

О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль

НЕРАВНОВЕСНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ
В СРЕДАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

Гомель
ГГТУ им. П. О. Сухого
2013

Шабловский, О. Н. Неравновесные тепловые структуры в средах с источниками энергии / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 208 с. : ил. – ISBN 978-985-535-207-6.

Изложены результаты собственных исследований авторов по динамике неравновесных тепловых состояний в системе «среда – источник энергии». Детально изучены неклассические особенности зарождения, формирования и эволюции тепловых структур. Представлены асимметричные свойства тепловых процессов при воздействии поверхностного источника энергии на двухслойную металлическую пластину. Разработана тепловая модель периодической кристаллизации. Обнаружены новые теплофизические и морфологические свойства двухмерных периодических структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку. Подробно рассмотрены закономерности формирования полос, «чешуек», «лепестков», а также эффект «домино». Конкуренция между тепловыделением и теплосъемом изучена на основе уравнения синус-Гордона в поле внешнего периодического источника. Указаны новые аналитические подходы к проблеме воздействия источников энергии на нелинейные, параметрические и неоднородные среды.

Для широкого круга специалистов по теплообмену и материаловедению: научных и инженерно-технических работников, преподавателей, а также для начинающих исследователей, аспирантов, магистрантов и студентов соответствующего профиля.

Табл. 32, ил. 85, список лит. – 98 назв.

Рецензенты: ведущий научный сотрудник отдела газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор *И. К. Жарова*;
заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика» Белорусского государственного университета транспорта доктор технических наук, профессор *А. О. Шимановский*

*Рекомендовано к изданию Советом ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 3 от 19.11.2012 г.)*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Основные условные обозначения	7
ГЛАВА 1. Исходные положения	8
1.1. Уравнения теплопереноса	8
1.2. Численные алгоритмы на основе метода интегральных соотношений ...	11
ГЛАВА 2. Асимметричные свойства тепловых процессов при воздействии поверхностного источника энергии на двухслойную металлическую пластину	14
2.1. Динамический тепловой гистерезис в однослойной пластине	14
2.2. Асимметрия теплопереноса в двухслойной системе с изотермической границей	18
2.2.1. Стационарный эксперимент	18
2.2.2. Постановка задачи	19
2.2.3. Длительность теплового импульса	25
2.2.4. Начальная температура образца	26
2.2.5. Влияние нелинейных свойств металлов	28
2.2.6. Двухслойные системы Fe–W и W–V	32
2.3. Асимметрия теплопереноса в двухслойной системе с теплоизолированной границей	34
2.3.1. Основные факторы влияния	34
2.3.2. Нелинейные свойства параметров асимметрии	36
2.3.3. Примеры расчета	38
2.4. Термоциклическое воздействие на двухслойную пластину	40
2.4.1. Два типа асимметрии	40
2.4.2. Динамические свойства контактного теплообмена	44
2.4.3. Роль знака производной $d\lambda/dT$	49
ГЛАВА 3. Периодические тепловые структуры в среде с источниками энергии	52
3.1. Тепловая модель периодической кристаллизации	52
3.1.1. Предварительные замечания	52
3.1.2. Функции источников	53
3.1.3. Дозвуковой процесс: конкуренция двух источников энергии	55
3.1.4. Пульсации скорости изотермы	63
3.1.5. Сверхзвуковой процесс: роль инверсии знака источника	73
3.2. Генерация периодических тепловых полей объемным источником энергии	75
3.2.1. Источник энергии в среде с одним временем релаксации	76
3.2.2. Источник энергии в среде с двумя временами релаксации	80

3.3. Двухмерные периодические тепловые структуры.....	83
3.3.1. Колебательно-релаксационный режим теплопереноса.....	85
3.3.2. Релаксация и ретардация.....	91
3.4. Морфологические свойства периодических структур.....	96
3.4.1. Линии остановки и линии неподвижности изотерм.....	96
3.4.2. Полосчатые и чешуйчатые структуры.....	98
3.4.3. Автомодельный процесс формирования полос.....	104
3.4.4. Эффект «домино».....	109
3.4.5. Лепестковые структуры.....	111
3.4.6. Разрушение периодических тепловых полей.....	117
3.5. Фазовая граница взрывной кристаллизации аморфной пленки германия.....	119
3.5.1. Феноменологическая оценка времени тепловой релаксации.....	119
3.5.2. Сравнение с экспериментом.....	125
ГЛАВА 4. Источник синус-Гордона и бистабильные тепловые системы..	129
4.1. Бистабильные тепловые системы.....	130
4.1.1. Эволюция начального температурного профиля.....	130
4.1.2. Фазовый переход «расплав–кристалл».....	134
4.2. Уравнение синус-Гордона в поле внешнего периодического источника..	138
4.2.1. Возбуждение колебаний и ширина гистерезисного интервала...	139
4.2.2. Частотный параметр реономной системы.....	142
4.2.3. Трехмерные конфигурации фазовых траекторий.....	144
4.2.4. Когерентность колебаний.....	151
ГЛАВА 5. Воздействие источников энергии на нелинейные, параметрические и неоднородные среды.....	154
5.1. Колебания и волны в системе «среда – источник энергии».....	154
5.1.1. Двойная волна.....	154
5.1.2. Квазигазовая неустойчивость.....	161
5.1.3. Тепловой маятник.....	162
5.1.4. Устойчивость параметрических колебаний.....	163
5.2. Динамическое воздействие на неравновесное тепловое поле.....	169
5.2.1. Инверсионный режим.....	169
5.2.2. Колебательный режим.....	175
5.2.3. Точное решение.....	176
5.2.4. Параметрический переход системы в другое неравновесное состояние.....	177
5.3. Тепловые процессы в неоднородных средах.....	181
5.3.1. Алгоритм преобразования уравнений теплопереноса.....	181
5.3.2. Параметрические и неоднородные среды.....	183
5.3.3. Пространственно-периодические неоднородные среды.....	187
5.3.4. Двухкомпонентная система.....	193
Заключение.....	196
Литература.....	200

Введение

Современная теория теплообмена ставит на одну из главных позиций проблему исследования переноса энергии в условиях, существенно отличающихся от классических. Это вызвано все более широким распространением технологических процессов, основанных на высокоинтенсивном взаимодействии материала с объемными и поверхностными источниками энергии. Среди наиболее трудных задач отметим следующие: большая плотность потоков энергии, значительная скорость их изменения; влияние способов нагрева и охлаждения на характеристики элементов физико-энергетических установок; высокоскоростные фазовые превращения; вопросы устойчивости и неустойчивости теплофизических систем; распространение методов неравновесной термодинамики на изучение процессов теплообмена.

В данной монографии объектом теоретического исследования являются:

- динамика неравновесных тепловых состояний среды с объемными и поверхностными источниками энергии;
- локально-неравновесные свойства теплофизических систем, принцип действия которых основан на тепловыделении и последующем съеме энергии;
- асимметричные свойства теплообмена в двухслойных пластинах при импульсном тепловом воздействии;
- периодические макроструктуры, формирующиеся при высокоскоростной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку;
- производство энтропии, гистерезисные нелинейности и пространственная неоднородность неравновесных тепловых полей.

Существо развиваемого нами подхода состоит в обнаружении принципиальной роли неравновесных факторов при взаимодействии источников энергии со средой, а также в стремлении дать целостное феноменологическое объяснение неклассическим особенностям зарождения, формирования и эволюции тепловых структур.

Прикладные аспекты данной работы связаны со следующими задачами: высокоскоростные методы получения и термообработки материалов; способы организации элементов системы «среда – источ-

ник энергии» и характер связей между ними; нелинейные методы анализа нестационарных теплофизических систем.

Настоящая книга построена в основном на материалах собственных исследований авторов. Первая глава имеет вводный характер.

В главе 2 исследованы асимметричные свойства тепловых процессов в двухслойной металлической пластине, на которую действует поверхностный источник энергии. Рассмотрены системы с изотермической и теплоизолированной границами образца, а также термоциклический режим воздействия. Обнаружены важные свойства параметров асимметрии, проявляющиеся на фоне сильной физической нелинейности контактного теплообмена.

В главе 3 изложена тепловая модель периодической кристаллизации. Основное внимание уделяется проблеме формирования периодических макроструктур при взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку. Центральный пункт исследования – конкуренция между выделением кристаллизационного тепла и теплоотдачей от пленки в подложку. Выполнен детальный анализ морфологических свойств двухмерных периодических структур. Проведен количественный анализ экспериментальных данных по взрывной кристаллизации аморфных пленок германия.

В главе 4 конкуренция между тепловыделением и теплосъемом изучена в рамках модели волнового теплопереноса на основе уравнения синус-Гордона. Указаны динамические свойства трехмерных фазовых траекторий. Рассмотрены амплитудно-частотные параметры нелинейных колебаний.

В главе 5 представлены разнообразные режимы динамического воздействия на неравновесное тепловое поле в системе «среда – источник энергии». Рассмотрены неклассические свойства тепловых процессов, обусловленные корреляцией «неоднородность – неравновесность». Получены новые классы точных решений.

Книга разделена на главы, параграфы и пункты. Номера параграфов составлены из порядкового номера главы и самого параграфа. Аналогичным образом нумеруются пункты внутри параграфов. Нумерация формул и рисунков самостоятельная для каждой главы.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- T – температура, К;
 T_c – равновесная температура кристаллизации, К;
 q – удельный тепловой поток (плотность теплового потока через единицу поверхности в единицу времени), Вт/м²;
 q_v – мощность внутренних источников энергии, Вт/м³;
 ρ – плотность вещества, кг/м³;
 c_p – удельная изобарная теплоемкость, Дж/(кг · град);
 $c = \rho c_p$ – объемная теплоемкость, Дж/(м³ · град);
 λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · град);
 $\gamma \equiv \gamma_1$ – время релаксации теплового потока, с;
 γ_2 – время релаксации градиента температуры, с;
 t – время, с;
 L – теплота фазового перехода единицы объема вещества, Дж/м³;
 N – скорость перемещения фазовой границы кристаллизации, м/с;
 x, y, z – декартовы координаты;
 h – толщина одно- или двухслойной системы, м;
 h_1 – толщина первого слоя, м;
 h_2 – толщина второго слоя, м;
 w – скорость распространения тепловых возмущений, м/с.

