Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

И. В. Иванейчик, В. В. Кондратюк

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ПРАКТИКУМ
по курсу «Математика» для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения

Гомель 2020

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
И18

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 4 от 02.12.2019 г.)*

Рецензент: декан фак. автоматизир. и информац. систем ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. физ.-мат. наук, доц. *О. В. Лукьяненко*

Иванейчик, И. В.

И18 Специальные задачи по математическому анализу и теории вероятностей : практикум по курсу «Математика» для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» днев. и заоч. форм обучения / И. В. Иванейчик, В. В. Кондратюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2020. – 62 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Настоящий практикум содержит кратко изложенный теоретический материал по разделу «Теория вероятностей» с разобранными типовыми примерами и достаточным количеством задач для решения.

Для студентов специальности 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Содержание

§ 1. Определение вероятности

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A обозначается $p(A)$.

Достоверным называется событие U, которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$p(U) = 1.$$

Невозможным называется событие V, которое в результате опыта не может произойти.

$$p(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \le p(A) \le 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий называются ***несовместными*** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Равновозможными называют события, вероятности которых равны.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются ***случаями***.

Если результаты опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n – общее число случаев;

m – число случаев, благоприятных событию A.

Основные формулы комбинаторики

1. Число всех различных ***перестановок*** P_n из n элементов равно

$$P_n = n! \tag{1.2}$$

2. Число всех различных ***размещений*** A_n^m m элементов из n $(m \le n)$ равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.3)$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются не только составом, но и порядком следования.

3. Число всех различных ***сочетаний*** C_n^m m элементов из n $(m \le n)$ равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются только составом.

Пример1

Из полной колоды игральных карт извлекается наудачу одна карта. Найти вероятность того, что эта карта окажется: 1) тузом; 2) пиковой масти; 3) пиковым тузом.

Решение

1. Так как число карт полной колоды равно $n = 52$, и каждая из них имеет одинаковую вероятность быть извлеченной из колоды, а число тузов в колоде $m = 4$, поэтому вероятность извлечения туза равна $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

2. Общее число карт пиковой масти равно 13. Поэтому вероятность извлечения карты этой масти равна $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

) Вероятность извлечения туза пик равна $\frac{1}{52}$.

Пример 2

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т. е. C_N^m – числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $(m-k)$ деталей должны быть нестандартными и взять их из $N-n$ нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$.

Искомая вероятность:

$$p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

З А Д А Н И Я

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится четверка; б) сумма очков на выпавших гранях равна семи.

2. В коробке 6 одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

3. В коробке 8 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия.

4. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

5. Буквы слова «РЕМОНТ» выписаны на карточках. Карточки перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «МОРЕ»?

6. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «КНИГА». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «КНИГА».

7. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово «АНАНАС». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «АНАНАС».

8. Восемь человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

9. Восемь человек случайным образом рассаживаются вдоль стены. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

10. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и туже лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

11. В круг радиуса R вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, брошенная в круг наудачу, окажется внутри квадрата?

12. На плоскость с нанесенной квадратной сеткой со стороной 4 см бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет линии.

13. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная в треугольник наудачу, окажется внутри круга?

14. Двое условились встретиться в определенном месте. Договорились, что каждый из них будет на месте встречи между 13 и 14 часами, и пришедший, не застав другого, подождет его в течение 1/4 часа. Вычислить вероятность того, что встреча произойдет.

15. Наугад выбирается номер телефона из семи цифр. Найти вероятность того, что:

а) это номер телефона А. Б. Пугачевой;

б) все цифры номера различны.

16. Цифровой кодовый замок на сейфе имеет на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Какова вероятность открыть замок, выбирая код наудачу, если кодовая комбинация:

а) неизвестна;

б) не содержит одинаковых цифр?

17. В зале имеется 20 белых и 10 синих кресел. Случайным образом места занимают 15 человек. Найти вероятность того, что они займут:

а) 5 белых и 10 синих кресел;

б) хотя бы одно синее кресло.

18. На книжной полке хранятся 20 томов собрания сочинений Л. Н. Толстого. Библиотекарь уронила все 20 томов с полки и наугад составила их обратно. Какова вероятность того, что:

а) она расставит книги в прежнем порядке;

б) тома с первого по пятый попадут на прежние места?

19. Из пакета, в котором лежат 12 пирожков с мясом, 5 – с капустой и 7 – с яблоками, берут 3 пирожка. Найти вероятность того, что среди них:

а) нет ни одного пирожка с яблоками;

б) все пирожки разные.

20. Среди десяти подарков к Новому году три подарка с красной икрой, пять – с черной и два – с икрой заморской, баклажанной. Какова вероятность того, что среди трех наугад взятых подарков:

а) два содержат красную икру;

б) все три подарка с разной икрой?

21. Студент забыл четырехзначный идентификационный код своей кредитной карточки. Какова вероятность того, что студент получит стипендию, набирая код наудачу, если он помнит, что:

а) все цифры кода различны;

б) код не содержит цифр 0 и 1?

22. Домашняя обезьянка бьет лапой по клавишам пишущей машинки пять раз. Какова вероятность, что напечатанные буквы:

а) составят имя ее хозяина «Сидор»;

б) образуют слово, начинающееся с буквы «И»?

23. В третий тур конкурса красоты прошли 6 участниц из России, 5 – из Украины и 4 – из Болгарии. Для представления участниц на сцену наугад приглашают 5 девушек. Найти вероятность того, что среди приглашенных:

а) все девушки из России;

б) две девушки из России и две – из Болгарии.

24. В студенческой столовой на обед предлагается по три вида салатов, первых и вторых блюд. Студент, как обычно, берет на обед пять блюд. Найти вероятность того, что он взял:

а) три салата;

б) два первых и два вторых блюда.

25. В Зеленом зале художественного салона развешаны картины: 10 натюрмортов русских художников, 5 полотен французских импрессионистов и 3 картины представителей сюрреализма. Воры в темноте наугад снимают 5 картин. Какова вероятность того, что среди этих картин:

а) три натюрморта;

б) по две картины импрессионистов и сюрреалистов?

26. Дети собрали в лесу 10 белых грибов, 15 груздей и 5 мухоморов. Бабушка наудачу извлекает из корзины 5 грибов. Какова вероятность того, что среди них:

а) три мухомора;

б) два груздя и два белых гриба?

27. В городе Урюпинске три средние школы, три техникума и два училища. Три выпускника Омского университета получили распределение в Урюпинск в разные учебные заведения, которые они выбрали по жребию. Какова вероятность того, что:

а) все выпускники попадут в школы;

б) выпускники попадут в учебные заведения разных категорий?

28. В ресторане на острове Занзибар в аквариуме ждут своей участи рыбы: 4 бельдюги, 3 простипомы и сельдь. Официант сачком наугад вылавливает 3 рыбы. Какова вероятность того, что он поймал:

а) две простипомы;

б) две бельдюги и сельдь?

29. Из карточек разрезной азбуки составлено слово ПОРТРЕТ. Маленький ребенок перемешал буквы, выбрал 4 из них и сложил слово. Какова вероятность, что это:

а) слово ПОРТ;

б) слово ТОРТ?

