



**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Механика»**

**С. Ф. Андреев**

# **КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

**ПРАКТИКУМ**

**по дисциплине «Теория механизмов и машин»  
для студентов технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения**

**Гомель 2020**

УДК 621(075.8)  
ББК 34.412.01я73  
А65

*Рекомендовано научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 24.06.2019 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Нефтегазоразработка и гидропневмоавтоматика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р техн. наук, доц. *В. В. Пинчук*

**Андреев, С. Ф.**  
А65 Кинематический анализ кулисных механизмов : практикум по дисциплине «Теория механизмов и машин» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2020. – 58 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

В данном практикуме на основе приобретенных студентами знаний при изучении разделов теоретической механики «Плоскопараллельное движение твердого тела» и «Сложное движение точки» акцентируется внимание студентов на основных понятиях курса «Теория механизмов и машин», необходимых для построения планов линейных скоростей и ускорений в кулисных механизмах.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 621(075.8)  
ББК 34.412.01я73**

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Качество создаваемых машин и механизмов в значительной мере определяется полнотой разработки и использования методов ТММ. Чем более полно будут учтены при построении механизмов и машин критерии производительности, надёжности, точности и экономичности, тем совершеннее будут получаемые конструкции.

Широкое применение в современных машинах имеют механизмы с гидро- и пневмоцилиндрами, которые могут быть приведены к кинематической схеме кулисного механизма. Поэтому исследование движения кулисного механизма является актуальной задачей. Первым этапом в таких исследованиях является кинематический анализ, задача которого заключается в установлении зависимостей между кинематическими параметрами звеньев механизма.

Кулисные механизмы нашли широкое применение благодаря присущему им свойству асимметрии рабочего и холостого хода: у них длительный рабочий ход и быстрый холостой ход, обеспечивающий возврат рабочего звена в исходное положение.

В практикуме приведены методические рекомендации по выполнению кинематического анализа кулисных механизмов графоаналитическим методом. Приведен теоретический материал, рассмотрены примеры построения планов скоростей и ускорений кулисных механизмов различного типа.

### 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

#### 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЗМА И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим несколько основных определений и понятий, которые необходимы для изучения кинематики кулисных механизмов [1].

**Механизм** – система материальных тел, предназначенная для передачи и преобразования заданного движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

**Плоский механизм** – механизм, подвижные звенья которого совершают плоское движение, параллельное одной и той же плоскости.

**Звено механизма** – одно или несколько жестко соединенных между собой твердых тел, входящих в состав механизма и движущихся как единое целое.

**Кинематическая пара** – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

**Вращательная пара** – одноподвижная кинематическая пара, допускающая вращательное движение одного звена относительно другого.

**Поступательная пара** – одноподвижная кинематическая пара, допускающая поступательное движение одного звена относительно другого.

**Элемент кинематической пары** – совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару.

**Кинематическая цепь** – система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

**Входное звено** – звено, которому сообщается движение, преобразуемое в требуемое движение других звеньев

**Выходное звено** – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

**Ведомое звено** – звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил отрицательна или равна нулю.

**Ведущее звено** – звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил положительна.

**Промежуточное или соединительное звено** - это всякое подвижное звено за исключением входных и выходных звеньев

**Начальное звено** – звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат.

**Рычажный механизм** – механизм, звенья которого образуют только низшие (поступательные, вращательные, цилиндрические и сферические) кинематические пары.

**Кинематическая схема механизма** – структурная схема механизма с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа механизма.

**Коромысло** – звено рычажного механизма, которое может совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси.

**Кривошип** – вращающееся звено рычажного механизма, которое может совершать полный оборот вокруг неподвижной оси.

**Ползун** – звено рычажного механизма, образующее поступательную пару со стойкой.

**Стойка** – система неподвижных звеньев, которая объединяется в одно звено, на кинематических схемах обозначается штриховкой. Стойка соединяется с подвижными звеньями с помощью кинематических пар.

**Шатун** – звено рычажного механизма, совершающее плоскопараллельное движение, и образующее кинематические пары только с подвижными звеньями.

**Шатунная кривая** – траектория, описываемая какой-либо точкой шатуна.

**Кулиса** – подвижное звено, образующее поступательную пару с другими подвижными звеньями. Кулиса может совершать поступательное, вращательное и плоскопараллельное движения.

**Камень кулисы** – ползун, совершающий относительное движение вдоль кулисы.

**Кулисный механизм** – рычажный механизм, в состав которого входит кулиса.

**Графоаналитический метод** – в графическое решение векторных уравнений.

**Масштабный коэффициент** – отношение численного значения физической величины в собственных ей единицах измерения к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту величину.

## 1.2. ОСОБЕННОСТИ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМА

Точность графических методов 0,3...0,5% достаточна для решения многих практических задач. Графические методы становятся затруднительными, если требуется провести большой объем однообразных построений и не могут быть использованы непосредственно, если расчеты требуется провести с высокой точностью.

Кинематическое исследование механизма графоаналитическим методом сводится к построению планов линейных скоростей и ускорений некоторых характерных точек, принадлежащих звеньям механизма.

Для работы с векторными изображениями необходимо иметь элементарные представления о геометрии и векторной алгебре. Поэтому прежде, чем приступить к графическим построениям рассмотрим некоторые правила элементарной математики.

### 1.2.1. МАСШТАБНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Любая скалярная величина  $H$  или любой вектор  $\vec{P}$  может быть изображена на рисунке в виде прямолинейного отрезка  $\tilde{H}$  или вектора  $\vec{\tilde{P}}$ , определенной длины, измеряемой на рисунке в миллиметрах.

Отношение действительного численного значения скалярной величины или вектора к длине отрезка изображенного на рисунке определяет масштаб рисунка и называется масштабным коэффициентом  $\mu$ .

В графических задачах ТММ масштабному коэффициенту присваивается индекс той физической величины, которая изображается на рисунке.

Например:

– масштабный коэффициент для кинематической схемы механизма определяет длину прямолинейных отрезков, условно изображающих звенья механизма  $\mu_L = \frac{L_{AB}}{\tilde{L}_{AB}}$ , или  $\mu_L = \frac{L_{AB}}{AB}$ , причем

размерность этого коэффициента определяется отношением  $[\mu_L] = \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ ;

– масштабный коэффициент для плана линейных скоростей (план скоростей) равен  $\mu_V = \frac{|\vec{V}_A|}{|\vec{\tilde{V}}_A|}$ , размерность этого коэффициента определяется отношением  $[\mu_V] = \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ ;

– масштабный коэффициент для плана линейных ускорений (план ускорений) равен  $\mu_a = \frac{|a_A|}{|\tilde{a}_A|}$ , размерность этого коэффициента определяется отношением  $[\mu_a] = \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ .

### 1.2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ввиду широкого использования геометрических представлений приведем некоторые наиболее часто используемые понятия элементарной геометрии.

Для треугольника, изображенного на рисунке 1,  $a$ , вспомним две теоремы:

теорема синусов - 
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma};$$

теорема косинусов -

$$a = \sqrt{c^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}, \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta},$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}.$$

Если какой-либо угол в треугольнике равен  $90^\circ$  (прямой угол), то теорема косинусов переходит в теорему Пифагора, а формульная запись теоремы синусов становится математическим определением значения синуса угла как отношения противолежащего катета к гипотенузе.  $\sin \gamma = 1, \sin \alpha = a/c, \sin \beta = b/c$ .

Например, для  $\gamma = 90^\circ$  имеем  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\sin \gamma = 1, \sin \beta = b/c, \sin \alpha = a/c$  (рис. 1, б).

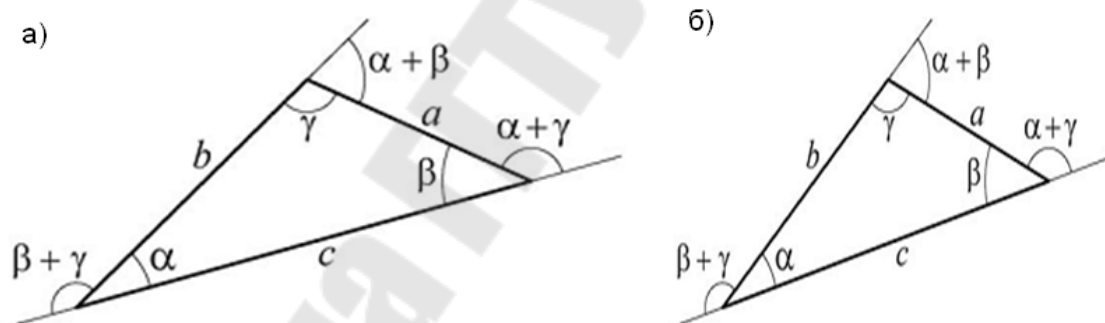


Рис. 1. Графическое пояснение теоремы синусов

На рис. 1, а продемонстрирован тот факт, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним. Сумма углов треугольника  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

При решении задач часто возникает необходимость найти диагональ параллелограмма (рис. 2) по известным сторонам  $a$  и  $b$ . По теореме косинусов для  $\triangle ADC$  находим

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

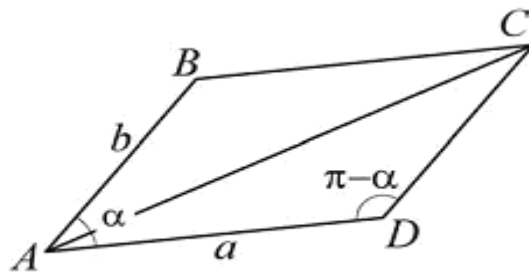


Рис. 2. Графическое пояснение теоремы косинусов

Здесь важно отметить, что под знаком корня перед последним слагаемым возникает знак «+» в отличие от стандартной формулировки теоремы косинусов, так как угол  $\alpha$  является дополнительным к  $\pi$  углу, входящему в формулировку теоремы.

При определении значений углов часто используются свойства углов, образованных пересечением двух параллельных прямых третьей. На рис. 3, а указаны одинаковые смежные углы.

Кроме этого, часто применяется теорема о равенстве углов между взаимно перпендикулярными прямыми (рис. 3, б).

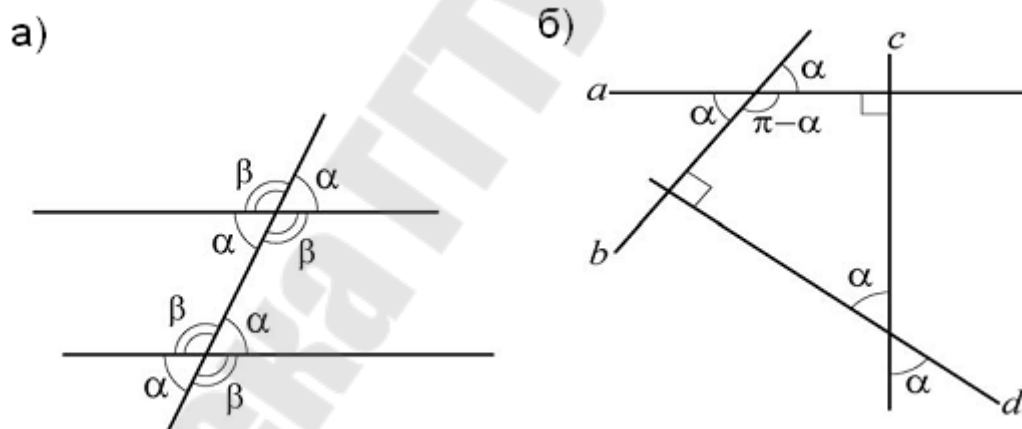


Рис. 3. Графическое пояснение свойств углов

### 1.2.3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

При изучении различных разделов механики и технических наук встречаются величины, для определения которых, кроме численного значения, необходимо знать также их направление в пространстве. Такие величины называются векторными.



Вектор – это направленный отрезок определенной длины, у которого одна из его крайних точек принимается за начало, а вторая за конец. Точка В со стрелкой – это конец вектора, точка А — начало вектора (рис. 4).

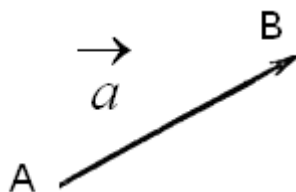


Рис. 4. Графическое изображение вектора

Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора АВ.

#### Классификация векторов

1. Векторы называются равными, если их модули равны, и они одинаково направлены.

Два направленных отрезка АВ и CD изображают один и тот же вектор, если их длины равны, прямые (АВ) и (CD) параллельны (в т.ч. совпадают), а направление от А к В одинаково с направлением от С к D. Таким образом, направленных отрезков, изображающих один и тот же вектор, бесконечное множество.

2. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым.

3. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным (или ортом)

4. Векторы называются противоположными, если они одинаковы по модулю, но противоположны по направлению.

5. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они могут быть изображены направленными отрезками параллельных прямых (в т.ч., одной и той же прямой).

6. Сумма и разность двух или нескольких векторов есть вектор.

7. Операции над векторами определяются векторными уравнениями.

8. При решении графических задач все векторы считаются свободными, поэтому их можно переносить параллельно самим себе.

Операции сложения и вычитания векторов подчиняются следующим законам:

Коммутативный закон сложения:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

Ассоциативный закон сложения:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

Пусть известны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 5а). Запишем векторное уравнение сложения двух векторов  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Это уравнение имеет графическое решение, в котором сложение векторов выполняется по правилу треугольника (рис. 5, б) или по правилу параллелограмма (рис. 5, в).

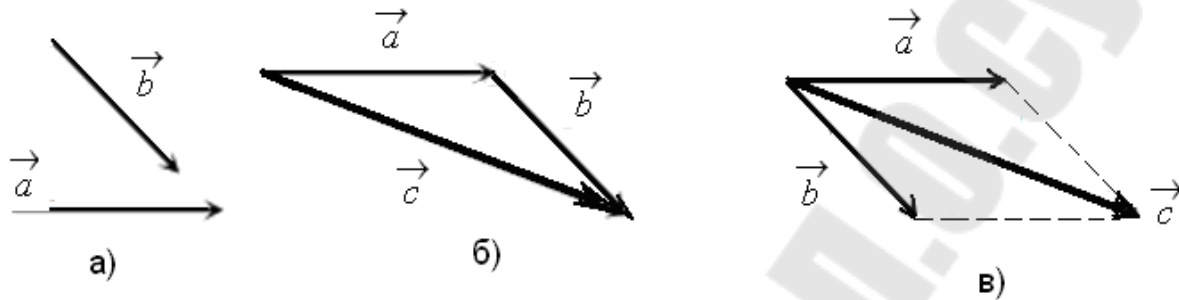


Рис. 5. Сложение двух непересекающихся векторов

**Правило треугольника:** суммой двух векторов является некоторый третий вектор, получаемый следующим образом: из конца вектора  $\vec{a}$  откладываем вектор  $\vec{b}$ , затем соединяем начало вектора  $\vec{a}$  и конец вектора  $\vec{b}$ ; полученный в результате вектор  $\vec{c}$  обозначает сумму указанных векторов (рис. 5б). В зарубежной литературе этот метод называют «хвост к голове». Следовательно, суммой двух векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец – совпадает с концом второго слагаемого вектора. При помощи правила треугольника можно сложить два параллельных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  направленных в одну сторону (рис. 6) или два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{d}$ , направленных в разные стороны (рис.7). Суммы этих векторов  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  или  $\vec{f} = \vec{a} + \vec{d}$ , причем, модули векторов определяются с помощью алгебраических уравнений  $c = a + b$  и  $f = |a - d|$ .

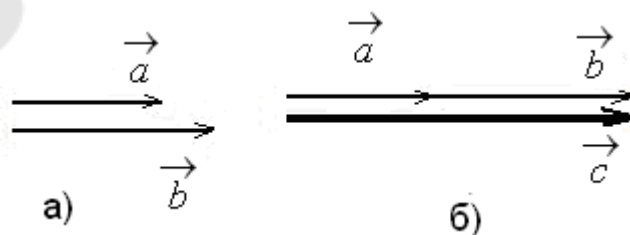


Рис. 6. Сложение двух параллельных векторов

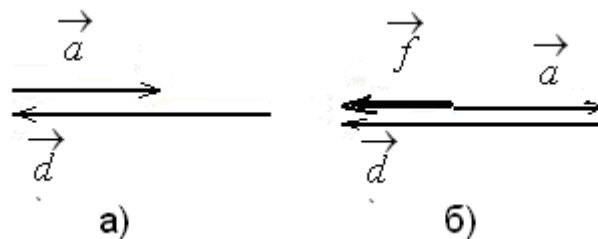


Рис. 7. Разность двух параллельных векторов

**Правило параллелограмма:** если векторы отложены от общего начала и на них построен параллелограмм, то суммой векторов и является вектор, совпадающий с вектором-диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов (рис. 5в).

Если вектор  $\vec{a}$  равен геометрической сумме двух векторов  $\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ , то его величину можно вычислить по формуле

$$a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2 \cos(\angle b_1, b_2)}.$$

Суммой нескольких векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  называется вектор  $\vec{f}$ , получающийся в результате последовательного сложения данных векторов.

Запишем векторное уравнение сложения четырех векторов

$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}.$$

Графическое решение этого уравнения выполняется по правилу векторного многоугольника. Применяя это правило для суммы нескольких векторов (рис. 8) получаем, что суммой нескольких векторов является вектор  $\vec{f}$ , замыкающий ломаную линию (векторную цепочку), состоящую из слагаемых векторов.

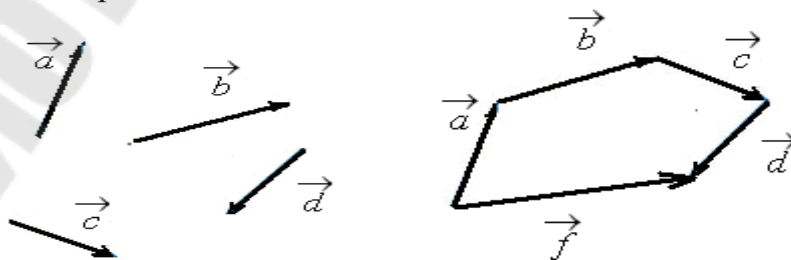


Рис. 8. Сложение нескольких векторов

Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ . Запишем векторное уравнение разности двух векторов  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

Это уравнение можно переписать как  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ . Разность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равна сумме вектора  $\vec{a}$  и противоположного вектора  $-\vec{b}$ :  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  (рис. 9).