Индексы

b – масштабы величин при обезразмеривании.

Буквенные сокращения

ДТГ – динамический тепловой гистерезис;
ПА – параметр асимметрии;
НГТ – нулевой градиент температуры;
ФГК – фазовая граница кристаллизации.

Глава 1

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Уравнения теплопереноса

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} + \gamma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= -\lambda \text{grad} T, \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} &= q_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Термодинамическое обоснование модели (1.1) и подробная библиография этой проблемы имеются в [1], [2]. Производство энтропии в системе «среда – источник энергии» подсчитывается по формулам [2], [3]:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_e + \sigma_i, \\ \sigma_e &= \frac{q_v}{\theta}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\lambda T^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \left[1 + \frac{\gamma}{\lambda c T^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \right], \quad \lambda, c, \gamma - \text{const},$$

где θ – неравновесная температура; σ_e – производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; σ_i – производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

В плоском двухмерном случае в проекциях на оси декартовой системы координат уравнения (1.1) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial t} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_2 + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} &= q_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

В одномерном случае для трех видов пространственной симметрии (плоский $\nu = 0$, цилиндрический $\nu = 1$, сферический $\nu = 2$) система (1.1) записывается в форме:

$$\left. \begin{aligned} q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \\ c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\nu q}{x} &= q_\nu, \\ \nu &= 0, 1, 2; \quad c = \rho c_p. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Нелинейное гиперболическое уравнение теплопроводности, получаемое с помощью вариационных принципов [4], [5] и учитывающее конечную скорость распространения тепловых возмущений, имеет вид:

$$c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_\nu. \quad (1.5)$$

Физические аспекты обоснования уравнения (1.5) изложены в [6]. Классическое нелинейное уравнение теплопроводности ($\gamma \equiv 0$):

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_\nu. \quad (1.6)$$

В плоском двухмерном случае из (1.5), (1.6), соответственно, получаем:

$$c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_\nu; \quad (1.7)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_\nu. \quad (1.8)$$

Частным случаем гиперболического уравнения (1.7) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = w^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + k_\nu; \quad (1.9)$$

$$w^2 = \frac{\lambda}{c\gamma}; \quad k_\nu = \frac{q_\nu}{c\gamma}, \quad \lambda, c, \gamma - \text{const.}$$

Оно имеет фундаментальное значение в математической физике. Применительно к теории теплопроводности уравнение (1.9) описывает процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным: $\gamma \partial / \partial t \gg 1$. Отметим также, что первое из уравнений в системе (1.1) можно заменить более общим:

$$\mathbf{q} + \gamma_1 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \text{grad} T - \lambda \gamma_2 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad} T), \quad (1.10)$$

где γ_1 – время релаксации; γ_2 – время ретардации (время релаксации градиента температуры). Уравнение (1.10) было предложено в [7]. Оно является математическим аналогом реологического уравнения состояния вязкоупругой жидкости Олдройда. В современной литературе [2] (1.10) называют уравнением двойной фазы с задержкой (dual – phase – lag equation).

Теплофизические параметры $\lambda, c, \gamma_1, \gamma_2$ и источник энергии q_v в общем случае зависят от температуры, координат и времени. Явная зависимость от координат характерна для неоднородных сред, от t – для некоторых химических и биологических систем (параметрические и реономные среды); такие модели изучались в [8], [9]. Результаты теоретических исследований локально-неравновесного теплопереноса на основе уравнений (1.1) подробно изложены в [10].

Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \bar{\lambda} \lambda'; & c &\rightarrow \bar{c} c'; & \gamma &\rightarrow \gamma'; & q_v &\rightarrow \bar{q}_v q'_v; \\ T &\rightarrow T'; & q &\rightarrow q'; & x &\rightarrow x'; & y &\rightarrow y'; & t &\rightarrow t', \end{aligned}$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b}; \quad \bar{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b}; \quad \bar{q}_v = \frac{(q_v)_b x_b}{q_b}$$

составлены из масштабов величин (они отмечены индексом b), применяемых для обезразмеривания: $T = T' T_b$, $\gamma = \gamma' t_b$ и т. д. В отдельных случаях мы используем другие варианты построения безразмерных уравнений, и тогда в тексте даются необходимые пояснения.

1.2. Численные алгоритмы на основе метода интегральных соотношений

Метод интегральных соотношений А. А. Дородницына [11] относится к группе методов понижения размерности задачи и служит для численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных различных типов: эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного. Вопросы строгого математического обоснования метода интегральных соотношений и его связь с другими методами математической физики изложены в [12]–[14].

Возьмем одномерные уравнения теплопереноса (1.4) при $\gamma = 0$, $\nu = 0$ и введем в рассмотрение функции:

$$u(T) = \int_0^T c(T) dT, \quad \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT.$$

Тогда приходим к дивергентной форме записи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, h], \quad (1.11)$$

где h – толщина одно- или двухслойной системы.

Рассмотрим два основных варианта постановки граничных условий. Вариант 1 характеризуется тем, что на левую границу системы действует нестационарный тепловой поток:

$$x = 0, \quad q = q_0(t),$$

а температура правой границы задана

$$x = h, \quad T = T_w(t).$$

Вариант 2: на левой и правой границах системы заданы тепловые потоки:

$$x = 0, \quad q = q_0(t); \quad x = h, \quad q_w = q_w(t).$$

Решение краевых задач на основе системы уравнений (1.11) выполняем численным методом интегральных соотношений. Алгоритмы построения расчетной схемы в основном одинаковые для однослойной и двухслойной задач. Для однослойного образца материала область интегрирования $x \in [0, h]$ разбиваем на n полос линиями

$x_i = ih_1/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. Уравнения (1.11) умножаем на сглаживающие функции и строим замкнутую систему интегральных соотношений. Для первого варианта граничных условий сглаживающие функции имеют вид: $f_1(x) = \exp(lx + r)$, $f_2(x) = \exp(mx + k)$. Для второго варианта применяются функции $f_1(x) = \exp(lx + r)$, $f_2(x) = m^{kx+b}$. Постоянные l, m, r, k, b для каждого слоя материала выбираем из условия улучшения гладкости подынтегральных выражений и достижения требуемой точности вычислений. С помощью интерполяционных квадратур типа Ньютона–Котеса редуцируем эти интегральные соотношения к аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Итоговая задача Коши решается методом Рунге–Кутты пятого порядка точности. В результате получаем температуру $T(x_i, t)$ и тепловой поток $q(x_i, t)$ на границах полос. Контроль точности расчетной схемы проводим двумя способами: 1) сравнением с точными решениями нелинейных нестационарных задач теплопроводности; 2) использованием различных проверочных вариантов построения «кусочных» и «сквозных» аппроксимаций. В результате известная «раскачка» решения аппроксимирующей системы вблизи начального момента времени $t = 0$ сводится к минимуму.

Для построения аппроксимирующей системы уравнений применялись «кусочные» аппроксимации, в которых набор интерполяционных полиномов имеет степень ниже n . Применение таких полиномов целесообразно в расчетных схемах с приближениями высокого порядка ($n > 4$), когда нужную точность можно получить за счет большого числа полос ($n = 5$). Такие «кусочные» приближения упрощают структуру аппроксимирующей системы и зачастую оказываются надежнее сквозных аппроксимаций, особенно там, где имеет место резкое изменение изучаемых функций (например, в случае интенсивного теплопереноса). Для первого варианта граничных условий применялись расчетные схемы, изображенные на рис. 1.1, а, для второго – на рис. 1.1, б. Для двухслойной системы расчетные схемы для каждого слоя свои и аналогичны представленным на рис. 1.1.

Особенно важен вопрос о числе полос разбиения, о сходимости и точности расчета [12]–[14]. Известные в литературе примеры решения разнообразных по физическому содержанию задач показывают, что метод интегральных соотношений эффективен при числе полос $n \leq 8$. По мере увеличения числа n система аппроксимирующих

уравнений становится все более плохо обусловленной. Практика наших вычислений согласуется с этими результатами.

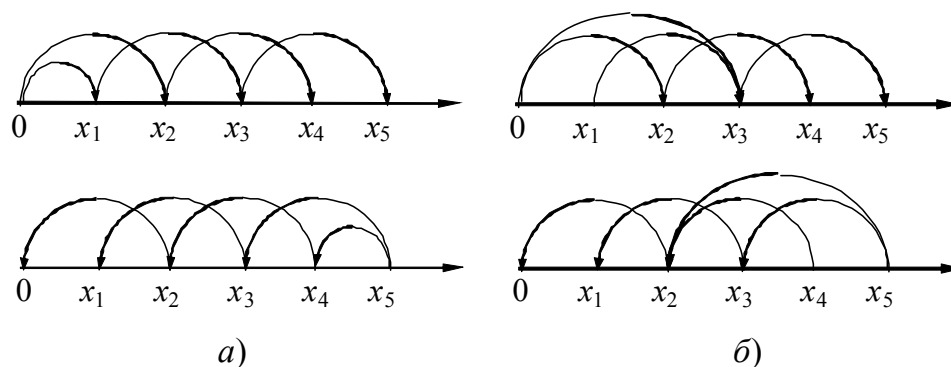


Рис. 1.1. Расчетные схемы построения аппроксимирующей системы уравнений

Тщательное сравнение наших численных расчетов с нетривиальными точными аналитическими решениями нелинейных уравнений теплопереноса подтвердило надежность метода интегральных соотношений для решения одномерных нелинейных параболических задач теплопереноса. Далее в главе 2 приводятся результаты расчетов при $n = 5$ – однослойная параболическая задача; при $n = 5$ для каждого слоя – двухслойная параболическая задача.

