УДК 530.1:51-72

# ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

**В. Ю. Гавриш, В. Ю. Златина**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

Вычисление процессов стандартной модели тесно связано с методами математической физики и теорией специальных функций. Это обусловлено тем, что уравнения скалярных, векторных и спинорных частиц являются дифференциальными уравнениями различных порядков [1]–[5].

В работе проведем вычисление функции Грина [5] для частицы полуцелого $\hbar/2$ спина. Указанные выражения используются не только для описания движения частиц во внешних полях, но и при вычислении квантово-полевых амплитуд в теории рассеяния.

**Метод функции Грина.** В разделе кратко изложим метод функции Грина, который представляет собой один из универсальных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных [5].

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$\widehat{Q} f(x) = f_0(x), \quad (1)$$

где $\widehat{Q}$ – линейный дифференциальный оператор; $f(x)$ – искомая функция; $f_0(x)$ – некоторая заданная функция. Каждой функции $g(x)$ соответствует свое решение. Такое соответствие можно представить в виде операторного соотношения:

$$f(x) = \widehat{L} f_0(x), \quad (2)$$

в котором $\widehat{L}$ есть некоторый оператор, определяемый видом оператора $\widehat{Q}$. Для решения поставленной задачи введем функцию $G(x, x')$, являющуюся решением уравнения

$$\widehat{Q}\, G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (3)$$

где $\delta(x - x')$ – дельта-функция Дирака [6]. Функцию $G(x, x')$ называют функцией Грина, отвечающей рассматриваемой задаче. С помощью $G(x, x')$ решение уравнения может быть представлено в виде

$$f(x) = \int G(x, x') f_0(x')\, dx'. \quad (4)$$

Действительно, подействуем на соотношение (4) оператором $\widehat{Q}$. Учтя (3), получаем, что

$$\widehat{Q} f(x) = \int \widehat{Q} G(x, x') f_0(x')\, dx' = \int \delta(x - x') f_0(x')\, dx' = f_0(x). \quad (5)$$

**Функция Грина для уравнения Дирака.** Решим методом функции Грина уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi(x)=-e\,\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\,\psi(x), \tag{6}$$

где $\gamma^{\mu}=\{\gamma^{0},\gamma^{1},\gamma^{2},\gamma^{3}\}$ – матрицы Дирака; $e$ – заряд частицы полуцелого спина. Следуя методу, изложенному выше, решим вспомогательную задачу вида

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)G_{F}(x,x')=\delta^{(4)}(x-x'). \tag{7}$$

Найдя функцию Грина $G_{F}(x,x'),$ решение уравнения (6) можно записать в виде

$$\psi(x)=-e\int G_{F}(x,x')\gamma^{\mu}A_{\mu}(x')\;\;\psi(x')\,dx'. \tag{8}$$

Чтобы решить уравнение (6), запишем функцию Грина $G_{F}(x,x')$ в импульсном пространстве:

$$G_{F}(x,x')=\frac{1}{(2\pi)^{4}}\int S_{F}(p)\;e^{-ip(x-x')}\;\;d^{4}p, \tag{9}$$

где $S_{F}(p)$ – Фурье-образ функции. Представляя дельта-функцию Дирака в импульсном пространстве:

$$\delta^{(4)}(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^{4}}\int e^{-ip(x-x')}d^{4}p\,, \tag{10}$$

из (9) получаем:

$$\frac{1}{(2\pi)^{4}}\int S_{F}(p)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)e^{-ip(x-x')}d^{4}p=\frac{1}{(2\pi)^{4}}\int e^{-ip(x-x')}d^{4}p. \tag{11}$$

Проводя нетрудные вычисления:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\;e^{-ip(x-x')}=(\gamma^{\mu}p_{\mu}-m)e^{-ip(x-x')} \tag{12}$$

и вводя обозначение $\gamma^{\mu}p_{\mu}=\widehat{p}$ , получаем выражение для $S_{F}(p)$:

$$(\widehat{p}-m)S_{F}(p)=1. \tag{13}$$

Используя перестановочные соотношения для матриц Дирака:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}, \tag{14}$$

где $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор [4], [5], из (13) получаем:

$$S_{F}(p)=\frac{1}{(\widehat{p}-m)}=\frac{\widehat{p}+m}{p^{2}-m^{2}}. \tag{15}$$

С учетом (14) и определения скалярного произведения четырех векторов [1], [2] нетрудно показать:

$$\widehat{p}\,\widehat{p}=p_{\mu}\;p_{\nu}\;\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=p_{\mu}\;p_{\nu}(2g^{\mu\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}), \tag{16}$$

или окончательно $\hat{p}\hat{p} = p^2$.

Чтобы завершить вычисление $S_F(p)$, определим, как обращаться с сингулярностями при

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2) = 0. \tag{17}$$

Верное правило интегрирования вблизи полюсов при $p_0 = \pm E$ получается при наложении подходящих граничных условий. Для этого воспользуемся методом «сдвига» полюсов с оси, оставляя при этом контур интегрирования без изменений. Чтобы сделать это, запишем $S_F(p)$ в виде

$$S_F(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{18}$$

Введение $i\varepsilon$ с бесконечно малым положительным $\varepsilon$ приводит к сдвигу полюсов при $p_0 = \pm E$ соответственно немного вниз и вверх от оси. Процедура связана с использованием теоремы Коши о вычетах с последующим выбором контура интегрирования, однако подробные вычисления достаточно громоздки (см. [2], [3]).

Использование выражений (9) и (18) приводит к явному виду искомой функции Грина [2]:

$$G_F(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip(x-x')}\, d^4 p. \tag{19}$$

Полученное выражение и явный вид $A_\mu(x)$ могут быть использованы для решения уравнения (6) движения частиц полуцелого спина во внешних полях.

Таким образом, в работе получен явный вид функции Грина уравнения Дирака. В ходе исследования были использованы Фурье-преобразования и методы теории функции комплексного переменного. Полученные выражения могут быть применены для решения задач теории рассеяния, а также расчета квантово-полевых амплитуд переходов спинорных частиц.

Литература

1. Пескин, М. Е. Введение в квантовую теорию поля / М. Е. Пескин, Д. В. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. – 784 с.
2. Биленький, С. М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С. М. Биленький. – М. : Энерго-атомиздат, 1990. – 327 с.
3. Хелзен, Ф. Лептоны и кварки: введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А. Мартин. – М. : Мир, 1987. – 456 с.
4. Borodulin, V. I. CORE: COmpendium of RElations: Version 3.1 / V. I. Borodulin, R. N. Rogalyov, S. R. Slabospitsky // CORE. – Mode of access: http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9507456. – Date of access: 10.08.2020.
5. Савельев, И. В. Основы теоретической физики / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2005. – Т. 2. Квантовая механика. – 432 с.
6. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1967. – 436 с.