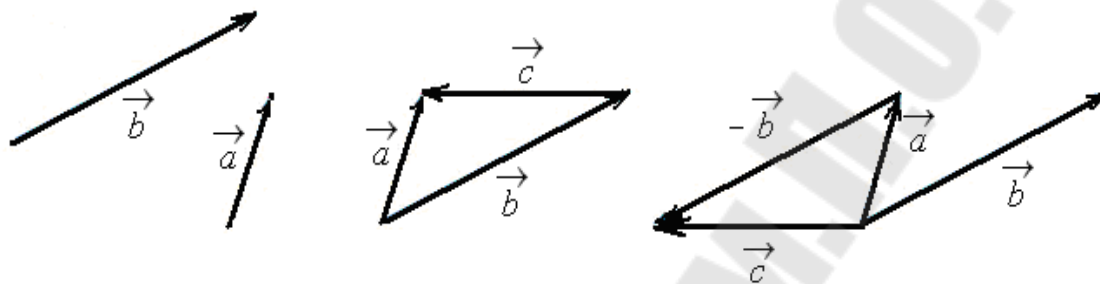


Рис. 9. Разность двух непараллельных векторов

#### 1.2.4. ПОНЯТИЕ О ПЛАНАХ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

**План скоростей (ускорений) механизма** – графическое векторное масштабное изображение скоростей (ускорений) точек, принадлежащих звеньям механизма.

Планы скоростей (ускорений) выполняются для заданного положения, определенного кинематической схемой при известном угле поворота кривошипа (план положений).

Для выбранной точки какого-либо звена механизма на основании теорем теоретической механики составляются векторные уравнения, определяющие скорость или ускорение точки. Эти уравнения иллюстрируются масштабируемым на чертеже замкнутым векторным многоугольником (треугольником), который выполняется по правилам действия с векторными величинами.

План скоростей (ускорений) для заданного множества точек звеньев механизма является совокупностью нескольких планов скоростей (ускорений), построенных для каждой отдельной точки. Общим для этих планов является точка Р (полюс), изображающая точки механизма, скорость(ускорение) которых равно нулю.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИКИ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 2.1. НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ

На взгляд автора, курс теории механизмов и машин в машиностроительных вузах должен быть естественным продолжением курса теоретической механики и высшей математики, причём основное внимание должно уделяться повторению основных теорем кинематики точки и твердого тела, так и повторению правил работы с векторными величинами.

Последнее представляется очень важным, поскольку при изложении курса теории механизмов и машин внимание студентов нередко акцентируется лишь на приемах вычерчивания планов скоростей и ускорений одного конкретного, отдельно взятого механизма, не акцентируя внимание студентов на формулировку теорем и запись векторных уравнений.

На основе многолетнего опыта преподавания автором выявлена проблема «взаимодействия» учебного курса теории механизмов и машин (ТММ) с учебными курсами освоенными студентами ранее: теоретической механикой и высшей математикой.

Отметим некоторые аспекты этой проблемы.

1. По определениям теоретической механики все звенья плоского механизма совершают три вида движения твердого тела, точки которого движутся параллельно плоскости чертежа: поступательное, вращательное и плоскопараллельное. Каждый вид движения может выполняться по определенным законам, заданным уравнениями движения.

2. Выражения «возвратно-вращательное» и «возвратно-поступательное» движения звена, встречающиеся в учебниках ТММ, искажают понятия о видах движения тел. Очевидно, эти выражения имеют целью определить колебательный характер движения, хотя и так ясно, что все исследуемые рычажные механизмы являются цикловыми, и следовательно, движения всех звеньев имеют периодический характер.

3. В курсе теоретической механики все движения звеньев или их точек рассматриваются относительно неподвижной системы координат, то есть являются абсолютными движениями, потому в некоторых учебниках ТММ лишним становится утверждение, что рассматривается «движение звена относительно стойки».

4. В курсе теоретической механики сложное движение материальной точки рассматривается как абсолютное движение, состоящее из относительного и переносного движения. Причем кинематические характеристики абсолютного и переносного движений обозначаются одним индексом, определяющим соответствующую точку механической системы.

Кинематические характеристики относительного движения имеют двойной буквенный индекс, в котором первая буква означает исследуемую точку системы, а вторая буква – подвижную точку относительно которой рассматривается относительное движение. Такой же принцип индексирования кинематических характеристик применяется в теоретической механике при исследовании плоскопараллельного движения тела.

5. Движение шатуна в методических пособиях по ТММ называют сложным движением, иногда – сложным плоскопараллельным, однако, согласно определениям теоретической механики, это движение следует называть плоскопараллельным движением.

6. При кинематическом анализе кулисных механизмов в некоторых методических пособиях по ТММ сложное движение камня кулисы принимается за переносное движение, а движение кулисы считается абсолютным, в результате ускорение Кориолиса рассматривается для точки кулисы. Во всех учебниках теоретической механики в подобных задачах движение кулисы принимается переносным, а движение ползуна (каменя кулисы) – абсолютным, ускорение Кориолиса рассматривается для точки, принадлежащей кулисному ползуну.

## 2.2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Поступательное движение** – такое движение твердого тела, при котором отрезок, соединяющий две любые точки тела, перемещается параллельно самому себе. Так как при поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех точек тела геометрически равны и траектории всех точек при наложении совпадают, то достаточно знать характеристики движения одной точки тела. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми или прямыми линиями.

**Вращательное движение** – движение твердого тела, при котором остаются неподвижными хотя бы две точки тела. Прямая,

проходящая через эти точки, называется осью вращения. Все точки тела, лежащие на оси, при вращении остаются неподвижными. Все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на оси, а радиусы окружностей равны расстояниям от точек до оси.

### 2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Сложное движение материальной точки** (составное движение) – это движение точки, слагающееся из независимых движений по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а вторая движется по отношению к первой [2, 3].

**Абсолютное движение** – движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета. Траектория, описываемая точкой в абсолютном движении, называется абсолютной траекторией. Скорость точки по отношению к неподвижной системе отсчета называют абсолютной скоростью  $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_a$ , а ускорение – абсолютным ускорением  $\vec{a}_a$ .

Абсолютное движение является сложным движением, состоящим из относительного и переносного движений точки.

**Переносное движение** (emporter – увлекать) – движение подвижной системы отсчета и всех неизменно связанными с ней точками подвижного пространства (какого-либо звена) по отношению к неподвижной системе отсчета. Траектория любой точки этого пространства называется переносной траекторией. Скорость любой точки этого пространства называют переносной скоростью  $\vec{V}_{пер} = \vec{V}_e$ , а ускорение – переносным ускорением  $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_e$ .

В плоских задачах кинематики механизмов подвижное пространство, то есть какое-либо звено механизма может совершать одно из трех простейших видов переносного движения: поступательное, вращательное, плоскопараллельное (рис. 10).

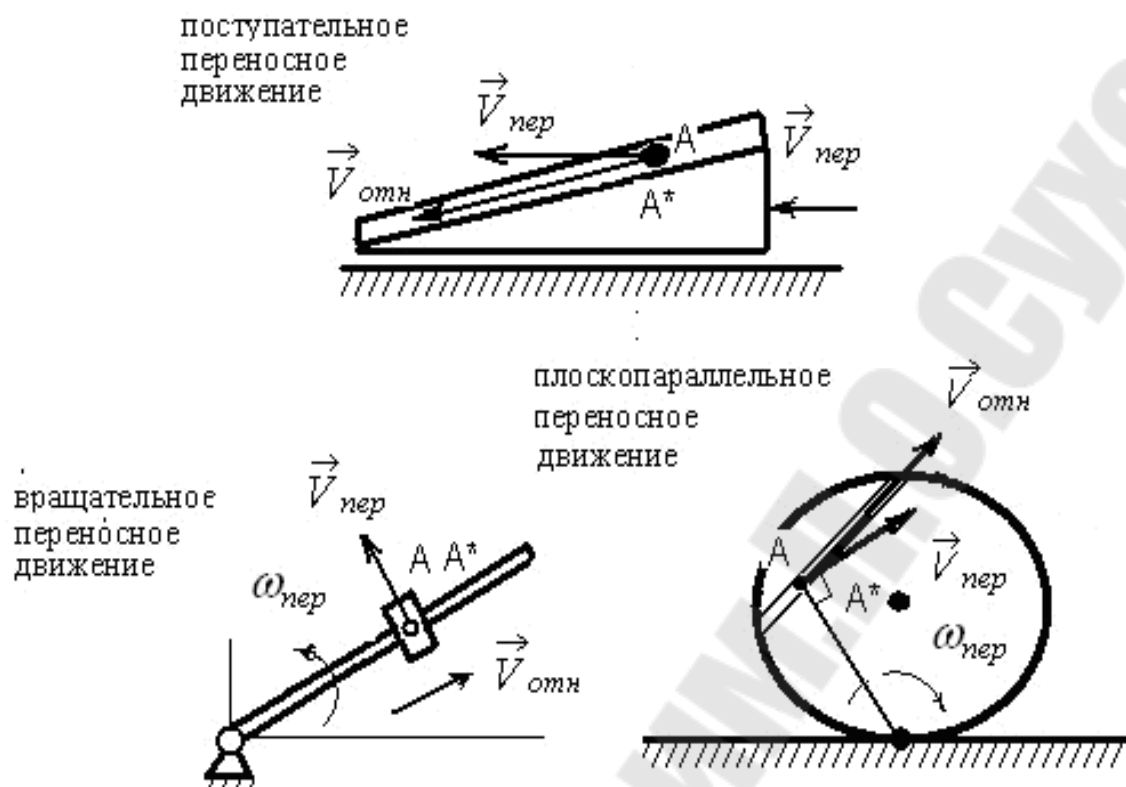


Рис. 10. Иллюстрация сложного движения точки

**Относительное движение** (relatif – относительный) – движение материальной точки, совершаемое точкой относительно подвижной системы отсчета. Траектория, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость материальной точки по отношению к подвижной системе отсчета называют относительной скоростью  $\vec{V}_{отн} = \vec{V}_r$ , а ускорение – относительным ускорением  $\vec{a}_{отн} = \vec{a}_r$ .

При исследовании абсолютного движения заданной точки, например точки А, переносная скорость или ускорение определяют для точки подвижного пространства А\*, совпадающей в данный момент времени с точкой, абсолютное движение которой изучается.

Например, в кулисных механизмах точка А принадлежит ползуну (камню-кулисы), а точка А\* принадлежит кулисе. На кинематической схеме механизма положение этих точек совпадает (рис. 10).

Для обозначения относительной скорости или относительного ускорения точки А возможно использование двойного буквенного индекса, в котором первая буква означает точку, абсолютное



движение которой изучается, вторая буква – подвижная точка относительно которой совершается относительное движение:

$$\vec{V}_{\text{отн}A} = \vec{V}_{AA^*}, \quad \text{или} \quad \vec{a}_{\text{отн}A} = \vec{a}_{AA^*}.$$

### Теорема о сложении скоростей

Вектор скорости абсолютного движения точки в данный момент времени определяется как геометрическая сумма относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Графическое сложение векторов скоростей производят по правилу параллелограмма (рис. 11, а) или треугольника (рис. 11, б) с применением масштабного коэффициента  $\mu_V$ .

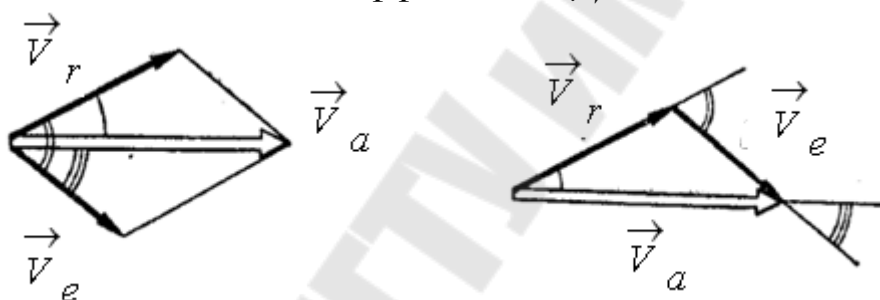


Рис. 11. К теореме о сложении скоростей

Если определен угол между векторами  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_r$ , то модуль абсолютной скорости вычисляется как диагональ параллелограмма, построенного на скоростях  $\vec{V}_e$  и  $\vec{V}_r$  (рис. 11), или сторона треугольника

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\angle V_r, V_e)}.$$

При определении переносной скорости точки предполагается, что относительное движение точки остановлено, а при определении относительной скорости точки условно останавливается переносное движение подвижной системы отсчета.

### Теорема сложения ускорений при сложном движении точки.

Вектор абсолютного ускорения точки равен геометрической сумме переносного, относительного ускорений точки, и некоторого добавочного (поворотного) ускорения.

Это добавочное ускорение возникает в случаях, когда подвижная система отсчета приобретает угловую скорость. Это добавочное ускорение называют ускорением Кориолиса. Гаспáр-Гюста́в де Кориоли́с – французский математик, механик и инженер (1792–1843 г.).

## 2.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Из теоремы о скоростях точек плоской фигуры известно, что скорость любой точки абсолютно твердого тела можно представить как геометрическую сумму скоростей переносного и относительного движений (рис. 12). Переносным движением для рассматриваемого звена будем считать поступательное движение со скоростью точки  $A$ , а относительным – вращательное движение звена вокруг точки  $A$ .

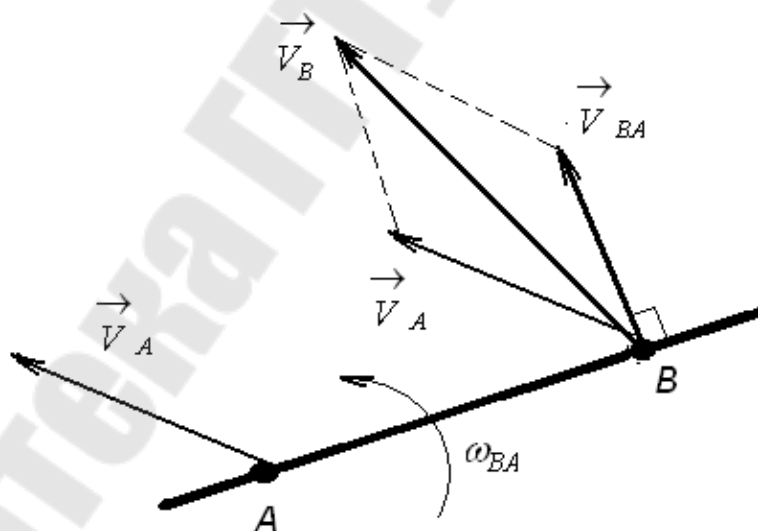


Рис. 12. К теореме о сложении скоростей точек плоской фигуры

Обозначая последнюю скорость через  $\vec{V}_{BA}$ , получаем на основании сказанного следующее векторное уравнение для скорости точки  $B$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Скорость  $\vec{V}_{BA}$  перпендикулярна отрезку  $AB$ . Величины скорости  $\vec{V}_{BA}$  и угловой скорости звена со связаны друг с другом формулой

$$V_{BA} = \omega_{BA} \cdot L_{BA}.$$

По направлению  $\vec{V}_{BA}$  можно найти направление  $\omega_{BA}$ , и наоборот. Для этого, когда известно, например, направление  $\vec{V}_{BA}$  нужно указать его в точке  $B$ . Направление  $\omega_{BA}$  определяется в соответствии с направлением  $\vec{V}_{BA}$  (рис. 12).

Так как переносное движение выбрано поступательным, то ускорение точки  $B$  также можно составить из двух ускорений: ускорения точки  $A$  и ускорения точки  $B$  при вращении звена вокруг точки  $A$ . Обозначая последнее ускорение через  $a_{BA}$ , получаем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Ускорение  $\vec{a}_{BA}$  в свою очередь, складывается из двух ускорений: нормального  $a_{BA}^n$ , направленного к центру вращения, т. е. от точки  $B$  к точке  $A$ , и тангенциального  $a_{BA}^\tau$ , направленного перпендикулярно линии  $AB$  (рис. 13).

На основании сказанного получаем следующее векторное уравнение для ускорения точки  $B$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + a_{BA}^n + a_{BA}^\tau.$$

Величины ускорений  $a_{BA}^n$  и  $a_{BA}^\tau$  можно определить по формулам

$$a_{BA}^n = L_{BA} \omega_{BA}^2 \quad \text{и} \quad a_{BA}^\tau = L_{BA} \varepsilon_{BA},$$

где  $\varepsilon_{BA}$  — угловое ускорение звена  $BA$ .

По направлению  $a_{BA}^\tau$  можно определить направление  $\varepsilon_{BA}$  (см. рис. 13).

