упругости второго рода  $G$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Испытание материала в условиях чистого сдвига проводят при кручении на тонкостенных образцах трубчатого сечения. По результатам строят диаграмму (рис. 65).

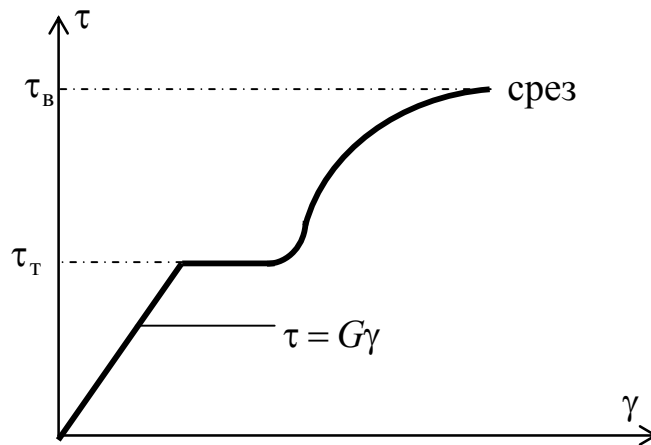


Рис. 65

Диаграмма сдвига сходна с диаграммой растяжения. Для большинства материалов предел текучести при сдвиге связан с пределом текучести при растяжении следующим соотношением:

$$\tau_T \approx 0,6\sigma_T.$$

**Условие прочности при сдвиге.** Разрушение детали под действием поперечной силы проявляется в виде перерезания ее поперек и называется *срезом*. Условие прочности для данного вида деформации имеет вид:

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leq [\tau_c],$$

где  $[\tau_c]$  – допускаемое напряжение сдвига, которое определяется по зависимости:

$$\tau_c = (0,25 \dots 0,35)\sigma_T.$$

**Смятие.** При сжатии двух тел возникает опасность смятия соприкасающихся поверхностей.

Напряжения, возникающие на контактируемых поверхностях, называются *напряжениями смятия*, которые определяются по формуле

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}}.$$

В случае криволинейной поверхности смятия расчет площади смятия такой поверхности рассчитывается как площадь проекции этой поверхности на плоскость, перпендикулярную к линии действия сминающей силы.

**Задача 1.** Определить диаметр  $D$  и высоту  $h$  головки стержня, нагруженного растягивающей силой  $F$  (рис. 66), исходя из равнопрочности стержня на растяжение, головки на срез и ее поверхности на смятие, если  $d = 32$  мм,  $d_0 = 34$  мм.

Допускаемые напряжения при расчете принять:

- на растяжение  $[\sigma_p] = 140$  МПа;
- на срез  $[\tau_{ср}] = 100$  МПа;
- на смятие  $[\sigma_{см}] = 250$  МПа.

*Решение*

Допускаемую нагрузку определяем из условия прочности стержня на растяжение:

$$[F_p] = [\sigma_p] \frac{\pi d^2}{4} = 140 \frac{3,14 \cdot 32^2}{4} = 112,6 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Определяем диаметр опорной поверхности головки из условия ее прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{[F_p]}{A_{см}} = \frac{[F_p]}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d_0^2)} \leq [\sigma_{см}],$$

откуда

$$D \geq \sqrt{\frac{4[F_p]}{\pi[\sigma_{см}]} + d_0^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 250} + 34^2} = 41,7 \text{ мм.}$$

Принимаем  $D = 42$  мм.

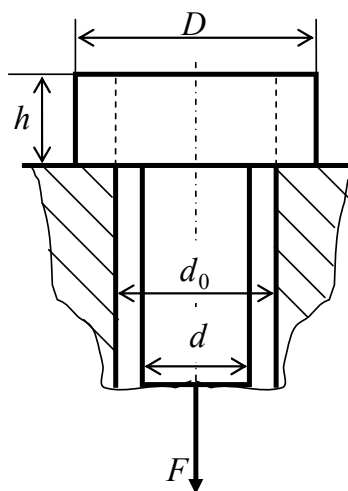


Рис. 66

Высоту головки определяем из условия прочности на срез:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{[F_p]}{A_{\text{ср}}} = \frac{[F_p]}{\pi d_0 h} \leq [\tau_{\text{ср}}],$$

откуда

$$h \geq \frac{[F_p]}{\pi d_0 [\tau_{\text{ср}}]} = \frac{112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 34 \cdot 100} = 10,55 \text{ мм.}$$

Принимаем  $h = 11$  мм.

### Контрольные вопросы

1. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?
2. Чем отличаются площадки чистого сдвига от площадок сдвига?
3. Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
4. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
5. Чему равна удельная потенциальная энергия при сдвиге?
6. Какой модуль упругости больше  $E$  или  $G$ ?
7. Как записывается условие прочности при сдвиге?
8. Что такое смятие и как записывается условие прочности при смятии?

## Кручение

*Кручением* называют такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – крутящий момент  $T$ . Брус, работающей на кручение, называется *валом*.

Кручение вала происходит при нагружении его внешним скручивающимся моментом (моментами) (рис. 67), плоскость действия которого перпендикулярна оси вала.

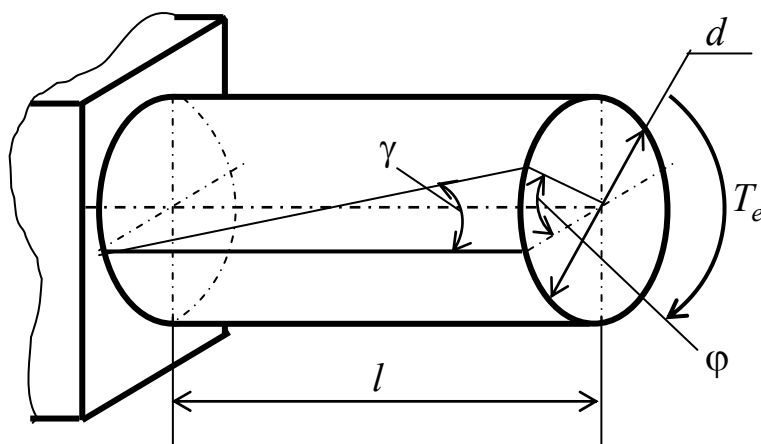


Рис. 67

Крутящий момент в произвольном сечении вала определяется методом сечения и численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения. Знак крутящего момента выбирается произвольно, так как он не влияет при расчетах на прочность и жесткость, и его придерживаются до конца решения.

Как видно из рис. 67, поворот правого торцового сечения вала относительно неподвижного левого на угол  $\varphi$  вызывает поворот продольных волокон на угол  $\gamma$ . Угол  $\varphi$  называется абсолютным углом закручивания, а угол  $\gamma$  – углом сдвига.

При рассмотрении теории кручения принимают следующие положения:

1. Поперечные сечения вала плоские до деформации остаются плоскими и после деформации. Они лишь поворачиваются вокруг.
2. Радиусы, проведенные в сечении, остаются прямыми и не изменяют своей длины.
3. Расстояния между поперечными сечениями в процессе деформации остаются постоянными. Ось вала не искривляется.

4. Материал бруса при деформации следует закону Гука.

**Напряжения и деформации при кручении бруса.** Для определения напряжения и перемещения при кручении рассмотрим три стороны задачи:

**1. Статическая сторона задачи.** Интегральное уравнение равновесия, связывающее крутящий момент с касательным напряжением (рис. 68), имеет вид:

$$T = \int_A \tau \rho dA.$$

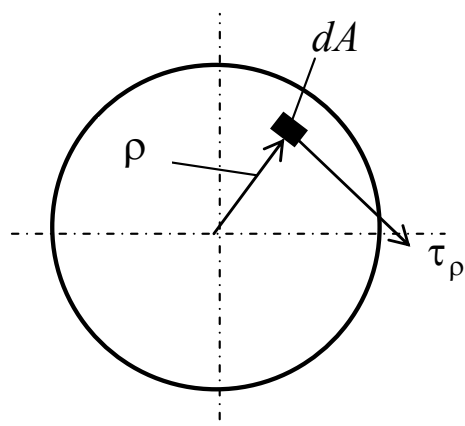


Рис. 68

**2. Геометрическая сторона задачи.** Выделим из вала (рис. 67) элементарный цилиндр длиной  $dz$  (рис. 69). Будем считать, что левое сечение бруса жестко закреплено. Под действием крутящего момента  $T$  правое сечение повернется на некоторый угол  $d\varphi$ , при этом точка  $D$  переместится в точку  $D_1$ .

Выразим длину дуги  $DD_1$  через угол сдвига  $\gamma$  и элементарный угол закручивания  $d\varphi$ :

$$DD_1 = ds = dz\gamma; \quad DD_1 = ds = \rho d\varphi.$$

Откуда

$$dz\gamma = \rho d\varphi.$$

Тогда угол сдвига

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho.$$

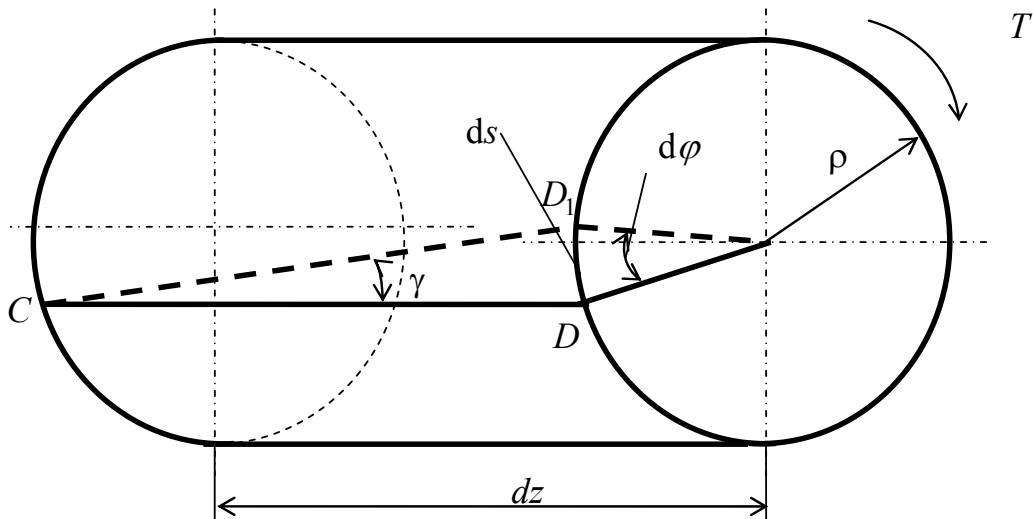


Рис. 69

Обозначая,  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ , получаем:

$$\gamma = \theta\rho,$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания.

**3. Физическая сторона задачи.** Согласно закону Гука, при сдвиге, имеем:

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho.$$

Крутящий момент в сечении в этом случае будет равен:

$$T = \int_A \tau\rho dA = \int_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_A dA\rho^2 = G\theta I_\rho.$$

Откуда относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{T}{GI_\rho},$$

а касательные напряжения

$$\tau = G\theta\rho = \frac{T}{I_\rho}\rho.$$

Касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях вала при кручении в каждой точке его сечения, направлены перпендикулярно прямой, соединяющей данную точку с центром сечения, а их значение прямо пропорционально расстоянию от центра до точки.



В центре сечения касательные напряжения равны нулю. Характер их изменения вдоль диаметра круглого сечения имеет вид, изображенный на рис. 70.

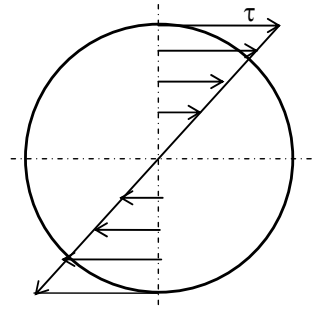


Рис. 70

Из определения относительного угла закручивания, что  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ , элементарный угол закручивания будет равен:

$$d\varphi = \theta dz = \frac{Tdz}{GI_{\rho}}.$$

Полный угол закручивания вала длиной  $l$ :

$$\varphi = \int_l \frac{Tdz}{GI_{\rho}}.$$

В случае постоянства крутящего момента вдоль оси вала полный угол закручивания

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\rho}}.$$

Величину  $GI_{\rho}$  называют *жесткостью при кручении*.

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса будет определяться по зависимости:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\rho}} \rho_{\max} = \frac{T}{\frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_{\rho}}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в поперечном сечении вала равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

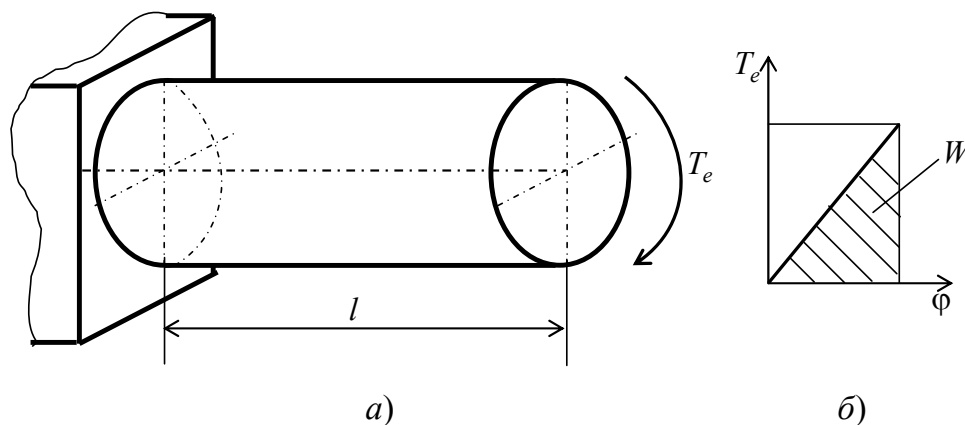


Рис. 71

**Потенциальная энергия деформации кручения.** Рассмотрим вал (рис. 71, а), нагруженный внешним моментом  $T_e$ . Закон нагружения вала изображен на рис. 71, б.

Работа внешнего момента определяется по зависимости:

$$W = \frac{1}{2} T_e \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол поворота сечения, где приложен внешний момент  $T_e$ .

В случае статического нагружения вала потенциальная энергия деформации равна работе внешнего момента:

$$U = W = \frac{1}{2} T_e \varphi.$$

Учитывая, что  $\varphi = \int_l \theta dz$  и  $\theta = \frac{T}{GI_\rho}$ , получаем:

$$U = \int_l \frac{T_e^2 dz}{2GI_\rho}.$$

**Расчеты на прочность и жесткость при кручении.** Условия прочности и жесткости при кручении имеют вид:

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi = \frac{T}{GI_\rho} \leq [\varphi].$$

Для вала круглого сечения эти условия имеют вид:

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau]; \quad \varphi = \frac{32T}{G\pi d^4} \leq [\varphi].$$

Различают три вида расчетов:

**1. Проектировочный расчет** – определяется диаметр вала в опасном сечении:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}.$$

**2. Проверочный расчет** – проверяется условие прочности:

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau].$$

**3. Определение нагрузочной способности.** При данном расчете определяется максимально допустимый момент в сечении вала

$$M_{\max} = [\tau]W_\rho.$$

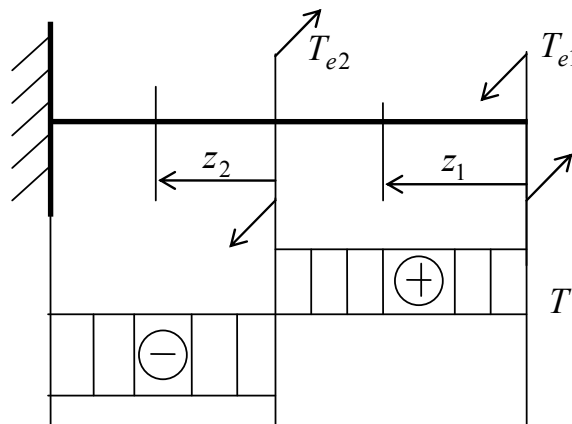


Рис. 72

**Построение эпюр крутящих моментов.** Крутящий момент в сечении вала определяется методом сечений. По модулю он численно сечения равен алгебраической сумме внешних моментов слева или справа от сечения.

Вал разбивается на участки и на каждом участке проводится сечение (рис. 72). В каждом сечении определяется крутящий момент, а затем строится эпюра крутящих моментов:

$$T_{z_1} = T_{e1}; \quad T_{z_2} = T_{e1} - T_{e2}.$$

**Задача.** Стальной вал (рис. 73) диаметром  $d = 40$  мм передает мощность  $P_1 = 15$  кВт при угловой скорости  $\omega_1 = 80$  рад/с. Проверить условие прочности и жесткости, если допускаемое напряжение кручения  $[\tau] = 30$  МПа; модуль упругости второго рода  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа; допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,6$  град/м.

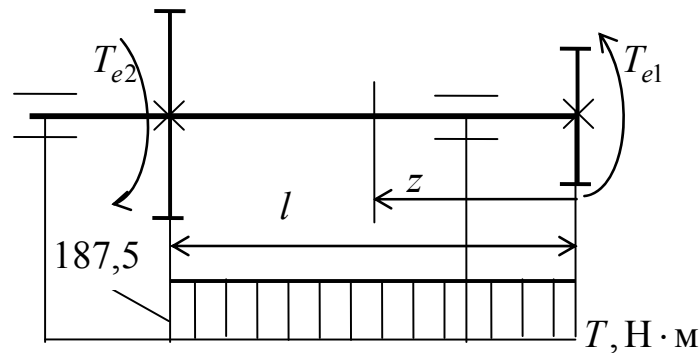


Рис. 73

*Решение*

Определяем вращающий момент  $T_{e1}$ :

$$T_{e1} = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{15 \cdot 10^3}{80} = 187,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Из условия равновесия определим внешний вращающий момент  $T_{e2}$ :

$$T_{e1} - T_{e2} = 0,$$

откуда  $T_{e1} = T_{e2} = 187,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. Крутящий момент в сечении  $z$ :

$$T_z = T_{e1} = 187,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

4. Учитывая, что  $0 \leq z \leq l$ , строим эпюру крутящих моментов. Крутящий момент в любом сечении вала  $T = T_z = 187,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

5. Касательное напряжение в сечении вала

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 187,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40^3} = 15 \text{ МПа} < [\tau] = 30 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

6. Относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{T}{\frac{G\pi d^4}{32}} = \frac{32 \cdot 187,5 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 40^4} = 9,325 \cdot 10^{-6} \text{ рад/мм} = 0,534 \text{ град/м.}$$

Так как  $\theta = 0,534 \text{ град/м} < [\theta] = 0,6 \text{ град/м}$ , то условие жесткости выполняется.

### Контрольные вопросы

1. Что называется валом?
2. Какие положения принимаются при рассмотрении теории кручения?
3. Какая зависимость отражает статическую задачу при кручении?
4. Как определяются касательные напряжения при кручении?
5. Как определяется относительный и полный угол закручивания?
6. Чему равна потенциальная энергия деформации при кручении?
7. Какие виды расчетов бывают при кручении?
8. Что такое эпюра крутящих моментов и как она строится?

## Плоский изгиб

**Основные понятия и определения.** В отличие от деформации растяжения–сжатия и кручения изгиб представляет такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса. *Осью бруса* называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений бруса.

Если в сечении бруса действует только один изгибающий момент, то изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях кроме изгибающего момента действует и поперечная сила, то изгиб называется *поперечным*.

Брус, работающий на изгиб, называется *балкой*. Изгиб называется *плоским*, если ось балки после деформации остается плоской линией. В противном случае имеет место кривой изгиб.

**Дифференциальные зависимости при изгибе.** Пусть на балку действует плоская система сил (рис. 74, а). Выделим из балки элемент, поперечные сечения которого отстоят друг от друга на расстоянии  $dz$ , так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и моменты (рис. 74, б).

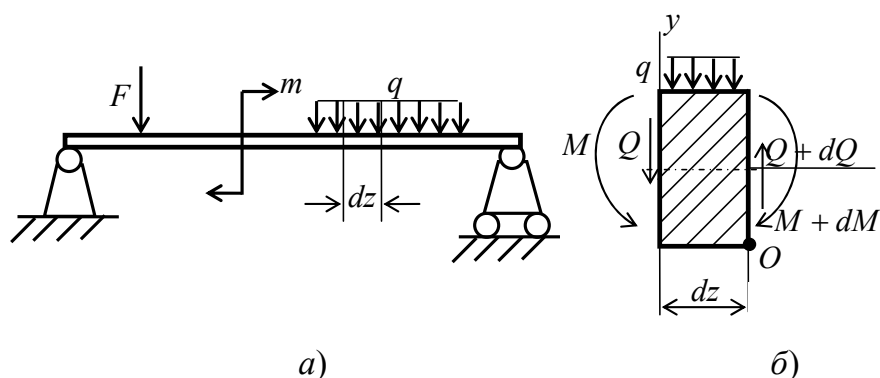


Рис. 74

На левый торец выделенного элемента действуют внутренние усилия  $Q$  и  $M$ , а на правый  $Q + dQ$  и  $M + dM$ , а также на элемент действует распределенная нагрузка  $q$ .

Так как вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент  $dz$ . Составим условие равновесия выделенного элемента в виде суммы проекций всех сил на ось  $y$ :

$$\Sigma F_y = 0; \quad -Q - qdz + (Q + dQ) = 0,$$

откуда  $\frac{dQ}{dz} = q$ .

Следовательно, первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки.

Составим условие равновесия моментов всех сил, действующих на выделенный элемент относительно точки  $O$ :

$$\Sigma M_K = 0; +M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0,$$

откуда, пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем:

$$\frac{dM}{dz} = Q.$$

Таким образом, производная изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе.

Данные зависимости называются *дифференциальными зависимостями Журавского при изгибе*.

**Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.**

При расчете балок на прочность необходимо знать характер изменения изгибающего момента и поперечной силы вдоль оси балки и знать положение опасного сечения. С этой целью строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила  $Q_y$  в сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил справа или слева от сечения.

Изгибающий момент  $M_x$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил справа или слева от сечения.

Если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения, то поперечная сила положительна (рис. 75).