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A+B)=p(A)+p(B). \qquad (2.1)$$

Для большого числа несовместных событий:

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n) \qquad (2.1')$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i)=1.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB), \qquad (2.2)$$

где AB – произведение событий A и B.

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий:

$$p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC). \qquad (2.2')$$

Событие $\overline{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно состоит в непоявлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \qquad (2.3)$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $p(A/B)$ или $p_B(A)$.

События A и B называют ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий:

$$p(A/B)=p(A); \qquad p(B/A)=p(B). \qquad (2.4)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B). \qquad (2.5)$$

Для большего числа событий, независимых в совокупности:

$$p(A_1A_2\ldots A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n). \qquad (2.5')$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B/A)$$

или (2.6)

$$p(AB)=p(B)\cdot p(A/B).$$

Для нескольких зависимых событий:

$$p(A_1A_2A_3\ldots A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1A_2)\ldots p(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$

где $p(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили.

<u>**Пример 1**</u>

ависимы или независимы:

1) несовместные события;

2) события, образующие полную группу;
3) равновозможные события?

Решение

1) Зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности всех остальных; 2) зависимы, так как непоявление всех, кроме одного, обращает в единицу вероятность последнего; 3) могут быть как зависимы, так и независимы.

<u>Пример 2</u>

Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A – появление туза;
B – появление карты красной масти;
C – появление бубнового туза;
D – появление десятки.

Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D?

Решение

1) независимы, так как $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $p(A/B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$;

2) зависимы, так как $p(A) = \frac{1}{13}$; $p(A/C) = 1$;

3) зависимы, так как $p(B) = \frac{1}{2}$; $p(B/C) = 1$;

4) независимы, так как $p(B) = \frac{1}{2}$; $p(B/D) = \frac{1}{2}$;

5) зависимы, так как несовместны.

<u>Пример 3</u>

На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение

<u>Первый способ</u>. Событие A будет осуществлено, если произойдет любое из трех несовместных событий:

B – один учебник в переплете, два без переплета,

C – два учебника в переплете, один без переплета,

D – три учебника в переплете.

$$A = B + C + D.$$

По теореме сложения

$$p(A) = p(B) + p(C) + p(D),$$

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad p(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad p(B) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Окончательно получим

$$p(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}.$$

Второй способ. События A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\overline{A}$ (ни один из взятых трех учебников не имеет переплета) – противоположные, поэтому

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Вероятность

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Пример 4

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение

Событие может появиться в двух несовместных вариантах: *бч* или *чб*; по теоремам сложения и умножения

$$p(бч + чб) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

З А Д А Н И Я

30. По мишени производятся три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i-м выстреле ($i = 1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:

A – все три попадания;
B – все три промаха;
C – хотя бы одно попадание;
D – хотя бы один промах;
E – не меньше двух попаданий;
F – не больше одного попадания;
G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

31. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:
A – обнаружен ровно один из четырех объектов;
B – обнаружен хотя бы один объект;
C – обнаружено не менее двух объектов;
D – обнаружено ровно два объекта;
E – обнаружено ровно три объекта;
F – обнаружены все четыре объекта.
Указать, в чем состоят события:
1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF.
Совпадают ли события BF и CF?
Совпадают ли события BC и D?

32. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

33. Брошены три игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится 5 очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков; в) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани – другое число очков; г) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

34. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; B – выпадение герба на второй монете.
Найти вероятность события $C = A + B$.

35. В двух ящиках находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 6 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 18, 8, и 6. Из каждого ящика наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

36. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны: 0,9; 0,85; 0,75. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) не менее двух попаданий; в) ни одного попадания.

37. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того, чтобы поразить (вывести из строя) самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. Вероятность поражения первого двигателя $p_1 = 0{,}05$, второго двигателя $p_2 = 0{,}04$, кабины пилота $p_3 = 0{,}1$. Агрегаты самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

38. В цехе работают 10 мужчин и 6 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

39. В ящике 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

40. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает три предложенных ему экзаменатором вопроса.

41. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

42. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

43. Барон вызвал графа на дуэль. В пистолетах у дуэлянтов по два патрона. Вероятность попадания в своего противника для барона (он и начинает дуэль) равна 0,4, для графа – 0,5. Найти вероятность того, что барон останется невредимым, если дуэль продолжается либо до первого попадания в кого-либо из противников, либо до тех пор, пока не закончатся все патроны.

44. Два скрипача участвуют в конкурсе им. Паганини. Вероятность стать лауреатом конкурса для первого музыканта равна 0,7, для второго – 0,6. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы один из них станет лауреатом;
б) станет лауреатом только первый скрипач;
в) лауреатами станут оба скрипача?

45. Две фотомодели снимаются для журнала мод «Русская краса», первая – с вероятностью 0,9, вторая – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что в январском номере журнала появятся снимки:

а) обеих девушек;
б) только первой;
в) хотя бы одной из них?

46. Заболевшего студента с одинаковой вероятностью 0,6 могут навестить его друзья и заместитель декана. Какова вероятность того, что в тяжелые для студента дни:

а) его посетит только замдекана;
б) никто не посетит;
в) посетит хотя бы кто-нибудь?

47. Вероятность правильно ответить на вопрос в телевизионной игре «Кто хочет стать миллионером?» для инженера равна 0,8, для экономиста – 0,7. Какова вероятность того, что на очередной вопрос ведущего:

а) оба игрока ответят правильно;
б) хотя бы один из них даст правильный ответ;
в) неправильно ответит только экономист?

48. Вероятность сняться в рекламе университета путей сообщения для первокурсника равна 0,8, для пятикурсника – 0,5. Чему равна вероятность того, что во время очередной рекламной паузы университет будут прославлять:

а) оба студента;
б) только первокурсник;
в) кто-нибудь из них?

49. Российская певица дает автограф с вероятностью 0,8, а польская – с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что завтра после концерта с участием обеих звезд:
а) вам удастся получить оба автографа;
б) удастся получить хотя бы один автограф;
в) не удастся получить автограф у польской певицы?

50. В поликлинике работают два психолога. Первый правильно определяет профессиональные наклонности детей с вероятностью 0,7, второй – с вероятностью 0,9. Для большей надежности мама с ребенком посетила обоих психологов. Какова вероятность того, что:
а) профессиональные наклонности ребенка оба специалиста определят правильно;
б) хотя бы один из них ошибется;
в) ошибочные рекомендации даст второй психолог?

51. Инженер-электронщик и киноартист пытаются пополнить ряды космонавтов. С вероятностью 0,9 и 0,85 соответственно они успешно проходят тест по специальности, с вероятностью 0,8 и 0,7 – по физической подготовке. Какова вероятность того, что киноартист успешно пройдет тестов больше, чем инженер-электронщик?

52. Кандидат в депутаты во время выступления на публике с вероятностью 0,4 шутит и рассказывает анекдоты, с вероятностью 0,5 приводит примеры из собственной жизни. Какова вероятность того, что на очередной встрече с трудящимися:
а) он ни разу не пошутит;
б) воспользуется обоими приемами общения с публикой;
в) обойдется без личных примеров?

53. Известная в городе балерина любит играть в шашки с вахтером театра. Вероятность ее выигрыша в одной партии равна 0,4, вероятность ничьей – 0,3. Как-то зимним вечером они сыграли три партии. Какова вероятность того, что балерина выиграла партий больше, чем вахтер?

