Следовательно,

$$V_4^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta.$$

Определим скорость центра схвата матричным методом.

Координаты центра схвата *4* в неподвижной системе x, y, z выражаются через координаты центра схвата в системе x_3, y_3, z_3 следующим образом (рис. 1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $00_1 = a = \text{const}$.

Дифференцированием текущих координат определим вектор скорости $\overline{V}_4$ в системе xyz:

$$\overline{V_4} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проекции скорости $\overline{V}_4$ центра схвата на оси x, y, z определим из выражений:

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi}\cos\varphi\,\cos\theta + r\,\dot{\theta}\sin\varphi\,\sin\theta - \dot{r}\sin\varphi\,\cos\theta;$$

$$\dot{y} = -r\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\cos\theta - r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\sin\theta + \dot{r}\cos\varphi\,\cos\theta;\quad \dot{z} = r\,\dot{\theta}\,\cos\theta + \dot{r}\sin\theta.$$

Тогда

$$V_4^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta.$$

Кинетическую энергию груза центра схвата вычеслим по формуле

$$T_4 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta\right).$$

УДК 537.2:620.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В СФЕРЕ

Д. В. Комнатный

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Метод электрических отображений в сфере восходит к классическим работам И. Ньютона и У. Томпсона (лорда Кельвина). Тем не менее в научных журналах до последних лет появляются публикации, в которых рассматривается решение той или иной задачи методом электрических отображений в сфере. Результаты расчетов, как правило, выражаются в виде рядов по полиномам Лежандра по образцу известного курса Н. С. Кошлякова, Э. Б. Глинера и М. М. Смирнова. Рассмотрение имеющихся публикаций и собственный опыт работы показывают, что возможны различные подходы к расчету электростатического поля элементарных источников в присутствии проводящей сферы. Поэтому целью доклада является систематизация и сравнительный анализ этих подходов, выявление их особенностей и путей наилучшего применения.

В статье рассматривается в качестве примера задача о расчете электростатической индукции на изолированной проводящей сфере, возбуждаемой элементарным источником поля в виде отрезка прямой равномерно заряженной нити. Предполагается, что при изображении в сфере нить-изображение целиком помещается внутри сферы.

Метод решения задачи заключается в выполнении изображения нити в сфере по известному правилу. Далее расчет характеристик электростатического поля может осуществляться по принципу суперпозиции полей исходной нити, нити-изображения и точечного заряда в центре сферы. Для характеристик поля указанных источников известны замкнутые выражения. Такой способ аналогичен методу эквивалентных зарядов. Его достоинство в том, что он не использует специальных функций, не требует математических преобразований. В нем применяются только известные замкнутые формулы. Значительный недостаток его состоит в том, что результаты расчета можно проанализировать только визуально методами компьютерной графики. Расчетные соотношения усложняет необходимость рассматривать формулы для характеристик электростатического поля в трех локальных системах координат.

Второй способ формулировки результатов решения заключается в переразложении потенциала источника электростатического поля и электрического отображения этого источника в сферической системе координат, связанной с центром сферы, по известным теоремам сложения (формулам переразложения). Этим методом показано, что источник в виде отрезка равномерно заряженной нити создает на изолированной проводящей сфере потенциал:

$$\varphi\Big|_{r=R_0} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z_2}{z_1}, \tag{1}$$

где где φ – потенциал, В; ε_0 – электрическая постоянная, Ф/м; R_0 – радиус сферы, м; τ – линейная плотность электрического заряда нити, Кл/м; z_1 и z_2 – координаты нити, м.

При этом поверхностная плотность заряда, индуцированного на сфере:

$$\sigma = -\varepsilon_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau a_n R_0^{n-1}(2n+1)P_n(\cos\Theta) - \frac{\tau}{R_0}a_0\right); \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z_2}{z_1};\; a_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_2^n}\right) \text{ при } n \ge 1,$$

где n – счетная переменная; a_n – коэффициент разложения, м/Ф; P_n – полином Лежандра порядка n; Θ – угловая сферическая координата, рад.

Этот способ обладает весьма большой общностью, так как им можно решать задачи не только для сфер и не только для электростатических, но и для квазистатических полей. Полученный результат может быть использован для проверки задач об электростатической индукции на эллипсоиде и для построения теории электростатического поля «от простого к сложному». Но недостаток способа – расчетные соотношения получаются в форме рядов по полиномам Лежандра, что усложняет решение практических задач.

Третий возможный способ представления расчетных соотношений – использование физических соображений и известного выражения для расстояния в сферической системе координат (предложен анонимным рецензентом статьи автора доклада).

Известно, что для элементарного заряда нити $dq = \tau da$ индуцированный потенциал сферы равен потенциалу, созданному размещенным в центре шара точечным зарядом, который равен элементарному. Тогда потенциал сферы, созданный отрезком нити:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{da}{a} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z_2}{z_1}. \tag{3}$$

Это выражение совпадает с (1).

Для расчета наведенного на сфере заряда выражение для потенциала сферы, созданного элементарным зарядом нити, записывается в сферической системе координат с использованием формулы для расстояния в сферической системе координат. Полученное выражение дифференцируется по сферической координате R и умножается на $-\varepsilon_0$. Затем результат интегрируется по координате элементарного заряда нити. В результате формула для поверхностной плотности заряда сферы имеет вид

$$\sigma = \frac{\tau}{4\pi R_0}\ln\frac{z_2}{z_1} + \frac{\tau}{4\pi R_0}\left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\Theta}} - \ln\left(t+\sqrt{1+t^2-2t\cos\Theta}\right) + 4\frac{t}{4-8t\cos\Theta\sqrt{1+t^2-2t\cos\Theta}}\right]_{\frac{z_1}{R_0}}^{\frac{z_2}{R_0}}, \tag{4}$$

где t – безразмерная расчетная переменная.

Хотя полученное выражение аналитическое и замкнутое, но этот способ представления решения имеет недостатки. Во-первых, он применим только к сферам. Во-вторых, получение решения требует нетривиальных преобразований. Чем сложнее форма источника электростатического поля, тем сложнее преобразования. В то же время при использовании теорем сложения преобразования кажутся более громоздкими, но математически они проще, так как не требуется работать с иррациональностями.

Поэтому следует заключить, что ни один из рассмотренных способов представления решения задачи об электростатической индукции на изолированной проводящей сфере не имеет решающего преимущества перед остальными. В такой ситуации выбор способа представления решения диктуется тем, как будет это решение использовано. Поэтому, в частности, все описанные способы представления решения должны быть известны и отражены в литературе независимо от личных предпочтений. Тем самым достигается необходимая систематизация изложения теории электростатического поля, что значительно облегчает выбор методов для решения прикладных задач электрофизики и электротехники.