Рис. 75

Изгибающий момент будет положительным, если при действии момента внешних сил балка искривляется выпуклостью вниз (рис. 76).

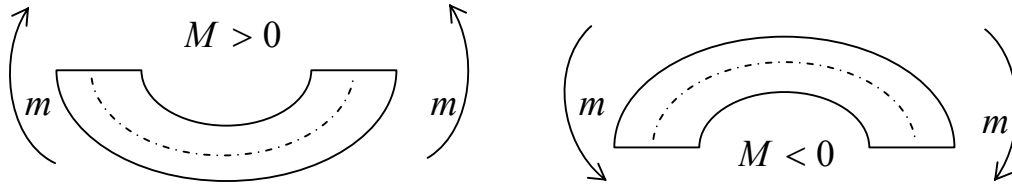


Рис. 76

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов рассмотрим на конкретном примере.

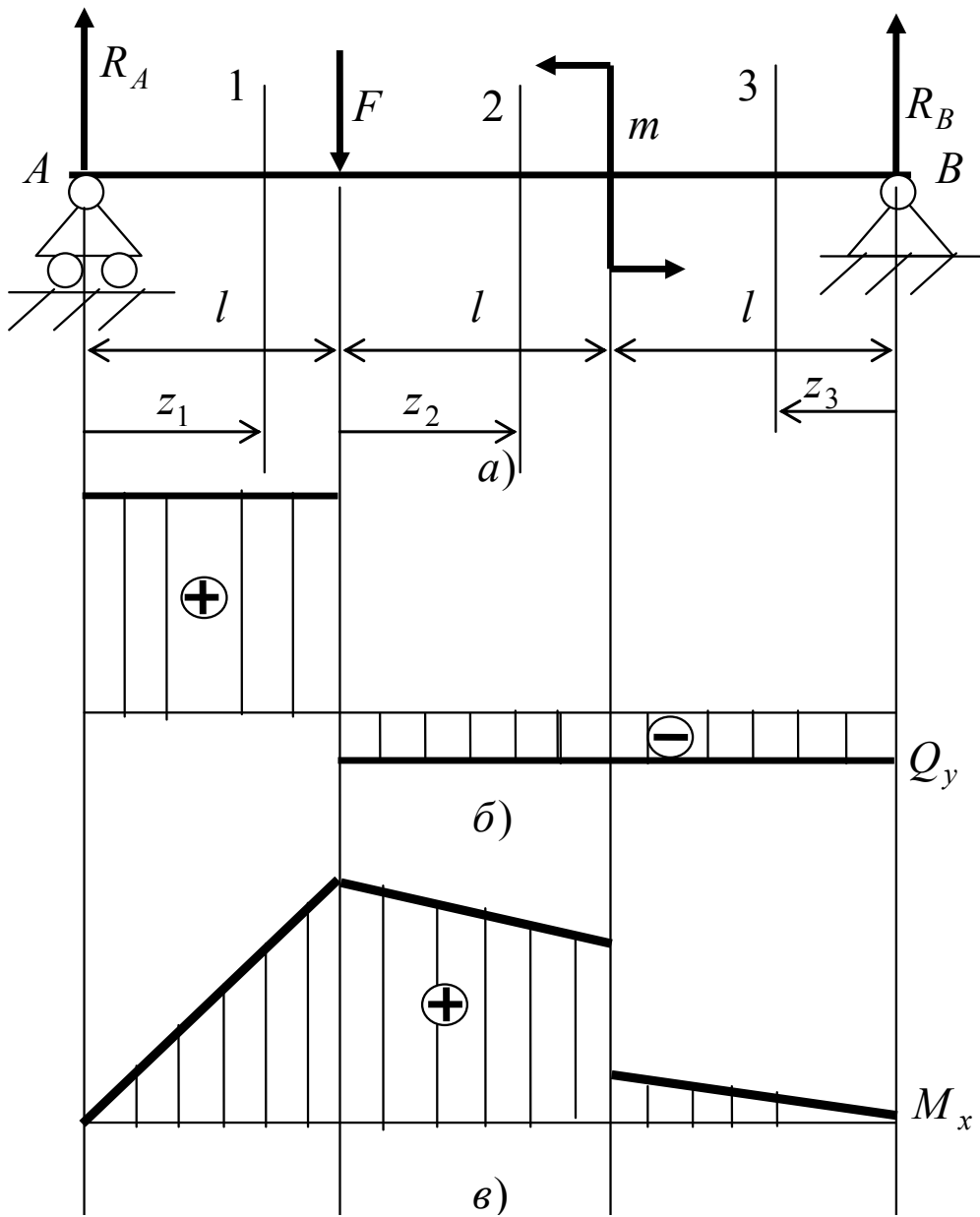


Рис. 77



Пусть на балку (рис. 77, а) действует внешний изгибающий момент  $m = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и внешняя сила  $F = 12 \text{ кН}$ , длина  $l = 1 \text{ м}$ .

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов сначала определим реакции в опорах  $A$  и  $B$ , для чего составим уравнения равновесия моментов всех внешних сил относительно опор  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A = 0; \quad -Fl + m + R_B 3l = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A 3l + F2l + m = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{Fl - m}{3l} = \frac{12 \cdot 1 - 6}{3 \cdot 1} = 2 \text{ кН}; \quad R_A = \frac{F2l + m}{3l} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 6}{3 \cdot 1} = 10 \text{ кН}.$$

Проведем сечения на каждом характерном участке и определим значения поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$ .

*В сечении 1:*

$$Q_{y1} = R_A; \quad M_{x1} = R_A z_1, \quad \text{где } 0 \leq z_1 \leq l.$$

При  $z_1 = 0 \text{ м}$ ;  $Q_{y1} = 10 \text{ кН}$ ;  $M_{x1} = 10 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

при  $z_1 = l = 1 \text{ м}$ ;  $Q_{y1} = 10 \text{ кН}$ ;  $M_{x1} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

*В сечении 2:*

$$Q_{y2} = R_A - F; \quad M_{x2} = R_A(l + z_2) - Fz_2, \quad \text{где } 0 \leq z_2 \leq l.$$

При  $z_2 = 0 \text{ м}$ ,  $Q_{y2} = 10 - 12 = -2 \text{ кН}$ ;  $M_{x2} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

при  $z_2 = l = 1 \text{ м}$ ;  $Q_{y2} = -2 \text{ кН}$ ;  $M_{x2} = 10(1 + 1) - 12 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

*В сечении 3:*

$$Q_{y3} = -R_B; \quad M_{x3} = R_B z_3; \quad 0 \leq z_3 \leq l.$$

При  $z_3 = 0$ ;  $Q_{y3} = -R_B = -2 \text{ кН}$ ;  $M_{x3} = 2 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

при  $z_3 = l = 1 \text{ м}$ ;  $Q_{y3} = -2 \text{ кН}$ ;  $M_{x3} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил (рис. 77, б) и изгибающих моментов (рис. 77, в).

**Нормальные напряжения при чистом прямом изгибе.** В случае чистого плоского изгиба балки из шести внутренних силовых факторов, которые могут действовать в ее поперечных сечениях при чистом изгибе, будет только изгибающий момент  $M_x$ .

Выведем формулу для вычисления напряжений в любой точке сечения. Рассмотрим статическую сторону задачи.

**Статическая сторона задачи о чистом изгибе.** Проведем поперечное сечение  $m - m$  на произвольном расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 78). В полученном сечении выделим элемент площади  $dA$  (рис. 79), координаты которого  $y$  и  $x$ .

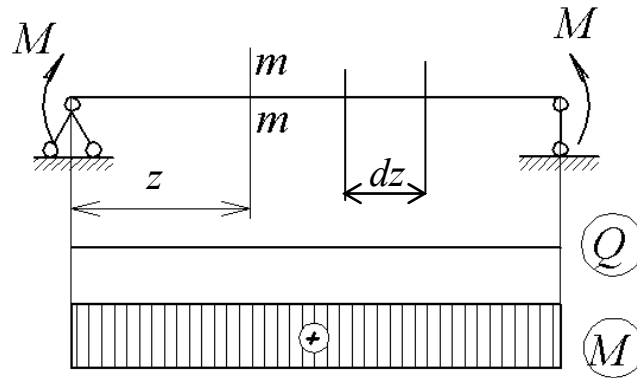


Рис. 78

При чистом изгибе на элемент  $dA$  будет действовать усилие  $dN = \sigma dA$ .

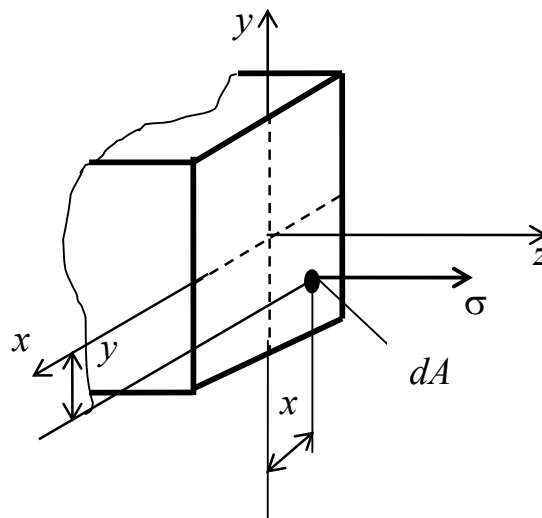


Рис. 79

В этом случае изгибающий момент, действующий в сечении балки, будет определяться выражением

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

Данное выражение представляет собой статическую сторону задачи о чистом изгибе.

Однако его нельзя использовать для определения нормальных напряжений, так как неизвестен закон распределения напряжений по сечению.

**Геометрическая сторона задачи о чистом изгибе.** При чистом изгибе, как показывают опыты, балка деформируется следующим образом:

- а) продольные линии искривляются по дуге окружности;
- б) контуры поперечных сечений остаются плоскими;
- в) линии контуров сечений всюду пересекаются с продольными волокнами под прямым углом.

На основании этого можно предположить, что при чистом изгибе поперечные сечения балки остаются *плоскими* и поворачиваются так, что остаются *нормальными* к изогнутой оси балки. Следовательно, при чистом изгибе, как и при растяжении (сжатии) и кручении круглых стержней, будет справедлива *гипотеза плоских сечений*.

Выделим двумя поперечными сечениями элемент балки длиной  $dz$  (рис. 78).

Под нагрузкой нейтральная ось искривляется, а сечения поворачиваются относительно своих нейтральных линий на угол  $d\theta$  (рис. 80).

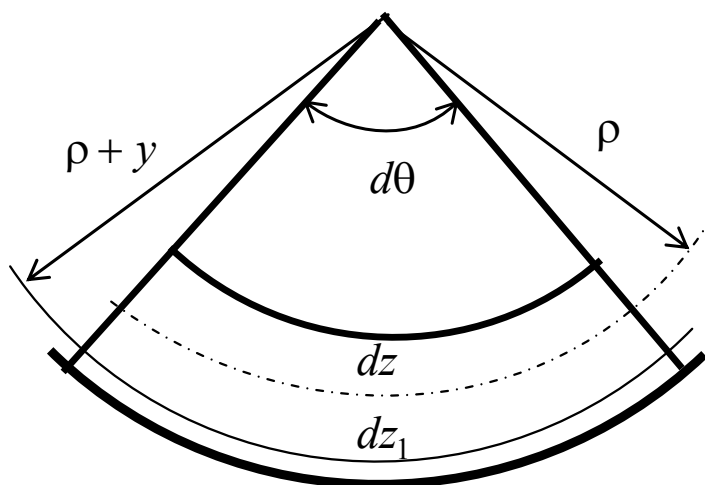


Рис. 80

Длина отрезка волокон нейтрального слоя при этом остается неизменной:

$$dz = \rho d\theta.$$

Определим длину отрезка волокон, отстоящего от нейтрального слоя на расстоянии  $y$ :

$$dz_1 = (\rho + y)d\theta.$$

Относительное удлинение в этом случае будет:

$$\varepsilon = \frac{dz_1 - dz}{dz} = \frac{(\rho + z)dz - \rho dz}{\rho dz} = \frac{y}{\rho}.$$

Зависимость  $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$  отражает геометрическую сторону задачи о чистом изгибе, из которой видно, что деформации продольных волокон изменяются по высоте сечения по линейному закону.

**Физическая сторона задачи о чистом изгибе.** Используя закон Гука при осевом растяжении, получаем:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}.$$

Подставив в выражение, отражающее статическую сторону задачи о плоском изгибе, значение  $\sigma$ , получаем:

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

Подставив значение  $\frac{1}{\rho}$  в исходную формулу, получаем:

$$\sigma = E \frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Данное выражение отражает физическую сторону задачи о чистом изгибе, которое дает возможность рассчитать нормальные напряжения по высоте сечения.

Хотя это выражение получено для случая чистого изгиба, но как показывают теоретические и экспериментальные исследования, оно может быть использовано и для плоского поперечного изгиба.

**Нейтральная линия.** Положение нейтральной линии определим из условия равенства нулю нормальной силы в сечениях балки при чистом изгибе:

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y dA.$$

Так как  $M_x \neq 0$  и  $I_x \neq 0$ , то необходимо, чтобы нулю был равен интеграл  $\int_A y dA$ . Данный интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси. Так как статический момент сечения равен нулю только относительно центральной оси, следовательно, нейтральная линия при плоском изгибе совпадает с главной центральной осью инерции сечения.

**Касательные напряжения.** При поперечном изгибе, когда в сечениях бруса изгибающий момент  $M$  и поперечная сила, возникают не только нормальные напряжения  $\sigma$ , но и касательные напряжения  $\tau$ .

Формула для определения касательных напряжений при поперечном изгибе впервые была получена Д. И. Журавским и носит его имя:

$$\tau = \frac{QS_{x_0}}{bI_x},$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;  $S_{x_0}$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси балки;  $b$  – ширина сечения в рассматриваемом слое;  $I_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Касательные напряжения равны нулю в крайних волокнах сечения и максимальны в волокнах нейтрального слоя.

**Потенциальная энергия при чистом изгибе.** Рассмотрим элемент балки (рис. 81, а) длиной  $dz$ , сечение которого под действием изгибающего момента  $m$  повернулось на угол  $d\varphi$  (рис. 81, б).

Потенциальная энергия деформации  $dU$  при чистом изгибе равна работе  $dW$  изгибающего момента  $M_x$  (рис. 81, в):

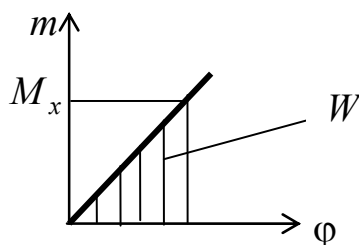
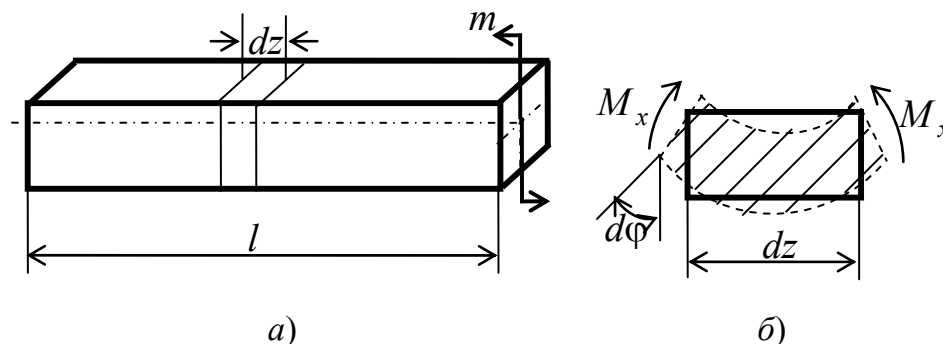
$$dU = dW = \frac{M_x}{2} d\varphi.$$

Угол  $d\varphi$  при изгибе на основании закона Гука при изгибе:

$$d\varphi = \frac{M_x}{EI_x} dz,$$

тогда

$$dU = \frac{M_x^2}{2EI_x} dz.$$



в)

Рис. 81

Для определения потенциальной энергии деформации по всей длине балки необходимо проинтегрировать данное выражение по длине:

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}.$$

**Расчет балок на прочность при изгибе.** Прочность балки будет обеспечена, если будут выполняться условия:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Максимальные нормальные напряжения при изгибе возникают в сечениях, где действует максимальный изгибающий момент, в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в сечениях балки, где действует максимальная поперечная сила

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{x0}}{bI_x}.$$

Касательные напряжения  $\tau_{\max}$  обычно малы по сравнению с  $\sigma_{\max}$  и в расчетах, как правило, не учитываются. Проверка по касательным напряжениям производится только для коротких балок.

**Деформации при поперечном изгибе.** Под действием внешней нагрузки  $F$  (рис. 82) ось балки искривляется, а ее поперечные сечения поворачиваются и смещаются на некоторую величину.

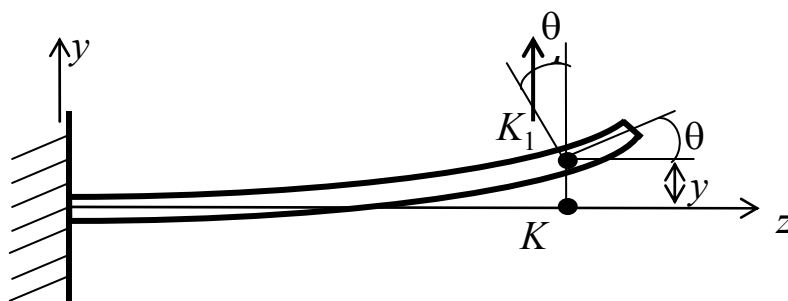


Рис. 82

Деформация балок рассматривается в виде двух параметров:

- 1) прогиб  $y$  – смещение центра тяжести сечения балки в направлении, перпендикулярном к ее оси;
- 2) угол поворота сечения  $\theta$  – угол поворота сечения относительно своего первоначального положения.

Немецкий ученый О. Мор предложил универсальный метод для определения перемещений, пригодный для любой, линейно деформируемой системы при той или иной нагрузке.

Любое перемещение  $\Delta$  (линейное или угловое) определяется с помощью интеграла Мора, который имеет вид:

$$\Delta = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dz,$$

где  $M$  – момент от внешней нагрузки;  $\bar{M}$  – момент от единичной нагрузки;  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки;  $E$  – модуль упругости первого рода материала балки;  $l$  – длина балки.

В общем случае аналитические выражения для  $M$  и  $\bar{M}$  могут быть различными на разных участках балки. В этом случае перемещение можно определить по следующей зависимости:

$$\Delta = \Sigma \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dz.$$

Вместо непосредственного вычисления интеграла Мора для прямолинейной балки можно применять графоаналитический способ, предложенный Верещагиным. Данный способ основан на перемножении площади эпюры от внешней нагрузки и на ординату эпюры от единичной нагрузки, находящейся под центром тяжести грузовой эпюры.

Определение перемещения с помощью интеграла Мора и по правилу Верещагина рассмотрим на конкретном примере.

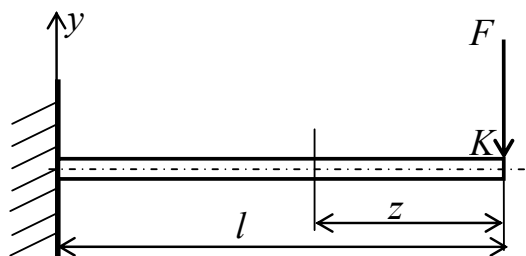


Рис. 83

Пусть на консольную балку (рис. 83) длиной  $l$  в точке  $K$  действует сила  $F$ . Уравнение изгибающего момента от внешней силы:

$$M = -Fz.$$

Приложим в точке  $K$  единичную нагрузку (рис. 84). Уравнение изгибающего момента от единичной нагрузки:

$$\bar{M} = -1z.$$

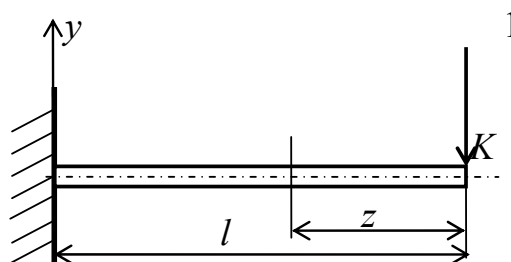


Рис. 84



Используя интеграл Мора, определим перемещение точки  $K$ :

$$y_K = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l Fz \cdot 1 dz = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

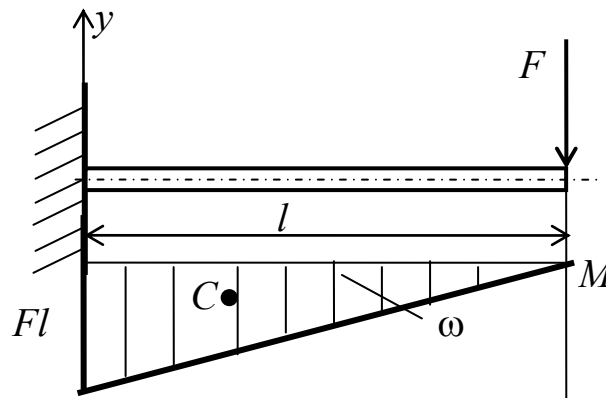


Рис. 85

Для определения перемещения по правилу Верещагина построим эпюры изгибающих моментов от силы  $F$  (рис. 85) и единичной силы (рис. 86).