54. Леночка вечером читает журнал «Бурда» с вероятностью 0,6, а журнал «Лиза» – с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что сегодня вечером:

а) Леночка вообще не читала эти журналы;
б) читала, по крайней мере, один из них;
в) читала только журнал «Бурда»?

55. Николай Петрович любит рыбачить на озере. Вероятность выловить в начале рыбалки карпа равна 0,4, а карася – 0,8. Какова вероятность, что в начале рыбалки:

а) Николай Петрович поймал только одну из этих рыб;
б) поймал только карася;
в) ничего не поймал.

56. Вероятность того, что студент выполнит без ошибок лабораторную работу по физике, равна 0,7, а по химии – 0,8. Какова вероятность того, что он выполнит без ошибок:

а) обе лабораторные работы;
б) только одну из них;
в) хотя бы одну лабораторную работу?

57. В выходные дни Дима любит слушать музыку. Классическую музыку он включает с вероятностью 0,4, современную – с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что в эти выходные:

а) Дима не станет слушать музыку;
б) будет слушать только классическую музыку;
в) послушает и классическую, и современную музыку?

58. Заядлый рыбак может выудить окуня с вероятностью 0,5, а чебака – с вероятностью 0,7. Сегодняшний улов насчитывает 5 рыб. Какова вероятность, что большинство из них – окуни?

§ 3. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, причем $p(A_1) = p_1$, $p(A_2) = p_2$, $\ldots$, $p(A_n) = p_n$; пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_n$:

$$p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n .$$

ЗАДАНИЯ

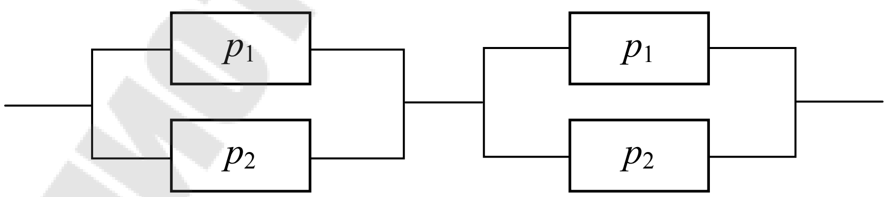
59. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятность попадания которых соответственно равны: 0,6; 0,4; 0,7; 0,8.

60. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

61. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

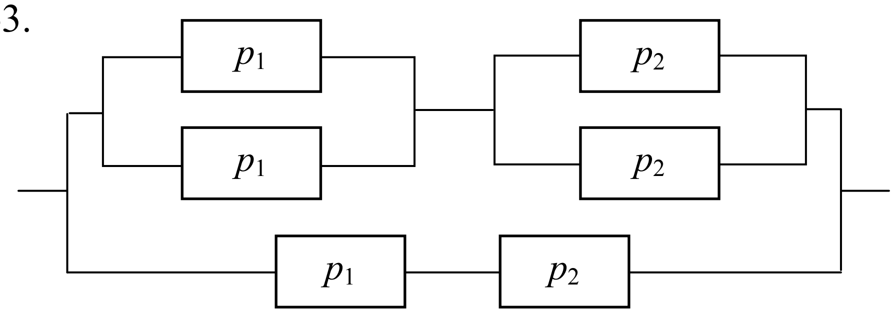
Устройство состоит из элементов, собранных по указанной в каждом варианте схеме. Предполагается, отказы элементов являются независимыми событиями. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого элемента p_i. Вычислить надежность всего устройства.

62.



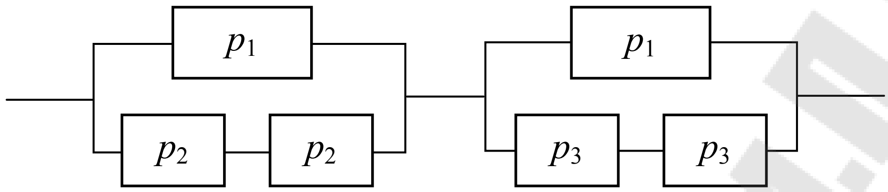
$p_1 = 0{,}75$
$p_2 = 0{,}85$

63.



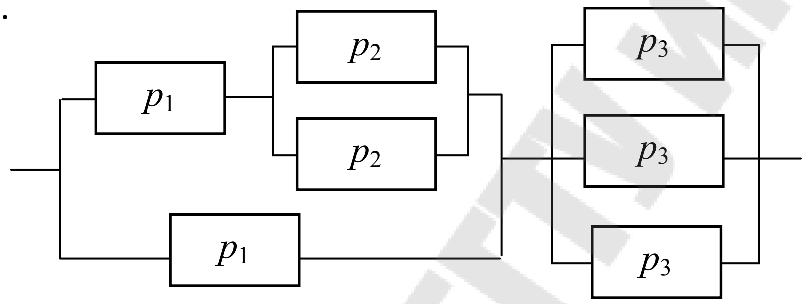
$p_1 = 0{,}80$
$p_2 = 0{,}85$

64.



$p_1 = 0{,}90$
$p_2 = 0{,}85$
$p_3 = 0{,}80$

65.



$p_1 = 0{,}75$
$p_2 = 0{,}80$
$p_3 = 0{,}70$

66. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

§ 4. Формула полной вероятности

Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события *A*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A / H_k). \qquad (4.1)$$

Это равенство называют **формулой полной вероятности.**

Пример 5

В урну, содержащую два шара опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение.

Обозначим через A событие – извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: H_1 – два черных шара, H_2 – один белый и один черный шар, H_3 – два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии гипотезы H_1, что первоначально в урне не было белых шаров, $P(A/H_1) = 1/3$ (т. к. в урне всего 3 шара, из них один белый). Аналогично находим условные вероятности для двух оставшихся гипотез: $P(A/H_2) = 2/3$, $P(A/H_3) = 1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3) \cdot P(A/H_3) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

ЗАДАНИЯ

67. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

68. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли но

одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

69. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором - 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

70. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60 % изготовлено первым заводом и 40 % – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 90 соответствуют стандарту, а из 100 шт., изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет соответствовать стандарту.

71. В тире имеется шесть ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

72. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,86, второго – 0,90, третьего – 0,92, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

73. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 35 %, с третьего – 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,2 % бракованных, второго – 0,3 %, третьего – 0,5 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

74. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 25 % сообщений «точка» и 20 % сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3 : 2. Определить вероятность того, что

принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

75. Имеются две партии одинаковых изделий по 15 и 20 шт., причем в первой партии два, а во второй - три бракованных изделия. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается наудачу одно изделие из второй партии. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

76. Приборы одного наименования изготовляются тремя заводами, первый завод поставляет 45 % всех изделий, поступающих на производство, второй – 30 % и третий 25 %. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна 0,8, вторым – 0,85 и третьим – 0,9. Определить полную (среднюю) надежность прибора, поступившего на производство.