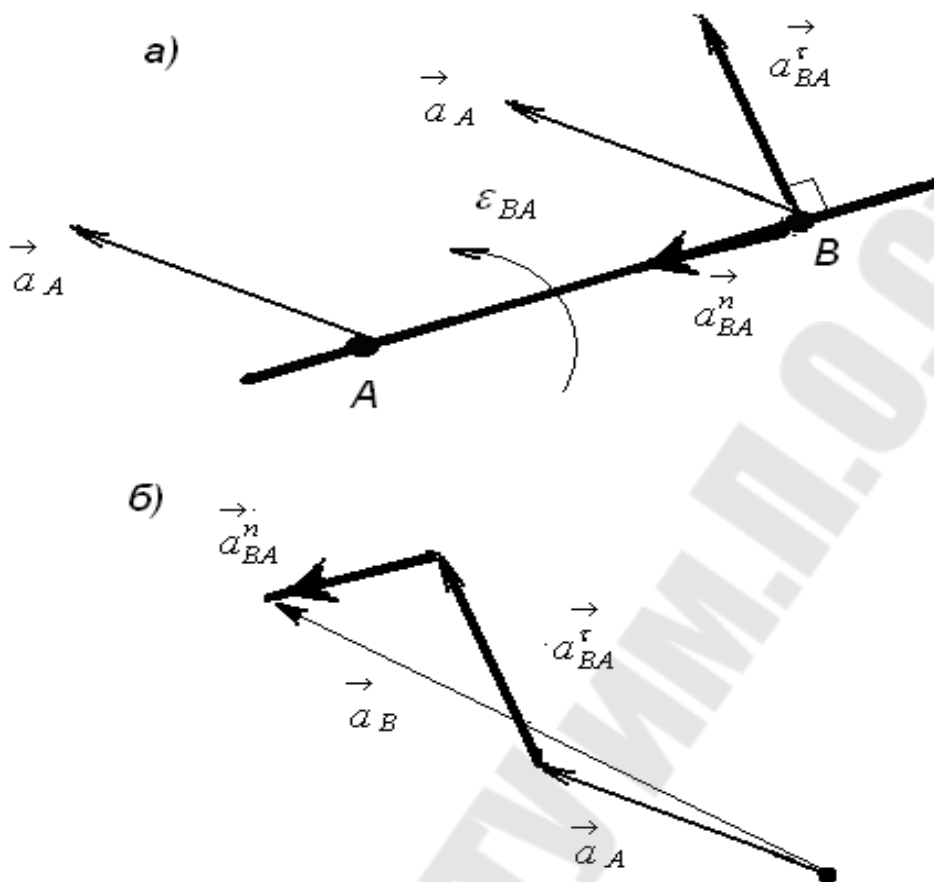


Рис. 13. К теореме о сложении скоростей точек плоской фигуры

### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### 3.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

Основным элементом кривошипно-кулисных механизмов является кулисная кинематическая пара, которая состоит из двух звеньев: кулиса и кулисный ползун, который называют кулисным камнем.

Эту кинематическую пару называют поступательной, так как ползун (кулисный камень) перемещаясь по кулисе, совершает поступательное движение.

Пользуясь определением теоретической механики, в дальнейших исследованиях ползун будем представлять материальной точкой, совпадающей с вращательной кинематической парой на ползуне.

На рисунке 14 эта кинематическая пара изображается точкой А.

Так как кулиса является подвижной направляющей ползуна, то ползун (точка  $A$ ) перемещаясь вдоль подвижной кулисы, совершает сложное движение. Если выбрать точку  $A^*$ , находящуюся на кулисе под ползуном, то относительное движение точки  $A$  надо рассматривать относительно точки  $A^*$ , связанной с подвижной системой отсчета (кулисой) (рис. 14).

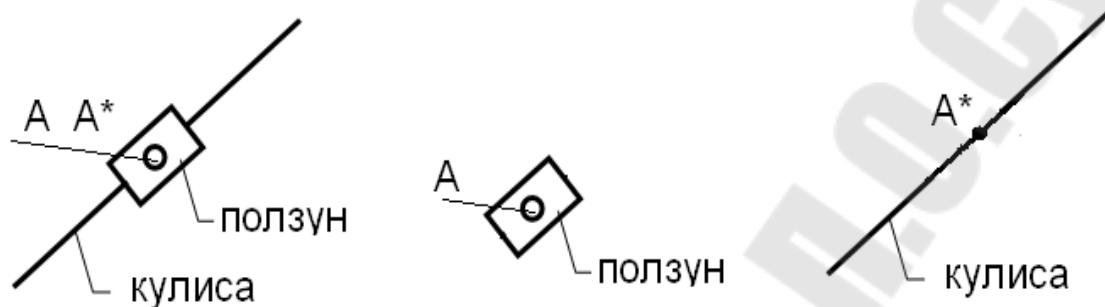


Рис. 14. Кулисная кинематическая пара

Кулисы бывают прямолинейные и изогнутые, поэтому траектория относительного движения точки  $A$  ползуна может быть как прямолинейной, так и криволинейной. Конструктивно кулисы бывают выполнены в виде стержней или рамных направляющих.

По принципу действия кривошипно-кулисные механизмы бывают следующих видов: механизмы с вращательным движением кулисы, механизмы с поступательным движением кулисы и механизмы с плоскопараллельным движением кулисы. Так как все кривошипные механизмы являются циклическими, то кулиса всегда имеет периодическое движение, следовательно, и нет смысла говорить о возвратно-поступательном или возвратно-вращательном движении.

В зависимости от вида движения кулисы переносная траектория точки  $A^*$  может иметь любую форму (рис. 15).

Относительное движение кулисного ползуна происходит вдоль кулисы и поэтому относительная траектория точки  $A$  определяется конструктивной формой кулисы.

Абсолютное движение точки  $A$  ползуна зависит от конструкции механизма и поэтому, в общем случае, абсолютная траектория точки  $A$  может быть представлена произвольной кривой (рис. 15).

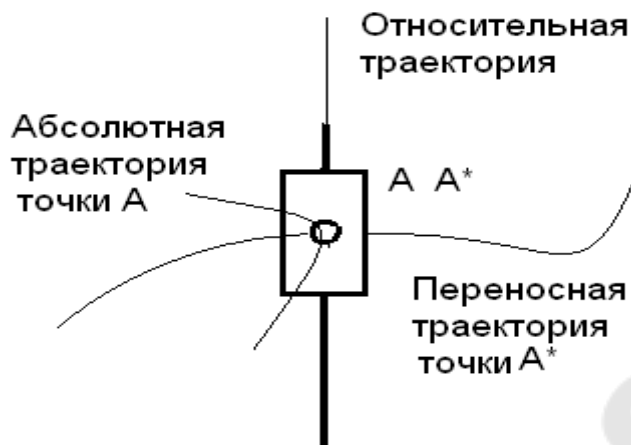


Рис. 15. Траектории сложного движения точки  $A$  кулисного ползуна

Назначением **кулисного механизма** является преобразование вращательного движения кривошипа в периодическое движение кулисы.

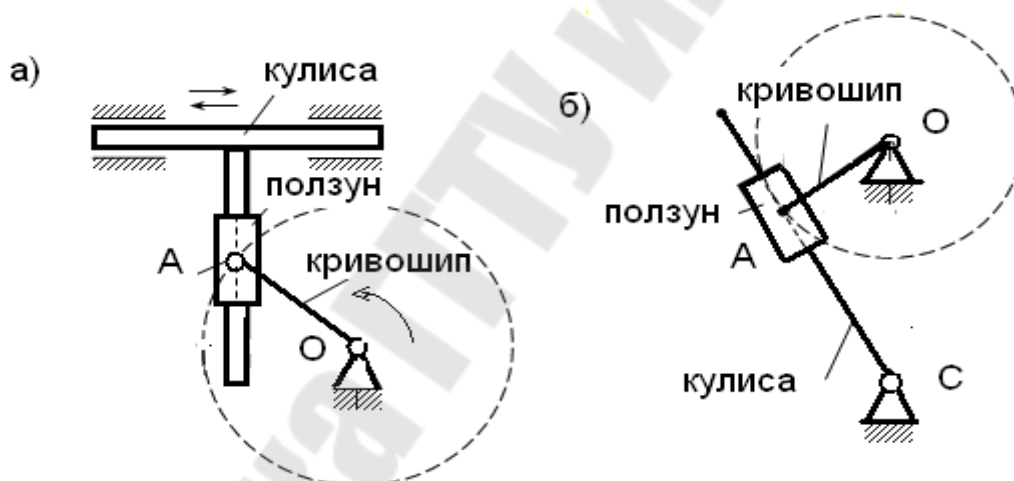


Рис. 16. Кривошипно-кулисный механизм

На рисунке 16 показаны механизмы с поступательным движением кулисы (а) и вращательным движением кулисы (б)

### 3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО ДВИЖЕНИЮ ПОЛЗУНА КУЛИСЫ

Принимая кулисный камень за материальную точку, кулисных механизмов будем классифицировать по абсолютному движению ползуна (камня кулисы).

**Первый тип.** На рисунках 17–21 показаны кинематические схемы кулисных механизмов, в которых кулисный камень  $A$  соединен с кривошипом. Абсолютная траектория кулисного камня – окружность, радиус которой равен длине кривошипа. Точку кулисы, находящуюся под кулисным камнем, на кинематических схемах, приведенных ниже, будем обозначать  $A^*$ .

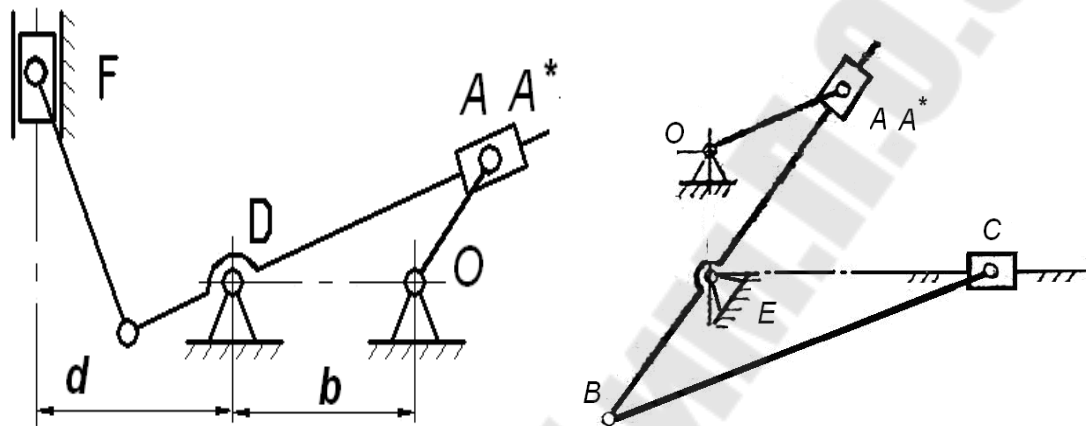


Рис. 17. Кулисные механизмы 1-го типа

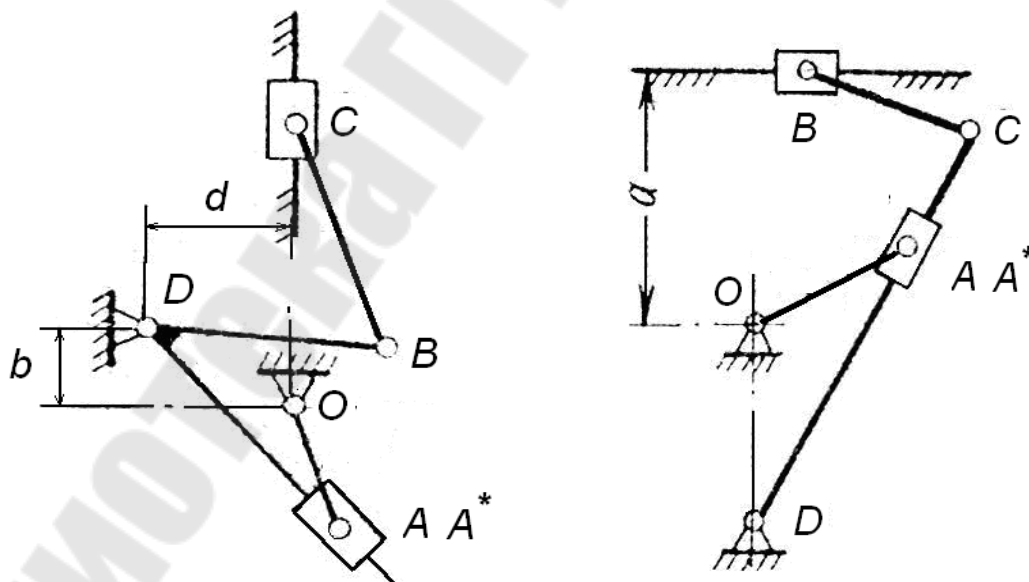


Рис. 18. Кулисные механизмы 1-го типа

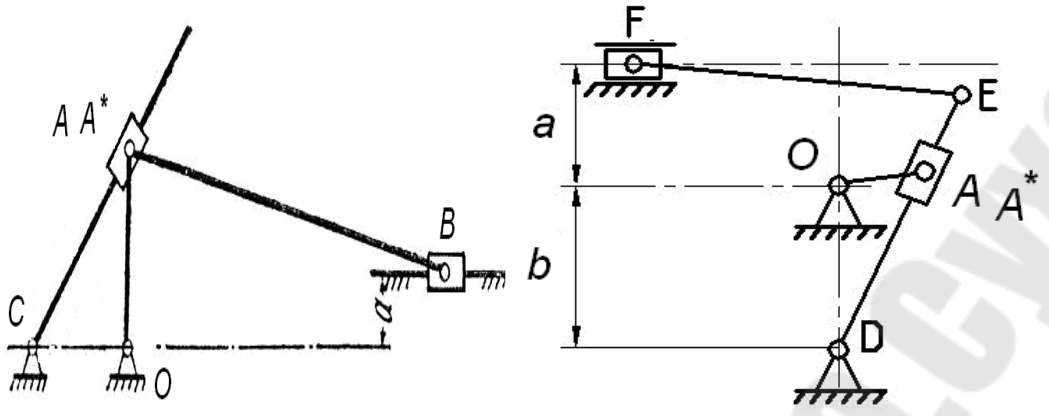


Рис. 19. Кулисные механизмы 1-го типа

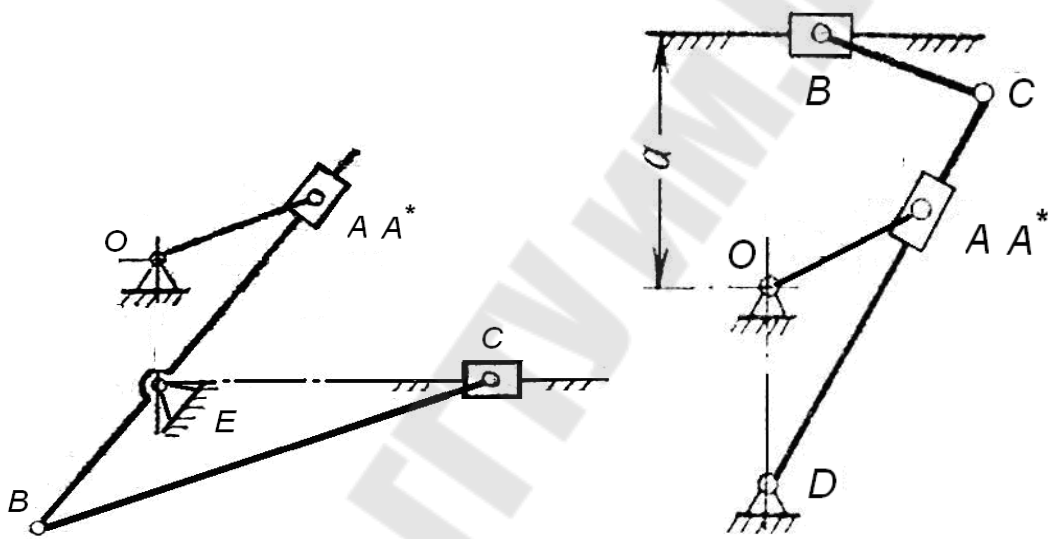


Рис. 20. Кулисные механизмы 1-го типа

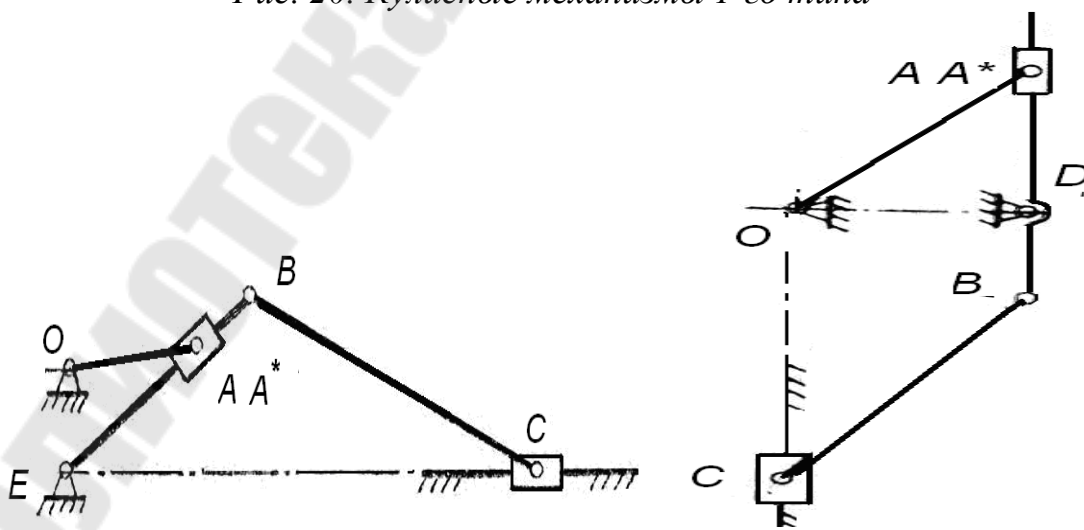


Рис. 21. Кулисные механизмы 1-го типа



**Второй тип.** На рисунках 22–27 показаны схемы кулисных механизмов, в которых кулисный камень соединен с коромыслом. Абсолютная траектория кулисного камня  $E$  – дуга окружности, радиус которой равен размерам коромысла. Точку кулисы, находящуюся под кулисным камнем, на кинематических схемах, приведенных ниже, будем обозначать  $E^*$ .