Строим эпюру изгибающих сил от силы  $F$ :

$$M = -Fl.$$

Площадь грузовой эпюры

$$\omega = \frac{1}{2} Fl = \frac{1}{2} Fl^2.$$

Строим эпюру изгибающих моментов от единичной силы:

$$M_1 = -1l.$$

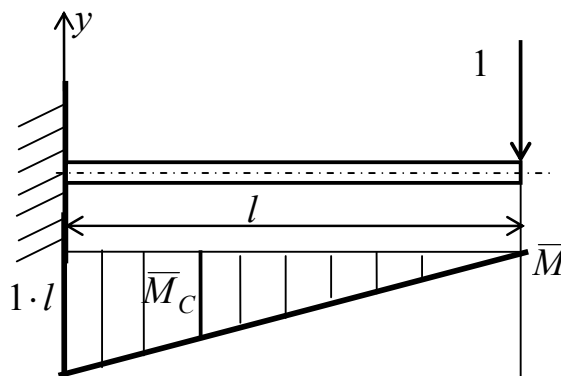


Рис. 86

Значение единичного момента под центром тяжести грузовой эшюры:

$$\bar{M}_C = \frac{2}{3}l.$$

Перемещение точки  $K$  определяем по следующей формуле:

$$y_K = \frac{1}{EI} \omega \bar{M}_C = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} Fl^2 \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Если необходимо определить угол поворота сечения  $\theta$ , то необходимо приложить единичный момент  $m = 1$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое балка?
2. Какие дифференциальные зависимости имеют место при изгибе?
3. Как определяются знаки поперечных сил и изгибающих моментов при построении эшюр?
4. Какая зависимость отражает статическую сторону задачи о чистом изгибе?
5. Как определяются нормальные напряжения при плоском поперечном изгибе?
6. По какой зависимости определяются касательные напряжения при плоском поперечном изгибе?
7. Как определяется потенциальная энергия деформации при чистом изгибе?
8. Какие виды перемещения балки бывают при плоском поперечном изгибе?
9. В чем различия в определении перемещения с помощью интеграла Мора и по правилу Верещагина?

## Гипотезы прочности

**Основные положения.** Для определения напряженного состояния в какой-либо точке тела нужно вокруг этой точки выделить элементарный параллелепипед. В общем случае по граням этого параллелепипеда будут действовать нормальные и касательные напряжения. Зная эти напряжения, можно определить главные площадки, по которым будут действовать только нормальные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , которые называются *главными напряжениями*.

Опыты показывают, что начало стадии пластических деформаций и характер разрушения зависит от модуля, знака и соотношения главных напряжений. Поэтому, чтобы судить о прочности материала при сложном напряженном состоянии, нужно знать в какой момент при той или иной комбинации главных напряжений наступает опасное состояние материала.

В связи с этим возникает задача, что, зная максимально допустимое напряжение при простом растяжении, найти равное эквивалентное ему напряжение из комбинации главных напряжений при сложном напряженном состоянии.

Единственным практическим путем решения этой задачи является установление общих критериев разрушения, которые позволили бы оценить опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряженном состоянии, используя лишь данные опытов на растяжение. Так как универсального критерия, позволяющего рассчитать предельное состояние для любого материала, нет, то было разработано несколько различных теорий прочности.

Гипотезы прочности представляют собой предположения о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора.

Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

*Эквивалентным напряжением* называется напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным заданному напряженному состоянию.

Заменяя сложное напряженное состояние эквивалентным растяжением, получаем возможность использовать при сложном напряженном состоянии условие прочности при простом растяжении:

$$\sigma_{\text{эkv}} \leq [\sigma_p].$$

**Гипотеза наибольших нормальных напряжений.** Эта гипотеза была выдвинута Галилеем 1638 г. и носит название первой теории прочности.

В основу теории наибольших напряжений положена гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине нормальных напряжений.

Согласно этой теории прочности, опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает в том случае, если наибольшее по модулю главное напряжение достигает предельного значения для заданного материала при простом растяжении (сжатии).

Условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = |\sigma_3| \leq [\sigma_{\text{сж}}].$$

Эта теория прочности дает положительные результаты лишь только в том случае, если главное напряжение  $\sigma_1$  по абсолютной величине значительно больше напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Она применяется лишь для некоторых хрупких материалов.

**Гипотеза наибольших линейных деформаций.** Эта гипотеза была выдвинута Мариоттом в 1682 г. и носит название второй теории прочности.

Согласно данной теории прочности, опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает в том случае, если наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает предельного значения при простом растяжении или сжатии.

Максимальные относительные деформации, согласно обобщенному закону Гука, определяются при растяжении и сжатии, соответственно, по зависимостям:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_{\text{max}} = |\varepsilon_3| = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)].$$

Предельное значение относительной деформации при растяжении

$$\varepsilon_{\text{пред}} = \frac{\sigma_B}{E}.$$

Откуда получаем:

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \sigma_B.$$

Тогда условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\text{экв}} = [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \leq [\sigma_{\text{сж}}].$$

Экспериментальная проверка данной гипотезы выявила ряд существенных недостатков, поэтому она не применяется для расчетов.

Следует отметить, что первая и вторая теории прочности не могут объяснить причин разрушения образца при одноосном сжатии.

**Гипотеза наибольших касательных напряжений.** Эта гипотеза была выдвинута Кулоном в 1773 г. и носит название третьей теории прочности.

Согласно данной теории прочности, опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает в том случае, если наибольшее касательное напряжение достигает значения, предельного для данного материала.

При объемном напряженном состоянии

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau] = \frac{[\sigma_p]}{2},$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_p].$$

Во многих практических случаях для расчета пластичных материалов третья теория прочности дает удовлетворительные результаты. Для хрупких материалов она не применима.

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p].$$

**Гипотеза энергии формоизменения.** Эта гипотеза была выдвинута Бельтрами в 1885 г. и Губером в 1904 г. и носит название четвертой теории прочности.

Согласно данной теории прочности, опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает в том случае, если удельная потенциальная энергия изменения формы достигает предельного для данного материала значения.

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы, выраженная через главные напряжения, определяется следующим уравнением:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Предельное значение при простом растяжении

$$u_{\phi.\text{пред}}^p = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2.$$

Условие прочности в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma_p].$$

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Как и третья теория прочности, дает удовлетворительные результаты для пластичных материалов. Для хрупких материалов она также не применима.

**Гипотеза прочности Мора (пятая теория прочности).** Гипотеза прочности Мора позволяет учесть различие в свойствах материала при растяжении и сжатии. Ее можно получить путем модификации гипотезы наибольших касательных напряжений.

Условие прочности по гипотезе Мора имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma_p]; \quad k \approx \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{сж}}]}.$$

Достаточно точные результаты гипотеза Мора дает для напряженных состояний, когда  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  имеют разные знаки.

Кроме рассмотренных теорий прочности в течение первой половины XX в. и до настоящего времени был предложен ряд новых теорий, однако, как правило, они базируются на одной из классических, но с введением дополнительных условий.

**Задача.** По граням элемента (рис. 87), выделенного в опасной точке балки и испытывающего деформацию изгиба, напряжения  $\sigma = 40$  МПа и  $\tau = 20$  МПа, определить эквивалентные напряжения по четырем теориям прочности.

*Решение*

Рассчитываем главные напряжения в опасной точке:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau}) = \frac{1}{2}(40 + \sqrt{40^2 + 4 \cdot 20^2}) = 48 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau}) = \frac{1}{2}(40 - \sqrt{40^2 + 4 \cdot 20^2}) = -8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0.$$

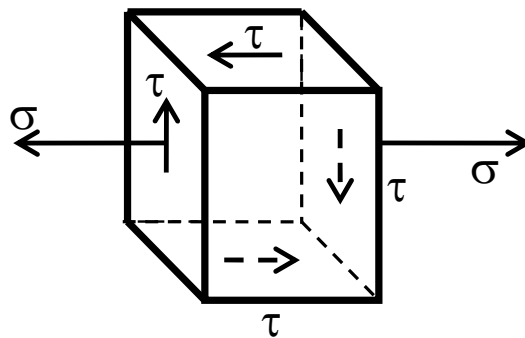


Рис. 87

Тогда эквивалентные напряжения, рассчитанные по различным теориям прочности, будут равны:

а) по первой теории:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 = 48 \text{ МПа};$$

б) по второй теории:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3) = 48 - 0,3(-8) = 50,4 \text{ МПа}.$$

в) по третьей теории:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 48 - (-8) = 56 \text{ МПа};$$

г) по четвертой теории:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[48^2 + (-8)^2 + (-8 - 48)^2]} = 52,4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

## **Контрольные вопросы**

1. С какой целью разрабатываются гипотезы прочности?
2. Для каких материалов дает удовлетворительный результат первая теория прочности?
3. Что положено в основу второй теории прочности?
4. Что позволяет учесть гипотеза Мора?
5. Что такое эквивалентное напряжение?



## Сложное сопротивление

**Понятие о сложном сопротивлении.** К сложному сопротивлению относятся такие виды нагружения бруса, при которых в поперечных сечениях возникают одновременно не менее двух внутренних силовых факторов. Исключением является поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя в сечениях возникает изгибающий момент и поперечная сила. Это связано с тем, что в большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость проводятся без учета влияния поперечной силы.

Случаи сложного сопротивления можно разделить на две группы.

К первой группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным. В эту группу относят косой изгиб (рис. 88, а), изгиб с растяжением (рис. 88, б), внецентренное растяжение–сжатие (рис. 88, в) и др.

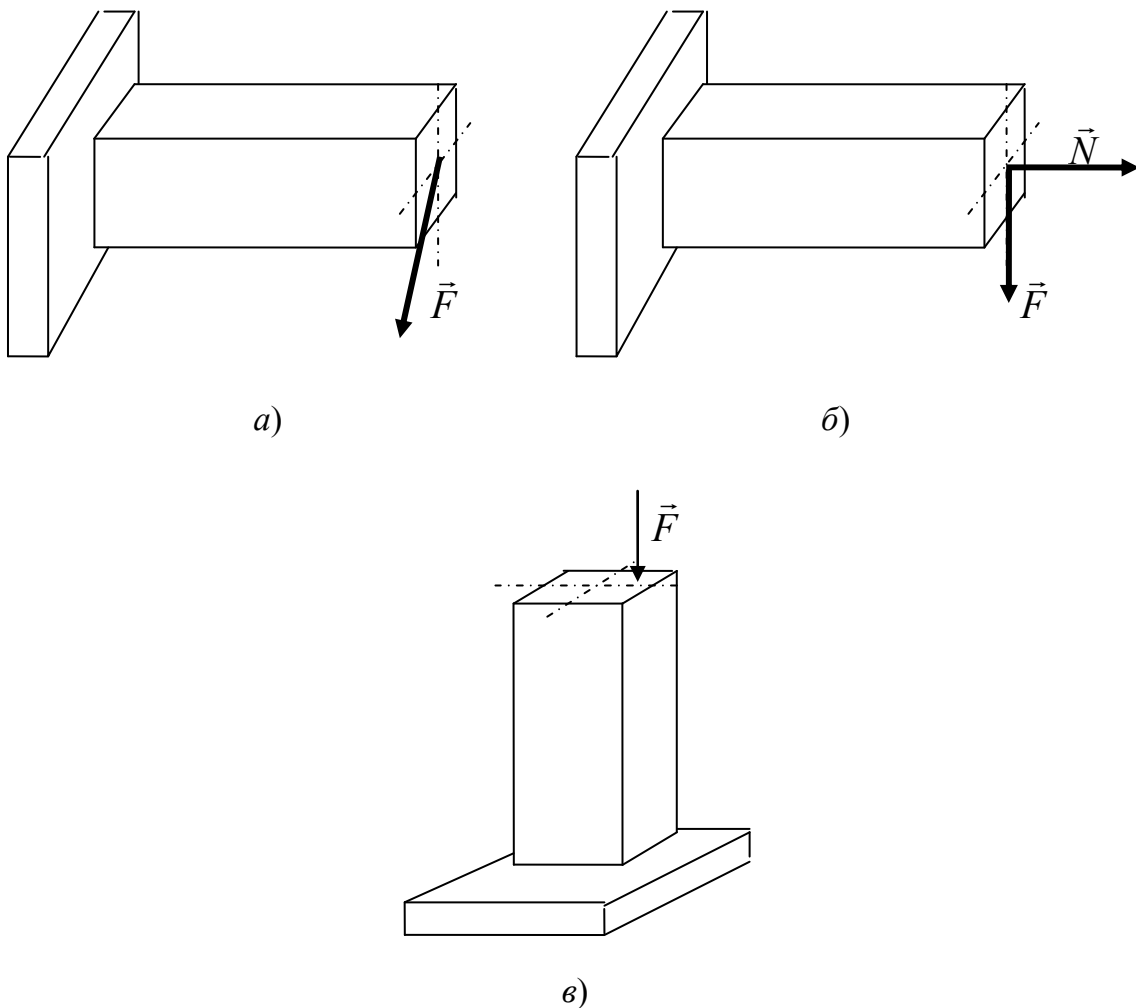


Рис. 88

При косом изгибе условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \leq [\sigma_p].$$

Условие прочности при изгибе с растяжением, пренебрегая действием поперечных сил, имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{N}{A} \leq [\sigma_p].$$

Ко второй группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда напряженное состояние является плоским. Например, изгиб с кручением (рис. 89, а), когда действует внешний вращающий момент  $T_e$  и сила  $F$ .

Для случая нагружения, относящегося к первой группе, в отличие от второй группы, нет необходимости в применении гипотез прочности.

**Изгиб с кручением.** На практике часто встречается брус круглого и некруглого сечения, подверженный одновременному действию крутящих и изгибающих моментов. Такому нагружению наиболее часто подвержены валы машин и механизмов.

Для расчета вала в таком случае необходимо в первую очередь установить опасные сечения. Для этого необходимо построить эпюры изгибающих (рис. 89, б) и крутящих моментов (рис. 89, в).

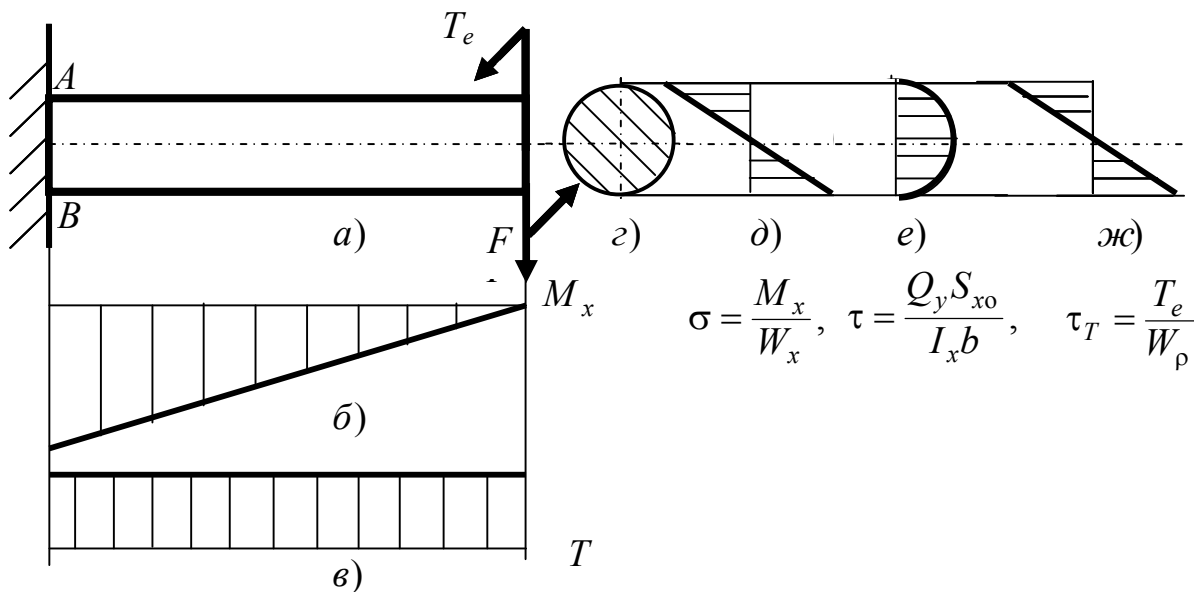


Рис. 89

Пользуясь принципом независимости действия сил, необходимо отдельно определить напряжения, возникающие в сечении вала (рис. 89, з) при изгибе и кручении.

При изгибе в поперечных сечениях вала возникают нормальные напряжения, достигающие наибольшего значения в крайних волокнах бруса (рис. 89, д):

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}$$

и касательные напряжения, достигающие наибольшего значения у нейтральной оси, определяемые по формуле Журавского (рис. 89, е):

$$\tau = \frac{Q_y S_{xo}}{I_x b}$$

От кручения в поперечных сечениях бруса возникают касательные напряжения, достигающие наибольшего значения в точках контура сечения:

$$\tau_T = \frac{T_e}{W_\rho}$$

Учитывая, что касательные напряжения от действия поперечной силы значительно меньше касательных напряжений от крутящего момента, поэтому ими пренебрегают.

Опасное сечение вала будет у заделки, где действуют максимальные напряжения от изгиба и кручения. Опасными точками будут точки *A* и *B*.

Рассмотрим напряженное состояние в наиболее опасной точке *A* (рис. 90). Так как напряженное состояние двухосное, то для проверки прочности необходимо применить одну из гипотез прочности.

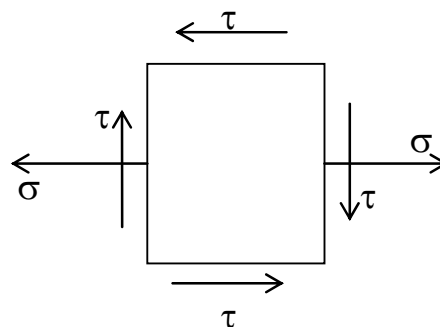


Рис. 90

Применим третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_T^2} \leq [\sigma_p].$$

Учитывая, что  $\sigma = \frac{M_x}{W_x}$  и  $\tau_T = \frac{T_e}{2W_x}$ , получаем:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{W_x} \leq [\sigma_p].$$

Отсюда для подбора сечения находим требуемый момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{[\sigma_p]}.$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности  $s$  вычисляется по формуле

$$s = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}} \geq [s].$$

### Контрольные вопросы

1. Какие виды нагружения бруса относятся к сложному сопротивлению?
2. Почему для второй группы сложного сопротивления необходимо применять теорию прочности?
3. Как определяется требуемый момент сопротивления сечения балки при расчете по третьей теории прочности?
4. По какой зависимости определяется коэффициент запаса прочности при проверочном расчете вала, испытывающего изгиб с кручением?

## Устойчивость сжатых стержней

Устойчивые и неустойчивые формы равновесия. Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкций выполнять предназначенные им функции в эксплуатационных режимах. Наряду с выполнением условий прочности и жесткости необходимо обеспечить и *устойчивость конструкций*.

При неизменной схеме нагружения под *устойчивостью* понимается свойство способности системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Значения внешних сил, при которых происходит потеря устойчивости, называются *критическими*.

Рассмотрим длинный тонкий стержень (рис. 91, а), нагруженный осевой сжимающей силой  $F$ . В этом случае возможны две формы равновесия стержня: прямолинейная и криволинейная. При малых значениях силы  $F$  стержень сжимается, оставаясь прямолинейным. Если его вывести из положения равновесия, то под действием упругих сил стержень, поколебавшись около положения равновесия, примет начальную форму. В этом случае устойчивой является прямолинейная форма (рис. 91, а).

Если увеличить сжимающую силу  $F$ , то при некотором ее значении отклоненный от вертикального положения стержень не возвратится к первоначальному положению по устранению причины, отклонившей его. В этом случае устойчивой является криволинейная форма равновесия (рис. 91, б).

Значение силы, при которой первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется *критической силой*. Наименьшее значение сжимающей силы, при котором сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму устойчивого равновесия, также называют *критической силой* и обозначают  $F_{кр}$ .

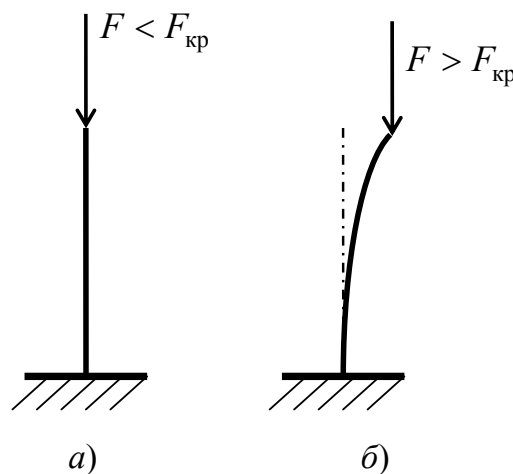


Рис. 91

**Определение критической силы. Формула Эйлера.** Рассмотрим решение задачи об устойчивости сжатого стержня силой  $F_{кр}$ , у которого оба конца закреплены шарнирно (рис. 92). Стержень искривился так, что в сечении  $z$  прогиб составил  $y$ .

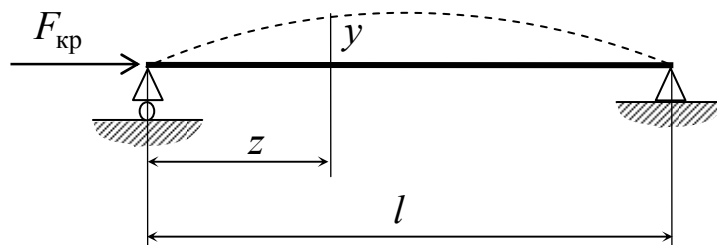


Рис. 92

Записывая дифференциальное уравнение упругой линии балки и ограничиваясь рассмотрением только малых перемещений, имеем:

$$EI_x y''(z) = M_x(z),$$

где  $I_x = I_{\min}$  – минимальный момент инерции сечения.

Изгибающий момент  $M_x(z)$ , действующий в поперечном сечении стержня, расположенного на расстоянии  $z$  от начала системы координат, будет равен:

$$M_x = -F_{кр} y.$$

При положительном прогибе в выбранной системе координат знак «минус» означает, что момент является отрицательным. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в направлении минимальной жесткости в этом случае будет иметь вид:

$$EI_{\min} y'' + F_{кр} y = 0.$$

Обозначая  $\frac{F_{кр}}{EI_{\min}} = k^2$ , получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно прогиба  $y$ :

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = A \cos kz + B \sin kz,$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяем из условий равенства нулю прогибов стержня на опорах. В этом случае имеем: при  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $A = 0$ ;  $z = l$ ,  $y = 0$ ,  $B \sin kl = 0$ . Последнее соотношение справедливо при  $kl = \pi n$  ( $n$  – любое целое число).