77. В ночь перед экзаменом по математике студенту Дудкину с вероятностью 0,5 снится экзаменатор, с вероятностью 0,1 – тройной интеграл и с вероятностью 0,4 – то же, что и всегда. Если Дудкину снится преподаватель, то экзамен он сдает с вероятностью 0,3, если тройной интеграл, то успех на экзамене ожидает его с вероятностью 0,5. Если же Дудкину снится то же, что и всегда, то экзамен он точно «заваливает». Какова вероятность, что Дудкин сдаст математику в ближайшую сессию?

78. Медвежонок Вини-Пух каждое утро ходит в гости к одному из своих друзей: поросенку Пятачку, ослику Иа или Кролику, которые угощают его медом с вероятностью 0,8, 0,6 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что в ближайшую пятницу Вини-Пух попробует мед, если решение о том, к кому пойти в гости, медвежонок принимает случайным образом?

79. В диагностическом центре прием больных ведут три невропатолога: Фридман, Гудман и Шеерман, которые ставят правильный диагноз с вероятностью 0,5, 0,7 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что больному Сидорову будет поставлен неверный диагноз, если он выбирает врача случайным образом?

80. В эпоху мезолита (среднего каменного века) для того, чтобы убить зайца, было достаточно двух попаданий из лука, при одном попадании вероятность поражения зайца равнялась 0,6. Какова вероятность того, что два охотника не остались бы без рагу из зайца, если бы они стреляли по цели из луков одновременно с вероятностью попадания 0,8 и 0,5 соответственно?

81. Иван Царевич подъехал к развилке дорог. На камне он прочитал: «Налево поехать – женатому быть с вероятностью 0,6, прямо – 0,4, направо – 0,2, а назад уже пути нет». Какова вероятность остаться Ивану Царевичу холостым, если дорогу на развилке он выбрал наудачу?

82. Для защиты от грабителей 20 % квартир оборудованы пожарной сиреной, в 30 % квартир в дверях заложены пиропатроны, а в остальных квартирах содержатся гремучие змеи. Пожарная сирена отпугивает грабителей с вероятностью 0,6, взрыв пиропатрона – с вероятностью 0,7, а ограбить квартиру с гремучими змеями удается лишь в одном случае из десяти. Найти вероятность того, что грабителям удастся сделать свое черное дело, если квартира выбирается наугад.

83. Три брата посеяли пшеницу, однако «...в долгом времени аль вскоре приключилось с ними горе: кто-то в поле стал ходить да пшеницу шевелить. Наконец они смекнули, чтоб стоять на карауле, хлеб ночами поберечь, злого вора подстеречь». В их деревне всем известно, что старший брат засыпает в дозоре с вероятностью 0,8, средний – 0,4, а у младшего бессонница. Найти вероятность того, что в первую ночь удастся поймать вора, если очередность дежурства определяется жребием.

§ 5. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \qquad (5.1)$$

где $P(A)$ – полная вероятность.

Пример 6

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

Обозначим через A событие-деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): H_1 – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй, т. е. из трех произведенных деталей две произведены первым автоматом, а одна вторым) $P(H_1)=2/3$; H_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(H_2)=1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, равна $P(A/H_1)=0{,}6$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, равна $P(A/H_2)=0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна
$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=2/3\cdot 0{,}6+1/3\cdot 0{,}84=0{,}68$.
Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{2/3\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}=0{,}59.$$

ЗАДАНИЯ

84. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при

выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

85. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

86. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

87. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2 : 3 : 5. Вероятность того, что деталь с первого автомата - высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

88. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

89. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не

произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, первого типа.

90. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института, б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

91. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй 10, из них 3 неисправных, а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию; б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

92. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат, б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

93. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов; б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

94. Перед математической олимпиадой особой популярностью пользовались книги Якова Исидоровича Перельмана: в библиотеке 16 раз заказывали его книгу «Живая математика», 12 раз – «Занимательные задачи», 8 раз – «Загадки и диковинки в мире чисел». Подбор задач для олимпиады таков, что вероятность решить задачу студенту, прочитавшему книгу «Живая математика», равна

0,5, «Занимательные задачи» – 0,3, «Загадки» – 0,4. Студент Филькин радостно сообщил, что решил задачу на олимпиаде. Какую книгу Перельмана вероятнее всего он прочитал?

95. Три студента – Дима, Егор и Максим – на лабораторной работе по физике производят 25, 35 и 40 % всех измерений, допуская ошибки с вероятностями 0,01, 0,03 и 0,02 соответственно. Преподаватель проверяет наугад выбранное измерение и объявляет его ошибочным. Кто из трех студентов вероятнее всего сделал это измерение?

96. В зоопарке живут три кенгуру, пять муравьедов и семь горилл. Условия содержания млекопитающих таковы, что вероятность заболеть у этих животных соответственно равна 0,7; 0,4 и 0,1. Животное, которое удалось поймать врачу, оказалось здоровым. Какова вероятность того, что врач осматривал муравьеда?

97. Учитель литературы предложил викторину по распознаванию портретов великих людей. Школьникам были показаны репродукции картин Ильи Репина: шесть портретов русских музыкантов (Глинки, Мусоргского, Бородина, Глазунова, Лядова, Римского-Корсакова), десять портретов русских писателей (Гоголя, Тургенева, Льва Толстого, Писемского, Гаршина, Фета, Стасова, Горького, Леонида Андреева, Короленко) и пять портретов русских ученых (Сеченова,
98. Менделеева, Павлова, Тарханова, Бехтерева). Подготовка учеников такова, что портреты музыкантов они узнают с вероятностью 0,4, писателей – 0,8, ученых – 0,5. Школьница Даша правильно распознала портрет, выбранный наугад. Какова вероятность того, что ей попался портрет музыканта?

99. Во дворе выгуливают двух чау-чау, трех мопсов, двух спаниелей и одного ньюфаундленда. Мопс облаивает проходящую мимо дворничиху с вероятностью 0,9, спаниель – 0,4, ньюфаундленд – 0,1, чау-чау вообще не любит лаять. Сегодня утром дворничиху облаяла собака. Какой породы вероятнее всего она была?

100. Имеется два одинаковых аквариума с рыбами: в первом – восемь морских чертей и две золотые рыбки, во втором – пять морских чертей и три золотые рыбки. Из наугад выбранного аквариума извлекли рыбку, которая оказалась золотой. Из какого аквариума вероятнее всего взята эта рыба?

101. Экзаменационные работы по математике с вероятностью 0,2, 0,3 и 0,5 попадают на проверку к одному из трех экзаменаторов, каждый из которых может пропустить (не заметить) ошибку абитуриента с вероятностью 0,01, 0,02 и 0,015 соответственно. Наугад выбранная работа (из числа проверенных) оказалась правильно аттестованной. Какова вероятность, что эту работу проверял третий преподаватель?

102. Студента Зевского на лекциях по математике посещают музы: Евтерпа (муза лирической поэзии) – с вероятностью 0,2; Эрато (муза любовной поэзии) – с вероятностью 0,5 и Каллиопа (муза эпической поэзии) – с вероятностью 0,3. Известно, что после посещения соответствующей музы Зевский лирические стихи сочиняет с вероятностью 0,4, любовные – с вероятностью 0,8 и эпические – с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что написанное Зевским на очередной лекции стихотворение было эпическим?