Глава 2

АСИММЕТРИЧНЫЕ СВОЙСТВА ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ НА ДВУХСЛОЙНУЮ МЕТАЛЛИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНУ

Двухслойные конструкции широко распространены в технике и лабораторной физической практике [15]. Теплофизические аспекты проблемы энергетического воздействия на металлы (например, лазерный нагрев) имеют большое значение в различных технологических процессах [16]. В этой главе мы обсудим явление асимметрии тепловых потоков в двухслойной металлической пластине. Асимметрия появляется при перестановке слоев. Основными объектами исследования являются: высокая степень нестационарности контактного теплообмена, динамический тепловой гистерезис, производство энтропии. Содержание главы 2 основано на публикациях [17]–[26].

2.1. Динамический тепловой гистерезис в однослойной пластине

Известно, что гистерезисные явления наблюдаются в различных физических процессах (магнетизм, упругость и др.) и характеризуются неоднозначной зависимостью между величинами, определяющими состояние вещества и внешними условиями воздействия. Математические методы анализа систем с гистерезисными нелинейностями изложены в [27]. Для локально-неравновесного теплопереноса основные закономерности гистерезисных процессов изучены в [10], [28].

Обсудим нелинейные и нестационарные свойства теплообмена в однослойной пластине при нагреве ее лазерным лучом. Математическая модель содержит уравнения (1.11), свойства материала и граничные условия. Искомыми функциями являются температура и тепловой поток $T(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in [0, h]$, $t > 0$.

Решение задачи проводится в температурном интервале, для которого теплофизические свойства материала аппроксимируются полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3; \quad c = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3.$$

Построение этих полиномов осуществляется на основе справочных данных [29].

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad T(x, 0) = T^0 &\equiv \text{const}; \\ x = 0, \quad q(0, t) = D(T) q_0(t); \\ x = h, \quad T(h, t) = T_w &\equiv \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это означает, что начальная температура образца однородна по координате x ; $q_0(t)$ – плотность потока излучения; правая граница изотермическая, причем $T_w = T^0$. Следует отметить, что условие (2.1) учитывает поглощательную способность металла $D = D_0 + D_1 T$ и содержит неизвестную температуру левой границы $T(0, t)$.

При обработке результатов расчетов применяем следующие параметры:

– безразмерный тепловой поток

$$Q_i = \frac{q_i(t) h}{T^0 \lambda(T^0)};$$

– критерий Нуссельта

$$\text{Nu}_i = \frac{q_i(t) h}{T_i(t) \lambda(T_i)};$$

– безразмерный градиент температуры

$$g_i = \frac{h}{T^0} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i;$$

– безразмерная скорость изменения температуры

$$V_i = \frac{\partial T_i}{\partial t} \frac{h^2}{T^0 a(T^0)};$$

– безразмерный коэффициент нестационарности

$$E_i = \frac{\partial T_i}{\partial t} \frac{h^2}{T_i(t) a(T_i)}.$$

Рассматриваем несколько вариантов граничного теплового потока $q_0(t)$:

а) постоянный поверхностный источник: $q_0(t) = B$;

б) немонотонный поверхностный источник: $q_0(t) = Bt^k \exp(mt)$, $k > 0, m < 0$;

в) периодический поверхностный источник: $q = B \sin^6(nt)$.

Приведем примеры расчета нагрева пластины из молибдена и вольфрама. Теплофизические свойства [29] в интервале температур $T, K \in [300, 3000]$ описываются следующими зависимостями:

– молибден:

$$\lambda(T) = 173,8 - 9,20 \cdot 10^{-2} T + 4,29 \cdot 10^{-5} T^2 - 7,59 \cdot 10^{-9} T^3, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К});$$

$$c(T) = 216,7 - 0,103T - 6,80 \cdot 10^{-5} T^2 + 2,01 \cdot 10^{-8} T^3, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К});$$

$$D(T) = 0,99 \cdot 10^{-4} T;$$

– вольфрам:

$$\lambda(T) = 196,4 - 0,135T + 4,63 \cdot 10^{-5} T^2 + 3,62 \cdot 10^{-10} T^3, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К});$$

$$c(T) = 130 + 1,36 \cdot 10^{-2} T + 4,04 \cdot 10^{-6} T^2, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К});$$

$$D(T) = 0,024 + 1,03 \cdot 10^{-4} T.$$

Значительные изменения $\lambda(T)$, $c(T)$ и $D(T)$ показывают, что система существенно нелинейна. В указанном здесь примере расчета $h = 0,01$ м; $T_w = 300$ К; $T(x, 0) = 300$ К.

Величина поверхностного теплового потока такова, что процессу присущ интервал температур $T, K \in [T', T'']$, в котором нелинейные теплофизические свойства металлов проявляют себя в полной мере. Представим здесь характерные результаты расчетов для трех вариантов. В примерах 1–3 $q_0(t)$ измеряется в $\text{Вт}/\text{м}^2$.

Пример 1. Постоянный поверхностный источник: $q_0(t) = B \equiv \text{const}$. Для молибдена $q_0 = 1,04 \cdot 10^8$, для вольфрама $q_0 = 1,1 \cdot 10^8$. Результаты расчета представлены на рис. 2.1.

Пример 2. Немонотонный поверхностный источник: $q_0(t) = Bt^k \exp(mt)$, $k = 5$, $m = -15$. Для молибдена $B = 2,6 \cdot 10^{10}$; для вольфрама $B = 8 \cdot 10^9$. В этом процессе наблюдается динамический тепловой гистерезис (ДТГ) (рис. 2.2).

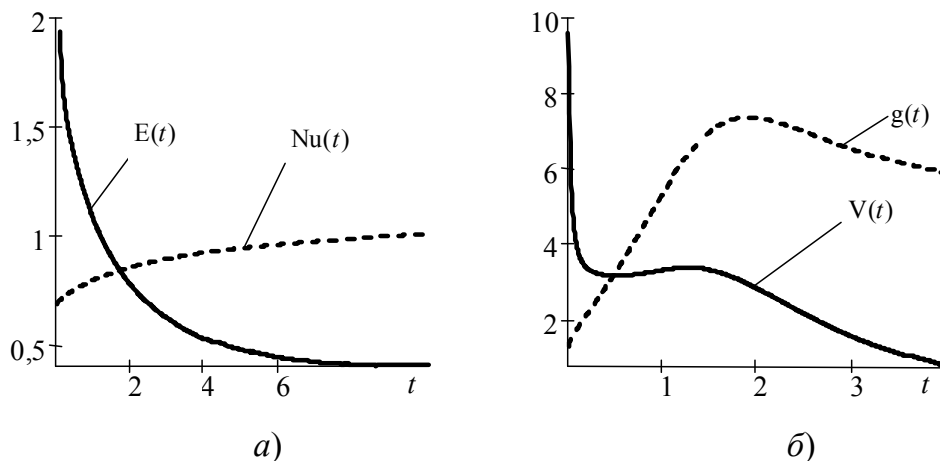


Рис. 2.1. Зависимость $Nu(t)$ и $E(t)$ для молибдена (а); $V(t)$ и $g(t)$ для вольфрама (б) на левой границе образца

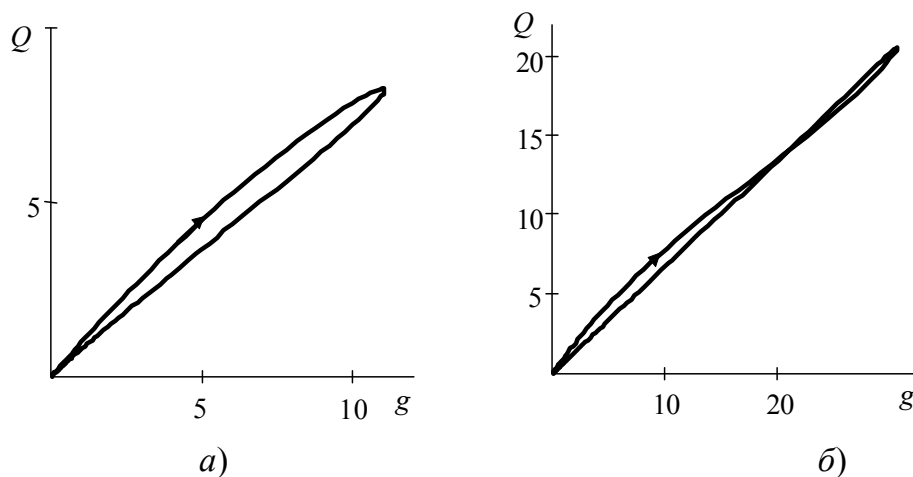


Рис. 2.2. Петли ДТГ на левой границе образца: а – молибден; б – вольфрам

В системе «источник энергии – металл» типичные петли динамического теплового гистерезиса в плоскости (g, Q) имеют форму лепестка (рис. 2.2, а). Здесь и далее термин «петля ДТГ» означает фазовую траекторию на плоскости физических параметров задачи. В данном примере это плоскость параметров $g = g_0(t)$, $Q = Q_0(t)$, $t \geq 0$. Стрелка указывает направление движения вдоль линии с течением времени. В случае сильной нелинейности теплофизических свойств металла, например, для вольфрама, «лепесток» перерождается в «восьмерку» (рис. 2.2, б). Принципиально важно, что существование гистерезисной петли в плоскости «тепловой поток – градиент температуры» обуславливают два фактора: 1) немонотонность по времени функции $q_0(t)$ поверхностного источника; 2) зависимость коэффициента теплопровод-

ности $\lambda(T)$ от температуры. Если хотя бы один из этих факторов отсутствует, петля гистерезиса вырождается в линию.

Пример 3. Импульсно-периодический поверхностный источник: $q_0(t) = B \sin^6(nt)$, $B = 2,0291 \cdot 10^8$, $n = 1,0$. В этом случае гистерезисная нелинейность $E(g)$ наблюдается на каждом периоде установившихся колебаний (рис. 2.3).