Откуда  $k = \frac{\pi n}{l}$ , с учетом принятого ранее обозначения, получим:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 I_{\text{min}} E n^2}{l^2}.$$

Минимальное действительное значение критической силы получится при  $n = 1$ .

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 I_{\text{min}} E}{l^2},$$

Данная зависимость является *формулой Эйлера* для определения критической силы.

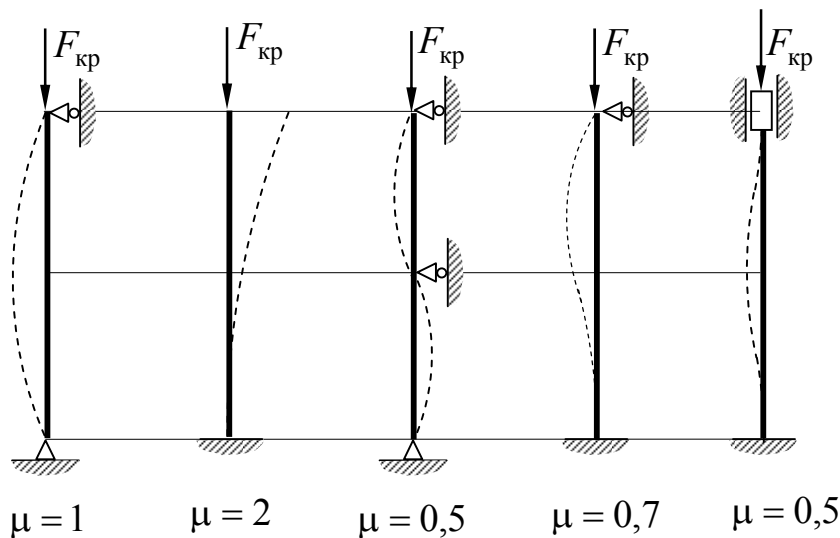


Рис. 93

**Влияние способов закрепления концов стержня.** Формула Эйлера получена для случая шарнирного закрепления концов стержня, когда потеря устойчивости происходит по одной полуволне. При других способах закрепления концов стержня критическая сила определяется также по формуле Эйлера, которая записывается следующим образом:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 I_{\text{min}} E}{(\mu l)^2},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня (рис. 93).

Критическое напряжение в сечении стержня равно:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – минимальный радиус инерции;  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  – гибкость стержня.

**Пределы применимости формулы Эйлера.** При выводе формулы для критических сил и напряжений, использовалось приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, которое было получено в предположении, что материал стержня подчиняется закону Гука. Таким образом, формулу Эйлера можно применять только для значений напряжений, меньших или равных пределу пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

откуда

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}}}.$$

Таким образом, формула Эйлера может применяться при условии:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}}}.$$

В случаях, когда гибкость стержня  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , критическое напряжение определяется по эмпирическим зависимостям. Ясинским была предложена следующая формула для критических по устойчивости напряжений:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где  $a, b$  – постоянные величины, зависящие от материала стержня.



Различают два вида расчета на устойчивость сжатых стержней – *проверочный* и *проектировочный*.

**Проверочный расчет сжатых стержней.** Порядок проверочного расчета на устойчивость при использовании таблицы коэффициентов  $\varphi$  следующий:

1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения, определяют наименьший осевой момент инерции сечения  $I_{\min}$  и площадь  $A$ ;

2) вычисляют минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

и гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}};$$

3) по таблице находят коэффициент  $\varphi$  и вычисляют допускаемое напряжение на устойчивость по формуле

$$[\sigma_{\text{кр}}] = \varphi[\sigma];$$

4) сравнивают действительное напряжение  $\sigma = \frac{F}{A}$  с допускаемым напряжением  $[\sigma_{\text{кр}}]$  на устойчивость:

$$\sigma \leq [\sigma_{\text{кр}}].$$

**Проектировочный расчет.** В расчетной формуле на устойчивость  $\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]$  имеются две неизвестные величины — коэффициент  $\varphi$  и искомая площадь брутто  $A$  поперечного сечения. Поэтому при подборе сечений пользуются методом последовательных приближений, путем изменения величины коэффициента  $\varphi$ . Обычно в первой попытке принимают  $\varphi = 0,5$ , определяют требуемую площадь  $A$  и подбирают сечение. Для подобранного сечения рассчитывают фактическое значение  $\varphi_1$ . Если  $\varphi_1$  значительно отличается от  $\varphi$ , то и напряжение отличается от допускаемого. В этом случае расчет повторяют, приняв среднее по величине значение между  $\varphi$  и  $\varphi_1$ :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2}.$$

Обычно при подборе сечений требуется не более двух-трех попыток.

**Задача.** Проверить на устойчивость сжатую деревянную колонну (рис. 94) квадратного поперечного сечения со стороной  $a = 150$  мм, длиной стержня  $l = 5$  м, если основное допускаемое напряжение  $[\sigma] = 10$  МПа, а сжимающая сила  $F = 100$  кН.

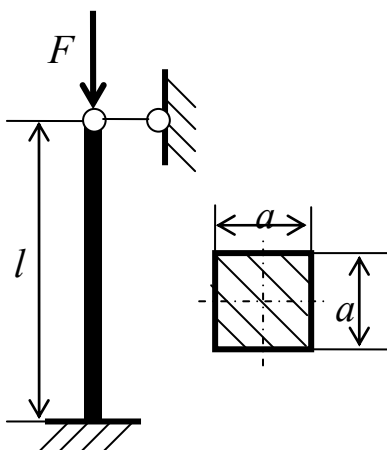


Рис. 94

*Решение*

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = a^2 = 15^2 = 225 \text{ см}^2.$$

Момент инерции сечения стержня

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4210 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции сечения

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4210}{225}} = 4,34 \text{ см.}$$

Приведенная длина стержня

$$l_{\text{пр}} = \mu l = 0,7 \cdot 500 = 350 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{пр}}}{i} = \frac{350}{4,34} = 80,6.$$

По гибкости стержня по таблице определяем коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения  $\varphi = 0,474$ .

Тогда

$$[\sigma_{кр}] = \varphi[\sigma] = 0,474 \cdot 10 = 4,74 \text{ МПа.}$$

Напряжение в сечении от действия внешней нагрузки

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{100 \cdot 10^3}{225 \cdot 10^2} = 4,44 \text{ МПа.}$$

Так как  $\sigma < [\sigma_{кр}]$ , то устойчивость колонны обеспечена.

### **Контрольные вопросы**

1. Что понимается под устойчивостью конструкции?
2. Какая сила называется критической силой?
3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение упругой линии балки?
4. По какой зависимости определяется критическая сила?
5. Как учитывается влияние закрепления концов на устойчивость стержня?
6. Какой величиной ограничивается применение формулы Герца при расчете на устойчивость?
7. Какой вид имеет зависимость, предложенная Ясинским, для определения критического напряжения?
8. Какие виды расчета на устойчивость сжатых стержней существуют и в чем их разница?

## Прочность при переменных напряжениях

**Механизм усталостного разрушения.** В процессе эксплуатации большинство деталей машин и механизмов подвергаются циклически изменяющимся во времени воздействиям. Несмотря на то что значение возникающих в деталях машин максимальных напряжений меньше предела прочности, спустя некоторое время при действии переменного напряжения в них возникают трещины, и они разрушаются.

Физические причины усталостного разрушения до конца не изучены. Одной из основных причин усталостного разрушения принято считать образование трещин.

Микротрещина образуется в зоне повышенных напряжений, обусловленных конструктивными, технологическими или структурными факторами. При многократном изменении напряжений кристаллы, расположенные в зоне микротрещины, начинают разрушаться, и она проникает вглубь тела.

Поперечное сечение в результате развития трещины ослабляется и на последнем этапе происходит внезапное разрушение. Излом при этом имеет характерную поверхность с чистыми неповрежденными кристаллами.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к разрушению, называется *усталостью*. Свойство материала противостоять усталости называется *выносливостью*.

**Основные характеристики цикла.** Многие детали машин работают в условиях переменных, периодически изменяющихся во времени напряжений.

*Периодическим напряжением* называется переменное напряжение с установившимся во времени характером изменения, значения которого повторяются через определенный период времени.

*Цикл напряжений* – это совокупность всех значений напряжений за время одного периода изменения нагрузки.

При рассмотрении периодического циклического напряжения обычно ограничиваются синусоидальным законом его изменения (рис. 95), время цикла которого  $T_{\text{цикл}}$ .

Среднее напряжение и амплитуда переменного напряжения цикла определяются по зависимостям:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Максимальное и минимальное напряжения цикла равны:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

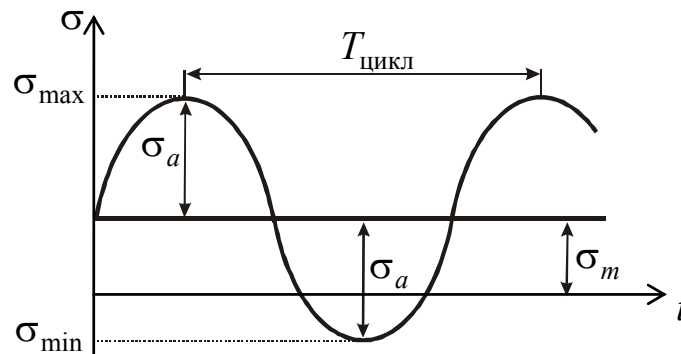


Рис. 95

Для характеристики циклов нагружения используются коэффициент асимметрии цикла  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ .

Если  $r = -1$ , то цикл называется *симметричным*.

Если  $r \neq -1$ , то цикл называется *асимметричным*.

Если  $r = 0$ , то цикл называется *отнулевым*, или *пульсирующим*.

**Кривая усталости. Предел выносливости.** Характеристики материала, связанные со спецификой циклического изменения напряжения, определяются экспериментально путем испытаний на усталость.

Наиболее распространенными являются испытания в условиях симметричного цикла. При этом обычно используется принцип чистого изгиба вращающегося образца (рис. 96).

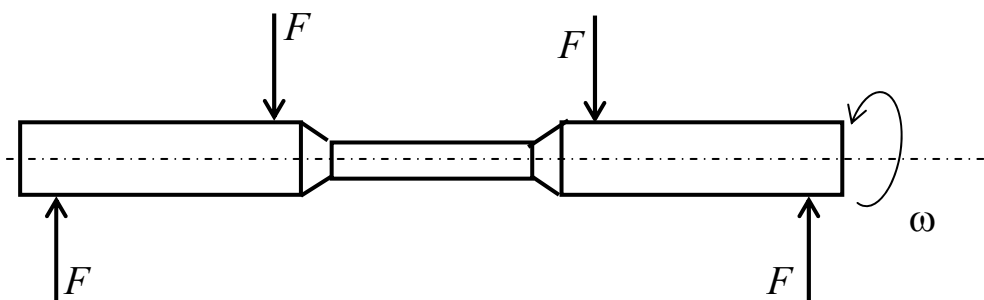


Рис. 96

Для испытаний в условиях несимметричных циклов используются либо специальные машины, либо вводятся дополнительные приспособления. Так, можно на испытуемом образце установить пружины

ну, создающую постоянное растяжение образца с напряжением  $\sigma_m$ . Во время испытания на это напряжение накладывается напряжение от изгиба, меняющееся по симметричному циклу.

Путем многократных испытаний определяется число циклов, которое выдерживает образец до разрушения, в зависимости от величины напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении образца. Эта зависимость имеет вид кривой (рис. 97).

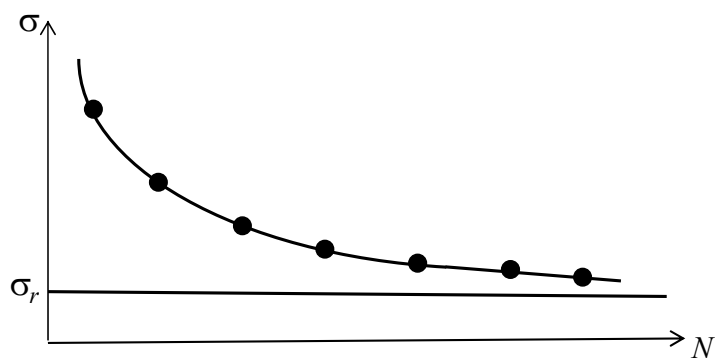


Рис. 97

Эту кривую называют *кривой усталости*, или *кривой Велера*, немецкого ученого, создавшего первую машину на испытание на усталость.

Как показывают опыты, для большинства черных металлов можно определить такое наибольшее максимальное напряжение, при котором материал не разрушается при любом числе циклов. Такое напряжение называется *пределом усталости*, или *пределом выносливости*.

Предел выносливости обозначается через  $\sigma_r$ , где индекс  $r$  соответствует коэффициенту цикла напряжений. Предел выносливости для симметричного цикла имеет обозначение  $\sigma_{-1}$ , а для пульсирующего —  $\sigma_0$ .

Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей не удастся установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы в дальнейшем. Поэтому в подобных случаях вводится понятие условного предела выносливости. За *условный предел выносливости* принимается напряжение, при котором образец способен выдержать  $10^8$  циклов.

Так как определение предела выносливости является трудоемкой операцией, то его обычно определяют по эмпирическим зависимостям через известные механические характеристики материала.

Для сталей предел выносливости при изгибе составляет примерно половину от предела прочности материала:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \dots 0,5) \sigma_B.$$

Для высокопрочных сталей можно принять:

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6} \sigma_B.$$

Для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 \dots 0,5) \sigma_B.$$

Аналогично испытанию на чистый изгиб можно вести испытание на кручение в условиях циклически изменяющихся напряжений. В этом случае

$$\tau_{-1} \approx (0,2 \dots 0,3) \sigma_B.$$

**Факторы, влияющие на сопротивление усталостному разрыву.** На величину предела выносливости влияют: форма детали, качество обработки поверхности, абсолютные размеры детали, вид цикла изменения напряжений, частота циклов, эксплуатационные и другие факторы.

Влияние формы детали (концентрации напряжений) учитывается эффективным коэффициентом концентрации:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}; \quad k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}},$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости стандартного образца при испытании на изгиб;  $\sigma_{-1k}$  – предел выносливости образца при испытании на изгиб с концентратором;  $\tau_{-1}$  – предел выносливости стандартного образца при испытании на кручение;  $\tau_{-1k}$  – предел выносливости образца при испытании на кручение с концентратором.

Влияние абсолютных размеров учитывается масштабным фактором:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}}; \quad \varepsilon_\tau = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{-1}},$$

где  $\sigma_{-1д}$  – предел выносливости образца заданного размера при испытании на изгиб;  $\tau_{-1д}$  – предел выносливости образца заданного размера при испытании на кручение.

Чем больше размер образца, тем предел выносливости ниже.

Влияние качества обработанной поверхности учитывается коэффициентом качества поверхности:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1п}}{\sigma_{-1}}; \beta_{\tau} = \frac{\tau_{-1п}}{\tau_{-1}},$$

где  $\sigma_{-1п}$  – предел выносливости образца с заданной обработкой поверхности при испытании на изгиб;  $\tau_{-1п}$  – предел выносливости образца с заданной обработкой поверхности при испытании на кручение.

Данный коэффициент учитывает вид механической, термической, химической и других видов обработки поверхности детали.

**Определение коэффициента запаса прочности.** Коэффициенты запаса прочности по нормальным  $n_{\sigma}$  и касательным  $n_{\tau}$  напряжениям вычисляются по зависимостям:

– при симметричном цикле напряжений:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}}\sigma_{\max}}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}}\tau_{\max}};$$

– при несимметричном цикле напряжений:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}}\sigma_{\max} + \psi_{\sigma}\sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}}\tau_{\max} + \psi_{\tau}\tau_m},$$

где  $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$  – эмпирические величины, определяемые на основе обработки экспериментальных данных.

При сложном напряженном состоянии, возникающем, например, при кручении с изгибом, коэффициент запаса прочности определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда:

$$n = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

Деталь считается работоспособной, если коэффициент запаса прочности

$$n > [n] = 1,5 \dots 2,5.$$



Минимальное значение коэффициента запаса прочности  $[n]$  устанавливаются, основываясь на опыте эксплуатации определенного типа деталей машин.

**Задача.** В опасном сечении вала, изготовленного из стали 45 нормализованной, для которой предел прочности  $\sigma_b = 800$  МПа, действуют изгибающий момент  $M = 30,44$  Н·м и крутящий момент  $T = 60$  Н·м. Концентратором напряжений является шпоночный паз. Нормальные напряжения изменяются по симметричному закону, а касательные напряжения – по отнулевому.

*Решение*

Пределы выносливости стали при симметричном цикле нагружения:

$$\sigma_{-1} = 0,43\sigma_b = 0,43 \cdot 800 = 344 \text{ МПа}; \quad \tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1} = 0,58 \cdot 344 = 199 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты, входящие в формулы для определения коэффициентов запаса прочности, выбираются по справочникам с учетом размеров детали и механических характеристик материала, из которого она изготовлена.

Коэффициенты концентрации напряжений при наличии шпоночного паза:  $k_\sigma = 1,8$ ;  $k_\tau = 1,7$ .

Коэффициенты масштабного фактора:

$$\varepsilon_\sigma = 0,92 - \frac{0,92 - 0,88}{10} 5 = 0,9; \quad \varepsilon_\tau = 0,83 - \frac{0,83 - 0,77}{10} 5 = 0,8.$$

Коэффициенты, учитывающие влияние качества поверхности:

$$\beta_\sigma = \beta_\tau = 0,95.$$

Коэффициенты, учитывающие влияние постоянной цикла на усталость:

$$\psi_\sigma = 0,2; \quad \psi_\tau = 0,1.$$

Моменты сопротивления сечения изгибу и кручению с учетом размера шпоночного паза:

$$W_{и} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt_1(d-t_1)}{2d} = \frac{3,14 \cdot 25^3}{32} - \frac{8 \cdot 4(25-4)}{2 \cdot 25} = 1520 \text{ мм}^3;$$

$$W_{к} = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt_1(d-t_1)}{2d} = \frac{3,14 \cdot 25^3}{16} - \frac{8 \cdot 4(25-4)}{2 \cdot 25} = 3053 \text{ мм}^3.$$

Амплитуды нормальных и касательных напряжений цикла:

$$\sigma_a = \frac{M_2}{W_{и}} = \frac{30440}{1520} = 20 \text{ МПа}; \tau_a = \frac{T}{2W_{к}} = \frac{60000}{2 \cdot 3053} = 9,8 \text{ МПа}.$$

Средние нормальные и касательные напряжения цикла:

$$\sigma_m = 0; \tau_m = \tau_a = 9,8 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям:

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{344}{\frac{1,8}{0,9 \cdot 0,95} 20 + 0,2 \cdot 0} = 8,17;$$
$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} = \frac{199}{\frac{1,7}{0,8 \cdot 0,95} 9,8 + 0,1 \cdot 9,8} = 9,72.$$

Определяем общий коэффициент безопасности по усталостной прочности в опасном сечении по зависимости:

$$s = \frac{s_{\sigma} s_{\tau}}{\sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}} = \frac{8,17 \cdot 9,72}{\sqrt{8,17^2 + 9,72^2}} = 6,25 > [s] = 2,5.$$

Условие усталостной прочности вала выполняется.

### Контрольные вопросы

1. Как изображаются симметричный и отнулевой циклы переменны напряжений?
2. Какими параметрами характеризуется цикл напряжений?
3. Как строится кривая усталости?
4. Что называется пределом выносливости?
5. Как определяются коэффициенты запаса прочности?

## Соединения зацеплением

**Шпоночные соединения. Общие сведения.** Соединение двух соосных цилиндрических деталей (вала и ступицы) для передачи вращающего движения между ними осуществляется с помощью шпонки – специальной детали, закладываемой в пазы соединяемых вала и ступицы.

На основные виды шпонок имеются ГОСТы, которые предусматривают размеры их поперечных сечений и соответствующих пазов в валу и втулке в зависимости от диаметра вала. Длина шпонки выбирается исходя из длины ступицы, но ее исполнительная длина должна быть стандартной.

Шпоночные соединения разделяют на соединения ненапряженные и напряженные.

Наибольшее распространение получили ненапряженные шпоночные соединения, сочетающиеся с посадкой ступицы на вал с гарантированным натягом, которые обеспечивают хорошее центрирование и высокую работоспособность соединения.

К ненапряженным шпоночным соединениям относятся соединения призматической шпонкой, сегментной шпонкой и круглой шпонкой.

К напряженным шпоночным соединениям относятся соединения клиновыми шпонками (рис. 98). К ним относятся соединения врезной клиновой шпонкой, шпонкой на лыске, фрикционной шпонкой и тангенциальной шпонкой. Клиновые шпонки создают напряженное соединение и могут передавать вращающий момент, осевую силу и ударные нагрузки.

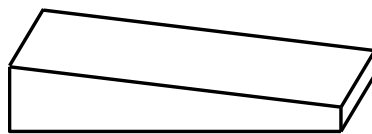


Рис. 98

Область применения клиновых шпонок ограничена по следующим причинам:

- 1) они вызывают радиальные смещения оси ступицы по отношению к оси вала, что приводит к биению насаженной детали;
- 2) не обеспечивают необходимой прочности соединения в том случае, когда вал работает с реверсивным движением, которое вызывает ослабление шпоночного соединения;
- 3) вызывает большую концентрацию напряжений в углах паза.

В точном машиностроении и в ответственных соединениях их не применяют.

В отличие от призматических шпонок, у клиновых шпонок рабочими гранями являются широкие грани, а на боковых гранях имеется зазор. Одна из широких граней шпонки имеет по длине уклон 1:100, обеспечивающий самоторможение клиновой шпонки.