103. Студент Лямурский Петя любит дарить девушкам цветы: маргаритки он дарит с вероятностью 0,3, хризантемы – 0,2, герань, выращенную его бабушкой, – с вероятностью 0,5. Девушки, одаренные маргаритками, идут с Петей в палеонтологический музей с вероятностью 0,2, получившие хризантемы, – с вероятностью 0,3, герань – 0,7. Какова вероятность того, что наугад выбранная знакомая Пети провела с ним восхитительный вечер в палеонтологическом музее?

104. Красная Шапочка, заблудившись в лесу, вышла на полянку, от которой в разные стороны ведут три дороги. Вероятность встретить Серого Волка на первой дороге равна 0,6, на второй – 0,3, на третьей – 0,2. Какова вероятность того, что Красная Шапочка пошла по второй дороге, если известно, что через час она уже была у бабушки?

105. В одной из провинций Республики Мозамбик треть населения занимается сбором орехов кешью, пятая часть – животноводством (слаборазвитая отрасль из-за распространения мухи цеце), остальные выращивают сахарный тростник. Вероятность того, что семья, занятая в одной из вышеперечисленных отраслей, в состоянии обучать своего ребенка в колледже, равна 0,5, 0,7, 0,6 соответственно. Человек, встретившийся вам на берегу Лимпопо, радостно сообщил,

что его дочь учится в Мапуту. В какой отрасли хозяйства вероятнее всего он работает?

§ 6. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\left(0<p<1\right)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{или}\ P_n(k)=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k q^{n-k},\qquad(6.1)$$

где $q=1-p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, - находят соответственно по формулам:

а) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n\left(k-1\right)$;

б) $P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n\left(n\right)$;

в) $P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n\left(n\right)$;

г) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n\left(k\right)$.

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n опытах, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p (и не наступить с вероятностью $q=1-p$), определяется из двойного неравенства

$$np-q\le m_0\le np+p.\qquad(6.2)$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n\ge\frac{\lg\left(1-P\right)}{\lg\left(1-p\right)}.\qquad(6.3)$$

Если производится n независимых опытов в различных условиях, причем вероятность появления события A в i-м опыте равна $p,(i=1,2,...,n)$, то вероятность P_m того, что событие A в n опытах появится m раз, равна коэффициенту при z^m в разложении по степеням z *производящей функции*:

$$\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i z), \tag{6.4}$$

где $q_i=1-p_i$.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу-формулу Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{6.5}$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda=np$ - среднее число появлений события в n испытаниях.

Пример 7

Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди десяти изделий одно нестандартное?

Решение

По условию задачи $n=10$, $q=0{,}95$, $p=1-q=1-0{,}95=0{,}05$. Тогда по формуле Бернулли получаем

$$P_{10}(1)=C_{10}^{1}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^9=0{,}315.$$

Пример 8

При установившемся технологическом процессе 80% всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 250 изделий.

Решение

При $n=250$, $p=0{,}8$ и $q=0{,}2$ неравенство дает $199{,}8\le m_0\le 200{,}8$. Поскольку m_0 может быть только целым, то $m_0=200$.

Пример 9

За один час автомат изготовляет 20 деталей. За сколько часов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,952, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

Решение

Найдем вначале количество изготовляемых деталей, чтобы с вероятностью P=0,952 можно было утверждать о наличии по крайней мере одной бракованной детали, если вероятность брака p=0,01:

$$n \geq \frac{\lg(1-0{,}952)}{\lg(1-0{,}01)} = \frac{\lg 0{,}048}{\lg 0{,}99} \approx 302.$$

Следовательно, за t=302/20=15,1 ч автомат с вероятностью 0,952 изготавливает по крайней мере одну бракованную деталь.

Пример 10

Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение.

По условию, n=100 000, p = 0,0001, k = 5. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Найдем λ:

$$\lambda = np = 100000 \cdot 0.0001 = 10.$$

Искомая вероятность

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} = \frac{10^5 \cdot 0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

ЗАДАНИЯ

106. Вероятность выигрыша по одной лотерее 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных лотерей выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух.

107. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

108. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз.

109. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи.

110. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта.

111. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений.

112. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Указание. Принять $e^{-2} = 0{,}13534$.

113. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

114. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

115. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

116. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

117. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

118. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появления события в этих испытаниях было равно 25?

119. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

120. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в десятку была больше 0,9?

121. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью

0,0005. Найти вероятность того, что за время T откажет не более трех элементов.

122. Вероятность попадания в мишень 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелах будет не менее двух попаданий?

123. Вероятность отказа локомотива на линии за время полного оборота составляет 0,01. Найти вероятность того, что в восьми поездах произойдет не более двух отказов локомотива на линии.

124. В поезде пять электрических лампочек. Каждая из них перегорает в течение года с вероятностью 0,02. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее трех лампочек.

125. Вероятность забить пенальти для хорошо подготовленного футболиста равна 0,8. Какова вероятность того что из десяти пенальти он забьет не менее восьми?

126. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,004. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность семи сбоев.

127. При размножении комнатных фиалок лист присыпают землей и ждут появления корневой системы, которая развивается в 85% случаев. Какова вероятность того, что цветовод при попытке укоренить 9 листочков фиалки получит только 5 растений с развитой корневой системой?

§7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

<u>Локальная теорема Лапласа.</u> Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\left(0<p<1\right)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x). \tag{7.1}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведены в таблице 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей [функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$].

<u>Интегральная теорема Лапласа.</u> Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\,(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'). \tag{7.2}$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\left(z^2/2\right)} dz \text{ – функция Лапласа,}$$

$$x' = \left(k_1 - np\right) / \sqrt{npq}, \quad x'' = \left(k_2 - np\right) / \sqrt{npq}.$$

Таблица 2 функции Лапласа для положительных значений $x(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $\left[\Phi(-x) = -\Phi(x)\right]$.

<u>Пример 11</u>

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение

По условию $n = 243;\ k = 70;\ p = 0{,}25;\ q = 0{,}75.$ Так как $n = 243$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = (k - np) / \sqrt{npq}$.

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

По табл. П.1.1 (см. Приложение 1) найдем $\varphi(1{,}37)=0{,}1561$. Искомая вероятность $P_{243}(70)=1/6{,}75\cdot 0{,}1561=00231$.

Пример 12

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянная и равна $p=0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

$$x'=(k_1-np)/\sqrt{npq},\ x''=(k_2-np)/\sqrt{npq}\,.$$

а) По условию $n=100; p=0{,}8; q=0{,}2; k_1=75; k_2=90$. Вычислим x' и x'':

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75;90)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25).$$

По табл. 1.2 (см. Приложение 1) найдем:

$$\Phi(2{,}5)=0{,}4938;\ \ \Phi(1{,}25)=0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;90)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76,…, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1=75, k_2=100$. Тогда

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-1{,}25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=5;$$

По табл. П.2.1 (см. Приложение 2) найдем
$\Phi(5)=0{,}5;\ \Phi(1{,}25)=0{,}3944.$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;90)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=$$
$$=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944.$$

в) События – «A появилось не менее 75 раз» и «A появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность
$P_{100}(0;74)=1-P_{100}(75;100)=1-0{,}8944=0{,}1056.$

ЗАДАНИЯ

128. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

129. Вероятность появления события а каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) но более 74 раз.

130. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаниях равна 0,7.Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не более 1470 раз; в) не более 1469 раз.