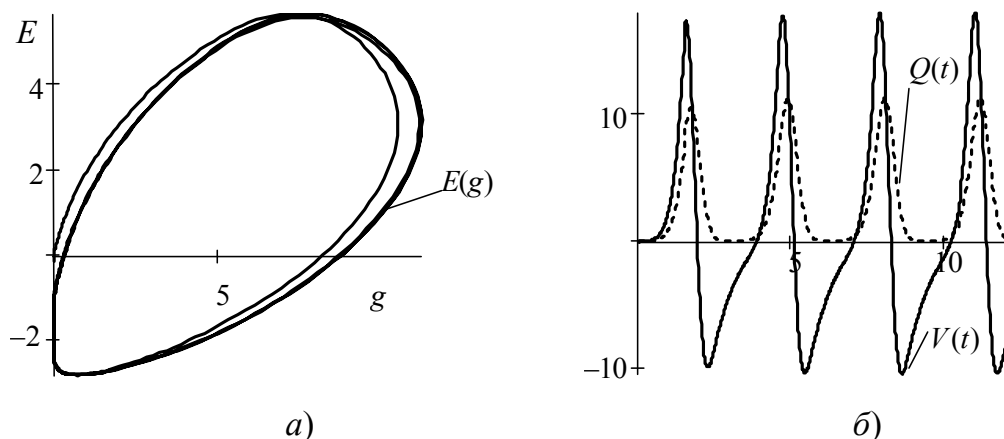


Рис. 2.3. Гистерезисная связь $E(g)$, (а); зависимость $V(t)$ и $Q(t)$ (б) на левой границе для вольфрама

Данные примеры показывают, что при высокоинтенсивном тепловом воздействии нелинейные эффекты играют значительную роль.

2.2. Асимметрия теплопереноса в двухслойной системе с изотермической границей

2.2.1. Стационарный эксперимент

Эксперимент, подтвердивший существование эффекта асимметрии теплового потока, проводился с материалами M_1 и M_2 (латунь, сталь, железо армко, электрокорунд) в стационарных условиях [30]. Толщина h_0 слоя каждого материала одна и та же для всех опытов. При фиксированной разности $T_l - T_r$ температур левой (T_l) и правой (T_r) границ системы сначала измерялся тепловой поток q_l , направленный от левой к правой границе образца в системе $[M_1, M_2]$. Во второй части опыта слои материалов менялись местами, после чего измерялся тепловой поток q_r в системе $[M_2, M_1]$. Некоторые результаты измерений даны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Результаты экспериментальных исследований [30] эффекта асимметрии тепловых потоков в двухслойных пластинах для стационарных условий

Двухслойный образец	Латунь ММ59 – железо армко		Сталь 1Н18Н9Т – электрокорунд	
Температура левой стенки со стороны нагревателя T_l , К	625,8	593,5	573,0	663,5
Температура правой стенки T_r , К	497,1	425,0	353,0	367,2
Отношение тепловых потоков, эксперимент q_l/q_r	1,0533	1,0955	1,2088	1,2582
Отношение тепловых потоков, теоретический расчет q_l/q_r	1,073	1,095	1,191	1,2535

Приведем числовые значения параметров изученных образцов:

– латунь ММ59:

$$\lambda \in [71,5; 103], \quad d\lambda/dT > 0; \quad T \in [300; 643]; \quad h_0 = 37,88 \text{ мм};$$

– железо армко:

$$\lambda \in [73; 50], \quad d\lambda/dT < 0; \quad T \in [300; 643]; \quad h_0 = 22,1 \text{ мм};$$

– сталь 1Н18Н9Т:

$$\lambda \in [14,95; 19,8], \quad d\lambda/dT > 0; \quad T \in [300; 673]; \quad h_0 = 32,03 \text{ мм};$$

– электрокорунд:

$$\lambda \in [27,5; 11,9], \quad d\lambda/dT < 0; \quad T \in [300; 673]; \quad h_0 = 22,74 \text{ мм}.$$

Здесь λ , Вт/(м·К).

Для отдельных опытов разность температур $T_l - T_r$ достигала 500 К, максимальное значение q_l/q_r составило 1,4. Теоретические расчеты одномерных стационарных температурных полей подтверждаются данными этих опытов.

2.2.2. Постановка задачи

Уравнение энергии и закон Фурье для теплового потока имеют вид (1.11). Искомыми функциями являются температура и тепловой поток в двух контактирующих областях. Первый слой: $T = T^{(1)}(x, t)$, $q = q^{(1)}(x, t)$, $x \in [0, h_1]$. Второй слой: $T = T^{(2)}(x, t)$, $q = q^{(2)}(x, t)$, $x \in [h_1, h]$. Толщина образца равна $h = h_1 + h_2$ (рис. 2.4).

Условия идеального теплового контакта:

$$x = h_1, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad q^{(1)} = q^{(2)}. \quad (2.2)$$

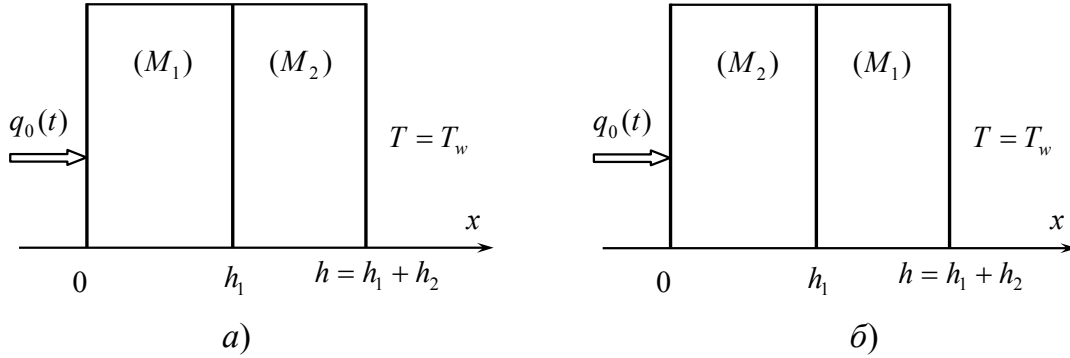


Рис. 2.4. Двухслойная пластина:
а – система $[M_1, M_2]$; б – система $[M_2, M_1]$

Моделирование неоднородности структуры зоны контакта, в частности, учет наличия пятен фактического контакта и межконтактной прослойки, проводится посредством граничных условий:

$$x = h_1, \quad T^{(1)} = T^{(2)} + \Delta T, \quad q^{(1)} = q^{(2)} + R, \quad (2.3)$$

которые учитывают скачок температуры и тепловое сопротивление зоны контакта [31].

Правая граница двухслойной пластины изотермическая:

$$x = h, \quad T^{(2)}(h, t) = T_w \equiv \text{const}. \quad (2.4)$$

Тепловой поток $q_0(t)$ характеризует поверхностный источник энергии на левой границе:

$$x = 0, \quad q^{(1)}(0, t) = q_0(t). \quad (2.5)$$

В случае интенсивного нагрева следует, строго говоря, учитывать поглощательную способность металла $D(T) = D_0 + D_1 T$, $D_0, D_1 - \text{const}$:

$$x = 0, \quad q^{(1)}(0, t) = [D_0 + D_1 T^{(1)}(0, t)] q_0(t). \quad (2.6)$$

Это условие содержит заранее неизвестную температуру $T^{(1)}(0, t)$ левой границы.

Начальная температура стенки однородная по координате:

$$t = 0, \quad T(x, 0) = T^0 \equiv \text{const}, \quad (2.7)$$

причем $T_w = T^0$.

Теплофизические свойства металлов аппроксимируются полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$c = c_0 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3; \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1T + \lambda_2T^2 + \lambda_3T^3, \quad T \in [T', T'']. \quad (2.8)$$

Процесс нагрева рассматривается в интервалах температур, для которых фазовые превращения не происходят. Построение аппроксимирующих полиномов выполняется на основе справочных данных [29]. Производство энтропии подсчитываем по формуле [2] [см. (1.2)]:

$$\sigma = q \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \right) = \frac{q^2}{\lambda T^2}.$$

Изучаем важный практический случай, когда нагрев осуществляется немонотонным импульсом треугольной временной формы:

$$q_0(t) = Bt^n \exp(mt);$$

$$B > 0, \quad n > 0, \quad m < 0; \quad B, n, m - \text{const.}$$

Характеристики этого импульса (рис. 2.5) такие:

– максимальное значение поверхностного теплового потока:

$$t = t_0, \quad q_{\max} = q_0(t_0);$$

– длительность импульса:

$$t = t_1, \quad q_0(t_1) = 0,001q_{\max}.$$

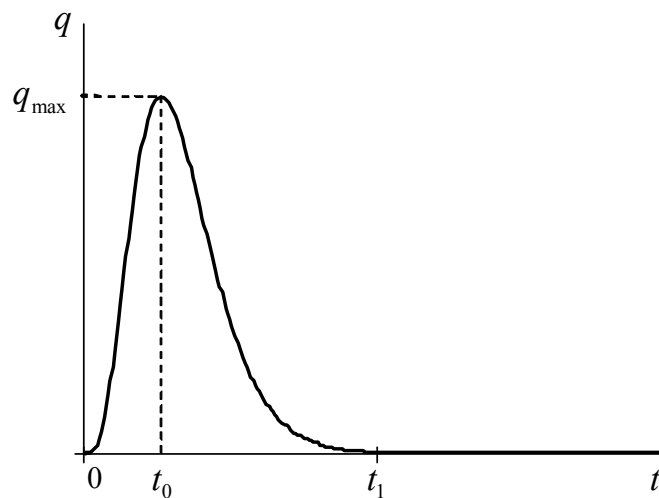


Рис. 2.5. Параметры импульса треугольной временной формы: максимальное значение поверхностного теплового потока $q_{\max} = q_0(t_0)$ и длительность импульса $t = t_1$

Численные расчеты проводятся в безразмерных величинах.

Решение краевой задачи (1.11), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) выполняется численным методом интегральных соотношений (см. § 1.2).