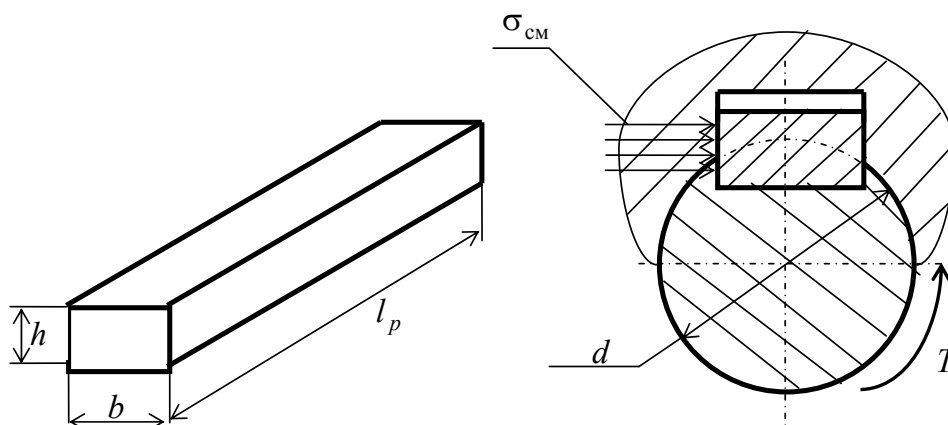


Рис. 99

**Призматическая шпонка.** Соединения призматической шпонкой получили наибольшее распространение. Эти шпонки (рис. 99) имеют прямоугольное поперечное сечение. Размеры  $b \times h$  этих шпонок и пазов в вале и ступице регламентированы ГОСТом 23360–78 в зависимости от диаметра вала. Размеры  $b \times h$  подобраны таким образом, что среза шпонки не происходит, поэтому шпонку проверяют по напряжениям смятия. При расчете принимается, что сила давления ступицы на выступающую часть шпонки равномерно распределена как по высоте, так и по длине шпонки.

Условие прочности на смятие в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{dl_p(h-t_1)} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $T$  – вращающий момент, передаваемый валом;  $d$  – диаметр вала;  $h$  – высота шпонки;  $t_1$  – глубина шпоночного паза в валу;  $l_p$  – рабочая длина шпонки.

**Соединение сегментной шпонкой.** Сегментные шпонки (рис. 100) имеют переменное поперечное сечение и создают ненапряженное соединение. Размеры сегментных шпонок регламентированы ГОСТом 24071–80. Они имеют более глубокую посадку, что способ-

стствует сохранению устойчивого положения в пазу вала, в результате этого отсутствует перекося детали на валу.

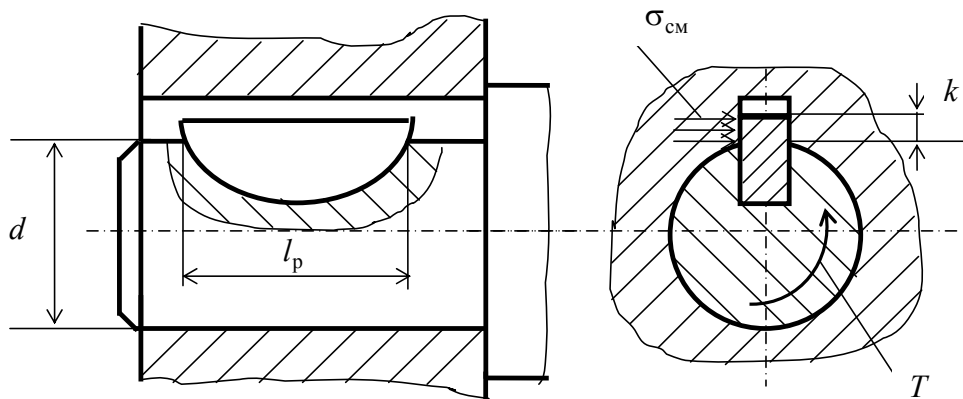


Рис. 100

Шпонка сегментного профиля находит применение в машиностроении вследствие легкости изготовления шпонки и паза, а также удобства сборки. Однако глубокий паз существенно ослабляет вал, что ограничивает область их применения. Обычно соединения сегментными шпонками применяются для закрепления деталей на мало нагруженных участках вала при его небольших диаметрах (до 44 мм).

Условие прочности на смятие для сегментной шпонки аналогичное, как и для призматической шпонки:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{d l_p k} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $k$  – высота выступающей части шпонки.

**Соединение цилиндрической шпонкой.** Эти шпонки (рис. 101) применяют только при расположении ступицы на конце вала, преимущественно на валах малой длины.

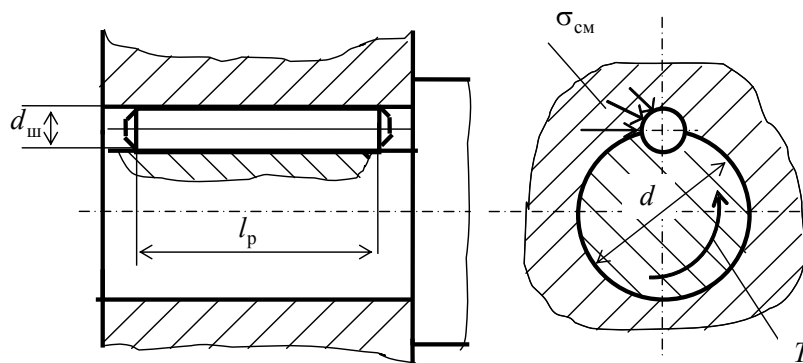


Рис. 101

Отверстия под шпонку сверлят и обрабатывают разверткой после посадки ступицы на вал. Цилиндрическую шпонку устанавливают в отверстие с натягом, что приводит к появлению радиальной распорной силы. Для выхода воздуха из замкнутого объема при запрессовке на поверхности цилиндрической шпонки предусматривают канавку.

При расчете на прочность цилиндрических шпонок принимается, что силы давления вала на шпонку и шпонки на ступицу распределены по дугам давления косинусоидально, а по длине шпонки – равномерно.

Условие прочности шпонки на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{5T}{dd_{\text{ш}}l_p} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $d_{\text{ш}}$  – диаметр шпонки;  $l_p$  – расчетная длина шпонки.

**Клиновидная врезная шпонка.** При соединении врезной клиновидной шпонкой (рис. 102) впадина паза на валу не имеет уклона относительно оси вала, а впадина паза в ступице имеет по длине уклон относительно оси, соответствующий уклону клина.

Допустимая сила между клиновидной шпонкой и валом определяется из расчета на смятие по треугольной по ширине шпонки эпюре давлений, которая образуется в результате забивки шпонки и действия вращающего момента.

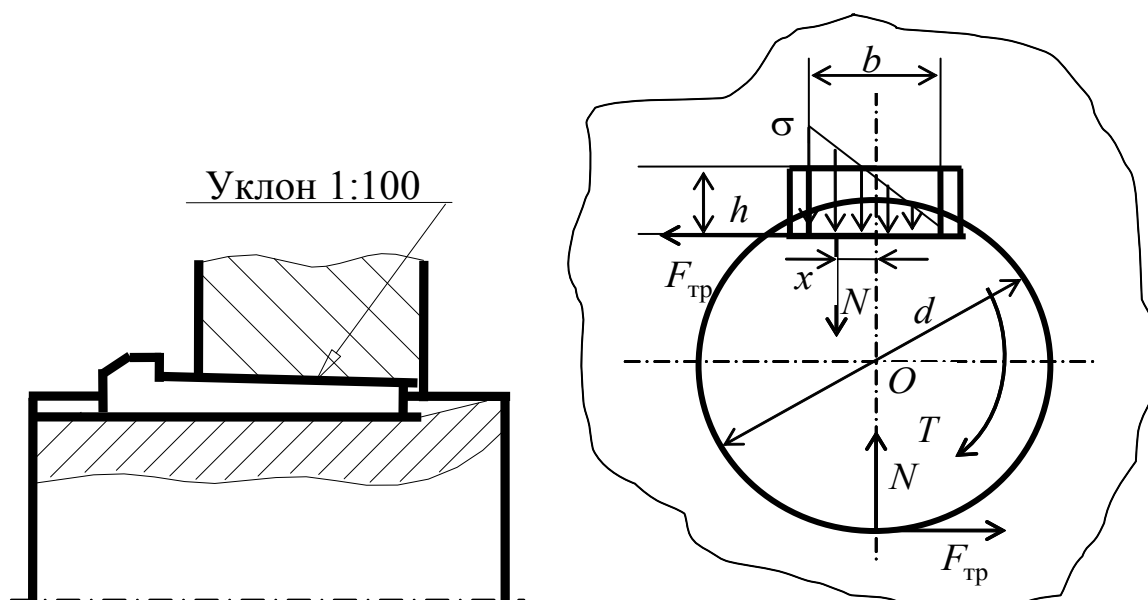


Рис. 102

Рассмотрим условия равновесия вала. Составим уравнение равновесия моментов всех сил относительно точки  $O$ :

$$T - Nx - F_{\text{тр}}d = 0,$$

где  $N = \frac{\sigma}{2}bl_p$  – равнодействующая нормальных сил;  $b$  – ширина клиновой шпонки;  $l_p$  – расчетная длина шпонки;  $x = \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}b = \frac{b}{6}$  – плечо равнодействующих нормальных сил;

$$F_{\text{тр}} = Nf = \frac{\sigma}{2}bl_p f \text{ – результирующая сила трения,}$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Подставляя эти значения в уравнение равновесия и решая его относительно  $\sigma$ , получим условие прочности соединения врезной клиновой шпонкой на смятие:

$$\sigma = \frac{12T}{bl_p(b + 6fd)} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

**Шпонка на лыске.** Для установки шпонки на лыске (рис. 103) на валу выполняется плоский срез (лыска). Такая обработка значительно меньше ослабевает вал.

В ступице устанавливаемой детали делается паз с уклоном 1:100. Эти соединения применяются в соединениях, передающих небольшие нагрузки в не очень точных механизмах.

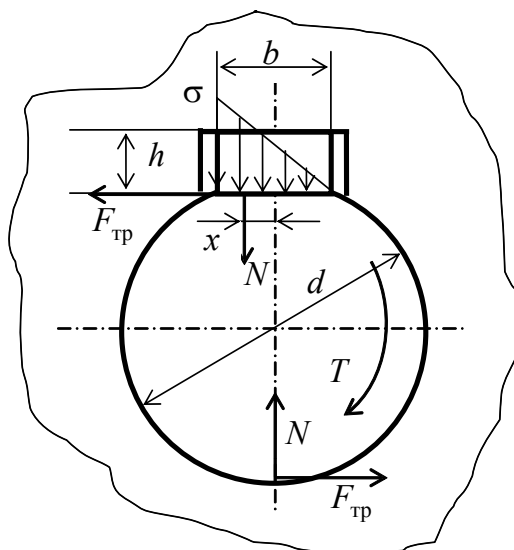


Рис. 103

Расчетная схема и, следовательно, условие прочности на смятие соединения шпонкой на лыске аналогичны, как и для соединения клиновой врезной шпонки:

$$\sigma = \frac{12T}{bl_p(b + 6fd)} \leq [\sigma_{см}].$$

**Фрикционная шпонка.** Соединения фрикционной шпонкой (рис. 104) также применяются для передачи небольших нагрузок, если требуется часто передвигать ступицу вдоль вала или смещать в угловом направлении. Нагрузка в соединении с фрикционной шпонкой передается только за счет трения, возникающего на контактируемых поверхностях. Поэтому это соединение можно использовать как предохранительное при перегрузках.

Грань фрикционной шпонки, которая соприкасается с валом, выполняется в виде цилиндрической поверхности, радиус которой равен радиусу вала. Достоинство фрикционной шпонки заключается в том, что ее применение не приводит к ослаблению сечение вала. Она требует лишь паза в ступице устанавливаемой детали с уклоном 1:100. Несоющая способность фрикционной шпонки меньше, чем врезной.

При расчете прочности соединения фрикционной шпонкой делается допущение, что момент сил трения, приложенный к фрикционной шпонке, не изменяет формы первоначальной эпюры напряжений  $\sigma$ .

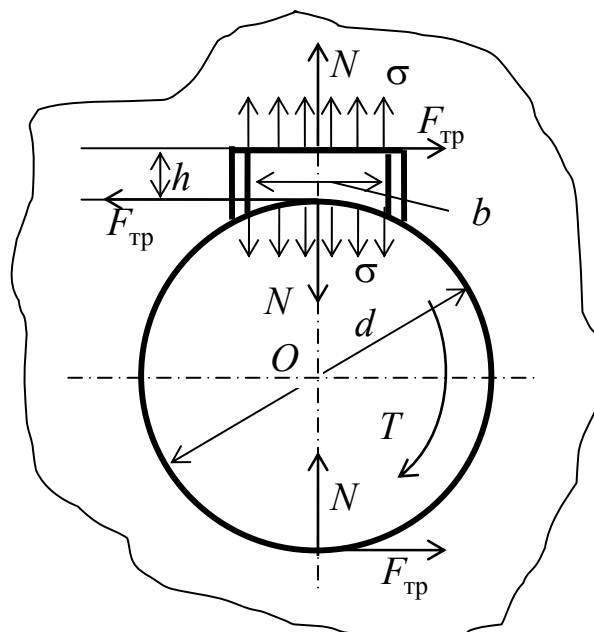


Рис. 104



Уравнение равновесия моментов всех сил, действующих на вал, относительно точки  $O$  имеет вид:

$$T - F_{\text{тр}}d = 0,$$

где  $F_{\text{тр}} = Nf = \sigma b l_p f$  – результирующая сила трения;  $b$  – ширина фрикционной шпонки;  $l_p$  – расчетная длина шпонки;  $f$  – коэффициент трения.

Подставляя значение  $F_{\text{тр}}$  в уравнение равновесия и решая его относительно  $\sigma$ , получим условие прочности соединения фрикционной шпонкой на смятие:

$$\sigma = \frac{T}{b l_p d} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

**Тангенциальная шпонка.** Данная шпонка (рис. 105) состоит из двух односкосных клиньев, прижатых друг к другу скошенными гранями. Узкие грани шпонки параллельны и являются рабочими. Параллельность рабочих граней позволяет изготавливать пазы на валу и в ступице без уклона. В сечении соединения одна из широких граней шпонки располагается касательно к окружности вала. Тангенциальные шпонки встречаются в валах больших диаметров, передающих значительные знакопеременные крутящие моменты.

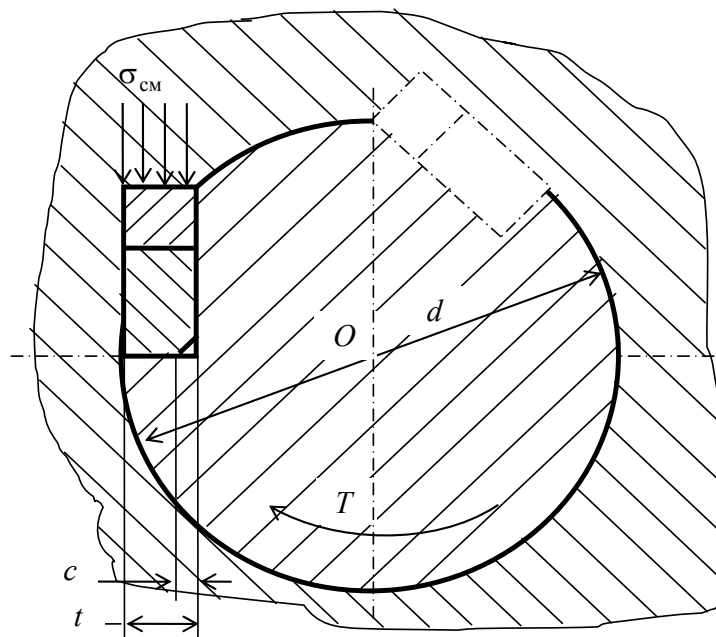


Рис. 105

При расчете на прочность соединения тангенциальной шпонкой принимается, что вся нагрузка со стороны ступицы на шпонку воспринимается ее узкой гранью. Трением между поверхностями ступицы и вала, возникающим при заклинивании шпонок, пренебрегают.

Из уравнения равновесия моментов всех сил, действующих на вал, относительно точки  $O$ :

$$T - F \frac{(d-t)}{2} = T - \sigma(t-c)l_p \frac{(d-t)}{2} = 0$$

условие прочности на смятие соединения тангенциальной шпонкой имеет вид:

$$\sigma = \frac{2T}{(t-c)l_p(d-t)} \leq [\sigma_{см}],$$

где  $t$  – толщина шпонки;  $l_p$  – рабочая длина шпонки;  $c$  – ширина фаски.

**Материалы и допускаемые напряжения.** Материалом для шпонок в основном служат углеродистые стали марок: Ст.5, Ст.6, 45 с пределом прочности  $\sigma_B \geq 500$  МПа.

Величина допускаемых напряжений на смятие  $[\sigma_{см}]$  выбирается в зависимости от характера действующей нагрузки и условий работы соединения:

$[\sigma_{см}] = 120...160$  МПа – при неподвижном соединении для сопрягаемых элементов из чугунного литья, стального литья и стали, работающих на постоянном режиме нагружения;

$[\sigma_{см}] = 60...100$  МПа – при неподвижном соединении для сопрягаемых элементов из чугунного литья, стального литья и стали, работающих в условиях знакопеременных нагрузок с ударами;

$[\sigma_{см}] = 150$  МПа – втулка перемещается без нагрузки;

$[\sigma_{см}] = 30...50$  МПа – соединение подвижное, под нагрузкой, рабочие поверхности не закалены;

$[\sigma_{см}] = 10$  МПа – шпонки ходовых валиков.

**Шлицевые соединения. Общие сведения.** Шлицевые соединения (рис. 106) можно рассматривать как многошпоночные, когда шпонки выполнены заодно с валом. Шлицевые соединения имеют ряд преимуществ по сравнению со шпоночными соединениями:

1) детали, установленные на шлицевых валах, лучше центрируются и имеют более точное направление при перемещении вдоль оси вала;

- 2) обеспечивается возможность передачи большего вращающего момента;
- 3) значительно меньше ослабление вала;
- 4) выше прочность шлицевых валов при действии динамических нагрузок.

Шлицевые соединения нашли широкое применение в автотракторной, станкостроительной и самолетостроительной промышленности.

Шлицевые соединения подразделяются на подвижные и неподвижные. По форме шлицов различают шлицевые соединения с прямоугольным (рис. 106, *а*), эвольвентным (рис. 106, *б*) и треугольным профилем (рис. 106, *в*).

Соединения с прямоугольным профилем шлица в настоящее время получили наибольшее распространение.

Шлицевые соединения с эвольвентным профилем шлица являются перспективными, так как обладают повышенной точностью и технологичностью, создают меньшую концентрацию напряжений у основания шлица.

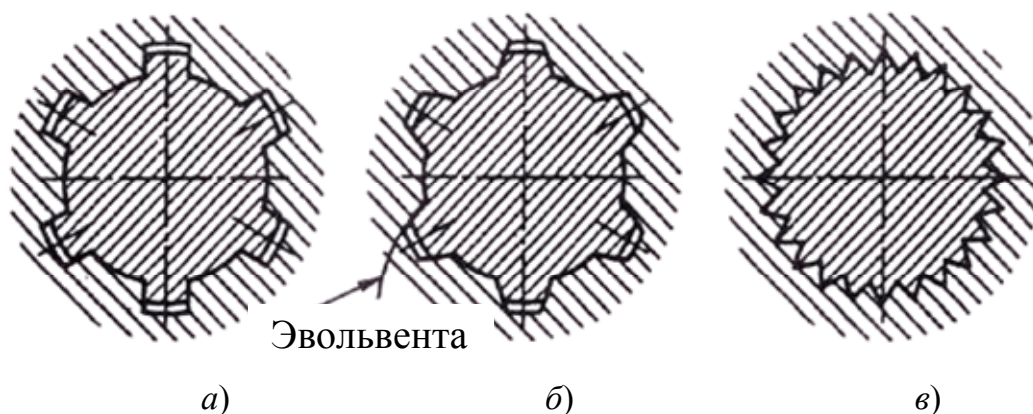


Рис. 106

Шлицевые соединения треугольного профиля мелкие, поэтому мало ослабляют вал, однако они способны передавать лишь относительно небольшую нагрузку и применяются при стесненных габаритах.

В зависимости от количества шлицов различают три серии шлицевых соединений: легкая, средняя и тяжелая.

**Расчет шлицевых соединений.** На шлицевые соединения действуют напряжения смятия, изгиба, среза, а также они подвергаются износу.

Основным расчетом считается расчет на смятие (рис. 107). Условие прочности по напряжениям смятия имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{\upsilon zhld_{\text{ср}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $T$  – вращающий момент, передаваемый соединением;  $\upsilon$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между шлицами;  $h$  – высота поверхности контакта шлицов;  $d_{\text{ср}}$  – средний диаметр поверхности контакта;  $[\sigma_{\text{см}}]$  – допускаемое напряжение на смятие.

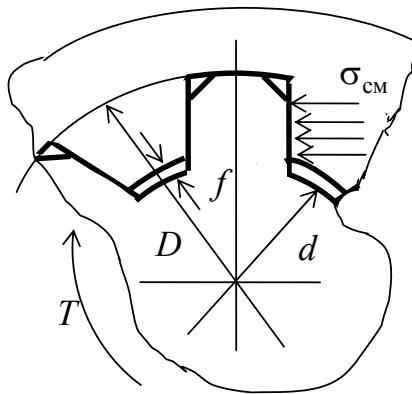


Рис. 107

Для прямобочных шлицевых соединений средний диаметр поверхности контакта и высоту поверхности контакта рассчитывают по следующим зависимостям:

$$d_{\text{ср}} = \frac{D+d}{2}; \quad h = \frac{D-d}{2} - 2f,$$

где  $D$  – наружный диаметр шлицевого вала;  $d$  – внутренний диаметр шлицевого вала;  $f$  – размер фаски.

Для эвольвентных шлицевых соединений эти размеры приближенно определяют по следующим зависимостям:

$$d_{\text{ср}} = D - 1,1m; \quad h = 0,8m,$$

где  $m$  – модуль.

Для шлицевого соединения с треугольным профилем:

$$h = \frac{D-d_A}{2}; \quad d_{\text{ср}} = d_1 = mz,$$

где  $D$  – наружный диаметр вала;  $d_A$  – внутренний диаметр отверстия;  $d_1$  – диаметр делительной окружности.