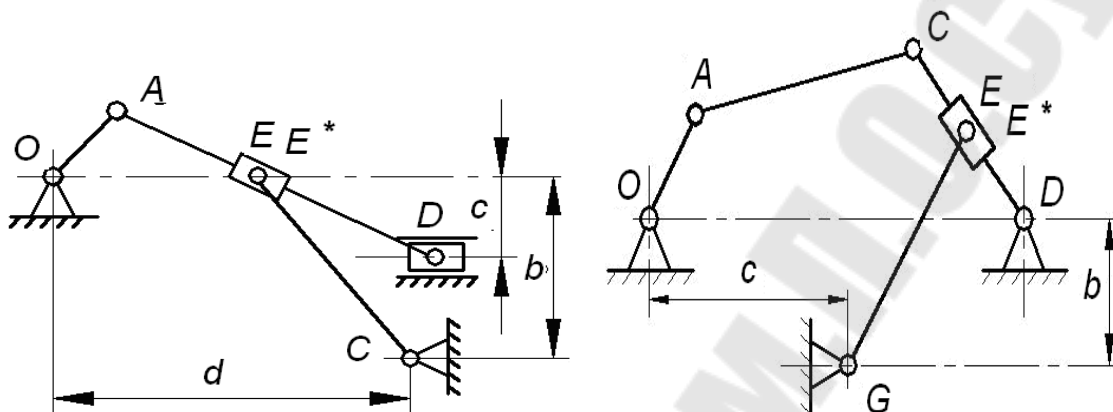


Рис. 22. Кулисные механизмы 2-го типа

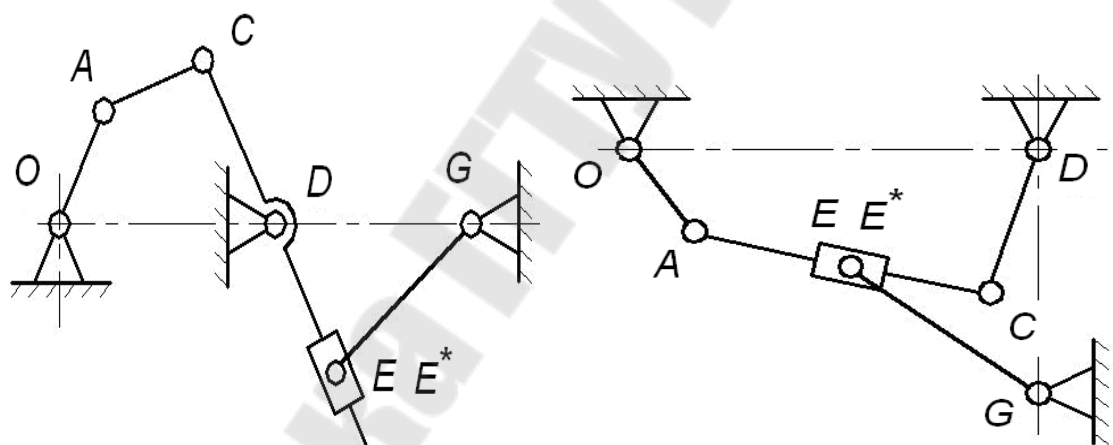


Рис. 23. Кулисные механизмы 2-го типа

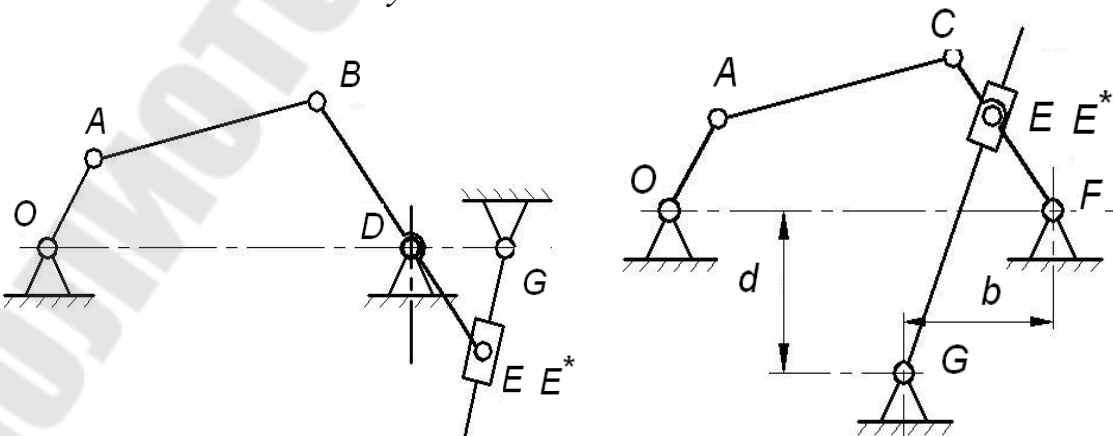


Рис. 24. Кулисные механизмы 2-го типа

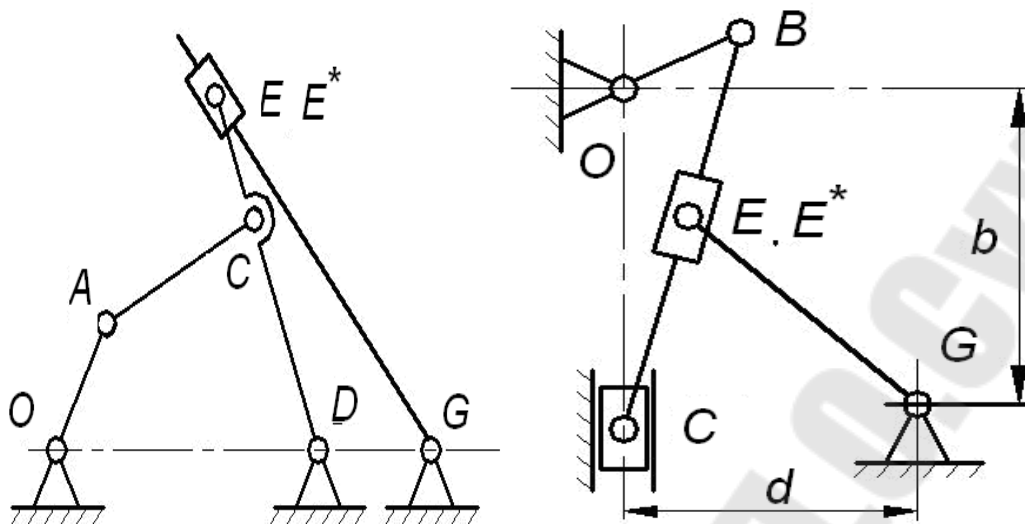


Рис. 25. Кулисные механизмы 2-го типа

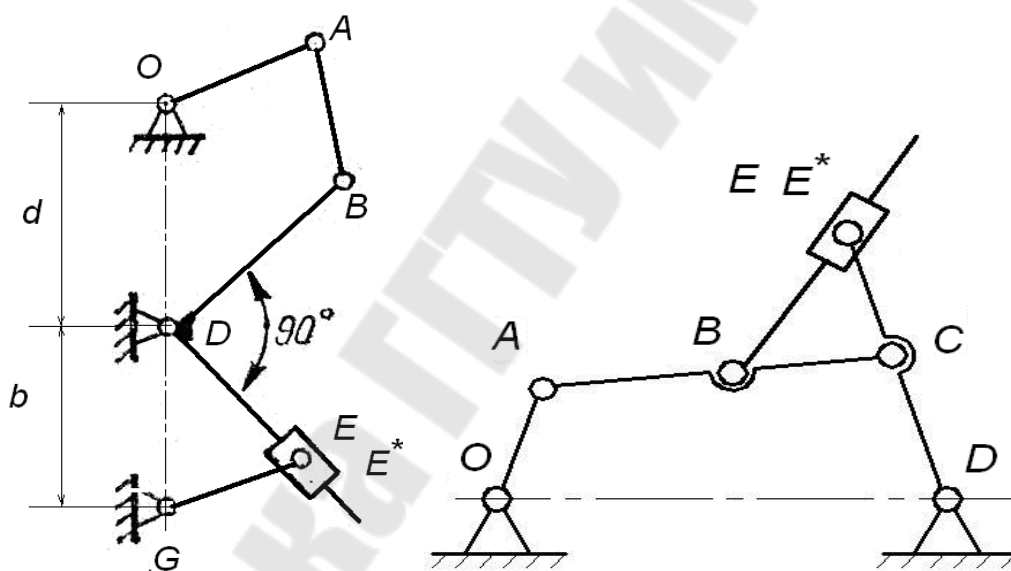


Рис. 26. Кулисные механизмы 2-го типа

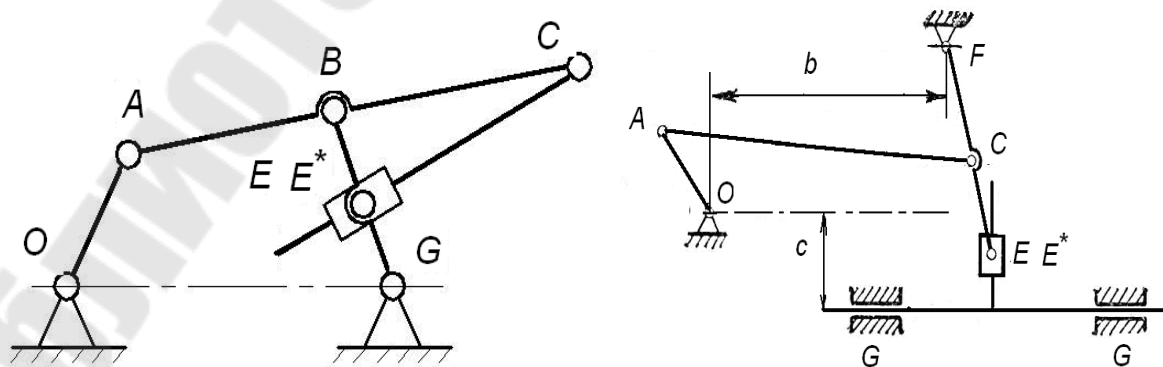


Рис. 27. Кулисные механизмы 2-го типа

**Третий тип.** На рисунках 28–36 показаны схемы кулисных механизмов, в которых кулисный камень соединен со стойкой, то есть центр кулисного камня  $E$  неподвижен. Точку кулисы, находящуюся под кулисным камнем, на кинематических схемах, приведенных ниже, будем обозначать  $E^*$ . В отличие от точки  $E$ , скорость и ускорение точки  $E^*$  не равны нулю.