При обработке результатов расчетов применяем следующие параметры:

– безразмерный градиент температуры

$$g = \frac{h}{T^0} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right);$$

– безразмерный тепловой поток

$$Q = \frac{q(x, t) h}{T^0 \lambda(T^0)};$$

– безразмерное производство энтропии

$$S = \frac{\sigma(x, t)}{\sigma^0}, \quad \sigma^0 = \sigma(T^0) / h^2.$$

Параметры асимметрии (**ПА**), характеризующие тепловые свойства двухслойной стенки, такие:

– ПА температуры на левой границе

$$A_T^{(0)} = \frac{(T_0)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_0)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

– ПА температуры в зоне контакта

$$A_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

– ПА теплового потока в зоне контакта

$$A_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

– ПА теплового потока на правой изотермической границе $x_w = h$

$$A_q^{(w)} = \frac{(q_w)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_w)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

– ПА производства энтропии в зоне контакта

$$A_{\sigma}^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,S)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,S)}};$$

– ПА динамического теплового гистерезиса в зоне контакта

$$A_G^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,Q)}}.$$

Индексом z отмечены значения функций при $x = h_1$. В качестве M_1, M_2 применяем химические символы металлов; расположение индексов $M_1 - M_2$ и $M_2 - M_1$ указывает на расположение металлических слоев до и после перестановки. Полагаем, что поверхностный источник энергии всегда действует на левую границу стенки. Буквами $F_{M_1-M_2}^{(g,S)}$, $F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}$ и т. д. обозначаем площади петель ДТГ в плоскостях «градиент температуры – производство энтропии» и «градиент температуры – тепловой поток». При вычислении $A_T^{(0)}$, $A_T^{(z)}$, $A_q^{(z)}$, $A_q^{(w)}$ применяем максимальные достигаемые в данном процессе значения функций $T_0 = T(0, t)$, $T_z = T(h_1, t)$, $q_z = q(h_1, t)$, $q_w = q(h, t)$, $t \in [0, t_1]$.

Асимметричные свойства теплопереноса выражены тем сильнее, чем больше ПА отличается от единицы.

В двухслойной системе «источник энергии – металл» типичные петли ДТГ в плоскости (g, Q) имеют форму лепестка (рис. 2.6). Стрелка указывает направление движения вдоль линии с течением времени.

Явление тепловой асимметрии продемонстрируем для двух классов нелинейных процессов: 1) в каждом слое $d\lambda/dT < 0$; в качестве примера берем железо и молибден, а также железо и вольфрам; 2) в одном слое $d\lambda/dT < 0$, а в другом $d\lambda/dT > 0$; в качестве примера берем железо и ванадий, а также вольфрам и ванадий. Теплофизические свойства вышеперечисленных металлов показаны на рис. 2.7. Построение аппроксимирующих полиномов вида (2.8) было выполнено в следующих температурных интервалах: Fe – [300, 1040]; Mo – [300, 2600]; V – [300, 2000]; W – [300, 3000]; значения температуры указаны в кельвинах. При подсчете Q, S применяем для системы Fe–Mo и Fe–V $\lambda(T^0) = \lambda_{\text{Fe}}(T^0)$; для системы Fe–W и W–V – $\lambda(T^0) = \lambda_{\text{W}}(T^0)$. Практика вычислений свидетельствует о том, что именно температурная зависи-

мость $\lambda(T)$ является главным фактором, влияющим на формирование пространственно-временной структуры теплового поля.

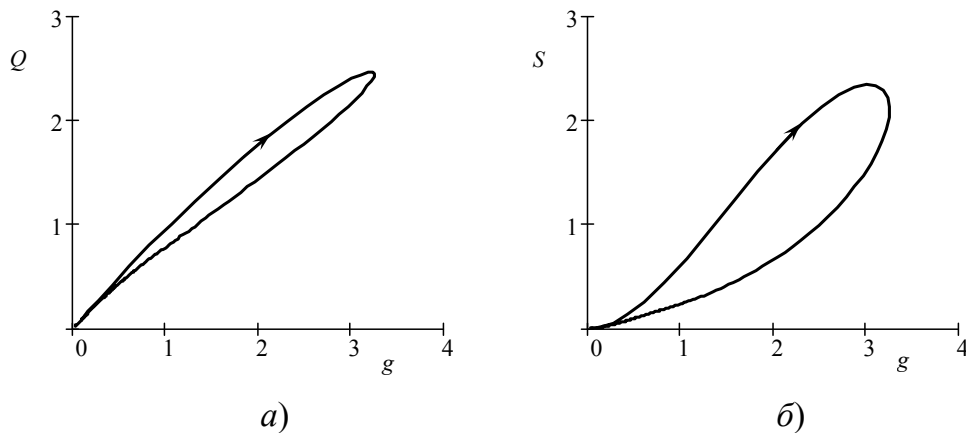


Рис. 2.6. Типичные петли ДТГ в зоне контакта:
а – в плоскости (g, Q) ; б – в плоскости (g, S)

Сразу отметим, что учет поглощательной способности металла (2.6) и неидеальности теплового контакта (2.3) не дает значительных качественных и количественных отклонений от случая $D(T) \equiv \text{const}$, $\Delta T \equiv 0$, $R \equiv 0$. Для всех рассмотренных вариантов $h = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $T_b = 100$ К, $\lambda_b = 100$ Вт/(м·К), $q_b = 1 \cdot 10^6$ Вт/м².

Далее мы приводим результаты расчетов с применением граничных условий (2.2), (2.5), где $q_0(t)$ – плотность потока энергии, поглощенной поверхностью тела.

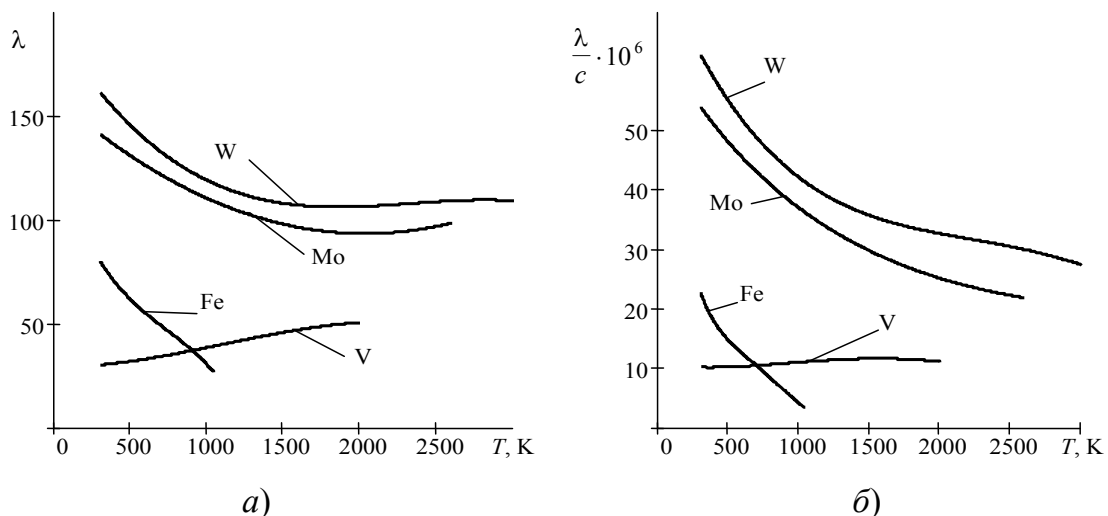


Рис. 2.7. Теплофизические свойства железа, молибдена, ванадия и вольфрама:
а – $\lambda(T)$, Вт/(м·К); б – $\lambda(T)/c(T)$, м/с

2.2.3. Длительность теплового импульса

Система Fe–Mo. Рассмотрим влияние времени t_0 достижения q_{\max} при $h_1 = h_2$. В табл. 2.2 приведены данные о влиянии t_0 и q_{\max} на ПА. Здесь $T_w = 300$ К, и расчеты показывают, что $(T_0)_{\text{Fe–Mo}}^{\max} \cong 1000$ К. Асимметрия почти отсутствует на правой границе и слабо выражена на левой границе. Асимметричные свойства сосредоточены в зоне контакта, причем по мере роста q_{\max} и уменьшения t_0 параметр $A_T^{(z)}$ монотонно возрастает, приближаясь к 1, параметр $A_q^{(z)}$ монотонно убывает, удаляясь от 1. В количественном отношении асимметрия наиболее выразительно проявляется в гистерезисном процессе: параметры $A_G^{(z)}$, $A_G^{(z)}$ значительно меньше 1, что обусловлено прежде всего тепловым взаимодействием металлов с сильно различающимися коэффициентами теплопроводности.

Система Fe–V. При обсуждении системы Fe–V будем говорить в основном об отличиях в физическом содержании табл. 2.2 и 2.3. Возьмем табл. 2.3; $T_w = 300$ К, расчеты показывают, что $(T_0)_{\text{Fe–V}}^{\max} \cong 1000$ К. По мере роста q_{\max} и уменьшения t_0 параметр $A_q^{(z)}$ растет, приближаясь к 1, а $A_T^{(z)} \cong \text{const} > 1$. Очень хорошо проявляется асимметрия теплового потока на правой границе (см. $A_q^{(w)}$). То же можно сказать об асимметрии гистерезисных процессов в зоне контакта, но $A_G^{(z)}$ и $A_G^{(z)}$ здесь гораздо ближе к 1, чем для процессов в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Влияние свойств поверхностного импульса энергии треугольной временной формы на ПА ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{Mo}$, $T^0 = 300$ К)

t_0 , с	t_1 , с	$q_{\max} \cdot 10^{-7}$, Вт/м ²	$(T_0)_{\text{Mo–Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe–Mo}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{Mo–Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	0,248	3,401	8,614	1,161	3,842	4,644	0,827	0,490	1,070	0,069	0,097
0,15	0,622	2,786	8,557	1,169	3,985	4,95	0,805	0,529	1,061	0,074	0,094
0,20	0,830	2,388	8,532	1,172	4,095	5,183	0,790	0,565	1,056	0,084	0,081
0,25	1,037	2,146	8,522	1,173	4,182	5,369	0,778	0,596	1,052	0,090	0,091
0,30	1,245	1,951	8,518	1,174	4,253	5,521	0,770	0,625	1,051	0,097	0,099
0,35	1,452	1,809	8,521	1,174	4,311	5,65	0,763	0,652	1,049	0,103	0,104
0,40	1,660	1,689	8,528	1,173	4,36	5,758	0,757	0,675	1,048	0,109	0,107

Окончание табл. 2.2

$t_0, \text{с}$	$t_1, \text{с}$	$q_{\max} \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^2$	$(T_0)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,45	1,867	1,597	8,537	1,171	4,402	5,852	0,752	0,697	1,042	0,113	0,109
0,50	2,075	1,512	8,548	1,170	4,438	5,933	0,748	0,716	1,035	0,118	0,110