Допускаемое напряжение на смятие определяют по зависимости:

$$[\sigma_{\text{см}}] = \frac{\sigma_T}{sK_{\text{см}}K_d},$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала;  $s$  – коэффициент запаса прочности при расчете на смятие;  $K_{\text{см}}$  – общий коэффициент концентрации нагрузки при расчете на смятие;  $K_d = \frac{T_{\text{max}}}{T}$  – коэффициент динамичности нагрузки.

**Задача 1.** Определить допустимый вращающий момент  $T$ , который может передать соединение призматической шпонкой (рис. 120), если диаметр вала  $d = 35$  мм, размеры шпонки  $b \times h = 10 \times 8$  мм, глубина паза в валу  $t_1 = 5$  мм, рабочая длина шпонки  $l_p = 60$  мм, а допустимое напряжение на смятие  $[\sigma_{\text{см}}] = 150$  МПа.

*Решение*

Условие прочности соединения призматической шпонкой имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{dl_p(h-t_1)} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

откуда

$$T = \frac{dl_p(h-t_1)[\sigma_{\text{см}}]}{2} = \frac{35 \cdot 60(8-5)150}{2} = 4,725 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

**Задача 2.** Подобрать по ГОСТ 1139–80 неподвижное прямобочное шлицевое соединение тяжелой серии зубчатого колеса с валом и проверить его на прочность, если диаметр вала  $d_B = 30$  мм, ширина ступицы зубчатого колеса  $B = 20$  мм, передаваемый вращающий момент  $T = 180$  Н·м, допускаемое напряжение  $[\sigma_{\text{см}}] = 140$  МПа.

*Решение*

По ГОСТ 1139–80 выбираем неподвижное прямобочное шлицевое соединение тяжелой серии с размерами  $z \times d \times D = 10 \times 23 \times 29$  мм,  $f = 0,3$  мм.

Определяем рабочую высоту контактирующих зубьев и средний радиус:

$$h = \frac{D-d}{2} - 2f = \frac{29-23}{2} - 2 \cdot 0,3 = 2,4 \text{ мм};$$

$$r_{\text{cp}} = \frac{D + d}{4} = \frac{29 + 23}{4} = 13 \text{ мм.}$$

Напряжение смятия в соединении

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{T}{r_{\text{cp}} h b z \nu} = \frac{180 \cdot 10^3}{13 \cdot 2,4 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,75} = 38,5 \text{ МПа,}$$

где  $\nu = 0,75$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между шлицами.

Так как  $\sigma_{\text{см}} = 38,5 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 140 \text{ МПа}$ , то условие прочности выполняется.

### Контрольные вопросы

1. Для чего предназначены шпоночные соединения?
2. Какие виды шпоночных соединений бывают?
3. Как определяют размеры шпонок?
4. Как рассчитывают ненапряженные шпоночные соединения?
5. По каким причинам ограничена область применения врезных клиновых шпонок?
6. Как рассчитывают соединения клиновой врезной шпонкой?
7. Какие материалы используют для изготовления шпонок?
8. Какими преимуществами обладают шлицевые соединения по сравнению со шпоночными соединениями?
9. Как подразделяют шлицевые соединения?
10. Как рассчитывают шлицевые соединения?
11. Как определяют допускаемые напряжения для шлицевых соединений?

## Резьбовые соединения

**Основные понятия.** *Резьбовыми* называют разъемные соединения, выполняемые с помощью резьбовых крепежных деталей – винтов, гаек, шпилек, резьбы, непосредственно нанесенной на соединяемые детали.

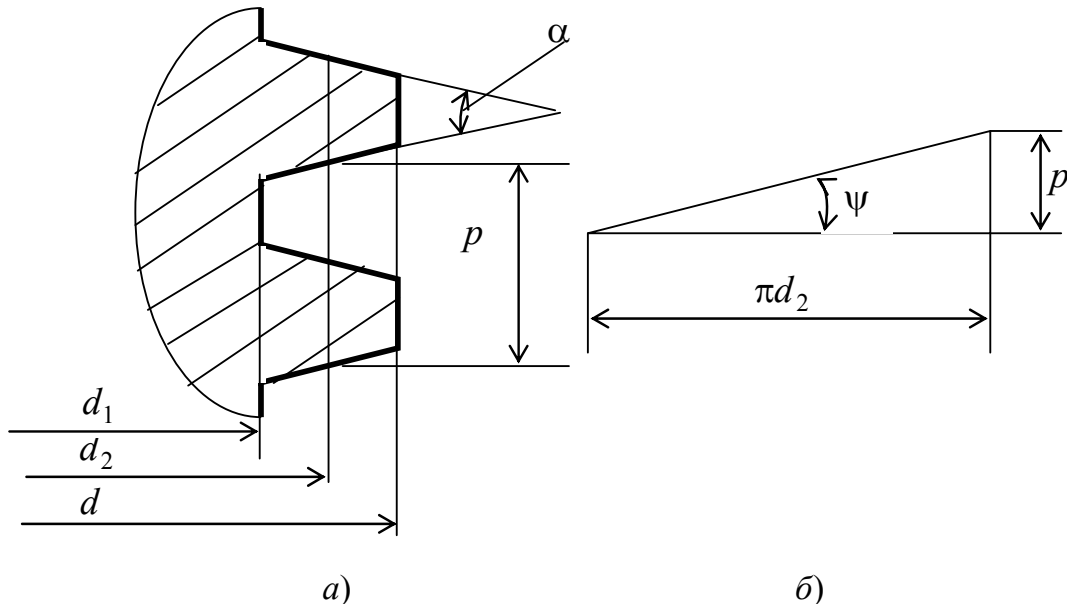


Рис. 108

Резьбовые соединения являются наиболее распространенным видом разъемных соединений. Они в основном применяются в следующих случаях:

- 1) для устранения возможности перемещения соединяемых деталей;
- 2) для удержания деталей на определенном расстоянии друг от друга;
- 3) для обеспечения плотности стыка соединяемых деталей;
- 4) для осуществления поступательного движения (пресса, домкраты, ходовые винты);
- 5) для получения точных относительных перемещений (регулирующие винты).

По форме основной поверхности резьбы подразделяют на цилиндрические и конические. Широкое применение имеют детали с цилиндрической резьбой.

Любая резьба имеет три диаметра (рис. 108, а): внутренний  $d_1$ , средний  $d_2$  и наружный  $d$ .

Профиль резьбы характеризуют углом профиля  $\alpha$ , т. е. углом между прямолинейными боковыми сторонами профиля резьбы.

Расстояние между одноименными сторонами двух соседних профилей, измеренное в направлении оси резьбы, называется *шагом резьбы* и обозначается  $p$ . Для многозаходной резьбы используют термин *ход резьбы*, который обозначается  $p_h$  и равен произведению шага на число заходов. При повороте гайки на один оборот она перемещается вдоль оси винта на шаг или на ход.

Угол подъема  $\psi$  (рис. 108, б) развертки винтовой линии по среднему диаметру резьбы определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{p}{\pi d_2}.$$

По направлению винтовой линии различают правую и левую резьбу. Левую резьбу применяют только в специальных случаях.

Резьбы также подразделяются по назначению и форме профиля. Крепежная резьба бывает треугольная и круглая. Для винтовых механизмов применяют трапецеидальную, упорную или прямоугольную резьбу.

Метрическая резьба является основным видом крепежных деталей.

**Момент завинчивания гайки.** Рассмотрим резьбовое соединение с прямоугольной резьбой (рис. 109, а). Развернем виток прямоугольной резьбы по среднему диаметру  $d_2$  в наклонную плоскость, а гайку заменим ползуном (рис. 109, б). Условие векторного равновесия сил, приложенных к ползуну, имеет вид:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_t = 0,$$

где  $\vec{F}$  – осевая сила, действующая в винтовой паре;  $\vec{R}$  – реакция, представляющая собой равнодействующую нормальной реакции и силы трения в резьбе;  $\vec{F}_t$  – окружная сила, вращающая гайку при ее завинчивании.

Из силового треугольника (рис. 109, в) следует, что окружная сила, вращающая гайку при ее завинчивании, равна:

$$F_t = F \operatorname{tg}(\psi + \varphi),$$

где  $\psi$  – угол подъема резьбы;  $\varphi$  – угол трения.



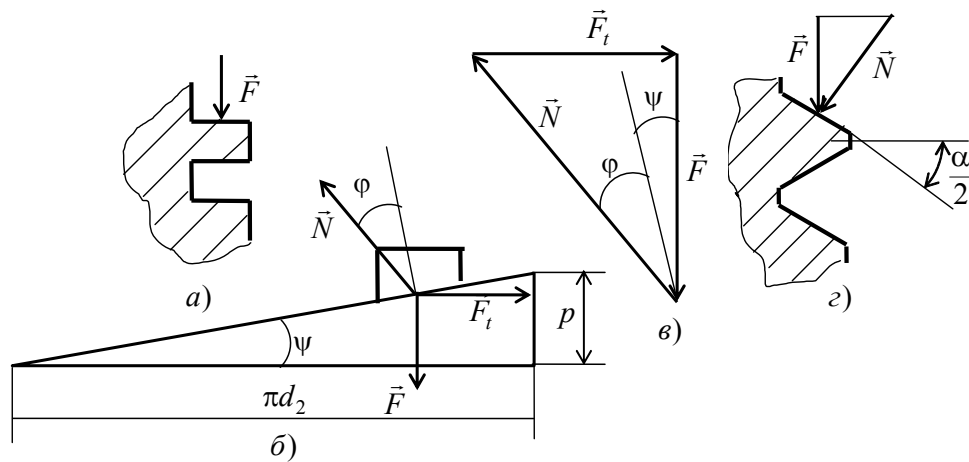


Рис. 109

В этом случае момент  $T_p$ , необходимый для преодоления сил трения в резьбе при завинчивании гайки, равен:

$$T_p = F \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\psi + \varphi).$$

При завинчивании гайки нужно преодолеть не только момент трения в резьбе, но и момент трения на торце гайки. Торцовая опорная поверхность гайки принимается кольцевой с наружным диаметром  $D$ , равным размеру под ключ  $S$ , и внутренним диаметром  $d_0$ , равным диаметру отверстия под болт (рис. 110).

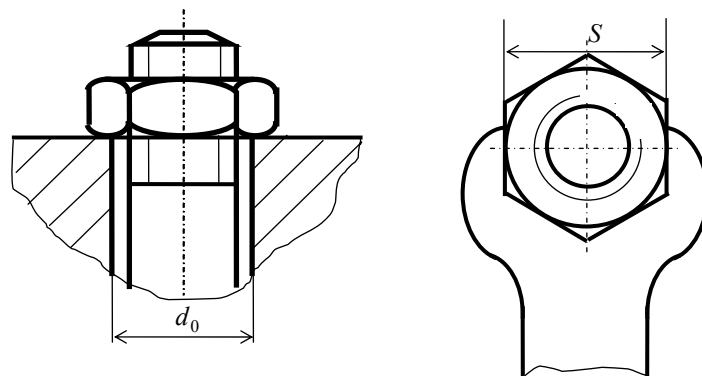


Рис. 110

Давление на опорной поверхности при условии, что оно распределяется равномерно, равно:

$$p = \frac{4F}{\pi(D^2 - d_0^2)}.$$

Момент трения  $T_T$  на торце гайки можно найти, проинтегрировав выражения момента трения на элементарной кольцевой поверхности в пределах от  $d_0/2$  до  $D/2$  (рис. 111):

$$T_T = \int_{d_0/2}^{D/2} \rho p f 2\pi \rho d\rho = 2\pi f p \frac{\rho^3}{3} \Big|_{d_0/2}^{D/2} = \frac{2}{3} \pi f p \frac{D^3 - d_0^3}{8}.$$

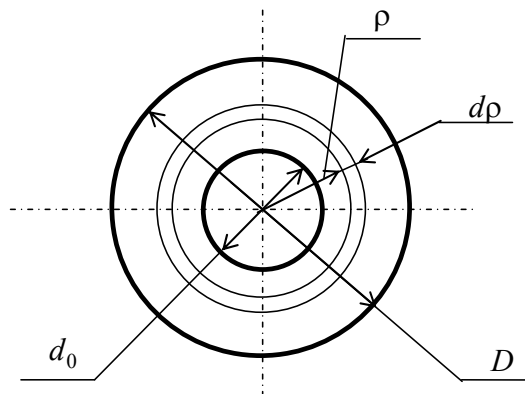


Рис. 111

С учетом значения давления  $p$  на опорной поверхности получим:

$$T_T = \frac{1}{3} F f \frac{D^3 - d_0^3}{D^2 - d_0^2}.$$

Для упрощения расчетов считают, что равнодействующая сил трения  $F_T = Ff$  на опорной поверхности гайки действует по касательной к окружности среднего диаметра опорной поверхности  $d_c$ .

В этом случае момент трения  $T_T$  на торце гайки будет определяться выражением

$$T_T = Ff \frac{d_c}{2},$$

где  $d_c = 0,5(D + d_0)$ .

Тогда требуемый момент завинчивания гайки равен:

$$T_{зав} = T_p + T_c = F \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\psi + \varphi) + Ff \frac{d_c}{2} = F \frac{d_2}{2} \left[ \operatorname{tg}(\psi + \varphi) + f \frac{d_c}{d_2} \right].$$

Сила трения для прямоугольной резьбы (рис. 109, а):

$$F_T = Ff,$$

а для треугольной резьбы (рис. 109, з):

$$F'_T = Nf = F \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} = Ff',$$

где  $\alpha$  – профильный угол резьбы:

$$f' = \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \text{приведенный коэффициент трения.}$$

Приведенный угол трения в треугольной резьбе будет равен:

$$\varphi' = \text{arctg } f'.$$

В этом случае для треугольной резьбы требуемый момент за-  
винчивания гайки равен:

$$T_{\text{зав}} = F \frac{d_2}{2} \left[ \text{tg}(\psi + \varphi') + f \frac{d_c}{d_2} \right].$$

Момент отвинчивания гайки можно получить аналогичным об-  
разом, и он равен:

$$T_{\text{отв}} = F \frac{d_2}{2} \left[ \text{tg}(\varphi' - \psi) + f \frac{d_c}{d_2} \right].$$

Условие самоторможения для треугольной резьбы выполняется  
при условии, если  $\psi < \varphi'$ .

**Коэффициент полезного действия винтовой пары.** Коэффи-  
циент полезного действия определяется как отношение работы сил  
полезного сопротивления к работе движущих сил:

$$\eta = \frac{A_{\text{п.с}}}{A_{\text{д.с}}} = \frac{F\pi d_2 \text{tg}\psi}{F_t \pi d_2} = \frac{F \text{tg}\psi}{F_t \text{tg}(\psi + \varphi')} = \frac{\text{tg}\psi}{\text{tg}(\psi + \varphi')}.$$

**Определение нагрузки, действующей на болт.** В большинстве  
случаев соединение деталей осуществляется группой болтов, поэтому  
необходимо уметь определить силу, действующую на наиболее на-  
груженный болт при различных случаях нагружения.

**Случай 1.** На групповое болтовое соединение действует сила, проходящая через центр стыка и направленная параллельно осям болтов (рис. 112, *а*).

В этом случае делается допущение, что все болты воспринимают одинаковую нагрузку, тогда сила  $F_{a1}$ , растягивающая болт, будет равна:

$$F_{a1} = \frac{F}{z},$$

где  $z$  – количество болтов в соединении.

**Случай 2.** На групповое болтовое соединение действует момент в плоскости, перпендикулярной плоскости стыка (рис. 112, *б*). Максимальная сила  $F_{amax1}$ , растягивающая болт, определяется по выражению

$$F_{amax1} = \frac{Ml_{max}}{\sum l_i^2},$$

где  $l_{max}$  – максимальное расстояние от оси болта до оси, проходящей через центр стыка;  $l_i$  – расстояние от оси  $i$ -го болта до оси, проходящей через центр стыка.

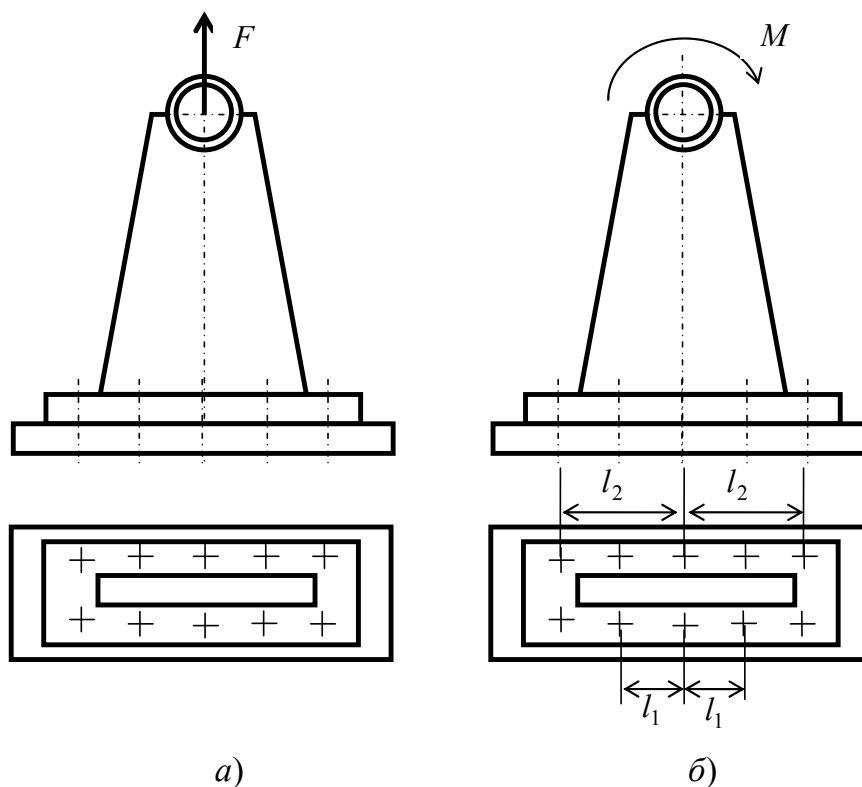


Рис. 112

**Случай 3.** На групповое болтовое соединение действует сила, проходящая через центр стыка и направленная перпендикулярно осям болтов (рис. 113, *а*).

В этом случае делается допущение, что все болты воспринимают одинаковую нагрузку, тогда сила  $F_{t1}$ , срезающая болт, будет равна:

$$F_{t1} = \frac{F}{z}.$$

**Случай 4.** На групповое болтовое соединение действует момент в плоскости стыка (рис. 113, *б*). Максимальная сила  $F_{t\max 1}$ , растягивающая болт, определяется по выражению

$$F_{t\max 1} = \frac{T\rho_{\max}}{\sum \rho_i^2},$$

где  $\rho_{\max}$  – максимальное расстояние от центра стыка до оси;  $\rho_i$  – расстояние от центра стыка до оси  $i$ -го болта.

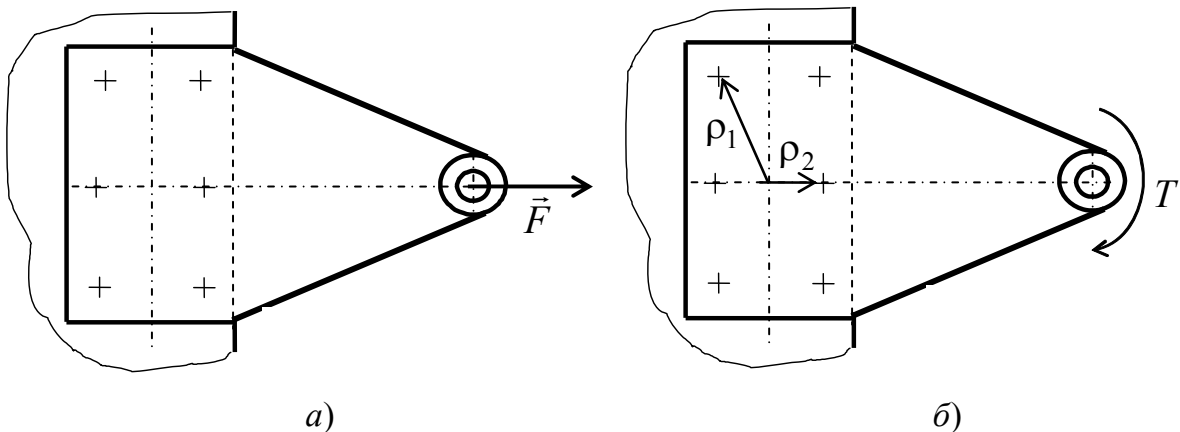


Рис. 113

Если действующая сила не проходит через центр стыка, то ее нужно перенести в центр стыка, предварительно разложив ее на горизонтальную и вертикальную составляющие. Затем, используя принцип независимости сил, найти от каждого силового фактора силу, действующую на болт, а затем и суммарную силу.

**Расчет стержня болта на прочность.** Основным критерием работоспособности резьбовых соединений является прочность. Рассмотрим случаи расчета стержня болта на прочность, когда известна сила, действующая на болт.

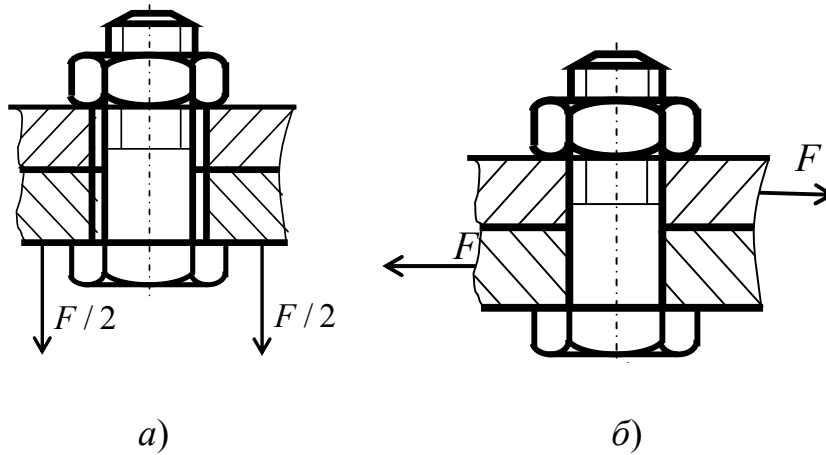


Рис. 114

**Случай 1.** На болт действует растягивающая сила (рис. 114, а).  
Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_p = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \leq [\sigma_p],$$

откуда требуемый внутренний диаметр болта

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_p]}}.$$

В данном случае не играет роли, как установлен болт – с зазором или без зазора.