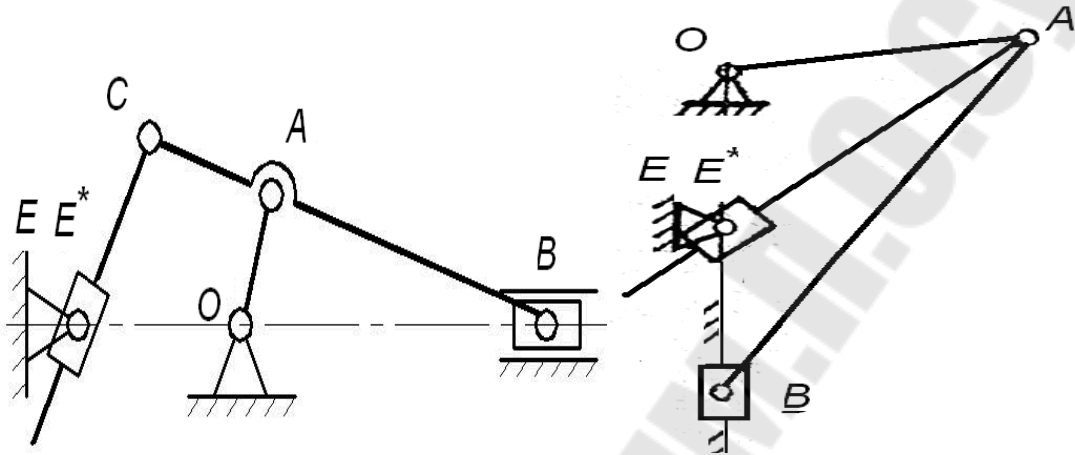


Рис. 28. Кулисные механизмы 3-го типа

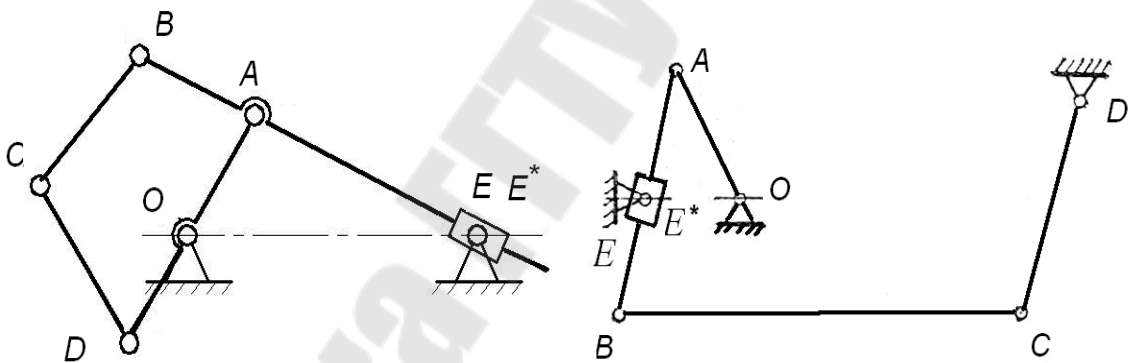


Рис. 29. Кулисные механизмы 3-го типа

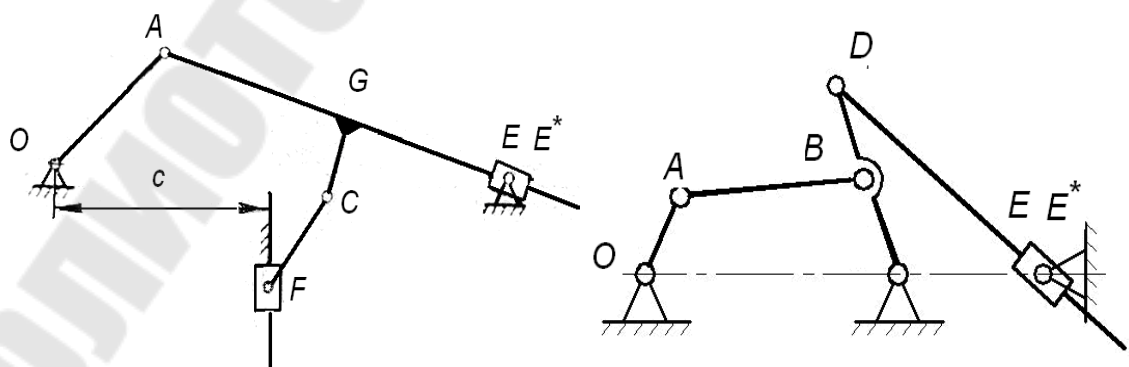


Рис. 30. Кулисные механизмы 3-го типа

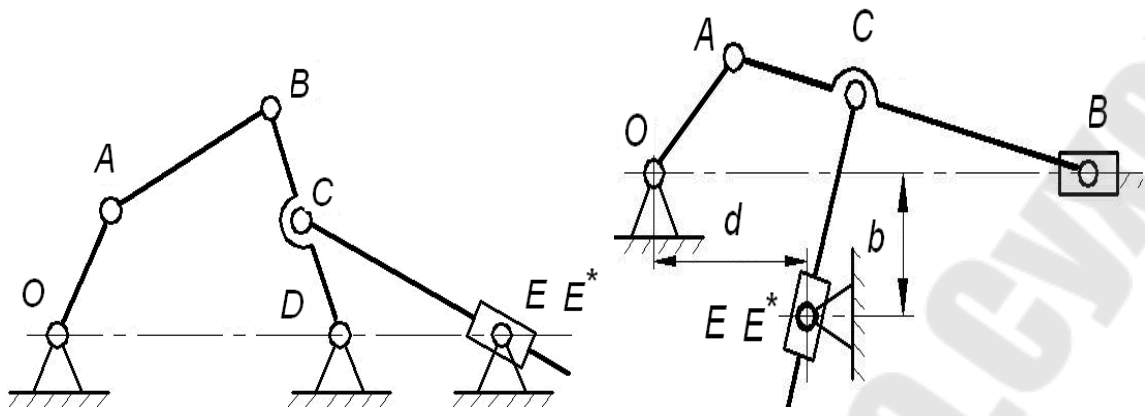


Рис. 31. Кулисные механизмы 3-го типа

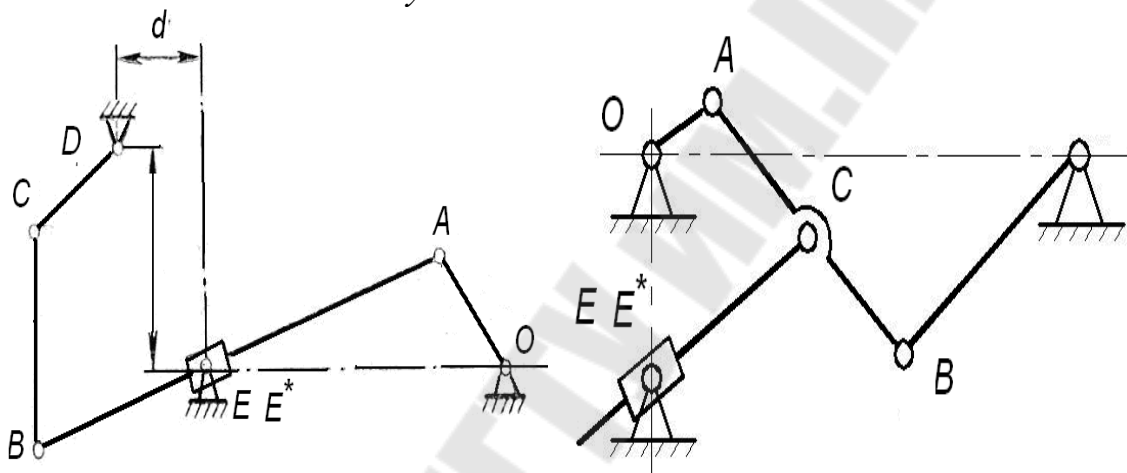


Рис. 32. Кулисные механизмы 3-го типа

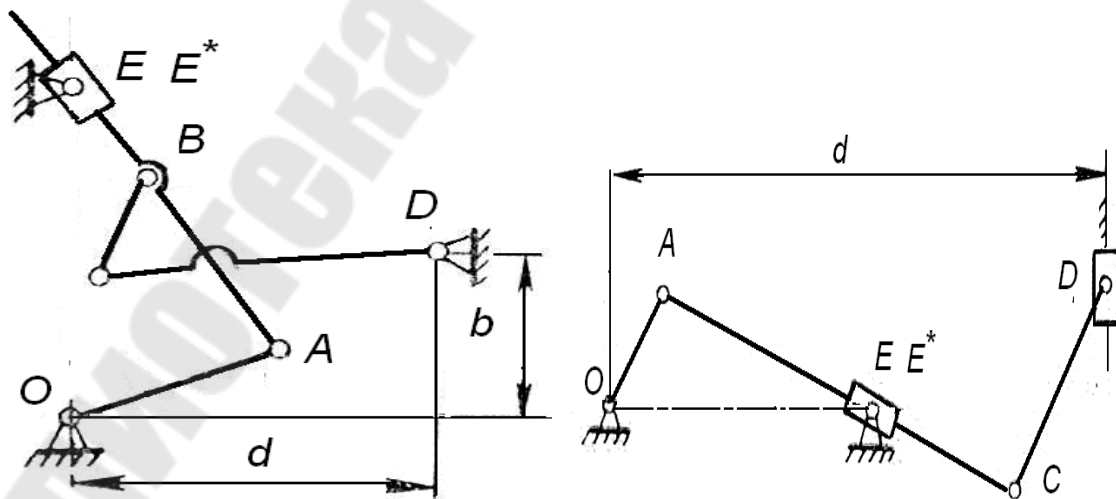


Рис. 33. Кулисные механизмы 3-го типа

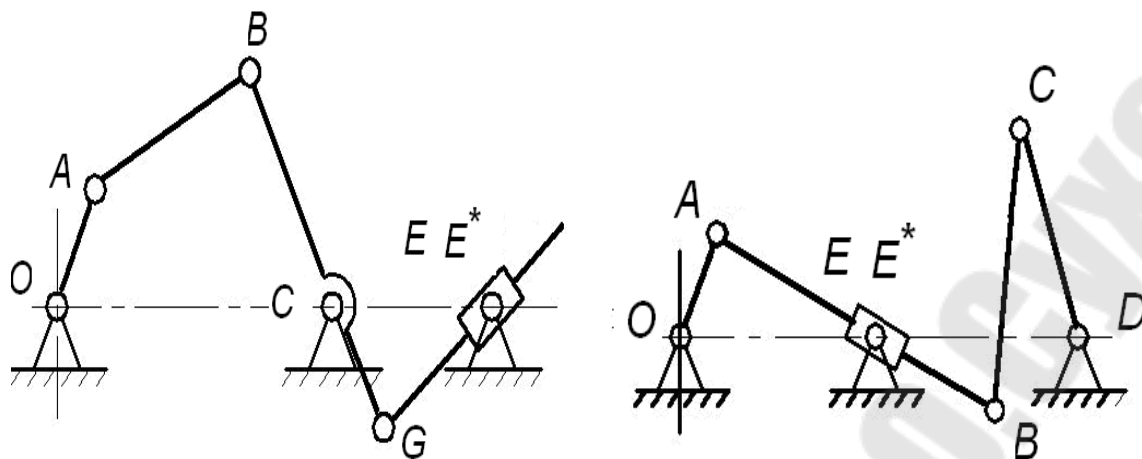


Рис. 34. Кулисные механизмы 3-го типа

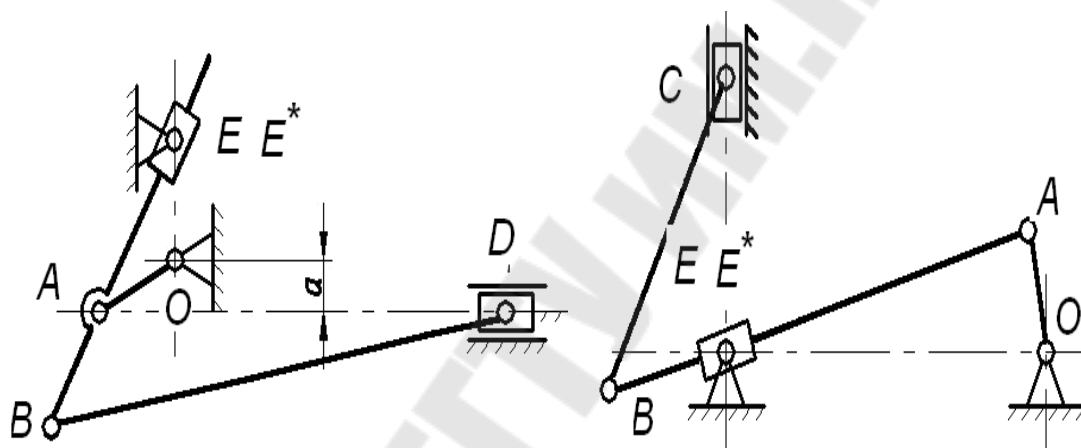


Рис. 35. Кулисные механизмы 3-го типа

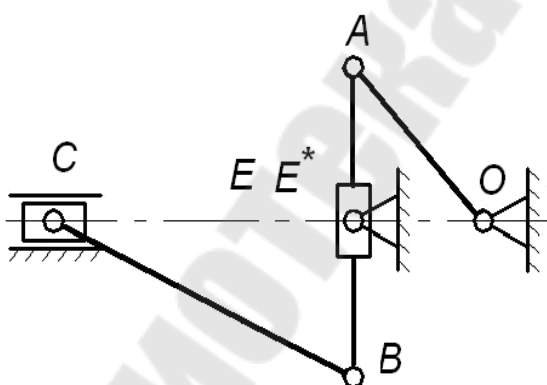


Рис. 36. Кулисный механизм 3-го типа

**Четвертый тип.** На рисунках 37–40 показаны кинематические схемы кулисных механизмов, в которых центр  $E$  кулисного ползуна движется по прямолинейной траектории. Точку кулисы, находящуюся

под кулисным камнем, на кинематических схемах, приведенных ниже, будем обозначать  $E^*$ , которая может двигаться по криволинейной траектории.

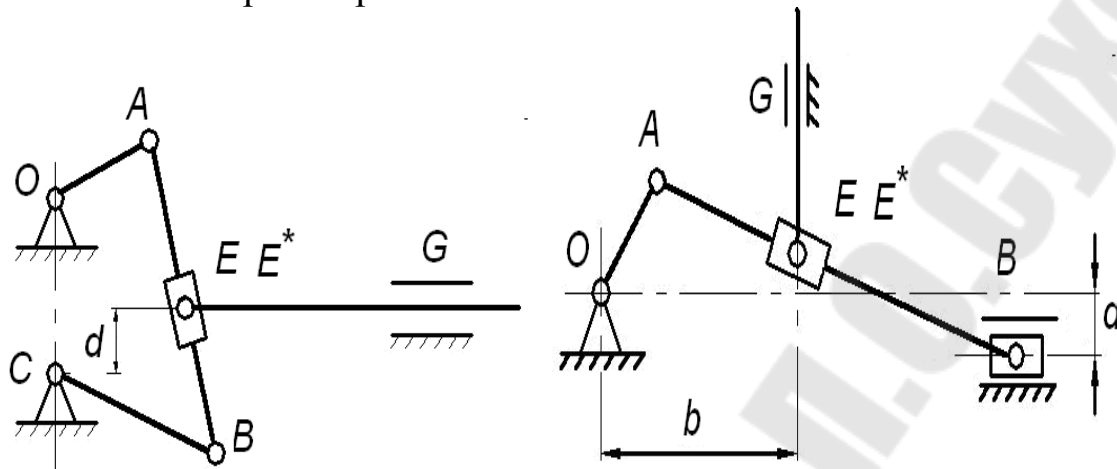


Рис. 37. Кулисные механизмы 4-го типа

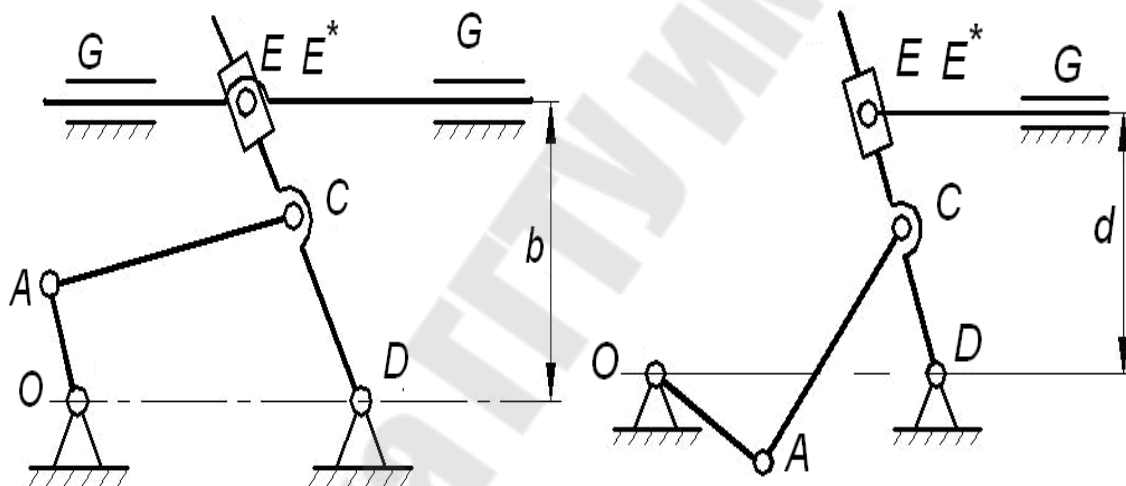


Рис. 38. Кулисные механизмы 4-го типа

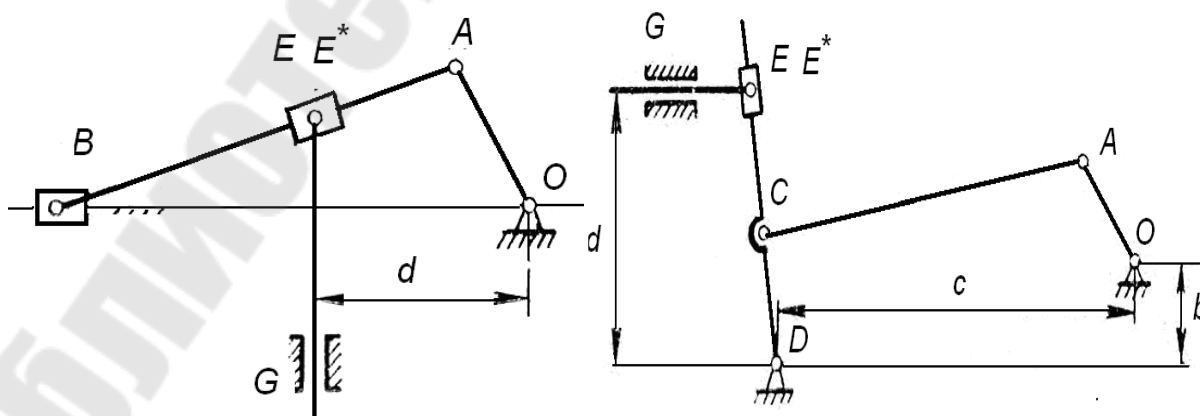


Рис. 39. Кулисные механизмы 4-го типа

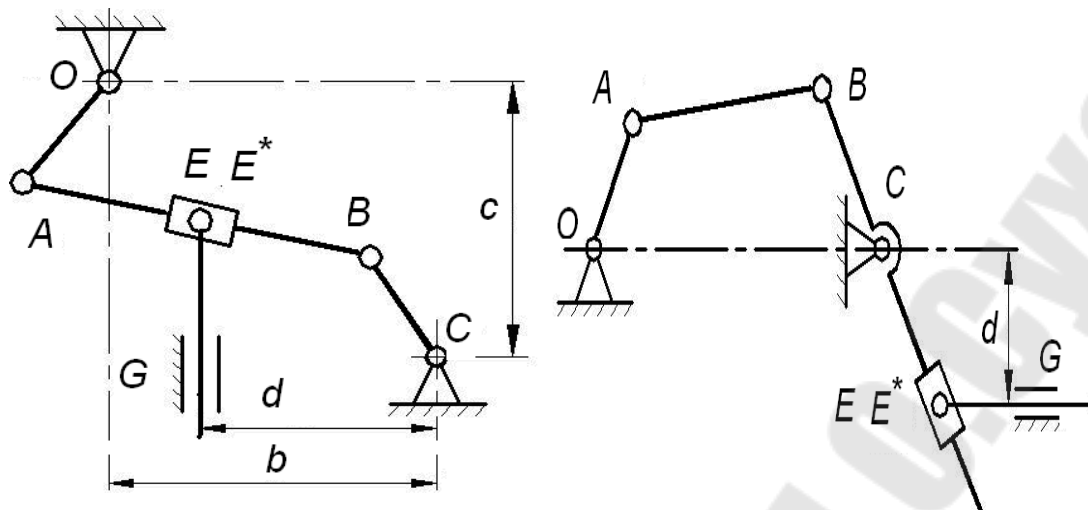


Рис. 40. Кулисные механизмы 4-го типа

**Пятый тип.** На рисунках 41–46 показаны кинематические схемы кулисных механизмов, имеющих две кулисные кинематические пары, каждая из которых относится к показанным выше типам механизмов.