Таблица 2.3

Влияние свойств поверхностного импульса энергии треугольной временной формы на ПА ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{V}$, $T^0 = 300 \text{ К}$)

$t_0, \text{с}$	$t_1, \text{с}$	$q_{\max} \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^2$	$(T_0)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,15	0,622	2,746	12,298	0,813	4,589	4,147	1,1066	0,809	0,5694	0,601	1,349
0,20	0,830	2,371	12,279	0,814	4,796	4,322	1,1097	0,769	0,5663	0,549	0,939
0,25	1,037	2,110	12,268	0,815	4,965	4,469	1,1110	0,739	0,5645	0,489	0,761
0,30	1,245	1,955	12,26	0,816	5,117	4,602	1,1119	0,716	0,5642	0,447	0,736
0,35	1,452	1,776	12,233	0,817	5,247	4,717	1,1124	0,699	0,5644	0,432	0,720
0,40	1,660	1,661	12,228	0,818	5,365	4,821	1,1128	0,685	0,5646	0,406	0,683
0,45	1,867	1,562	12,212	0,819	5,47	4,914	1,1131	0,673	0,5659	0,385	0,669
0,50	2,075	1,48	12,199	0,820	5,563	4,997	1,1133	0,664	0,5699	0,369	0,662

2.2.4. Начальная температура образца

Важным физическим свойством процесса является начальная температура образца. Приведем результаты о влиянии начальной температуры образца при $h_1 = h_2$.

Система Fe–Mo. Таблица 2.4 составлена при $t_0 = 0,3 \text{ с}$, $t_1 = 1,245 \text{ с}$. Видно, что по-прежнему асимметрия слабо проявляется при $x = 0$, $x = h$. По мере роста T^0 наблюдаем в зоне контакта: 1) ослабление асимметричных свойств температуры – $A_T^{(z)}$ приближается к 1 со стороны меньших значений; 2) усиление асимметрии гистерезисных свойств: $A_G^{(z)}$ и $A_G^{(z)}$ убывают примерно такими же темпами, какими нарастает T^0 . Причина этого усиления – в различии $|d\lambda/dT|$ для Fe и Mo. Рассмотрим скачки температуропроводности $a = \lambda/c$ в зоне контакта:

$$\begin{aligned} \{a\}_{M_1-M_2} &= \frac{1}{a_{\text{Fe}}^0} [a_{M_1}(T) - a_{M_2}(T)] \quad \text{при} \quad T = (T_z)_{M_1-M_2}; \\ \{a\}_{M_2-M_1} &= \frac{1}{a_{\text{Fe}}^0} [a_{M_2}(T) - a_{M_1}(T)] \quad \text{при} \quad T = (T_z)_{M_2-M_1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь a_{Fe}^0 подсчитывается при $T = 300$ К. Своеобразие ситуации в том, что функции (2.9) могут немонотонно зависеть от температуры, и тогда появляется самопересечение линии, характеризующей зависимость $\{a\}$ от q_z (рис. 2.8, а, б). Если функции (2.9) – монотонные, то самопересечений нет (рис. 2.8, в).

Система Fe–V. Качественная картина влияния начальной температуры образца $T^0 = T_w$ на теплообмен (табл. 2.5; $t_0 = 0,3$ с, $t_1 = 1,245$ с) такая же, как для системы Fe–Mo (табл. 2.4); различия имеют количественный характер и выражены достаточно сильно. По мере роста T^0 наблюдаем: 1) усиление асимметрии теплового потока на границе слоев $A_q^{(z)}$; 2) ослабление асимметрии теплового потока на правой границе $A_q^{(w)}$.

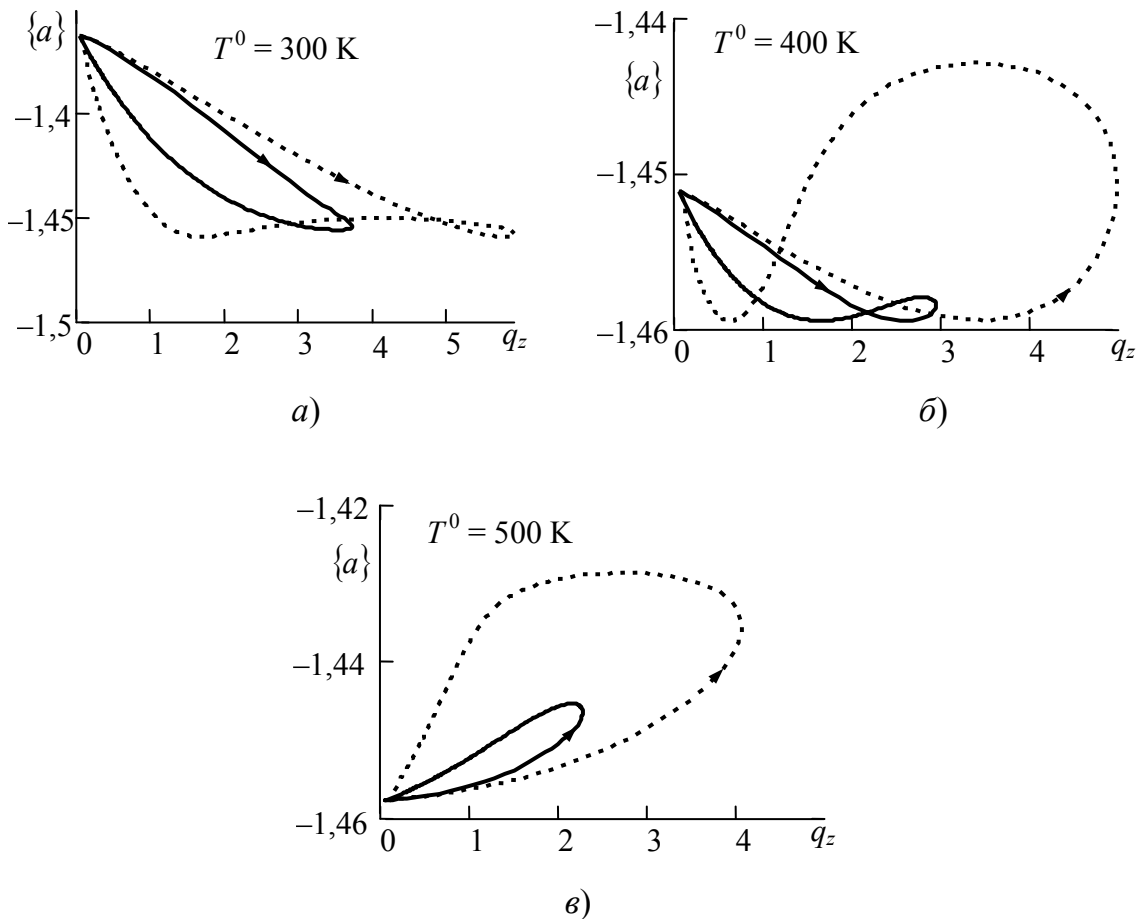


Рис. 2.8. Влияние начальной температуры образца на скачок температуропроводности в зоне контакта:
 сплошная линия $\{a\}_{\text{Fe-Mo}}$; штриховая $\{-a\}_{\text{Mo-Fe}}$

Таблица 2.4

Влияние начальной температуры образца на ПА ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{Mo}$)

T^0, K	$q_{\max} \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^2$	$(T_0)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
300	1,951	8,517	1,174	4,252	5,521	0,7702	0,6257	1,050	0,097	0,099
325	1,859	8,570	1,166	4,440	5,680	0,7817	0,6162	1,061	0,088	0,097
350	1,789	8,624	1,159	4,630	5,841	0,7927	0,6070	1,068	0,083	0,091
375	1,72	8,673	1,153	4,821	5,999	0,8036	0,5990	1,075	0,077	0,086
400	1,65	8,722	1,146	5,014	6,158	0,8142	0,5909	1,084	0,071	0,082
425	1,58	8,771	1,140	5,207	6,316	0,8244	0,5831	1,089	0,065	0,075
450	1,512	8,825	1,133	5,403	6,477	0,8342	0,5754	1,095	0,062	0,073
475	1,443	8,875	1,127	5,599	6,635	0,8439	0,5674	1,098	0,056	0,067
500	1,373	8,924	1,121	5,795	6,792	0,8532	0,5598	1,102	0,054	0,064

Поведение скачков температуропроводности $\{a\}_{\text{Fe-V}}$, $\{a\}_{\text{V-Fe}}$ в зависимости от q_z аналогично тому, что показано на рис. 2.8, в: при $T^0 = 300, 400, 500 \text{ K}$ соответствующие линии не имеют самопересечений.

Таблица 2.5

Влияние начальной температуры образца на ПА ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{V}$)

T^0, K	$q_{\max} \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^2$	$(T_0)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
300	1,924	12,26	0,8157	5,117	4,602	1,112	0,7164	0,5654	0,447	0,736
325	1,856	12,163	0,8222	5,258	4,806	1,094	0,7109	0,5712	0,446	0,710
350	1,787	12,063	0,8290	5,403	5,007	1,079	0,7053	0,5831	0,426	0,684
375	1,717	11,962	0,8360	5,551	5,208	1,066	0,7001	0,5885	0,406	0,625
400	1,647	11,859	0,8432	5,701	5,407	1,054	0,6952	0,5984	0,386	0,608
425	1,577	11,76	0,8503	5,854	5,605	1,044	0,6903	0,6068	0,367	0,599
450	1,508	11,663	0,8574	6,011	5,802	1,036	0,6843	0,6198	0,359	0,589
475	1,438	11,568	0,8645	6,169	5,999	1,028	0,6790	0,6295	0,339	0,523
500	1,369	11,473	0,8716	6,329	6,194	1,022	0,6731	0,6344	0,318	0,516

2.2.5. Влияние нелинейных свойств металлов

Приведем результаты следующих двух серий расчетов: 1) свойства перестановки металлов, наполняющих слои разной толщины (толщины слоев не переставляются); 2) свойства перестановки толщин слоев вместе с наполняющими их металлами.