131. Вероятность появления события в каждом независимом испытании постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что в 145 испытаниях событие наступит ровно120 раз.

132. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных.

133. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2.

134. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550.

135. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

136. В одном коробке 100 спичек. Вероятность того, что спичка не загорится, равна 0,117. Какова вероятность того, что наугад выбранный коробок содержит:

а) ровно 11 спичек, которые не загорятся;

б) не более 24 спичек, которые не загорятся?

137. По данным мастерской по ремонту компьютеров, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% процессоров. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных процессоров проработает гарантийный срок:

а) 36 процессоров;

б) не менее половины?

Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, которое наперед неизвестно и зависит от причин, которые заранее не могут быть учтены.

Например:

1. Случайная величина – число очков, выпавших на игральной кости. СВ может принимать любое из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Расстояние, которое может пролетать снаряд при выстреле. СВ может принимать любое значение из промежутка $[l_{\min}, l_{\max}]$.

§8. Дискретные случайные величины

Дискретной называют СВ, которая может принимать отдельные (дискретные) значения, причем число их может быть как конечно, так и бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы, графически и аналитически в виде формулы.

<u>Пример 13</u>

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50$ и 10 выигрышей в 1$. Найти закон распределения случайной величины X - стоимости возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение

СВ X может принимать следующие значения: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 50$. Найдем вероятности появления x_1, x_2, x_3.

Среди 100 билетов невыигрышных $m = 100 - 1 - 10 = 89$.

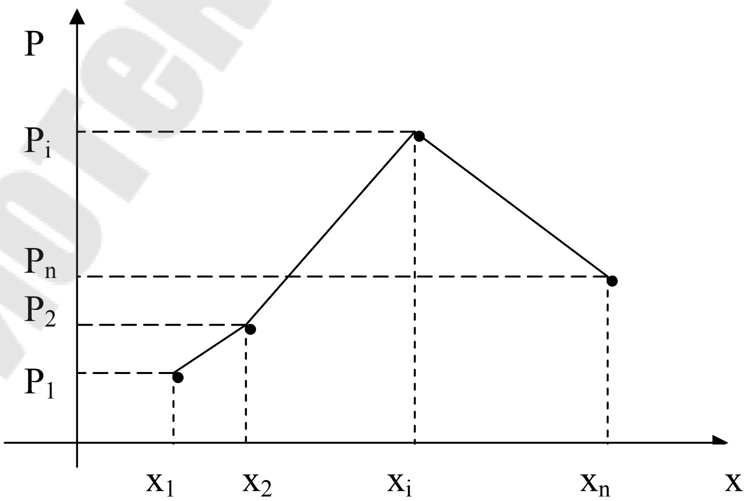
$$P(x_1) = \frac{89}{100} = 0{,}89;\ P(x_2) = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ P(x_3) = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

Контроль: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 1$; $0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

Составляем таблицу-закон распределения.

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

Графически закон распределения строят, нанося в прямоугольной системе координат точки $(x_i; p_i)$ и соединяя их отрезками прямой. Полученная ломанная называется многоугольником распределения.

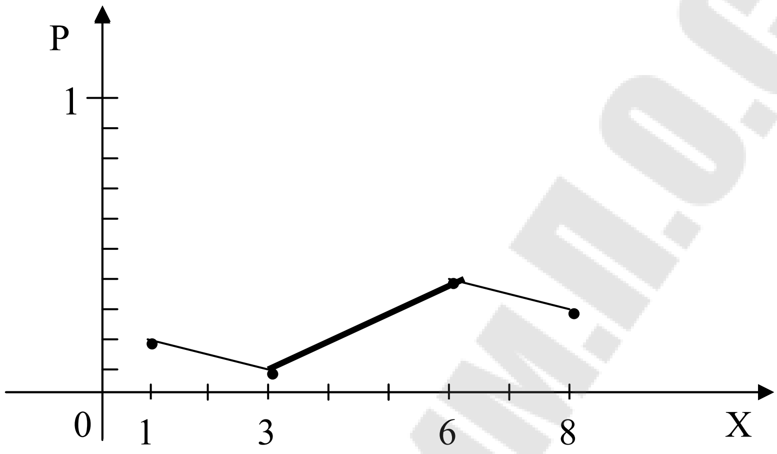


Пример 14

Дискретная величина X задана законом распределения

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.



Закон распределения может быть задан формулой, связывающей вероятность появления с численным значением СВ X.

Например. Пусть случайная величина X - число появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения – число k появлений события вычисляют по формуле Бернулли

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{8.1}$$

Такой закон распределения называется биномиальным.

Если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала, то используют приближенную формулу:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \ \lambda = np. \tag{8.2}$$

В этом случае говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, задающего вероятность того, что СВ X примет значение меньшее, чем x.

Функция распределения дискретной СВ X вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x_i). \qquad (8.3)$$

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < x < \infty;$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
3. $F(x)$ – неубывающая функция на всей числовой оси;
4. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Вероятность попадания СВ X на произвольный полуинтервал $[x_1; x_2)$ определяется формулой:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (8.4)$$

<u>Пример 15</u>

Дискретная СВ x распределена по закону

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти $F(x)$ и построить ее график. Вычислить $P(3 < x < 8)$.

Решение.

При $x \le 3 \qquad F(x) = 0;$

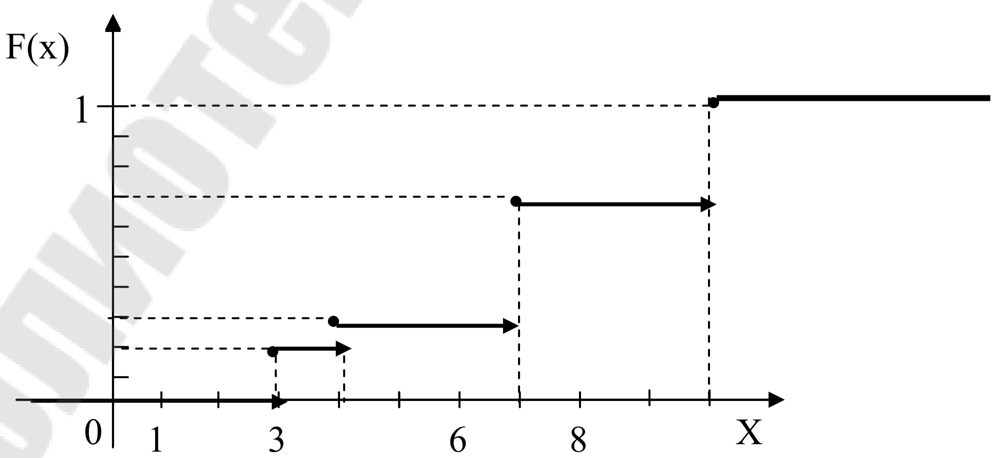
при $3 < x \le 4 \quad F(x) = 0{,}2;$

при $4 < x \le 7 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3;$

при $7 < x \le 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7;$

при $x > 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1.$

Строим график:



Вероятность попадания СВ X в интервал $3 < x < 8$ найдем как $P(3 < x < 8) = F(8) - F(3) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$.

Числовые характеристики дискретной СВ. Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений значений случайной величины на их вероятности

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ . \qquad (8.5)$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M(C) = C$.