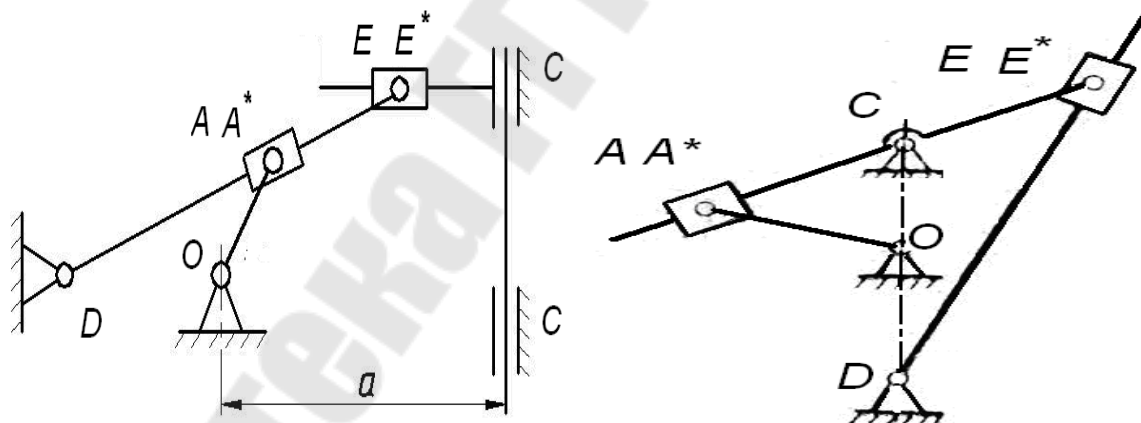


Рис. 41. Кулисные механизмы 5-го типа

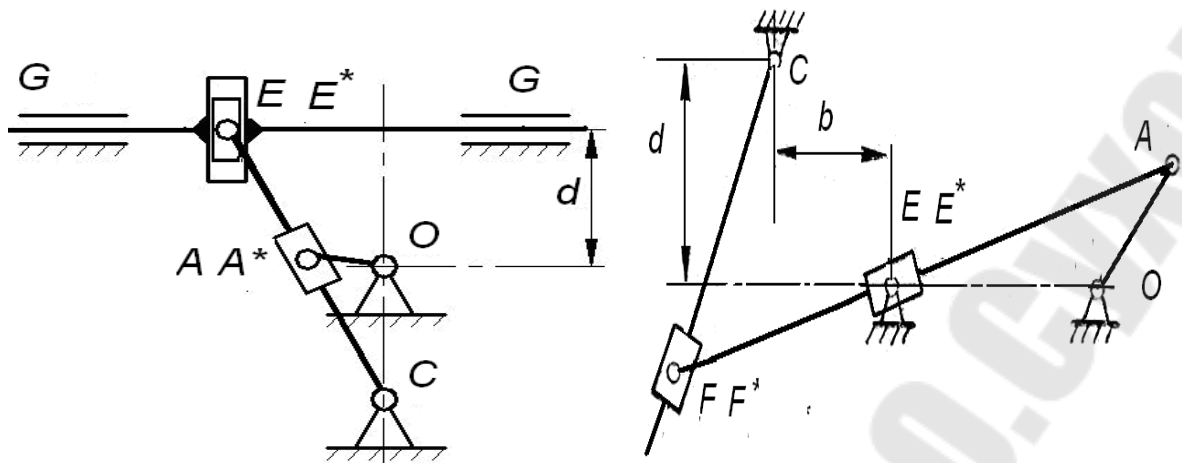


Рис. 42. Кулисные механизмы 5-го типа

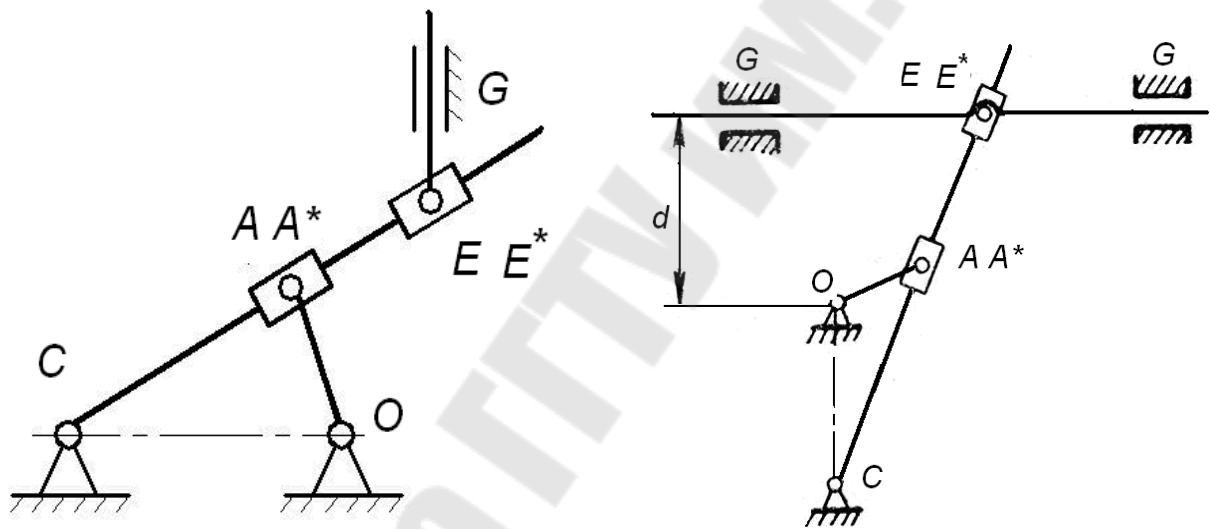


Рис. 43. Кулисные механизмы 5-го типа

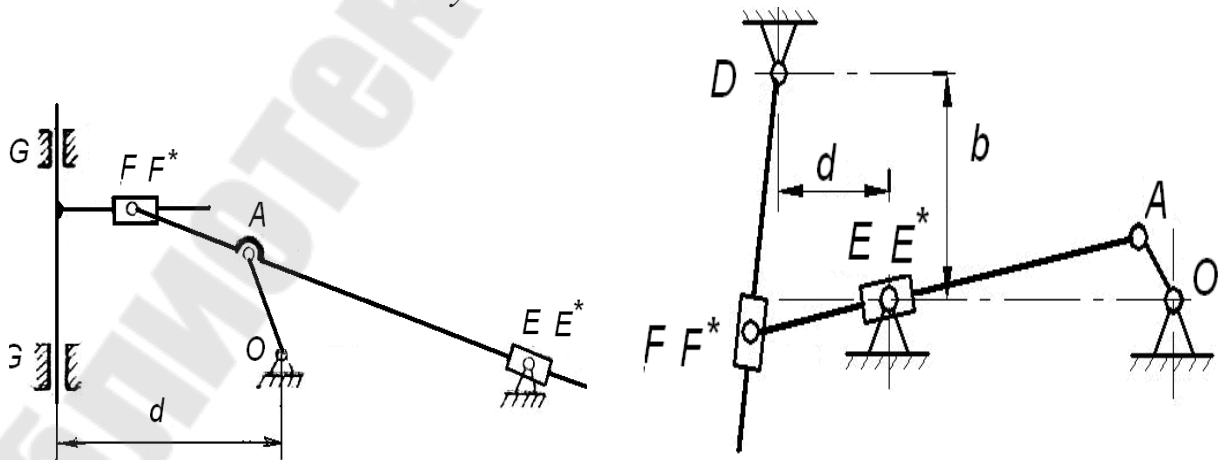


Рис. 44. Кулисные механизмы 5-го типа



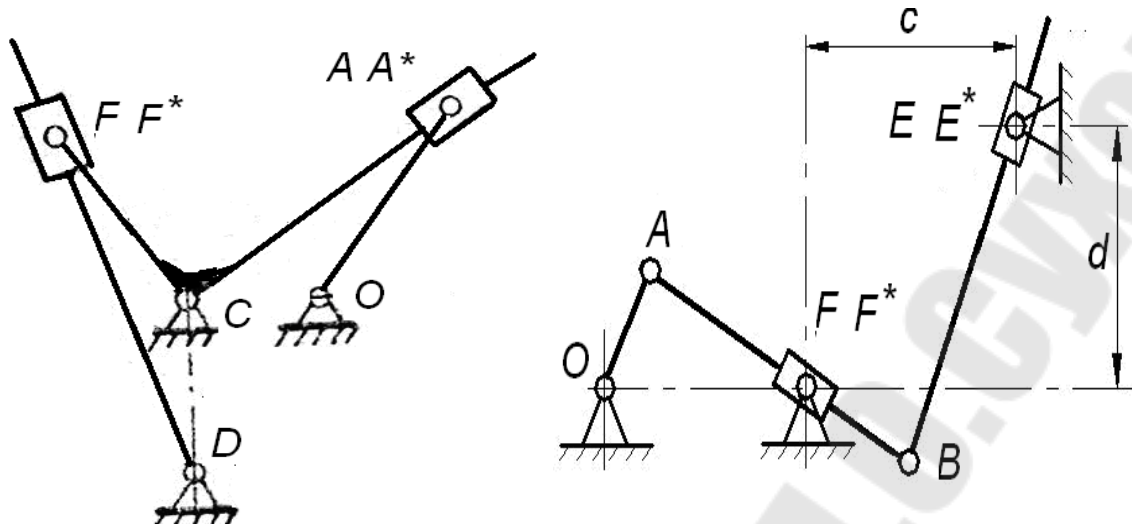


Рис. 45. Кулисные механизмы 5-го типа

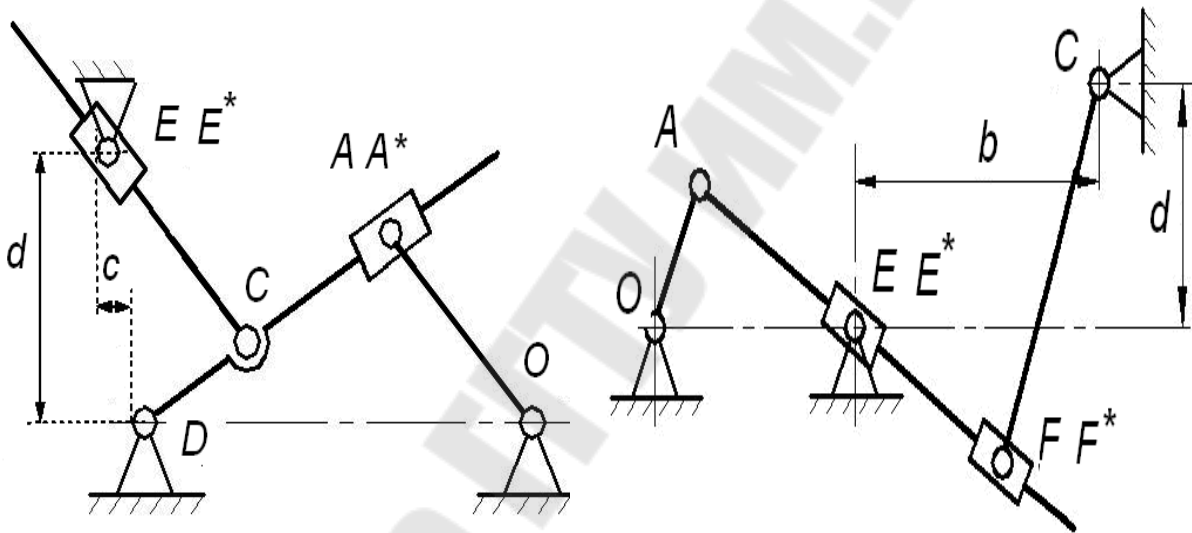


Рис. 46. Кулисные механизмы 5-го типа

### 3.3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОЛЗУНА КУЛИСЫ

#### Пример 1

Для заданного на рисунке 47 положения кулисного механизма первого типа построить планы линейных скоростей и ускорений, найти угловые скорости и угловые ускорения звеньев.

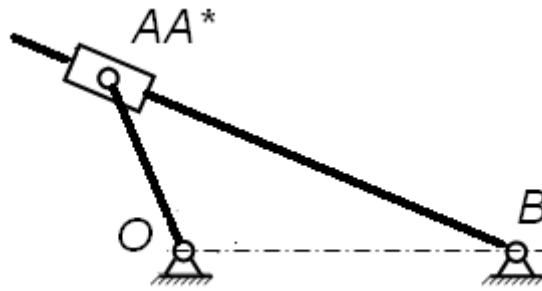


Рис. 47. Кинематическая схема кулисного механизма 1-го типа

Дано:

$$\omega_{OA} = 1 \text{ 1/с}, \quad \varepsilon_{OA} = 0 \text{ 1/с}^2, \quad L_{OA} = 0,5 \text{ м}, \quad L_{OB} = 1,3 \text{ м}.$$

### Решение

Кинематическая схема кулисного механизма, изображенного на рисунке 47, выполняется в масштабе линейных размеров  $\mu_L = 0.01 \text{ м/мм}$ .

Зная масштабный коэффициент  $\mu_L$ , определяем изображающие значения заданных размеров механизма:

$$OA = \frac{L_{OA}}{\mu_L} = \frac{0,5}{0,01} = 50 \text{ мм}, \quad OB = \frac{L_{OB}}{\mu_L} = \frac{1,3}{0,01} = 130 \text{ мм}.$$

Для заданного положения кривошипа OA вычерчиваем треугольник OAB и измеряем длину третьей стороны треугольника:  $A^*B = 146 \text{ мм}$ . Находим теперь действительное расстояние между точками A\* и B:  $L_{A^*B} = \mu_L A^*B = 0,01 \cdot 146 = 1,46 \text{ м}$ .

Кулисный механизм, изображенный на рисунке 47 относится к первому типу, так как абсолютная траектория точки A кулисного камня представляет собой окружность, радиус которой равен длине кривошипа  $L_{OA}$ .

Для этого типа механизма абсолютные скорость и ускорение точки A при построении планов скоростей и ускорений считаются известными.

Находим скорость точки A кривошипа:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot L_{OA} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}.$$

Так как положительное направление вращения кривошипа  $OA$  – вращение против часовой стрелки, изображающий вектор  $\vec{V}_A$  направляем перпендикулярно к кривошипу по направлению вращения кривошипа:  $\vec{V}_A \perp OA$

Выбираем длину изображающего вектора  $\tilde{V}_A = 50$  мм.

Вычисляем масштабный коэффициент для линейной скорости

$$\mu_V = \frac{V_A}{\tilde{V}_A} = \frac{0,5}{50} = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Вектор  $\tilde{V}_A$  направляем перпендикулярно к кривошипу:  $\tilde{V}_A \perp OA$  (рис. 48).

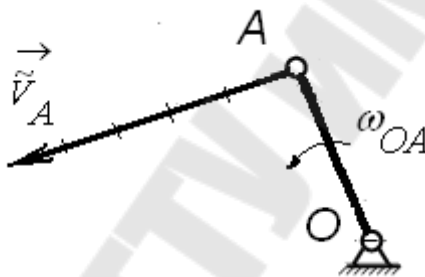


Рис. 48. Скорость точки  $A$ , общей для кривошипа и ползуна кулисы

Точка  $A$  является центром ползуна (камня кулисы). Рассмотрим сложное движение точки  $A$ .

По теореме о скоростях записываем векторное уравнение для абсолютной скорости точки  $A$ :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A^*} + \vec{V}_{AA^*}. \quad (1)$$

Очевидно, что для плана скоростей изображающие векторы будут находиться по аналогичному уравнению:

$$\tilde{V}_A = \tilde{V}_{A^*} + \tilde{V}_{AA^*}. \quad (2)$$

В уравнении (2) вектор, изображающий переносную скорость точки  $A$  перпендикулярен кулисе, то есть  $\tilde{V}_{A^*} \perp A^*B$ , а вектор,

изображающий относительную скорость  $\vec{V}_{AA^*}$ , направлен вдоль кулисы.

Как известно геометрическое изображение уравнения (2) – векторный треугольник. Чтобы его построить, мы знаем направления всех трех векторов. Решаем теперь простую геометрическую задачу: по заданным направлениям трех сторон и известной длине одной из них надо построить треугольник.

Выбираем произвольно на рисунке положение точки Р (полюс).

Из этой точки откладываем вектор  $\vec{V}_A$ , длину которого мы уже знаем. Далее, через начало этого вектора проводим линию параллельную вектору, изображающего переносную скорость  $\vec{V}_{A^*}$ , а через конец вектора  $\vec{V}_A$ , стрелка вектора, проводим линию параллельную вектору, изображающего относительную скорость  $\vec{V}_{AA^*}$ . Точка пересечения этих линий позволяет выделить на рисунке векторный треугольник, соответствующий уравнению (2) (рис. 49). Это векторный треугольник называется планом скоростей кулисного механизма.

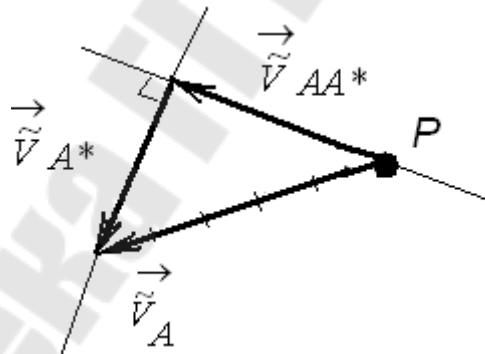


Рис. 49. План скоростей точки А

Численные значения модулей векторов  $\vec{V}_{A^*}$  и  $\vec{V}_{AA^*}$  получаем из прямоугольного векторного треугольника, в котором известна длина основания:

$$\vec{V}_{A^*} = \vec{V}_{AA^*}, \quad \vec{V}_A = 2 \cdot \vec{V}_{A^*} \cos(45^\circ),$$

$$\tilde{V}_{A^*} = \tilde{V}_{AA^*} = \frac{\tilde{V}_A}{2 \cdot \cos(45^\circ)} = \frac{50}{2 \cdot 0,707} = 35,36 \text{ мм.}$$

$$V_{AA^*} = \tilde{V}_{AA^*} \cdot \mu_V = 35,36 \cdot 0,01 = 0,354 \text{ м/с.}$$

Чтобы найти направление угловой скорости кулисы перенесем векторы, изображенные на рисунке 49 на изображение кинематической схемы механизма (рис. 50). Из рисунка 50 видим, что векторное уравнение (2) графически может быть представлено правилами параллелограмма, для которого справедлива формула векторного параллелограмма. В этой формуле  $\cos\left(\vec{\tilde{V}}_{AA^*}, \vec{\tilde{V}}_{A^*}\right) = 1$ .

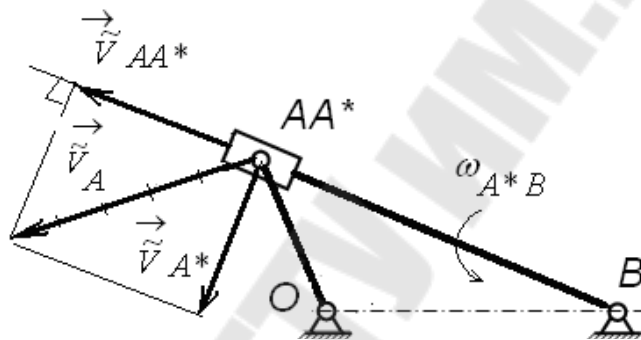


Рис. 50. К расчету абсолютной скорости точки A

Так как вектор  $\vec{\tilde{V}}_{A^*}$  определяет скорость точки A\*, принадлежащей кулисе, то по рисунку 51 можем определить направление угловой скорости этого звена, и получить её численное значение:

$$\omega_{A^*B} = \frac{\tilde{V}_{A^*} \cdot \mu_V}{L_{A^*B}} = \frac{35,36 \cdot 0,01}{1,46} = 0,242 \text{ 1/с.}$$

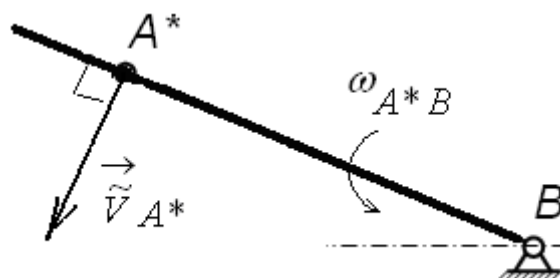


Рис. 51. К расчету переносной угловой скорости кулисы

Находим теперь ускорение точки А кривошипа:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Здесь:

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot L_{OA} = 0, \quad a_A^n = \omega_{OA}^2 L_{OA} = 1^2 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно,  $a_A = a_A^n = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Этот вектор направлен вдоль кривошипа к точке О (рис. 52).

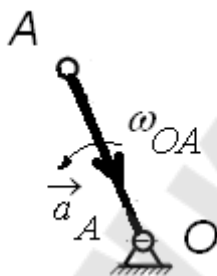


Рис. 52. К расчету абсолютного ускорения точки А

Выбираем произвольно длину изображающего вектора  $\vec{\tilde{a}}_A$ .

Пусть  $\tilde{a}_A = 50 \text{ мм}$ .

Вычисляем масштабный коэффициент для линейного ускорения:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\tilde{a}_A} = \frac{0,5}{50} = 0,01 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

По теореме об ускорениях записываем векторное уравнение для абсолютного ускорения точки А:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A^*} + \vec{a}_{AA^*} + \vec{a}_{A\text{кор}}. \quad (3)$$

В векторном уравнении (3) переносное ускорение представлено векторной суммой

Здесь переносное нормальное ускорение равно

$$a_{A^*}^n = \omega_{A^*B}^2 \cdot L_{A^*B} = 0,242^2 \cdot 1,46 = 0,086 \text{ м/с}^2.,$$

причем вектор  $\vec{a}_{A^*}^n$  направлен вдоль кулисы к точке В.

Переносное касательное ускорение  $\vec{a}_{A^*}^t \perp A^*B$ . Численное значение этого ускорения нам пока неизвестно.

Для относительного ускорения  $\vec{a}_{AA^*}$  нам известна только линия действия вектора, проходящая вдоль кулисы.

Ускорение Кориолиса точки А в уравнении (3) определено полностью.

Численное значение определяется по формуле

$$a_{\text{Кор}} = 2 \cdot \omega_{A^*B} \cdot V_{AA^*} = 2 \cdot 0,242 \cdot 0,354 = 0,171 \text{ м/с}^2.,$$

а направление вектора определяем по правилу Жуковского: вектор относительной скорости  $\vec{V}_{AA^*}$ , направление которой мы знаем, поворачиваем относительно точки А на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости кулисы (рис. 53). То есть вектор ускорения Кориолиса точки А направлен параллельно вектору переносной скорости точки А\*.

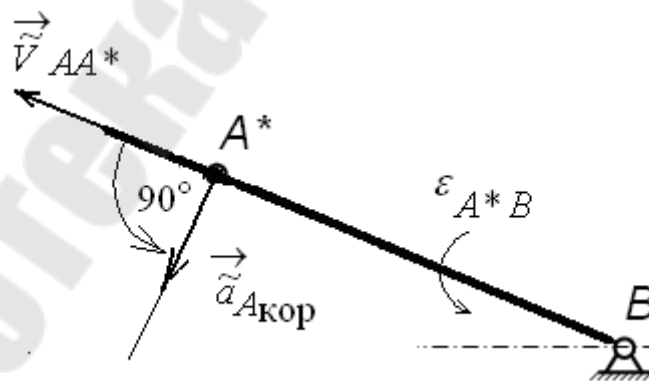


Рис. 53. К расчету ускорения Кориолиса точки А

Вычислим длины изображающих векторов для линейных ускорений, численные значения которых определены:

$$\tilde{a}_{A^*}^n = \frac{a_{A^*}^n}{\mu_a} = \frac{0,086}{0,01} = 8,6 \text{ мм}, \quad \tilde{a}_{A_{\text{кор}}} = \frac{a_{A_{\text{кор}}}}{\mu_a} = \frac{0,171}{0,01} = 17,1 \text{ мм}.$$

Запишем векторное уравнение ускорения для изображающих векторов:

$$\vec{\tilde{a}}_A = \vec{\tilde{a}}_{A^*}^n + \vec{\tilde{a}}_{A^*}^\tau + \vec{\tilde{a}}_{AA^*} + \vec{\tilde{a}}_{A_{\text{кор}}} \quad (4)$$

В этом уравнении известны направления линий действия всех изображающих векторов. Кроме того нам известны длины трех векторов:  $\tilde{a}_A$ ,  $\tilde{a}_{A^*}^n$ ,  $\tilde{a}_{A_{\text{кор}}}$ .