Система Fe–Mo. Содержащиеся здесь результаты относятся к варьированию толщин слоев; в каждом варианте расчета толщины h_1, h_2 фиксированные, и выполняется перестановка металлов, заполняющих эти слои (табл. 2.6). Во всех расчетах было принято: $q_{\max} = 1,926 \cdot 10^7$ Вт/м², $t_0 = 0,3$ с, $t_1 = 1,245$ с. В зоне контакта отчетливо выражена асимметрия температуры и теплового потока. Существенные изменения по сравнению с вариантами, указанными в табл. 2.2 и 2.4, заключаются в следующем: 1) чем больше h_2/h_1 отличается от 1, тем сильнее проявляется асимметрия теплового потока на правой границе (см. $A_q^{(w)}$); 2) зависимость $A_q^{(z)}$ от h_2/h_1 имеет два участка монотонного роста и участок насыщения («плато») между ними, $h_2/h_1 \in (0,53; 1,85)$; 3) по мере роста толщины второго слоя асимметрия производства энтропии уменьшается (см. $A_G^{(z)}$), хотя и остается значительной; асимметрия ДТГ меняется вслед за изменением h_2/h_1 : $A_G^{(z)} < 1$ при $h_2/h_1 < 1$, $A_G^{(z)} > 1$ при $h_2/h_1 > 1$.

Таблица 2.6

**Влияние перестановки металлов ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{Mo}$)
на ПА при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев**

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2/h_1	$(T_0)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,85	0,176	8,395	1,164	3,274	3,955	0,828	0,536	0,539	0,002	0,355
0,8	0,250	8,418	1,166	3,381	4,222	0,801	0,583	0,593	0,011	0,358
0,75	0,333	8,438	1,168	3,496	4,462	0,783	0,621	0,656	0,021	0,364
0,7	0,429	8,456	1,170	3,622	4,697	0,771	0,643	0,720	0,030	0,449
0,65	0,538	8,472	1,171	3,759	4,912	0,765	0,648	0,794	0,043	0,465
0,6	0,667	8,486	1,173	3,908	5,117	0,764	0,643	0,873	0,057	0,644
0,55	0,818	8,501	1,174	4,072	5,318	0,766	0,633	0,962	0,074	0,805
0,5	1,000	8,516	1,174	4,252	5,520	0,770	0,626	1,050	0,097	0,990
0,45	1,222	8,534	1,173	4,451	5,732	0,776	0,628	1,148	0,122	1,226
0,4	1,500	8,556	1,172	4,672	5,958	0,784	0,633	1,265	0,152	1,520
0,35	1,857	8,587	1,168	4,919	6,209	0,792	0,644	1,381	0,189	1,863
0,3	2,333	8,630	1,160	5,199	6,490	0,801	0,669	1,511	0,229	2,302
0,25	3,000	8,691	1,148	5,520	6,815	0,810	0,703	1,649	0,282	2,666
0,15	5,667	8,914	1,093	6,338	7,635	0,830	0,802	1,950	0,450	3,792

В табл. 2.7 приняты q_{\max} , t_0 , t_1 такие же, как в табл. 2.6. Видим, что при перестановке слоев металлов появляются своеобразные черты

процесса, а именно: 1) существует значение $(h_2/h_1)_*$, – в данной серии расчетов это приблизительно 1,85 – для которого $A_T^{(z)}$ и $A_q^{(z)}$ близки к 1; при отклонении отношения толщин слоев в обе стороны от $(h_2/h_1)_*$ появляется хорошо выраженная асимметрия температуры и теплового потока в зоне контакта; 2) на правой границе $x = h$ асимметрия теплового потока практически отсутствует; 3) ПА гистерезисных процессов меняются в очень широком числовом диапазоне (см. $A_G^{(z)}$, $A_G^{(z)}$); значение 1 эти параметры принимают при $h_2/h_1 \neq (h_2/h_1)_*$.

Система Fe–V. Таблица 2.8 составлена при $q_{\max} = 1,668 \cdot 10^7$ Вт/м², $t_0 = 0,3$ с, $t_1 = 1,245$ с. Отчетливо видна асимметрия теплового потока на правой границе, причем зависимость $A_q^{(w)}$ от h_2/h_1 немонотонная, имеет минимум. Поведение $A_T^{(0)}$ отличается здесь тем, что с ростом h_2/h_1 асимметрия температуры ослабевает. Асимметрия гистерезисных процессов: при $h_2/h_1 < 1$ имеем $A_G^{(z)} > 1$, $A_G^{(z)} > 1$; при $h_2/h_1 > 1$ имеем $A_G^{(z)} < 1$, $A_G^{(z)} < 1$.

Таблица 2.7

Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на ПА
($M_1 = \text{Fe}, M_2 = \text{Mo}$)

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2/h_1	$(T_0)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,85	0,176	8,914	1,096	3,274	7,635	0,429	0,206	1,002	0,00001	0,001
0,80	0,250	8,785	1,117	3,381	7,191	0,470	0,242	1,016	0,00013	0,004
0,75	0,333	8,691	1,134	3,496	6,815	0,513	0,283	1,022	0,00060	0,011
0,70	0,429	8,63	1,146	3,622	6,490	0,558	0,330	1,027	0,00184	0,033
0,65	0,538	8,587	1,156	3,759	6,209	0,605	0,385	1,034	0,00582	0,069
0,60	0,667	8,556	1,163	3,908	5,958	0,656	0,453	1,040	0,01537	0,195
0,55	0,818	8,534	1,169	4,072	5,732	0,710	0,529	1,045	0,03901	0,443
0,50	1,000	8,516	1,174	4,252	5,520	0,770	0,626	1,050	0,09686	0,990
0,45	1,222	8,501	1,178	4,451	5,318	0,837	0,753	1,055	0,23083	2,225
0,40	1,500	8,486	1,181	4,672	5,117	0,913	0,899	1,060	0,57105	5,011
0,35	1,857	8,472	1,184	4,919	4,912	1,001	1,084	1,060	1,39802	12,53
0,30	2,333	8,456	1,184	5,199	4,697	1,107	1,303	1,059	3,77686	31,71
0,25	3,000	8,438	1,182	5,520	4,462	1,237	1,544	1,058	9,82317	89,42
0,20	4,000	8,418	1,176	5,896	4,222	1,396	1,801	1,054	31,585	262,3
0,15	5,667	8,395	1,161	6,338	3,955	1,603	2,087	1,049	122,48	790,6

В табл. 2.9 свойства поверхностного источника энергии такие же, как в табл. 2.8. Параметры асимметрии температуры: на левой границе $A_T^{(0)}$ как функция h_2/h_1 имеет минимум при $h_2 \approx h_1$. При $x = h_1$: $A_T^{(z)} < 1$ для $h_2/h_1 < 1$, $A_T^{(z)} > 1$ для $h_2/h_1 > 1$. Ни в одной из прежде рассмотренных серий расчетов нет такого сильного количественного проявления асимметрии теплового потока в зоне контакта, как в этой (см. $A_q^{(z)}$). Кроме того, на правой границе асимметрия теплового потока выражена очень хорошо; $A_q^{(w)}$ немонотонно зависит от h_2/h_1 и при $h_2/h_1 \cong 0,82$ имеет минимум. Асимметрия гистерезисных процессов: при $h_2/h_1 < 1$ имеем $A_G^{(z)} \ll 1$, $A_G^{(z)} \ll 1$; при $h_2/h_1 > 1$ имеем $A_G^{(z)} \gg 1$, $A_G^{(z)} \gg 1$.

Таблица 2.8

Влияние перестановки металлов ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{V}$) на ПА при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2/h_1	$(T_0)_{\text{V-Fe}}^{\text{max}}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\text{max}}$	$(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\text{max}}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,90	0,1111	11,069	0,794	3,533	3,172	1,114	1,1806	1,180	3,633	10,082
0,85	0,1765	11,485	0,799	3,767	3,292	1,144	1,0215	1,022	5,354	6,1269
0,80	0,2500	11,777	0,8032	3,984	3,432	1,161	0,9023	0,896	6,185	4,4308
0,75	0,3333	11,966	0,8062	4,185	3,591	1,165	0,8194	0,8043	2,194	2,8902
0,70	0,4286	12,085	0,8087	4,375	3,765	1,162	0,7719	0,727	1,356	1,9550
0,65	0,5385	12,154	0,8107	4,558	3,953	1,153	0,7535	0,6704	0,967	1,5433
0,60	0,6667	12,199	0,8124	4,738	4,155	1,14	0,7447	0,6286	0,764	1,1886
0,55	0,8182	12,232	0,8139	4,923	4,370	1,127	0,7328	0,5917	0,618	0,9451
0,50	1,0000	12,260	0,8155	5,117	4,602	1,112	0,7164	0,5654	0,517	0,8157
0,45	1,2222	12,242	0,8168	5,319	4,842	1,099	0,6979	0,5452	0,448	0,6902
0,40	1,5000	12,218	0,8185	5,547	5,103	1,087	0,6788	0,5278	0,411	0,6522
0,35	1,8571	12,175	0,8214	5,812	5,393	1,078	0,6621	0,5167	0,362	0,6170
0,30	2,3333	12,091	0,8271	6,124	5,721	1,07	0,6494	0,5122	0,326	0,5518
0,25	3,0000	11,908	0,8397	6,490	6,089	1,066	0,6425	0,5092	0,308	0,5376
0,20	4,0000	11,578	0,8635	6,919	6,492	1,066	0,6439	0,5183	0,208	0,4976
0,15	5,6667	11,002	0,9090	7,427	6,901	1,076	0,6623	0,5361	0,321	0,5300
0,10	9,0000	10,105	0,9903	8,035	7,266	1,106	0,7137	0,538	0,369	0,5598

Таким образом, тепловое взаимодействие металлов в системе Fe–V испытывает значительное влияние конкуренции знаков производных $(d\lambda/dT)_{\text{Fe}} < 0$, $(d\lambda/dT)_{\text{V}} > 0$. Это имеет такие последствия, как значительное усиление асимметрии теплового потока на правой изотермической границе, появление немонотонной зависимости ПА от отношения толщин слоев, существенные количественные различия значений ПА от их аналогов в системе Fe–Mo.