**Случай 2.** Болт установлен без зазора и на него действует сила в плоскости стыка (рис. 114, б).

Условие прочности болта в этом случае имеет вид:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_{cp}],$$

откуда требуемый наружный диаметр болта

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_{cp}]}}.$$

**Случай 3.** Болт установлен с зазором и на него действует сила в плоскости стыка (рис. 115).

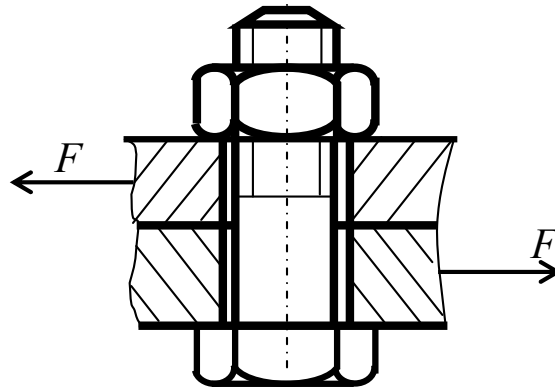


Рис. 115

Чтобы не произошло смещение одной детали относительно другой необходимо на поверхности контакта создать силу трения  $F_{\text{тр}}$ , которая была бы больше сдвигающей силы  $F$ . Принимают, что сила трения  $F_{\text{тр}}$  должна быть больше сдвигающей силы  $F$  на 20 %:

$$F_{\text{тр}} = 1,2F.$$

Сила трения на поверхности контакта создается путем завинчивания гайки, при этом болт испытывает растяжение от силы затяжки  $F_{\text{зат}}$  и кручение за счет трения в резьбе. В сечении болта будут действовать нормальные напряжения  $\sigma$  и касательные напряжения  $\tau$ .

Для определения эквивалентных напряжений используют третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p].$$

Нормальные напряжения от силы затяжки равны:

$$\sigma = \frac{F_{\text{зат}}}{\frac{\pi d_1^2}{4}}.$$

Касательные напряжения от момента трения в резьбе

$$\tau = \frac{T_p}{W_p} = \frac{F_{\text{зат}} \frac{d_2}{2} \text{tg}(\psi + \varphi')}{\frac{\pi d_1^3}{16}},$$

где  $\varphi'$  – приведенный угол трения.

Подставляя значения  $\sigma$  и  $\tau$ , получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}} &= \sqrt{\left(\frac{F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2}\right)^2 + 4 \left[\frac{F_{\text{зат}} \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\psi + \varphi')}{\pi d_1^3}\right]^2} = \\ &= \frac{F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2} \sqrt{1 + 16 \left[\frac{d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')}{d_1}\right]^2} \leq [\sigma_p].\end{aligned}$$

Значение под корнем квадратным приблизительно равно 1,3. Учитывая, что сила трения

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{зат}} f,$$

получаем:

$$F_{\text{зат}} = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = \frac{1,2F}{f}.$$

В этом случае условие прочности болта принимает вид:

$$\sigma_p = \frac{1,3 \cdot 1,2F}{f \frac{\pi d_1^2}{4}} \leq [\sigma_p],$$

откуда требуемый внутренний диаметр болта

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,3 \cdot 1,2F}{\pi f [\sigma_p]}}.$$

**Материалы и допускаемые напряжения в резьбовых соединениях.** При выборе материала резьбовых деталей учитывают различные факторы: условия работы, величину и характер нагрузки, способ изготовления, ответственность соединения и др.

Углеродистые стали применяют для изготовления крепежных деталей общего назначения. Для высоконагруженных деталей при переменных и ударных нагрузках, а также при высоких температурах для изготовления резьбовых деталей используют легированные стали.

Для повышения прочности, коррозионной стойкости и жаропрочности резьбовые детали подвергают термообработке или наносят на них специальные покрытия.



При статических нагрузках допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_p]$  вычисляют по зависимости:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[n]},$$

где  $[n]$  – требуемый коэффициент запаса прочности, который зависит от контроля затяжки болта, температурного воздействия, масштабного фактора, ответственности резьбового соединения.

Допускаемые напряжения на срез  $[\tau_c]$  для болтов, установленных без зазора:

$$[\tau_c] \leq (0,2 \dots 0,3)\sigma_T.$$

Допускаемые напряжения на смятие  $[\sigma_{см}]$ :

– для болтовых соединений стальных деталей:

$$[\sigma_{см}] \leq 0,8\sigma_T,$$

– для соединения чугунных деталей:

$$[\sigma_{см}] \leq (0,4 \dots 0,5)\sigma_B,$$

где  $\sigma_B$  – предел прочности чугуна.

При действии переменных нагрузок значения  $[\tau_c]$  и  $[\sigma_{см}]$  понижают в 1,25...1,5 раза.

**Задача 1.** На болт с резьбой М20 действует осевая сила  $F$  (рис. 116). Определить максимальное значение силы  $F$ , если допускаемое напряжение на разрыв материала болта  $[\sigma_p] = 80$  МПа, внутренний диаметр резьбы  $d_1 = 17,294$  мм.

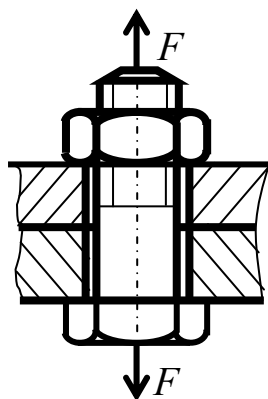


Рис. 116

*Решение*

Условие прочности стержня болта при действии осевой растягивающей силы

$$\sigma_p = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \leq [\sigma_p],$$

откуда значение максимальной силы  $F_{\max}$  будет:

$$F_{\max} \leq \frac{\pi d_1^2 [\sigma_p]}{4} = \frac{3,14 \cdot 17,294^2 \cdot 80}{4} = 18780 \text{ Н.}$$

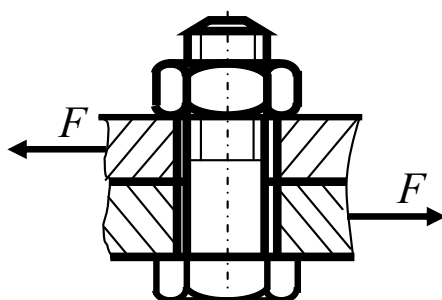


Рис. 117

**Задача 2.** На болт действует сила  $F = 8 \text{ кН}$ , направленная перпендикулярно оси болта (рис. 117). Определить напряжения в сечении болта, если болт поставлен с зазором, внутренний диаметр резьбы  $d_1 = 31,670 \text{ мм}$ , а коэффициент трения  $f = 0,15$ .

*Решение*

Напряжение в сечении болта при установке его с зазором и при действии внешней силы, направленной перпендикулярно оси болта, определяется по зависимости:

$$\sigma_p = \frac{1,3 \cdot 1,2 F}{f \frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1,2 \cdot 8 \cdot 10^3}{0,15 \cdot 3,14 \cdot 31,670^2} = 105,67 \text{ МПа.}$$

**Вопросы для самопроверки**

1. Какими параметрами характеризуется резьба?
2. По каким зависимостям определяют силу, действующую на один болт, если к соединению приложен момент в плоскости стыка?

3. Какой вид имеет зависимость для определения момента за-  
винчивания гайки?
4. Как рассчитывают болт, если он нагружен осевой силой?
5. Как записывается условие прочности болта при действии сре-  
зающей силы, если он установлен с зазором?
6. Какие материалы используют для изготовления резьбовых со-  
единений?
7. Как определяют допускаемые напряжения при действии пе-  
ременной нагрузки?

## Сварные соединения

**Общие сведения.** Сварные соединения являются наиболее совершенной и распространенной разновидностью неразъемных соединений.

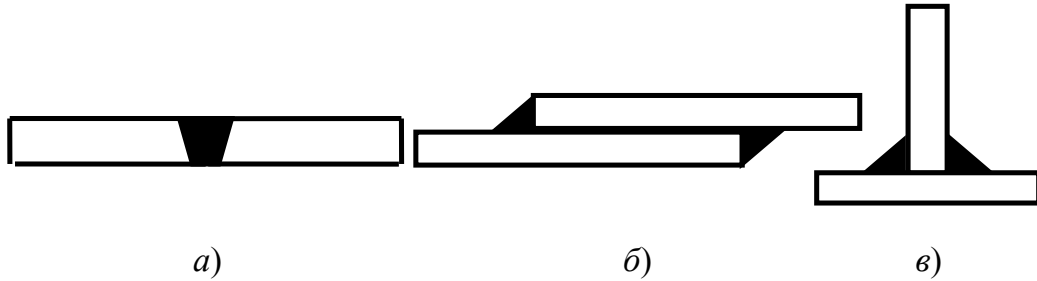


Рис. 118

По конструктивным признакам сварные соединения делятся на следующие разновидности: соединения стыковые (рис. 118, а), соединения внахлестку (рис. 118, б), соединения тавровые (рис. 118, в) и соединения прорезные.

**Соединения стыковые.** При действии на стыковое соединение растягивающей силы  $F$  (рис. 119) условие прочности имеет вид:

$$\sigma'_p = \frac{F}{bs} \leq [\sigma'_p],$$

где  $\sigma'_p$  – растягивающее напряжение в сварном шве;  $F$  – сила, действующая на сварное соединение;  $b$  – ширина свариваемых деталей;  $s$  – толщина свариваемых деталей.

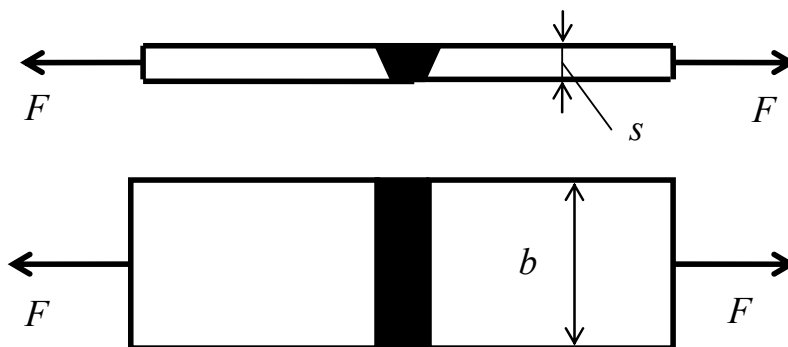


Рис. 119

**Соединения внахлестку.** Соединения внахлестку выполняются с помощью угловых швов, которые делятся: на лобовые, фланговые, косые, комбинированные.

**Лобовой шов** накладывается перпендикулярно к линии действия нагрузки  $F$ .

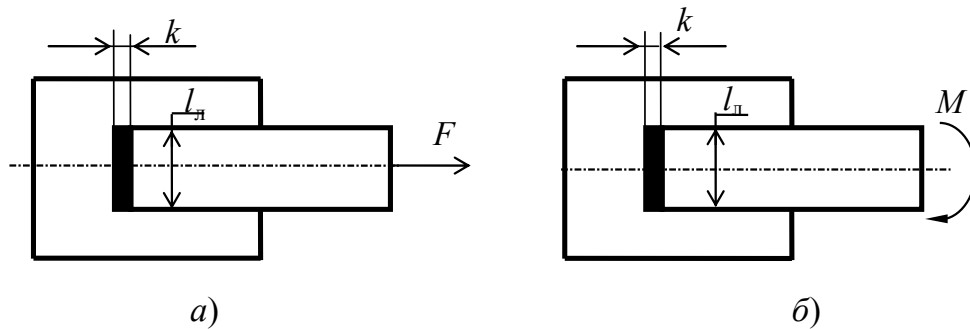


Рис. 120

Условие прочности для лобового шва при действии силы  $F$  (рис. 120, а):

$$\tau' = \frac{F}{0,7kl_{\text{л}}} \leq [\tau'],$$

где  $k$  – катет шва;  $l_{\text{л}}$  – длина лобового шва;  $[\tau']$  – допустимое напряжение на срез.

В случае действия изгибающего момента  $M$  (рис. 120, б) условие прочности записывается в следующем виде:

$$\tau' = \frac{M}{W} = \frac{6M}{0,7kl_{\text{л}}^2} \leq [\tau'].$$

**Фланговый шов.** Фланговым сварным швом называется шов, направление которого параллельно направлению усилия. На практике длину фланговых швов ограничивают условием  $l_{\text{ф}} \leq 50k$ , а условие прочности при действии на сварное соединение силы  $F$  (рис. 121, а) имеет вид:

$$\tau' = \frac{F}{0,7kl_{\text{ф}}z} \leq [\tau'],$$

где  $z$  – количество швов.

В тех случаях, когда на фланговые швы сварного соединения действует момент  $M$  в плоскости стыка (рис. 121, б), условие прочности записывается в следующем виде:

$$\tau' = \frac{M}{W_{\rho}} \leq [\tau'],$$

где  $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$  – полярный момент сопротивления, который подсчитывается для сечения швов в плоскости разрушения;  $I_p$  – полярный момент инерции сечения сварного шва;  $\rho_{\max}$  – максимальное расстояние от центра тяжести сечения швов до наиболее удаленной точки сварного шва.

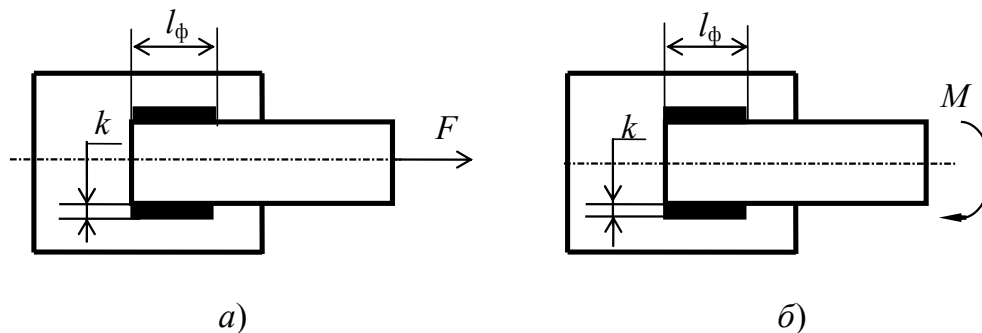


Рис. 121

При совместном воздействии силы  $F$  и момента  $M$ , действующего в плоскости стыка, расчетное напряжение среза  $\tau'_p$  определяется геометрическим суммированием с использованием теоремы косинусов:

$$\tau'_p = \sqrt{(\tau'_F)^2 + (\tau'_M)^2 + 2\tau'_F \tau'_M \cos \beta},$$

где  $\beta$  – угол между направлениями векторов напряжений  $\vec{\tau}'_F$  и  $\vec{\tau}'_M$ .

**Косой шов.** Направление косо сварного шва составляет с направлением внешней нагрузки некоторый угол  $\alpha$ . Условие прочности для косо шва при действии силы  $F$  в плоскости стыка будет иметь вид:

$$\tau' = \frac{F}{0,7kl_k} \leq [\tau'],$$

где  $l_k$  – длина косо шва.

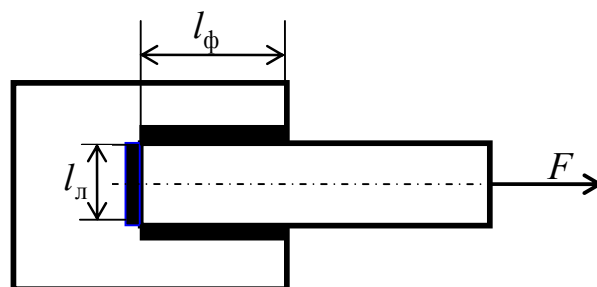


Рис. 122

**Комбинированный шов.** Данный шов состоит из сочетания лобовых и фланговых швов. При действии внешней нагрузки, проходящей через центр тяжести шва (рис. 122) условие прочности будет иметь вид:

$$\tau' = \frac{F}{0,7k(2l_{\phi} + l_{л})} \leq [\tau'].$$

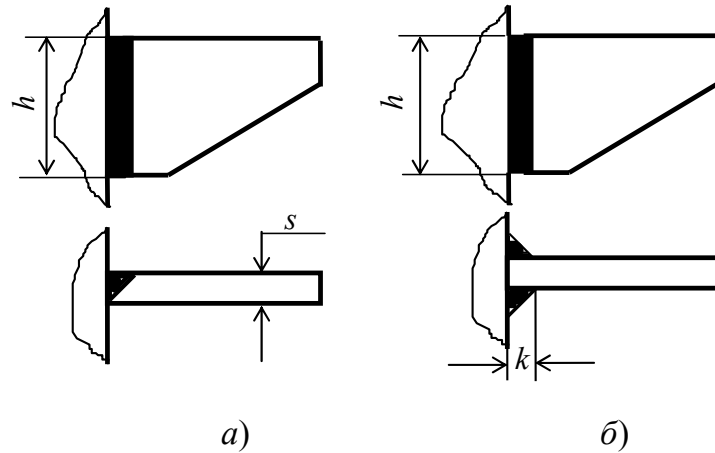


Рис. 123

**Соединения тавровые.** При данном виде соединения соединяемые элементы расположены во взаимно перпендикулярно расположенных плоскостях. Тавровые соединения могут выполняться как стыковым (рис. 123, а), так и угловым (рис. 123, б) швом. Расчет тавровых соединений различается в зависимости от вида шва, которым выполнено соединение.

Сварное тавровое соединение, выполненное стыковым швом, рассчитывают по нормальным напряжениям, а в случае применения углового шва расчет ведут по касательным напряжениям.

Условие прочности таврового соединения (рис. 123), нагруженного силой  $F$ , линия действия которой проходит через центр стыка, и моментом  $M$ , имеет вид:

– для стыкового шва:

$$\sigma' = \frac{F}{sh} + \frac{6M}{sh^2} \leq [\sigma'];$$

– для углового шва:

$$\tau = \frac{F}{0,7zkh} + \frac{6M}{0,7zkh^2} \leq [\tau'],$$

где  $s$  – толщина соединяемой детали;  $z$  – число сварных швов;  $k$  – катет сварного шва;  $h$  – высота привариваемой детали к стойке.

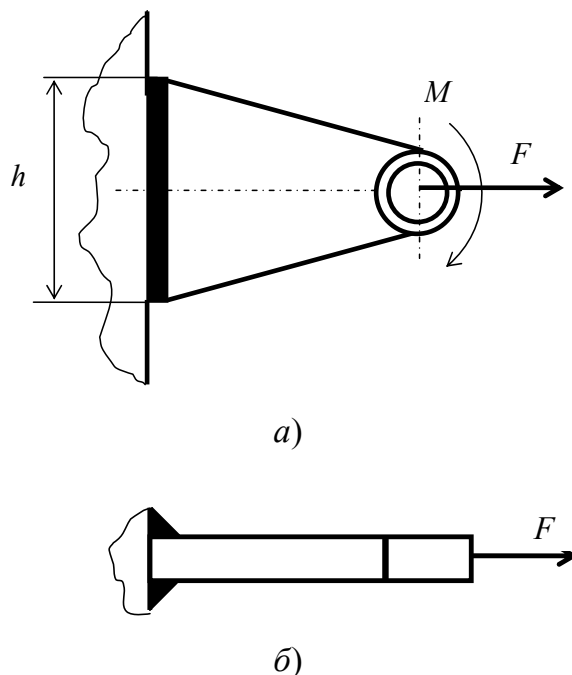


Рис. 124

**Определение допускаемых напряжений.** В случае действия статической нагрузки допускаемые напряжения в сварных швах задаются в долях допускаемого напряжения для основного материала  $[\sigma_p]$ , которые определяются по зависимости:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T \varepsilon}{[s] k_\sigma},$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести основного материала;  $\varepsilon = 0,9$  – коэффициент масштабного фактора;  $[s]$  – коэффициент безопасности ( $[s] = 1,2 \dots 1,3$  – для углеродистых сталей и  $[s] = 1,3 \dots 1,5$  – для низколегированных сталей);  $k_\sigma = 1 \dots 1,2$  – коэффициент концентрации напряжений при статических нагрузках (большее значение для лобовых швов).

При действии нагрузки переменной по величине и направлению допускаемое напряжение понижают путем умножения на коэффициент  $\gamma$ :  
– для стыковых швов:

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \frac{P_{\min}}{P_{\max}}};$$



— для угловых швов:

$$\gamma = \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1P_{\min}}{3P_{\max}}}.$$

**Задача 1.** На нахлесточное сварное соединение (рис. 125) действует сила  $F$ . Определить ее максимальное значение, если катет шва  $k = 8$  мм, допускаемое напряжение на срез для сварного шва  $[\tau'_{\text{ср}}] = 96$  МПа, длина шва  $l_{\phi} = 80$  мм.

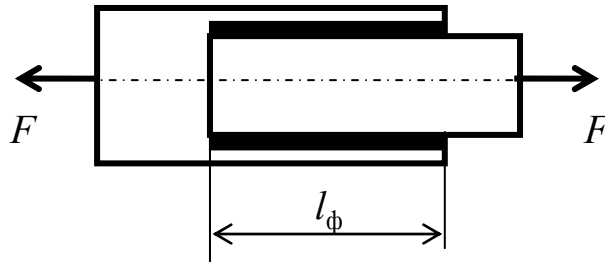


Рис. 125

*Решение*

Условие прочности сварного соединения определяется по зависимости:

$$\tau' = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0,7k \cdot 2l_{\phi}} \leq [\tau'],$$

откуда максимальное значение действующей силы

$$F \leq 1,4kl_{\phi}[\tau'] = 1,4 \cdot 8 \cdot 80 \cdot 96 = 86000 \text{ Н.}$$

**Задача 2.** На сварное тавровое соединение (рис. 126) действует сила, проходящая через центр стыка,  $F = 60$  кН. Определить требуемую высоту  $h$  кронштейна, если катет шва  $k = 5$  мм, допускаемое напряжение на срез сварного шва  $[\tau'_{\text{ср}}] = 96$  МПа.