Для построения плана ускорений на рисунке выбираем произвольно положение точки  $\pi P$  (полюс). Из этой точки откладываем известные векторы  $\vec{\tilde{a}}_A$  и  $\vec{\tilde{a}}_{A^*}^n$ . Затем к концу (к стрелке) вектора  $\vec{\tilde{a}}_{A^*}^n$  присоединяем начало известного вектора  $\vec{\tilde{a}}_{A_{\text{кор}}}$ .

Далее, через конец (стрелку) вектора  $\vec{\tilde{a}}_A$  проводим линию, параллельную вектору  $\vec{\tilde{a}}_{AA^*}$ , а через конец (стрелку) вектора  $\vec{\tilde{a}}_{A_{\text{кор}}}$  проводим линию, параллельную вектору  $\vec{\tilde{a}}_{A^*}^\tau$ . В результате пересечения этих линий на рисунке получается замкнутый векторный многоугольник, в нашем случае, по уравнению (4) мы получили векторный многоугольник (рис. 54).

По известным направлениям векторов  $\vec{\tilde{a}}_{A^*}^n$  и  $\vec{\tilde{a}}_{A_{\text{кор}}}$  показываем направление обхода двух неизвестных векторов  $\vec{\tilde{a}}_{A^*}^\tau$  и  $\vec{\tilde{a}}_{AA^*}$ . Измеряем в миллиметрах длины отрезков  $\tilde{a}_{A^*}^\tau$  и  $\tilde{a}_{AA^*}$ .

Находим теперь действительные ускорения по формулам

$$a_{A^*}^\tau = \tilde{a}_{A^*}^\tau \cdot \mu_a \quad \text{и} \quad a_{AA^*} = \tilde{a}_{AA^*} \cdot \mu_a.$$



Угловое ускорение кулисы вычисляем по формуле

$$\varepsilon_{A^*B} = \frac{a_{A^*}^\tau}{L_{A^*B}},$$

а его направление определяем из рисунка 55.

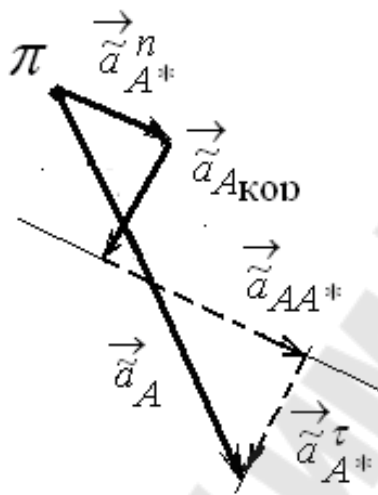


Рис. 54. План ускорений точки A

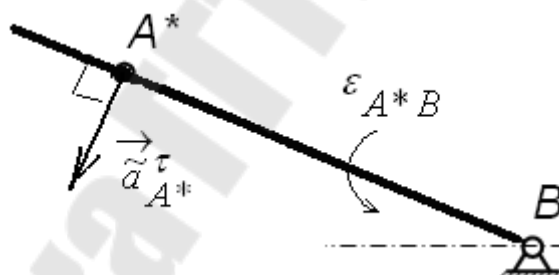


Рис. 55. К расчету переносного углового ускорения кулисы

### Пример 2

Для заданного положения кулисного механизма изображенного на рисунке 56 графоаналитическим методом в формульном виде найти скорость и ускорение точки D.

Известны размеры звеньев механизма  $L_{OA}$ ,  $L_{AD}$ ,  $L_{OB}$ , и угловая скорость кривошипа  $\omega_{OA}$ .

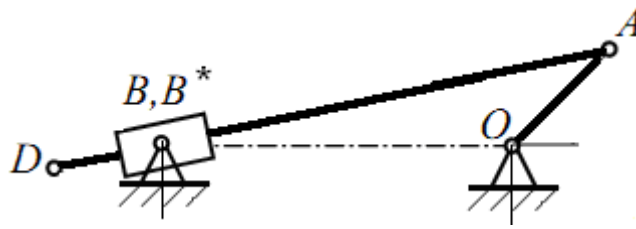


Рис. 56. Кинематическая схема механизма

### Решение

Кулисный механизм, изображенный на рисунке 56 относится к третьему типу, так как точка В кулисного камня неподвижна, и, следовательно абсолютная скорость и ускорение этой точки равны нулю.

Рассчитываем численное значение скорости точки А:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot L_{OA}.$$

Выбираем длину изображающего вектора  $\tilde{V}_A$  в миллиметрах и рассчитываем масштабный коэффициент скорости

$$\mu_V = \frac{V_A}{\tilde{V}_A}.$$

Вектор  $\vec{\tilde{V}}_A$  направляем перпендикулярно к кривошипу:  $\vec{V}_A \perp OA$  (рис. 57).



Рис. 57. Направление вектора абсолютной скорости точки А

Рассмотрим относительное движение в кулисной паре (рис. 58), в которой точка В изображает центр ползуна кулисы, а точка В\* изображает точку, принадлежащую кулисе DA. Относительное движение характеризуется движением точки В относительно точки В\*.

Заметим, что точка В неподвижна, а точка В\* движется по прямолинейно траектории, проходящей через точки А и D.

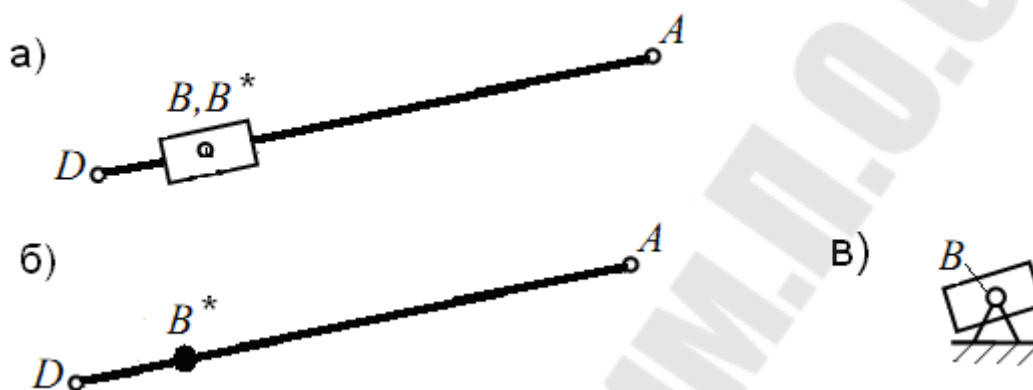


Рис. 58. Относительное (а), переносное (б) и абсолютное (в) движение точки В

Применяем теорему о скоростях. Согласно теореме записываем векторное уравнение для абсолютной скорости точки В:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B^*} + \vec{V}_{BB^*}. \quad (5)$$

Здесь:

$\vec{V}_{B^*}$  – скорость точки В\* кулисы, совершающей плоскопараллельное движение;

$\vec{V}_{BB^*}$  – относительная скорость точки В ползуна по отношению к точке В\* кулисы, эту скорость удобно исследовать, мысленно остановив движение кулисы;

$\vec{V}_B$  – скорость центра ползуна кулисы, который в нашей задаче совпадает со стойкой – неподвижным цилиндрическим шарниром.

Следовательно, при решении векторного уравнения (5) мы должны учитывать, что  $V_B = 0$ , то есть, из (5) получаем

$$\vec{V}_{B^*} + \vec{V}_{BB^*} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим плоскопараллельное движение кулисы AD и найдем скорость точки В\*. Следуя теореме о скоростях точек плоской фигуры, запишем векторное уравнение

$$\vec{V}_{B^*} = \vec{V}_A + \vec{V}_{B^*A}. \quad (7)$$

Здесь:

$\vec{V}_{B^*A}$  – скорость точки при относительном вращении звена относительно точки,  $\vec{V}_{B^*A} \perp AD$

$\vec{V}_{B^*}$  – абсолютная скорость точки В\*, направление которой совпадает со звеном AD,  $\vec{V}_{B^*} \parallel AD$ .

В этом уравнении нам известно (рис. 59):

направление и модуль вектора  $\vec{V}_A \perp OA$ ;

направление линии действия вектора  $\vec{V}_{B^*A} \perp AD$ ;

направление линии действия вектора  $\vec{V}_{B^*}$ .

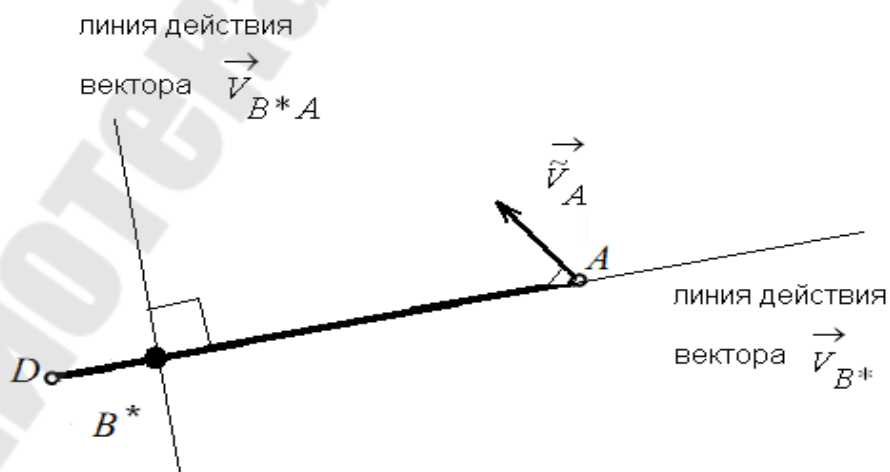


Рис. 59. Определение направлений линий действия скоростей

Для графического решения используем изображающий вектор  $\vec{V}_A$ , который на плане скоростей откладываем из точки Р.

Далее, через конец и начало этого вектора проводим линии действия векторов  $\vec{V}_{B^*}$  и  $\vec{V}_{B^*A}$ . Точка пересечения этих линий позволяет выделить на плане скоростей треугольник, длина сторон которого определяет длину изображающих векторов  $\vec{V}_{B^*} = 77$  мм и  $\vec{V}_{B^*A} = 64$  мм.

Зная направление вектора  $\vec{V}_A$ , по векторному уравнению (7) определяем направления обхода изображающих векторных цепочек  $\vec{V}_A + \vec{V}_{B^*A}$  и  $\vec{V}_{B^*}$  (рис. 60).

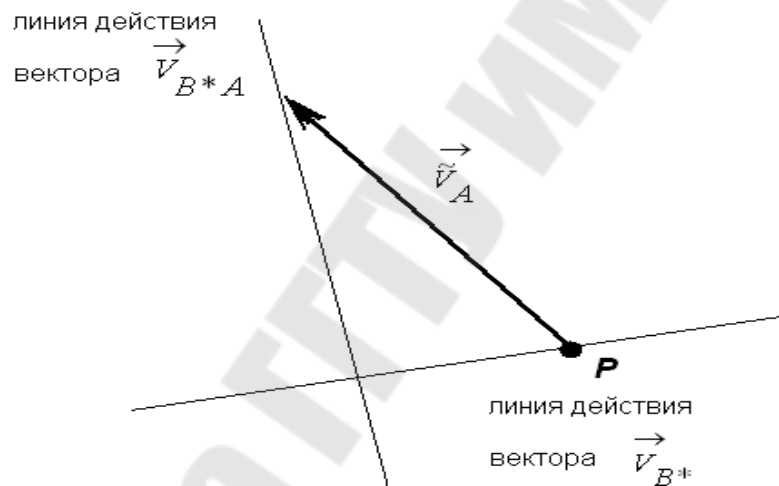


Рис. 60. К построению векторного треугольника

В результате получаем план скоростей точек А и В\* звена AD, (рис. 61).

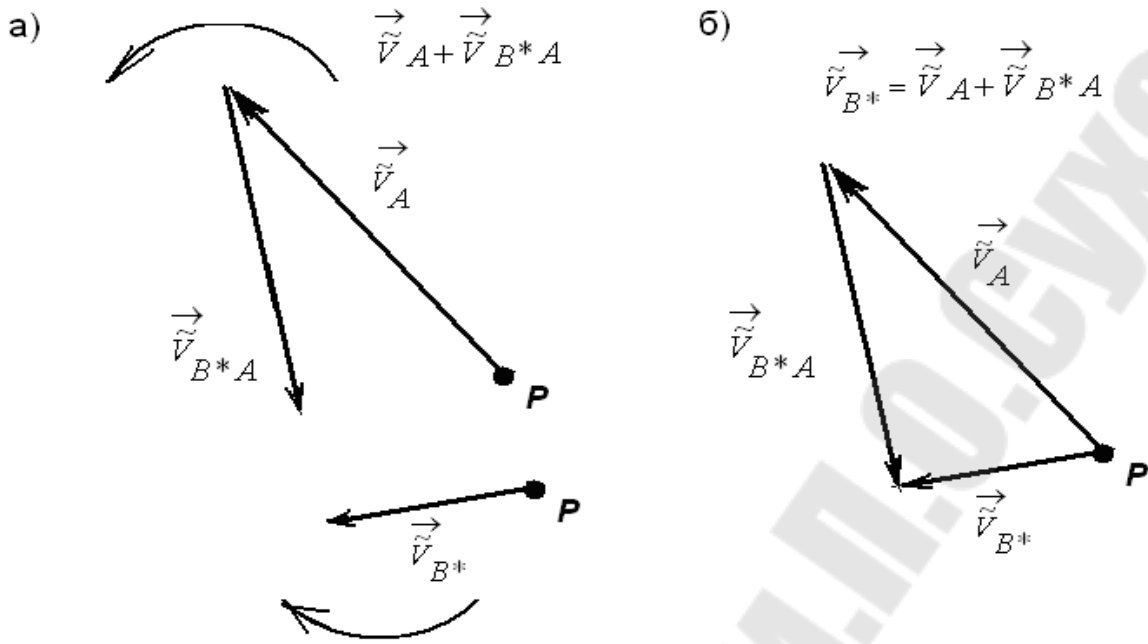


Рис. 61. К расчету переносной скорости точки  $B^*$

Решаем теперь графически уравнение (6)

$$\vec{V}_{BB^*} = -\vec{V}_{B^*}$$

и на рисунке 62 находим относительную скорость.

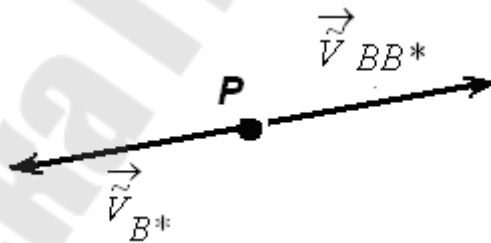


Рис. 62. К расчету относительной скорости точки  $B$

Измеряем длину изображающего вектора  $\vec{V}_{B^*}$  и вычисляем переносную угловую скорость кулисы по формуле

$$\omega_{DA} = \frac{\tilde{V}_{B^*} \cdot \mu_V}{L_{AB^*}}.$$

Для скорости точки  $D$  кулисы, совершающей плоскопараллельное движение, запишем векторное уравнение

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}. \quad (8)$$

Здесь вектор, то есть  $\vec{V}_{DA} \parallel \vec{V}_{B^*A}$ .

Численное значение вектора  $\vec{V}_{DA}$  вычисляем по формуле

$$V_{DA} = \omega_{DA} \cdot L_{DA},$$

или по формуле теоремы подобия (рис. 63):

$$\omega_{DA} = \frac{V_{DA}}{L_{DA}} = \frac{V_{B^*A}}{L_{B^*A}}, \quad V_{DA} = \frac{V_{B^*A}}{L_{B^*A}} \cdot L_{DA}.$$

Переписываем векторное уравнение (8) в изображающих векторах

$$\vec{\tilde{V}}_D = \vec{\tilde{V}}_A + \vec{\tilde{V}}_{DA}.$$

Строим план скоростей по известным векторам, входящие в правую часть уравнения, поэтому для графического решения применяем правило векторного треугольника (рис. 64).

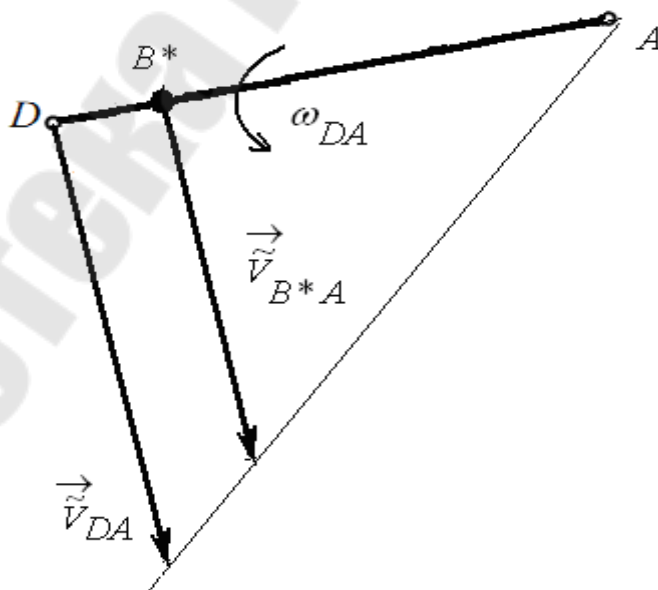


Рис. 63. Применение теоремы подобия для скорости точки  $D$

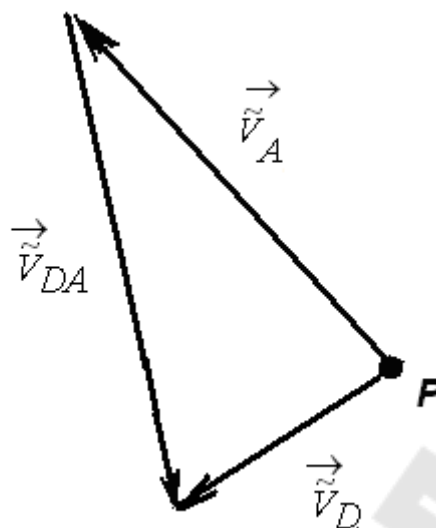


Рис. 64. План скоростей точки D

Если объединить рисунки 61 и 64, совместив точки P и вектор  $\vec{V}_A$  получим план скоростей для точек A, B\* и D кулисы (рис. 65).