2. Произведением СВ X на постоянную C будем называть СВ Y, принимающую значения $Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n$ с вероятностями $P_1, P_2, ...P_n$.

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[CX] = C \cdot M[X].$$

3. Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Произведением СВ X и Y называется СВ XY, которая принимает все возможные значения $x_i y_i$. Вероятности полученных значений равны произведению вероятностей сомножителей. Если некоторые из произведений оказались равными, то их верояности складываются.

Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y].$$

Суммой СВ X и Y называется СВ $(X + Y)$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятности полученных значений $(x_i + y_i)$ для независимых СВ X и Y равны произведению вероятностей слагаемых; для зависимых СВ X и Y – произведению вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y].$$

Пример 16

Найти математическое ожидание СВ X, распределенной по закону

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Решение

$M[X]=0{,}21\cdot 0{,}1+0{,}54\cdot 0{,}5+0{,}61\cdot 0{,}4=0{,}535$.

Пример 17

Найти математическое ожидание суммы чисел очков, которая может выпасть при бросании двух костей.

Решени

Пусть СВ X – число очков, выпавшее на первой кости;

СВ Y – число очков, выпавшее на второй кости.

$M[X+Y]=M[X]+M[Y]=2M[X]$.

Появление любого из возможного числа очков равновероятно, поэтому все значения СВ имеют вероятности $P=\frac{1}{6}$.

Тогда $M[X]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$.

Таким образом $M[X+Y]=2\cdot\frac{7}{2}=7$.

Дисперсия дискретной случайной величины

Отклонением называют разность между значением СВ и ее математическим ожиданием.

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D[X]=M\left((X-M[X])^2\right). \qquad (8.6)$$

Дисперсия дискретной случайной величины может быть найдена по формуле

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2. \tag{8.7}$$

<u>Пример 18</u>

Найти дисперсию СВ X, которая задана законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Решение

Найдем математическое ожидание $M[X]$:

$$M[X] = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Найдем $M\left[X^2\right]$:

$$M\left[X^2\right] = 2^2\cdot 0{,}1 + 3^2\cdot 0{,}6 + 5^2\cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Тогда $D[X] = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$

<u>Свойства дисперсии:</u>

1. Дисперсия постоянной равна нулю - $D[C] = 0$;
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат $D[CX] = C^2 D[X]$;
3. Дисперсия суммы двух независимых СВ равна сумме дисперсий слагаемых $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$;
4. Дисперсия разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$.

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \tag{8.8}$$

<u>Пример 19</u>

Найти среднее квадратическое отклонение СВ X заданной законом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Решение

Найдем $M[X] = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}5 = 6{,}4$

Найдем $M\left[X^2\right] = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}4 + 100\cdot 0{,}5 = 54$

Найдем $D[X] = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04$

Тогда искомое среднее квадратическое отклонение

$\sigma[X] = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$.

ЗАДАНИЯ

138. Дискретня случайная величина задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

а)

X	2	4	5
P	0,3	0,1	0,2

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

139. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной СВ X – числа стандартных деталей среди отобранных.

140. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

141. Дискретная СВ X распределена по закону

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

142. В десятиламповом радиоприемнике перегорела одна лампа. Для устранения неисправности выбранную наугад лампу заменяют исправной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника. Постройте закон распределения, функцию распределения и найдите математическое ожидание и дисперсию числа провененных ламп.

143. В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в одинаковых условиях. Вероятности исправного состояния агрегата в течении времени T равны 0,6 и независимы. Случайная величина X – число агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить закон распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

144. Техническое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа первого элемента равна 0,1; второго и третьего – 0,2; четвертого и пятого – 0,3. Построить закон распределения и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа отказавших элементов.

145. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа партий, в каждой из которых содержится ровно четыре стандартных изделия, – если проверке подлежит 50 партий. (Указание: математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону $m = np$).

146. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1; x_2 = 1$, а также известны математические ожидания $M[X] = 0{,}1; M[X^2] = 0{,}9$. Найти закон распределения СВ X.

147. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M[X] = 2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = 0{,}8$.

§9. Непрерывные случайные величины

Плотностью распределения вероятности (дифференциальным распределением) случайной величины X называют предел отношения вероятности попадания ее на элементарный участок от x до $x+\Delta x$ к длине участка Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \qquad (9.1)$$

учитывая, что $P(x \le X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F.$

Таким образом, плотность распределения вероятности случайной величины X равна первой производной от функции распределения

$$f(x) = F'(x). \qquad (9.2)$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси, а плотность распределения вероятности $f(x)$ существует везде, за исключением, быть может, конечного числа точек.

График функции $f(x)$ называется кривой распределения.

Свойства $f(x)$:

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \ge 0$;

2. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) 2x = 1$;

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 1.$

<u>Пример 20</u>

Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\, при\; x < 0; \\ \sin x,\, при\; 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1,\, при\; x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение

Плотность распределения $f(x)$ равна первой производной от $F(x)$. Поэтому получаем:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{при}\, x \le 0; \\ \cos x, \text{при}\, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \text{при}\, x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

<u>Пример 21</u>

Плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, \text{при}\, |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \text{при}\, |x| > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

Определить коэффициент a.

Решение

Все значения $f(x)$ сосредоточены в $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, поэтому условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 1;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2a\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2a = 1;$$

Таким образом, $a = \dfrac{1}{2}$.

Функция $F(x)$ может быть найдена по известной $f(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (9.3)$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha;\beta)$ может быть найдена по формуле

$$P(\alpha \le x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \quad (9.4)$$

<u>Пример 22</u>

Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, при\, x \le 1; \\ x - \dfrac{1}{2}, при\, 1 < x \le 2; \\ 0, при\, x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания СВ X в интервал $[1{,}1;1{,}9)$.

Решение

Используем формулу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

при $x \le 1$ $\quad f(x) = 0$, поэтому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx = 0$.

Если $1 < x \le 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \left.\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^x = \frac{(2x-1)^2}{8} - \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 1 - 1}{8} = \frac{4x^2 - 4x}{8} = \frac{x^2 - x}{2}.$$

Если $x > 2$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx=0+\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^2+0=\frac{(2x-1)^2}{8}=$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ x\le 1;\\ \dfrac{x^2-x}{2},\ \text{при}\ 1<x\le 2;\\ 1,\ \text{при}\ x>2.\end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $(1{,}1;1{,}9)$ найдем как

$$P(1{,}1\le x<1{,}9)=\int_{1,1}^{1,9}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left.\frac{(x-0{,}5)^2}{2}\right|_{1,1}^{1,9}=\frac{(1{,}9-0{,}5)^2}{2}-\frac{(1{,}1-0{,}5)^2}{2}=$$

$$=\frac{1{,}4^2-0{,}6^2}{2}=\frac{1{,}96-0{,}36}{2}=\frac{1{,}6}{2}=0{,}8.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx. \tag{9.5}$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если все возможные значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M[X]=\int_{a}^{b}xf(x)dx. \tag{9.6}$$

Все свойства математического ожидания, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются для непрерывных случайных величин.

Пример 23

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{x}{2}$ в интервале $(0;2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание.