*Решение*

Условие прочности таврового соединения, выполненного угловым швом, имеет вид:

$$\tau' = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0,7k \cdot 2h} \leq [\tau'],$$

откуда требуемая высота косынки

$$h \geq \frac{F}{1,4k[\tau']} = \frac{60 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 5 \cdot 96} = 89,27 \text{ мм.}$$

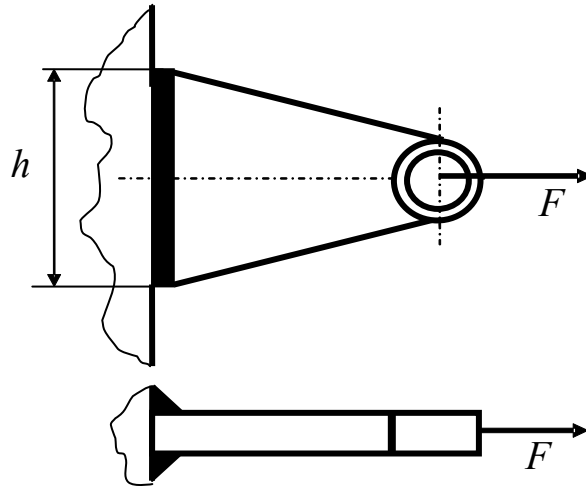


Рис. 126

Принимаем высоту косынки  $h = 90$  мм.

### Контрольные вопросы

1. Как подразделяются сварные соединения по конструктивным признакам?
2. Какие имеются сварные швы?
3. В чем отличие расчета стыкового сварного соединения от нахлесточного сварного соединения?
4. Как рассчитывают тавровое сварное соединение?
5. Как определяют допускаемые напряжения для сварного соединения?
6. Как рассчитывают сварные соединения при действии переменной нагрузки?

## Заклепочные соединения

**Виды заклепок и заклепочных швов.** Заклепочное соединение – неразъемное соединение деталей при помощи *заклепок*.

*Заклепка* – крепежная деталь, состоящая из стержня цилиндрической формы и закладной головки. Основные типы заклепок показаны на рис. 127.

В соответствии с назначением заклепочные соединения подразделяются на прочные, плотные и прочноплотные соединения.

Прочные заклепочные соединения применяются в стальных конструкциях подъемно-транспортных сооружений, фермах, узлах машин общего назначения.

Плотные заклепочные соединения применяются в конструкциях, требующих герметичность соединения.

Прочноплотные заклепочные соединения применяются в тех случаях, когда они должны обеспечивать кроме прочности еще и герметичность.

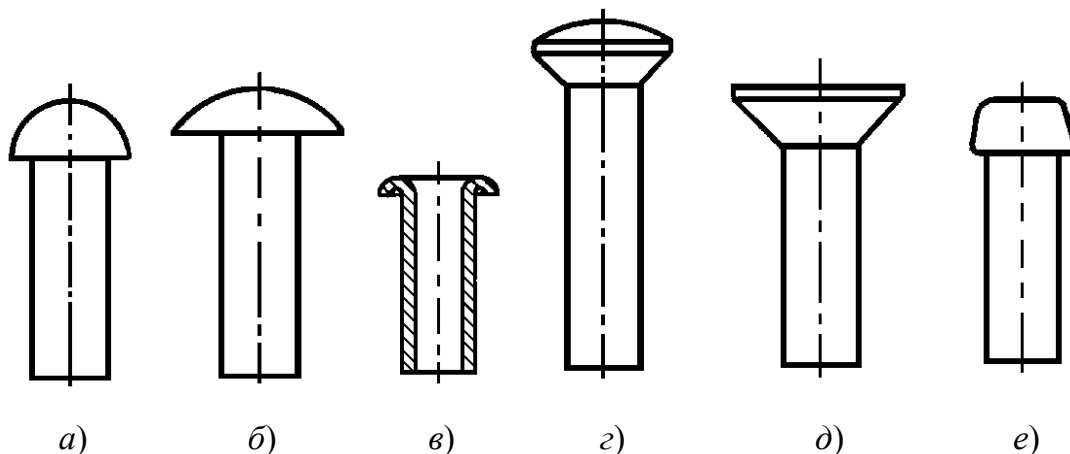


Рис. 127

В прочных заклепочных соединениях применяют следующие заклепки: с полукруглой головкой (рис. 127, *a*); с плоской головкой (рис. 127, *e*), предназначенные для работы в коррозионных средах; с потайной головкой (рис. 127, *д*), применяемые при недопустимости выступающих частей; с полупотайной головкой (рис. 127, *з*) для соединения тонких листов; пустотелые со скругленной головкой (рис. 127, *в*) для соединения тонких листов и неметаллических деталей.

В плотных и прочноплотных заклепочных соединениях применяют заклепки с полукруглой низкой головкой (рис. 127, *б*). Формиро-

вание замыкающей головки происходит в результате расклепывания стержня заклепки, вставленной в отверстия соединяемых деталей.

Для облегчения ввода заклепки отверстия в деталях делают несколько больше, чем диаметр заклепки. Изготовление отверстий осуществляют путем сверления (точный способ) или путем продавливания (грубый способ). Диаметр отверстия  $d_0$  в деталях выбирается по таблице в зависимости от диаметра заклепки  $d$  и способа изготовления отверстия.

В процессе клепки за счет протекания поперечной упругопластической деформации стержня заклепки происходит заполнение технологического зазора между стержнем и стенками отверстия. Клепку производят без нагрева заклепок, если их диаметр не превышает 12 мм, и с нагревом до температуры 1000...1100 °С, если диаметр больше 12 мм. Формирование замыкающей головки у заклепок из цветных металлов и сплавов проводят без нагрева.

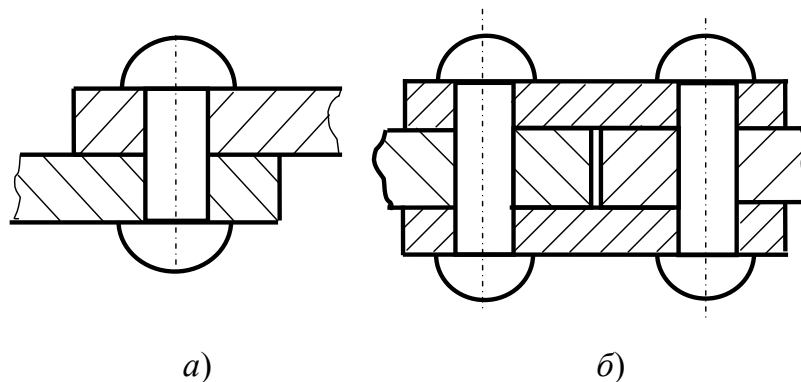


Рис. 128

**Виды и параметры заклепочных швов.** В зависимости от расположения соединяемых деталей различают заклепочные швы внахлестку (рис. 128, *a*) и встык с одной накладкой и двумя накладками (рис. 128, *б*).

Геометрические параметры заклепочного шва определяют по эмпирическим зависимостям.

Диаметр заклепки определяют по зависимости:

– в односрезном заклепочном соединении:

$$d = 2s;$$

– в двухсрезном заклепочном соединении:

$$d = 1,5s,$$

где  $s$  – толщина соединяемых деталей.

В конструкциях из легких сплавов формирование замыкающей головки происходит в холодном состоянии, поэтому силы сжатия соединяемых деталей и силы трения в заклепочном соединении небольшие. В связи с этим заклепки в основном работают на срез. Поэтому рекомендуется рассчитывать диаметр заклепки по зависимости:

$$d = 1,5s + 2 \text{ мм.}$$

Минимальный шаг  $t$  размещения заклепок определяется из условия удобства формирования замыкающей головки. Максимальный шаг заклепочного соединения определяется условием плотного соприкосновения листов и зависит от жесткости соединяемых элементов. Обычно он изменяется в пределах  $t = (3 \dots 6)d$ .

Расстояние  $e$  от центра заклепки до края листа в направлении действующей силы принимают в зависимости от способа изготовления отверстия:  $e = 1,5d$  (отверстия сверленные) и  $e = 2d$  (отверстия продавленные).

В конструкциях из легких сплавов –  $e = 2d$ .

Расстояние  $e_1$  от центра заклепки до края листа в направлении, перпендикулярном линии действия силы,  $e_1 = 1,5d$ .

При расчете заклепочного соединения, нагруженного силой в плоскости стыка, необходимо обеспечить:

- прочность заклепок *на срез*;
- прочность заклепок и стенок отверстий в соединяемых элементах *на смятие*;
- прочность соединяемых элементов по сечениям, ослабленным отверстиями под заклепки, *на растяжение*;
- прочность краев соединяемых элементов *на срез* заклепками.

При получении расчетных формул делаются следующие допущения:

- 1) усилие, передаваемое соединением, распределяется между заклепками равномерно, т. е. все заклепки нагружены одинаково;
- 2) касательные напряжения среза распределены по поперечным сечениям заклепок равномерно;
- 3) напряжения смятия в каждой точке поверхности контакта заклепки и стенки отверстия нормальны к этой поверхности и по модулю одинаковы;
- 4) разгружающее влияние сил трения, действующих на поверхности контакта, не учитывается и считается, что усилие полностью передается заклепками.

Рассмотрим расчетные зависимости на примере однорядного заклепочного шва, выполненного внахлестку (рис. 129).

При действии внешней силы разрушение стержня заклепки в результате среза происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей (на рис. 129 сечение условно показано волнистой линией).

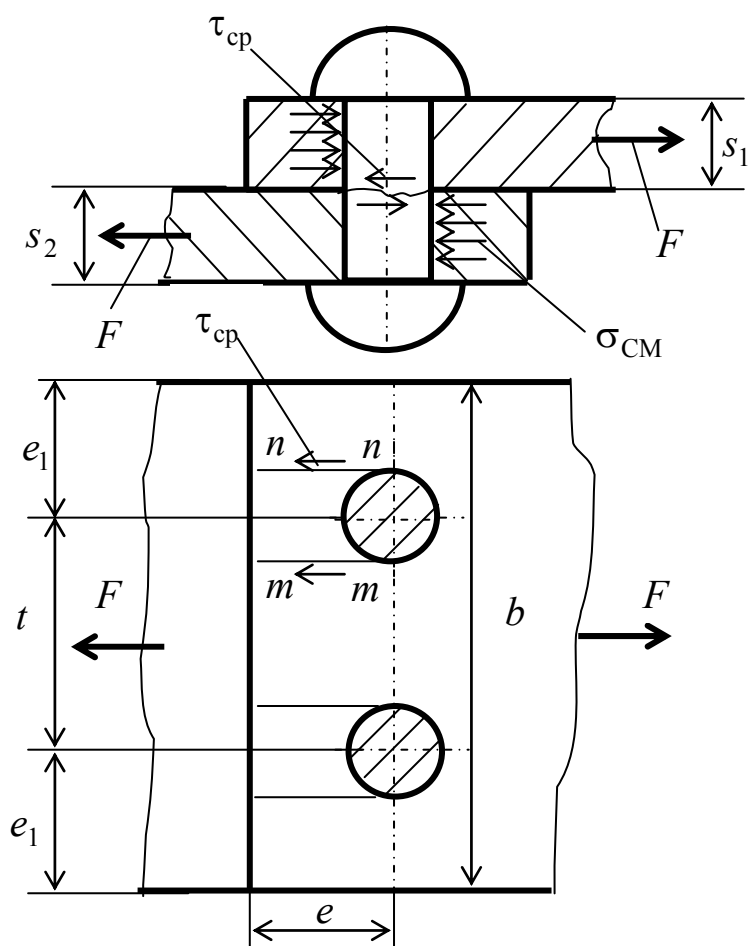


Рис. 129

Условие прочности заклепки по допускаемым напряжениям среза имеет вид:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{A_{cp}} = \frac{4F}{\pi d_0^2 z i} \leq [\tau_{cp}],$$

где  $F$  – внешняя сила, действующая на заклепочное соединение;  $d_0$  – диаметр отверстия;  $i$  – число плоскостей среза стержня заклепки;  $[\tau_{cp}]$  – допускаемое напряжение на срез для материала заклепки.

При изготовлении заклепки из менее прочного материала, чем материал соединяемых деталей, при нагружении соединения внешней силой возможно смятие стержня заклепки. Условие прочности по допускаемым напряжениям смятия имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{F}{s_{\text{мин}} d_0 z} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $s_{\text{мин}}$  – наименьшая толщина соединяемых деталей;  $[\sigma_{\text{см}}]$  – допускаемое напряжение на смятие материала заклепки.

Под действием внешней нагрузки может произойти разрушение детали по нормальному сечению, так как оно ослаблено отверстиями под заклепки. Для обеспечения прочности соединяемых деталей нормальное растягивающее напряжение в этом сечении должно удовлетворять условию:

$$\sigma_p = \frac{F}{S_{\text{мин}} (b - d_0 z_p)} \leq [\sigma_p],$$

где  $b$  – ширина соединяемых деталей;  $z_p$  – число заклепок в рассматриваемом сечении;  $[\sigma_p]$  – допускаемое напряжение на разрыв для материала листа.

Условие прочности на срез края соединяемых деталей:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{2S_{\text{мин}} (e - 0,5d_0) z} \leq [\tau_{\text{ср}}].$$

**Материалы и допускаемые напряжения.** При выборе материала заклепки необходимо руководствоваться тем, чтобы коэффициент линейного расширения заклепки и соединяемых деталей был примерно одинаков.

При расчете на прочность допускаемые напряжения на срез и на смятие  $[\sigma_{\text{см}}]$  определяют в зависимости от допускаемого напряжения на растяжение  $[\sigma_p]$  основного материала по следующим зависимостям:

$$[\tau_c] = (0,8 \dots 0,9) [\sigma_p] \text{ – при сверленных отверстиях;}$$

$$[\tau_c] = (0,67 \dots 0,7) [\sigma_p] \text{ – при продавленных отверстиях;}$$

$$[\sigma_{\text{см}}] = 2 [\sigma_p] \text{ – при сверленных отверстиях;}$$

$$[\sigma_{\text{см}}] = 1,7 [\sigma_p] \text{ – при продавленных отверстиях.}$$

При действии знакопеременной нагрузки на заклепочное соединение допускаемые напряжения понижаются путем умножения на коэффициент  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{a + b \frac{F_{\min}}{F_{\max}}},$$

где  $a, b$  – коэффициенты, зависящие от материала заклепок;  $F_{\min}$   $F_{\max}$  – минимальное и максимальное значения действующей силы.

**Расчет плотных заклепочных швов.** Плотные заклепочные швы должны обеспечивать не только прочность, но и герметичность соединения. Для обеспечения герметичности необходимо выполнить условие отсутствия взаимного смещения соединяемых деталей.

Величину, характеризующую герметичность, невозможно определить теоретически. Для оценки герметичности вводится понятие *коэффициента скольжения*.

*Коэффициент скольжения* – это сила сопротивления проскальзыванию соединяемых деталей, условно отнесенная к единице площади поперечного сопротивления материала заклепок:

$$\xi = \frac{4F_t}{\pi d_0^2 z_0 i} \leq [\xi],$$

где  $F_t$  – усилие, приложенное к листу на участке шага;  $z_0$  – число заклепок, приходящееся на полосу шириной, равной одному шагу;  $[\xi]$  – допустимый коэффициент скольжения, зависящий от типа шва.

Усилие, приложенное к листу на участке шага, рассчитывают по зависимости:

– для продольного шва:

$$F_t = \frac{Dpt}{2};$$

– для поперечного заклепочного шва:

$$F_t = \frac{Dpt}{4}.$$

Расчет плотных заклепочных соединений начинают с определения толщины стенки сосуда:

$$s = \frac{Dp}{2\varphi[\sigma_p]} + \Delta,$$



где  $D$  – внутренний диаметр сосуда;  $p$  – давление на поверхность стенки сосуда;  $\varphi$  – коэффициент прочности продольного шва;  $[\sigma_p]$  – допускаемое напряжение при растяжении материала стенки сосуда;  $\Delta = 1 \dots 3$  мм – припуск на коррозию металла.

Допускаемое напряжение  $[\sigma_p]$  при растяжении при нагреве стенки сосуда до  $250^\circ\text{C}$  определяют по зависимости

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_B}{[s_B]},$$

где  $\sigma_B$  – предел прочности материала стенки сосуда при растяжении;  $[s_B]$  – коэффициент запаса прочности, который для заклепочного шва внахлестку  $[s_B] = 4,75$ , а для двухрядного и трехрядного заклепочного шва встык с двухсторонними накладками  $[s_B] = 4,00$ .

**Задача 1.** Для заклепочного соединения (рис. 130) определить необходимое число заклепок  $z$  из условия прочности на срез, если сила  $F = 50$  кН, а диаметр отверстия под заклепку  $d_0 = 11$  мм, допустимое напряжения на срез  $[\tau_{cp}] = 96$  МПа.

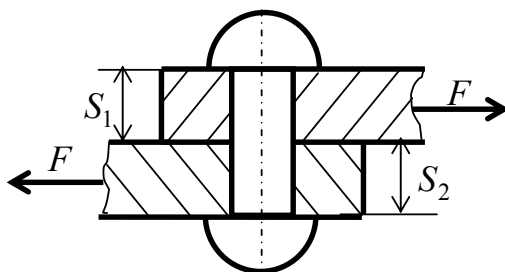


Рис. 130

*Решение*

Условие прочности на срез заклепочного шва имеет вид:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{A_{cp}} = \frac{4F}{\pi d_0^2 z i} \leq [\tau_{cp}],$$

откуда требуемое число заклепок

$$z \geq \frac{4F}{\pi d_0^2 i [\tau_{cp}]} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 11^2 \cdot 1 \cdot 96} = 5,37.$$

Принимаем  $z = 6$ .

**Задача 2.** Определить минимальную толщину листа для заклепочного соединения (рис. 130) из условия прочности на смятие, если сила  $F = 50$  кН, а диаметр отверстия под заклепку  $d_0 = 11$  мм, допустимое напряжения на смятие  $[\sigma_{см}] = 320$  МПа, число заклепок  $z = 3$ .

*Решение*

Условие прочности заклепочного шва по напряжениям смятия

$$\sigma_{см} = \frac{F}{d_0 s_{мин} z} \leq [\sigma_{см}],$$

откуда минимальная толщина соединяемой детали

$$s_{мин} \geq \frac{F}{d_0 z [\sigma_{см}]} \leq \frac{50 \cdot 10^3}{11 \cdot 3 \cdot 320} = 4,74 \text{ мм.}$$

Принимаем толщину листа  $s = 5$  мм.

### **Контрольные вопросы**

1. В каких случаях применяют заклепочные соединения?
2. Как подразделяются заклепочные соединения в зависимости от назначения?
3. Какими способами изготавливают отверстия в деталях?
4. Как рассчитывают прочные заклепочные соединения?
5. Как рассчитывают плотные заклепочные соединения?
6. Как определяют допускаемые напряжения?

## Литература

1. Прикладная механика : учеб. пособие / А. Т. Скойбеда [и др.] ; под общ. ред. А. Т. Скойбеда. – Минск : Выш. шк., 1997. – 552 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Машиностроение, 1979. – 560 с.
3. Першина, С. В. Сопротивление материалов : учеб. пособие / С. В. Першина. – Тамбов : Изд-во Тамбов. гос. техн. ун-та, 2005. – 160 с.
4. Селиванов, Ю. Т. Сопротивление материалов : учеб. пособие / Ю. Т. Селиванов. – Тамбов : Изд-во Тамбов. гос. техн. ун-та, 2007. – 76 с.
5. Олофинская, В. П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий : учеб. пособие / В. П. Олофинская. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2007. – 349 с.
6. Мурин, А. В. Прикладная механика : учеб. пособие для вузов / А. В. Мурин, В. А. Осипов ; под ред. А. В. Мурина. – Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2010. – 326 с.
7. Аркуша, А. И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов : учеб. для машиностр. спец. техникумов / А. И. Аркуша. – 2-е изд., доп. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.
8. Теоретическая механика для студентов ФИТО : учеб. пособие. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006. – 169 с.
9. Иванов, М. Н. Детали машин : учеб. для вузов / М. Н. Иванов. – М. : Высш. шк., 1976. – 399 с.
10. Решетов, Д. Н. Детали машин : учеб. для вузов / Д. Н. Решетов. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.
11. Детали машин в задачах и примерах / С. Н. Ничипорчик [и др.] ; под общ. ред. С. Н. Ничипорчика. – Минск : Выш. шк., 1981. – 432 с.
12. Вышинский, Н. В. Техническая механика / Н. В. Вышинский. – Минск : ИВЦ Минфина, 2006. – 256 с.
13. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Высш. шк., 2002. – 736 с.
14. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 2001. – 768 с.

## Содержание

Введение.....	3
Статика твердого тела.....	5
Кинематика .....	15
Динамика.....	30
Механика материалов .....	46
Теория напряженного состояния .....	51
Геометрические характеристики плоских сечений.....	62
Растяжение–сжатие .....	72
Чистый сдвиг .....	79
Кручение .....	86
Плоский изгиб.....	94
Гипотезы прочности.....	107
Сложное сопротивление .....	113
Устойчивость сжатых стержней .....	117
Прочность при переменных напряжениях .....	124
Соединения зацеплением.....	131
Резьбовые соединения .....	143
Сварные соединения .....	156
Заклепочные соединения .....	163
Литература .....	171

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Тариков** Георгий Петрович  
**Бельский** Алексей Тимофеевич

## **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

**Учебное пособие**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. Г. Мансурова*  
Компьютерная верстка *М. В. Кравцова*

Подписано в печать 04.12.12.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 9,83.

Изд. № 47.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Издательский центр Учреждения образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48