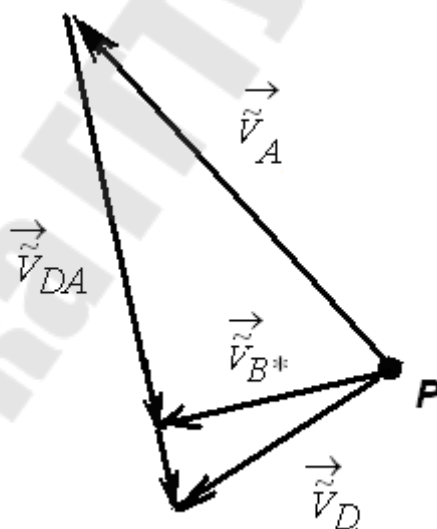


Рис. 65. План скоростей точек кулисы

Измеряем в миллиметрах на плане скоростей длину вектора  $\vec{V}_D$ , и рассчитываем численное значение скорости D точки по формуле

$$V_D = \tilde{V}_D \cdot \mu_V.$$



Определим теперь ускорение точки D.

Рассчитываем сначала численное значение ускорения точки A:

$$a_A = \omega_{OA}^2 \cdot L_{OA}.$$

Вектор этого ускорения направлен по кривошипу к точке O, то есть  $\vec{a}_A \parallel OA$  (рис. 66).

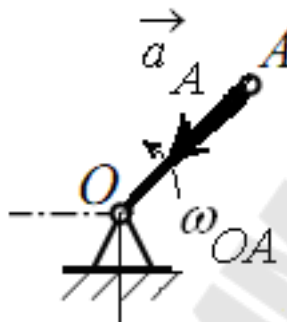


Рис. 66. Направление вектора абсолютного ускорения точки A

Выбираем длину изображающего вектора  $\tilde{a}_A = 100$  мм и рассчитываем масштабный коэффициент ускорения

$$\mu_a = \frac{a_A}{\tilde{a}_A}.$$

Вектор  $\vec{\tilde{a}}_A \parallel \vec{a}_A$ .

Рассмотрим сложное движение в кулисной кинематической паре и запишем векторное уравнение для абсолютного ускорения точки B, которая определяет на кинематической схеме неподвижный цилиндрический шарнир, соединенный с кулисным ползуном:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B^*} + \vec{a}_{BB^*} + \vec{a}_{B\text{кор}}. \quad (9)$$

В этом уравнении известно ускорение точки B,  $\vec{a}_B = 0$ , и может быть вычислено ускорение Кориолиса точки B по формуле

$$a_{B\text{кор}} = 2 \cdot \omega_{DA} \cdot V_{BB^*}.$$

Направление вектора  $\vec{a}_{B\text{кор}}$  находится по правилу Жуковского для плоского механизма: вектор относительной скорости  $\vec{V}_{BB^*}$ , который найден при решении задачи о скоростях, поворачиваем вокруг его начала на  $90^\circ$  градусов в направлении переносного угловой скорости  $\omega_{DA}$ , то есть  $\vec{a}_{B\text{кор}} \perp AD$  (рис. 68).

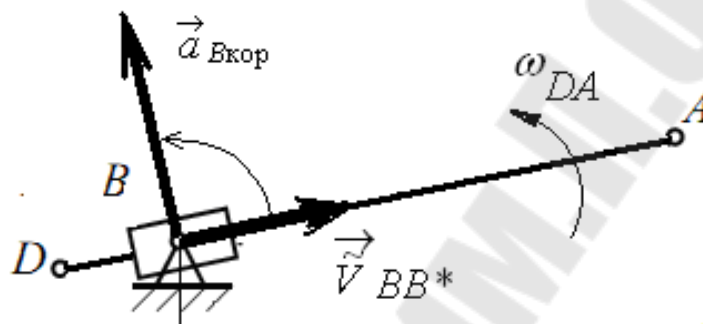


Рис. 68. К определению направления ускорения Кориолиса точки B

Вектор относительного ускорения  $\vec{a}_{BB^*}$  направлен вдоль кулисы AD, то есть  $\vec{a}_{BB^*} \parallel AD$ , численное значение ускорения неизвестно.

Численное значение и направление переносного ускорения  $\vec{a}_{B^*}$ , входящего в уравнение (9), неизвестно. Уравнение (9) не может быть решено, так как число неизвестных данных (направление и модуль вектора) больше двух.

Неизвестны:

- направление вектора  $\vec{a}_{B^*}$ ;
- модуль вектора  $\vec{a}_{B^*}$ ;
- модуль вектора  $\vec{a}_{BB^*}$ .

Возникает необходимость составить еще одно векторное уравнение.

Для этого рассмотрим плоскопараллельное движение кулисы AD и определим переносное ускорение  $\vec{a}_{B^*}$  точки B\* (рис. 67).



Рис. 67. К расчету переносного ускорения точки B\*

Переносное ускорение точки B\* определяется по теореме об ускорениях точек плоской фигуры, так как кулиса AD совершает плоскопараллельное движение:

$$\vec{a}_{B^*} = \vec{a}_A + \vec{a}_{B^*A}^n + \vec{a}_{B^*A}^{\tau} \quad (10)$$

Подставим формулу (10) в уравнение (9) и получим одно векторное уравнение:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{B^*A}^n + \vec{a}_{B^*A}^{\tau} + \vec{a}_{BB^*} + \vec{a}_{\text{Вкор}} = 0. \quad (11)$$

В уравнении (11) направления всех ускорений известны:

– вектор ускорения точки A направлен вдоль кривошипа к точке O,  $\vec{a}_A \parallel OA$ .

– вектор  $\vec{a}_{B^*A}^n$  нормального переносного ускорения также направлен вдоль кулисы AD от точки B\* к точке A, то есть  $\vec{a}_{B^*A}^n \parallel AD$ ;

– линия действия вектора относительного ускорения  $\vec{a}_{BB^*}$  точки В направлена вдоль кулисы, то есть то есть  $\vec{a}_{BB^*} \parallel AD$ .

- линия действия вектора касательного переносного ускорения  $\vec{a}_{B^*A}^\tau$  точки В\* направлена перпендикулярно кулисе, то есть  $\vec{a}_{B^*A}^\tau \perp AD$  (рис. 67);

– вектор ускорения Кориолиса точки В направлен перпендикулярно кулисе,  $\vec{a}_{B\text{кор}} \perp AD$

Величина вектора нормального переносного ускорения определяется по формуле

$$a_{B^*A}^n = \omega_{DA}^2 \cdot L_{AB^*}.$$

Таким образом, в уравнении (11) содержится всего две неизвестные величины:

- модуль вектора  $\vec{a}_{B^*A}^\tau$ ;
- модуль вектора  $\vec{a}_{BB^*}$ .

Для графического решения уравнения (11) перепишем его в виде изображающих векторов:

$$\vec{\tilde{a}}_A + \vec{\tilde{a}}_{B^*A}^n + \vec{\tilde{a}}_{B^*A}^\tau + \vec{\tilde{a}}_{BB^*} + \vec{\tilde{a}}_{B\text{кор}} = 0. \quad (12)$$

Вычислим длину изображающих векторов для известных ускорений:

$$\vec{\tilde{a}}_{B^*A}^n = \frac{\vec{a}_{B^*A}^n}{\mu_a}, \quad \vec{\tilde{a}}_{B\text{кор}} = \frac{\vec{a}_{B\text{кор}}}{\mu_a}.$$

В уравнении (12) имеем три известных вектора  $\vec{\tilde{a}}_A$ ,  $\vec{\tilde{a}}_{B^*A}^n$  и  $\vec{\tilde{a}}_{B\text{кор}}$  по которым на рисунке из полюса  $\pi$  строим векторную цепочку (рис. 68).

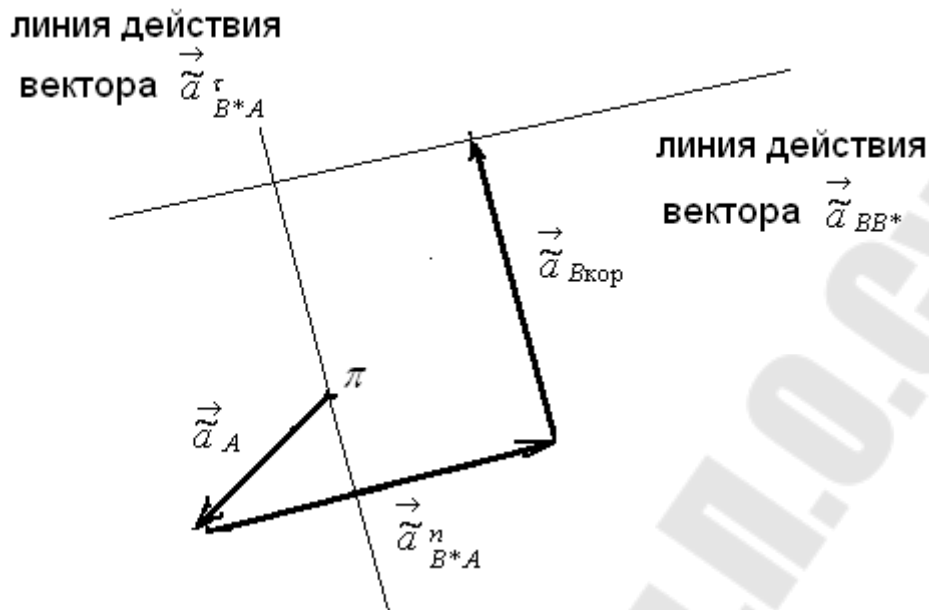


Рис. 67. К построению плана ускорений

Через начало вектора,  $\vec{a}_A$  и конец вектора  $\vec{a}_{B^*}$  проводим прямые, параллельные ускорениям, численные значения которых неизвестны. Точка пересечения этих прямых позволяет выделить на рисунке замкнутый пятиугольник, в котором стороны, образованные пересекающимися прямыми соответствуют изображающим векторам  $\vec{a}_{B^*}^{\tau}$  и  $\vec{a}_{B^*}^n$ .

Направление ускорений  $\vec{a}_{B^*}^{\tau}$  и  $\vec{a}_{B^*}^n$  выбирается при определении направления обхода по известному направлению обхода векторной цепочки  $\vec{a}_{B^*}^n$  и  $\vec{a}_{B^*}^{\tau}$ .

Получили план ускорений для уравнения (12) (рис. 68).

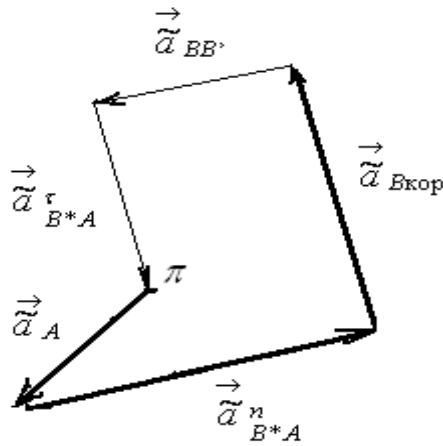


Рис. 68. План ускорений для точки  $B^*$

Измеряем длины  $\tilde{a}_{B^*A}^{\tau}$  и  $\tilde{a}_{BB^*}$  сторон пятиугольника и вычисляем ускорения:

$$a_{B^*A}^{\tau} = \mu_a \tilde{a}_{B^*A}^{\tau} \quad \text{и} \quad a_{BB^*} = \mu_a \tilde{a}_{BB^*}^{\tau}.$$

Находим угловое ускорение кулисы

$$\varepsilon_{DA} = \frac{a_{B^*A}^{\tau}}{L_{B^*A}}.$$

Направление углового ускорения кулисы определяем на рисунке по направлению вектора  $\tilde{a}_{B^*}^{\tau}$  (рис. 69).

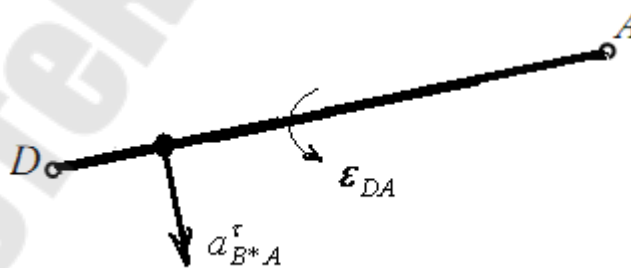


Рис. 69. К определению направления углового ускорения кулисы

Зная угловую скорость и угловое ускорение кулисы, определим теперь ускорение точки D кулисы, используя теорему об ускорениях точек плоской фигуры

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA}^n + \vec{a}_{DA}^\tau. \quad (13)$$

Здесь:

$$a_{DA}^n = \omega_{DA}^2 \cdot L_{DA}, \quad a_{DA}^\tau = \varepsilon_{DA} \cdot L_{DA}.$$

Запишем уравнение для изображающих векторов

$$\vec{\tilde{a}}_D = \vec{\tilde{a}}_A + \vec{\tilde{a}}_{DA}^n + \vec{\tilde{a}}_{DA}^\tau, \quad (14)$$

где  $\vec{\tilde{a}}_{DA}^n = \frac{\vec{a}_{DA}^n}{\mu_a}, \quad \vec{\tilde{a}}_{DA}^\tau = \frac{\vec{a}_{DA}^\tau}{\mu_a}.$

В уравнении (14) численно определены и известны направления трех векторов, составляющих правую часть уравнения. Для графического решения уравнения из полюса  $\pi$  последовательно строим векторную цепочку ускорений  $\vec{a}_A, \vec{a}_{DA}^n, \vec{a}_{DA}^\tau$ . Ускорение изображается вектором, замыкающим векторную цепочку (рис. 70). Так как вектор  $\vec{a}_D$  находится в левой части векторного уравнения, то на плане ускорений его направление выбирается противоположенным направлению обхода векторов  $\vec{a}_A, \vec{a}_{DA}^n, \vec{a}_{DA}^\tau$ .

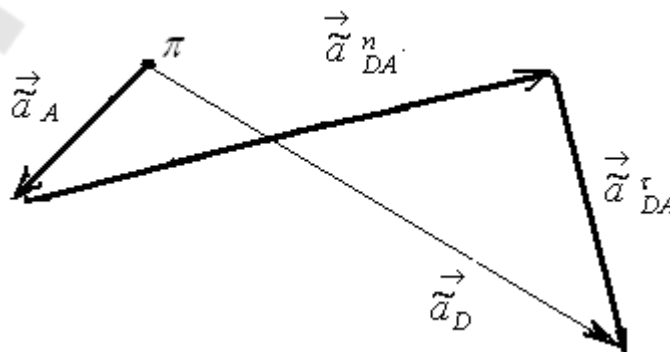


Рис. 70. План ускорений точки D кулисы

Измеряем длину вектора  $\mu_a$  и вычисляем ускорение точки D:

$$a_D = \mu_a \cdot \tilde{a}_D.$$

### 3.4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Приведем алгоритм решения графических задач для механизмов, содержащих кулисную кинематическую пару.

1. Определяем тип механизма по траектории центра кулисного камня.
2. Движение центра кулисного камня считаем абсолютным движением.
3. По виду абсолютной траектории определяем направления абсолютной скорости, касательного и нормального абсолютного ускорения.
4. Движение точки кулисы, находящейся под кулисным камнем считаем переносным движением.
5. По виду движения кулисы определяем переносную траекторию точки кулисы.
6. По виду переносной траектории определяем направления переносной скорости, касательного и нормального переносного ускорения.
7. По конструктивной форме направляющей кулисы определяем относительную траекторию центра камня кулисы.
8. По виду относительной траектории определяем направления относительной скорости, касательного и нормального относительного ускорения.
9. По заданной угловой скорости кривошипа последовательно определяются угловые скорости и ускорения всех подвижных звеньев механизма.
10. По заданной угловой скорости кривошипа последовательно вычисляются линейные скорости и ускорения.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд. перераб. – М. : Наука, 1990. – Т. 1: Статика и кинематика : учеб. пособие для втузов. – 672 с.
3. Добронравов, Б. В. Курс теоретической механики / Б. В. Добронравов, Н. И. Никитин. – М. : Высш. шк., 2004. – 382 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Основные определения теории механизмов и машин .....	3
1.1. Определение механизма и его элементов.....	3
1.2. Особенности графоаналитического метода кинематического анализа механизма.....	5
1.2.1. Масштабный коэффициент.....	6
1.2.2. Основные понятия элементарной геометрии.....	6
1.2.3. Элементы векторной алгебры.....	8
1.2.4. Понятие о планах скоростей и ускорений плоских рычажных механизмов.....	12
2. Основные определения кинематики точки и твердого тела.....	13
2.1. Некоторые аспекты межпредметных связей .....	13
2.2. Простейшие движения твердого тела.....	14
2.3. Кинематические характеристики сложного движения материальной точки .....	15
2.4. Кинематические характеристики плоскопараллельного движения тела .....	18
3. Кинематический анализ кулисных механизмов.....	20
3.1. Кинематические особенности кулисного механизма .....	20
3.2. Классификация кулисных механизмов по движению кулисного камня.....	22
3.3. Примеры применения графоаналитического метода для кинематического анализа сложного движения ползуна кулисы .....	33
3.4. Методические рекомендации.....	56
Литература.....	57

**Андреев Сергей Филиппович**

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
КУЛИСНЫХ МЕХАНИЗМОВ**

**Практикум  
по дисциплине «Теория механизмов и машин»  
для студентов технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 22.10.20.

Рег. № 61Е.  
<http://www.gstu.by>