Решение

$$M[X]=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяются равенством:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}[X-M[X]]^2 f(x)dx \tag{9.7}$$

или равносильным равенством

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}X^2 f(x)dx-(M[X])^2\,. \tag{9.8}$$

В частности, если все значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D[X]=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M[X])^2\,. \tag{9.9}$$

Все свойства дисперсии, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, как и в случае дискретной случайной величины, определяется как

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \tag{9.10}$$

Пример 24

Случайная величина X в интервале $(0,5)$ задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{2}{25}x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X.

Решение

Будем вычислять дисперсию по формуле

$$D[X]=\int_0^5 x^2 f(x)dx-(M[X])^2.$$

$$M[X]=\int_0^5 xf(x)dx=\int_0^5 x\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx=\frac{2}{75}x^3\Big|_0^5=\frac{2\cdot 125}{75}=\frac{10}{3}.$$

$$\int_0^5 x^2 f(x)dx=\int_0^5 x^2\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx=\frac{x^4}{50}\Big|_0^5=\frac{625}{50}=\frac{25}{2}.$$

Таким образом,

$$D[X]=\frac{25}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{25}{2}-\frac{100}{9}=\frac{125}{18}.$$

ЗАДАНИЯ

В задачах 148–150 по заданной функции распределения $F(x)$ найти плотность распределения $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

148. $F(x)=\begin{cases}0, \text{при}\, x\le 0;\\ \sin 2x, \text{при}\, 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 1, \text{при}\, x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

149. $F(x)=\begin{cases}0, \text{при}\, x<0;\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), \text{при}\, 0\le x\le\pi;\\ 1, \text{при}\, x>\pi.\end{cases}$

150. $F(x)=\begin{cases}0, \text{при}\, x<1;\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), \text{при}\, 1\le x\le 2;\\ 1, \text{при}\, x>2.\end{cases}$

Задана плотность распределения $f(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания значений случайной величины X в указанный промежуток $(\alpha;\beta)$.

151. $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le\dfrac{\pi}{6};\\ 3\sin 3x, \text{при } \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3}, \quad \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right);\\ 0, \text{при } x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

152. $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x}{8}, \text{при } 0<x\le 4, \quad (1;3);\\ 0, \text{при } x>4.\end{cases}$

153. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей числовой оси OX равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

154. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x)=C\sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

155. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0;1)$ равна $f(x)=C\,arctgx$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

156. Случайная величина X в интервале $(-3;3)$ задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Что вероятнее: в результате испытания окажется $x<1$ или $x>1$?

157. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, \text{при} -2 < x \le 2;\\ 1, \text{при } x > 2.\end{cases}$$

158. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x < 0;\\ a(1-\cos x), \text{при } 0 \le x \le \pi;\\ 1, \text{при } x > \pi.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $f(x)$; б) найти коэффициент a; в) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти плотность распределения вероятности $f(x)$. Вычислить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a,b]$.

159. $$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le -1,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, \text{ при } -1 < x \le 1,\\ 1, \text{ при } x > 1\end{cases} \qquad a=-\frac{1}{2}, \quad b=\frac{1}{2}.$$

160. $$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x < 1,\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), \text{ при } 1 \le x \le 2,\\ 1, \text{ при } x > 2\end{cases} \qquad a=1{,}5, \quad b=1{,}8.$$

161. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2,\\ (x-2)^2, \text{ при } 2\le x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\quad a=2{,}5, \quad b=2{,}8$.

162. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{3}\left(x^3+2x\right), \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 1, \text{ при } x>1\end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=1$.

163. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{6}x, \text{ при } 0\le x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6\end{cases}$ $\quad a=1, \quad b=3$.

164. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<2,\\ \frac{1}{2}x-1, \text{ при } 2\le x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\quad a=1, \quad b=3$.

165. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{6}\left(x^2+x\right), \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\quad a=0, \quad b=1$.

166. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{10}\left(x^2+3x\right), \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\quad a=0, \quad b=1$.

167. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{14}\left(x^3+3x\right), \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=1.$

168. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-1,\\ \frac{1}{5}\left(x+1\right), \text{ при -1}\le x\le 4,\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$ $\quad a=0, \quad b=3.$

169. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{15}\left(x^2+2x\right), \text{ при } 0\le x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=2.$

170. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \frac{1}{33}\left(x^3+2x\right), \text{ при } 0\le x\le 3,\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$ $\quad a=-1{,}5, \quad b=2.$

171. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-4,\\ \frac{1}{3}\left(x+4\right), \text{ при } -4\le x\le -1,\\ 1, \text{ при } x>-1\end{cases}$ $\quad a=-3, \quad b=1.$

172. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-1,\\ \frac{1}{9}\left(x^3+1\right), \text{ при } -1\le x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$ $\quad a=1, \quad b=2.$

173. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0, \\ \dfrac{x^2+x}{11}, \text{ при } 0\le x\le 3, \\ 1, \text{ при } x>3 \end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=1.$

174. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<1, \\ \dfrac{x^2-1}{10}, \text{ при } 1\le x\le 3, \\ 1, \text{ при } x>3 \end{cases}$ $\quad a=0, \quad b=2.$

175. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0, \\ \dfrac{1}{24}\left(x^2+2x\right), \text{ при } 0\le x\le 4, \\ 1, \text{ при } x>4 \end{cases}$ $\quad a=1, \quad b=3.$

176. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<-2, \\ \dfrac{1}{2}(x+2), \text{ при } -2\le x\le 0, \\ 1, \text{ при } x>0 \end{cases}$ $\quad a=-1, \quad b=1.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1.1

1. Значения функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0148	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

Продолжение табл. П.1.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Таблица П.2.1

2. Значения функций

$$\Phi(x) = \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \text{ и } \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

x	Φ(x)	$\overline{\Phi}(x)$	x	Φ(x)	$\overline{\Phi}(x)$	x	Φ(x)	$\overline{\Phi}(x)$	x	Φ(x)	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928

Продолжение табл. П.2.1

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	62	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981
0,50	5205	1915	1,10	8802	3643	1,70	9838	4554	3,00	1,0000	4986
52	5379	1985	12	8868	3686	72	9850	4573	20	1,0000	4993
54	5549	2054	14	8931	3729	74	9861	4591	40	1,0000	4996
56	5716	2123	16	8991	3770	76	9872	4608	60	1,0000	4998
0,58	0,5879	0,2190	1,18	0,9048	0,3810	1,78	0,9882	0,4625	3,80	1,0000	0,4999

Литература

1. Гмурман, В. В. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. В. Гмурман. – М. : Высшая математика, 1970.
2. Гмурман, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика / В. В. Гмурман. – М. : Высшая математика, 1977.
3. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / под ред. А. П. Рябушка. – Минск : Выш. шк., 1992.
4. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1976.
5. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1978.
6. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1986. – Ч. 3.
7. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. Наука, 1988.
8. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982.
9. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты) : учеб. пособие. – СПб. : Лань, 2010. – 288с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

Иванейчик Ирина Владимировна
Кондратюк Валерия Вячеславовна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Практикум
по курсу «Математика» для студентов
специальности 1-36 12 01 «Проектирование
и производство сельскохозяйственной техники»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 21.10.20.

Рег. № 103Е.
http://www.gstu.by