Таблица 2.9

**Влияние перестановки металлических слоев разной толщины
на ПА ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{V}$)**

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\max}$	$(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,90	0,1111	10,105	0,8698	3,533	7,266	0,4862	0,1386	0,7406	0,0001	0,0002
0,85	0,1765	10,636	0,8299	3,735	6,687	0,5585	0,1535	0,6911	0,0002	0,0007
0,80	0,2500	10,935	0,8095	3,914	6,179	0,6334	0,1758	0,6404	0,0007	0,0025
0,75	0,3333	11,086	0,8006	4,08	5,748	0,7098	0,2072	0,6059	0,0023	0,0072
0,70	0,4286	11,156	0,7975	4,238	5,387	0,7867	0,2539	0,5870	0,0073	0,0198
0,65	0,5385	11,182	0,7973	4,392	5,085	0,8637	0,3245	0,5715	0,0218	0,0528
0,60	0,6667	11,188	0,7982	4,547	4,825	0,9424	0,4252	0,5640	0,0641	0,1309
0,55	0,8182	11,188	0,7994	4,705	4,593	1,0244	0,5630	0,5630	0,1793	0,3082
0,50	1,0000	11,184	0,8009	4,872	4,381	1,1121	0,7460	0,5667	0,5178	0,8157
0,45	1,2222	11,178	0,8025	5,055	4,185	1,2079	0,9836	0,5763	1,5457	2,1167
0,40	1,5000	11,169	0,8045	5,264	4,002	1,3153	1,2813	0,5922	4,9055	5,9210
0,35	1,8571	11,16	0,8076	5,51	3,831	1,4383	1,6463	0,6116	16,143	18,043
0,30	2,3333	11,148	0,8127	5,808	3,672	1,5817	2,0974	0,6414	61,031	54,498
0,25	3,0000	11,134	0,8218	6,175	3,527	1,7508	2,6697	0,6816	293,32	216,05
0,20	4,0000	11,118	0,8382	6,639	3,395	1,9555	3,4364	0,7221	1893,7	897,64
0,15	5,6667	11,099	0,8644	7,237	3,277	2,2084	4,5100	0,7797	10289	4426,7
0,10	9,0000	11,069	0,9041	8,035	3,172	2,5331	6,0808	0,8571	61533	27932

2.2.6. Двухслойные системы Fe–W и W–V

Асимметричные тепловые свойства двухслойных систем наблюдаются также у Fe–W ($d\lambda/dT$ – одного знака) и у W–V ($d\lambda/dT$ – разных знаков). Результаты численного моделирования представлены в табл. 2.10–2.13 без комментариев.

Таблица 2.10

Влияние перестановки металлов ($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{W}$) на ПА
при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев, $q_{\max} = 1,91 \cdot 10^7$ Вт/м²

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{W-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{W-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	9,000	9,148	1,0272	8,306	0,821	0,8691	2,3516	0,5728	0,4804
0,20	4,000	8,751	1,1258	7,295	0,799	0,7495	1,9657	0,3474	0,3062
0,30	2,333	8,522	1,1709	6,579	0,779	0,6754	1,6259	0,2251	0,2212
0,40	1,500	8,402	1,1907	6,032	0,761	0,6372	1,3377	0,1387	0,1342
0,50	1,000	8,34	1,1986	5,586	0,747	0,6303	1,0937	0,0838	0,0808
0,60	0,667	8,312	1,1992	5,181	0,741	0,6421	0,8883	0,0486	0,0566
0,70	0,429	8,302	1,1962	4,762	0,748	0,6340	0,7192	0,0241	0,0319
0,80	0,250	8,306	1,1913	4,285	0,779	0,5642	0,5788	0,0090	0,0359
0,90	0,111	8,319	1,1837	3,709	0,850	0,4155	0,4613	0,0024	0,0699

Таблица 2.11

Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на ПА
($M_1 = \text{Fe}$, $M_2 = \text{W}$)

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{W-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{W-Fe}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	9,000	8,319	1,1296	3,709	1,839	2,2841	1,0569	513,133	231,486
0,20	4,000	8,306	1,1861	4,285	1,361	1,7301	1,0851	23,6645	18,8155
0,30	2,333	8,302	1,2019	4,762	1,076	1,2762	1,0957	3,08916	2,71182
0,40	1,500	8,312	1,2036	5,181	0,886	0,8944	1,0971	0,49535	0,49169
0,50	1,000	8,34	1,1986	5,586	0,747	0,6303	1,0937	0,08376	0,08081
0,60	0,667	8,402	1,1864	6,032	0,636	0,4575	1,0832	0,01360	0,01543
0,70	0,429	8,522	1,1653	6,579	0,542	0,3355	1,0672	0,00175	0,00260
0,80	0,250	8,751	1,1307	7,295	0,458	0,2444	1,0486	0,00013	0,00058
0,90	0,111	9,148	1,0764	8,306	0,380	0,1581	1,0264	0,00001	0,00014

Таблица 2.12

Влияние перестановки металлов ($M_1 = \text{W}$, $M_2 = \text{V}$) на ПА
при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев, $q_{\max} = 3,97 \cdot 10^7$ Вт/м²

$h_1 \cdot 10^2$, м	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{W-V}}^{\max}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{W-V}}^{\max}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	9,000	18,307	1,0424	16,267	1,374	0,9508	0,2755	0,5110	0,841
0,20	4,000	16,905	0,8703	13,652	1,413	0,9664	0,2996	0,6259	1,216
0,30	2,333	15,856	0,7956	11,784	1,498	1,0416	0,3467	0,9317	1,695
0,40	1,500	15,185	0,7593	10,412	1,613	1,1338	0,4272	1,5650	2,953

Окончание табл. 2.12

$h_1 \cdot 10^2, \text{ м}$	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{W-V}}^{\text{max}}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{W-V}}^{\text{max}}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,50	1,000	14,756	0,7392	9,367	1,745	1,2082	0,5501	2,9755	6,498
0,60	0,667	14,623	0,7339	8,517	1,871	1,2462	0,7307	6,8508	13,942
0,70	0,429	14,543	0,7321	7,702	1,949	1,2954	1,0070	21,683	34,583
0,80	0,250	14,498	0,7316	6,768	1,922	1,5241	1,4486	80,503	82,689
0,90	0,111	14,519	0,7397	5,476	1,701	2,1991	2,1795	161,33	100,32

Таблица 2.13

Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на ПА
($M_1 = \text{W}, M_2 = \text{V}$)

$h_1 \cdot 10^2, \text{ м}$	h_2 / h_1	$(T_0)_{\text{W-V}}^{\text{max}}$	$A_T^{(0)}$	$(T_z)_{\text{W-V}}^{\text{max}}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_q^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	9,000	18,307	0,9327	16,267	5,052	7,8174	0,9235	34385,3	35905
0,20	4,000	16,905	0,8531	13,652	3,877	4,7593	0,7861	3251,81	3455,6
0,30	2,333	15,856	0,7982	11,784	2,982	2,9533	0,6742	237,654	369,79
0,40	1,500	15,185	0,7621	10,412	2,287	1,8877	0,5998	22,1829	41,778
0,50	1,000	14,756	0,7392	9,367	1,745	1,2082	0,5501	2,97548	6,4981
0,60	0,667	14,623	0,7312	8,517	1,319	0,7485	0,5204	0,48332	0,9853
0,70	0,429	14,543	0,7297	7,702	0,979	0,4569	0,5179	0,08500	0,1585
0,80	0,250	14,498	0,7464	6,768	0,700	0,3095	0,5521	0,01549	0,0291
0,90	0,111	14,519	0,8267	5,476	0,463	0,2675	0,6502	0,00239	0,0023

2.3. Асимметрия теплопереноса в двухслойной системе с теплоизолированной границей

2.3.1. Основные факторы влияния

Заменяем условие изотермичности (2.4) на условие теплоизоляции:

$$x = h, \quad q^{(2)}(h, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Помимо теоретического значения, условие теплоизоляции важно еще и потому, что его нетрудно осуществить на практике. Приведем основные качественные и количественные результаты расчетов, обращая особое внимание на отличия от задачи с изотермической правой стенкой (см. § 2.2). Напомним, что во всех расчетах $h = h_1 + h_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ м.

Система Fe–Mo и Fe–V. В качестве параметра влияния было выбрано время достижения t_0 максимального теплового потока q_{max} при $h_1 = h_2$ (табл. 2.14). Здесь $T_w = 300$ К, расчеты показывают, что

$(T_0)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \cong 1000$ К. Асимметрия температуры для обоих классов процессов полностью отсутствует на правой границе: $A_T^{(w)} = 1$. С увеличением t_0 наблюдаем следующие явления: 1) для системы Fe–Mo – асимметрия температуры на границе слоев меняется слабо $A_T^{(z)} \cong 1,14$, на левой границе $A_T^{(0)}$ монотонно растет; 2) для системы Fe–V – $A_T^{(z)} \cong 0,93$, $A_T^{(0)} \cong 1,165$. В количественном отношении асимметрия наиболее выразительно проявляется в гистерезисном процессе: параметры $A_{\sigma}^{(z)}$, $A_G^{(z)}$ значительно меньше 1.

Таблица 2.14

Влияние свойств поверхностного импульса энергии на ПА

$t_0, \text{ с}$	Система Fe–Mo						Система Fe–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_{\sigma}^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_{\sigma}^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	0,786	1,019	0,872	1,000	0,737	0,886	1,160	0,9336	0,457	1,000	0,091	0,152
0,15	0,803	1,018	0,817	1,000	0,574	0,806	1,170	0,9297	0,476	0,999	0,097	0,155
0,20	0,812	1,016	0,779	0,999	0,491	0,691	1,173	0,9292	0,491	0,999	0,110	0,149
0,25	0,816	1,015	0,752	0,999	0,443	0,646	1,173	0,9310	0,500	0,999	0,117	0,176
0,30	0,818	1,013	0,732	0,999	0,400	0,587	1,173	0,9337	0,507	0,999	0,125	0,196
0,35	0,819	1,012	0,716	0,999	0,371	0,563	1,172	0,9369	0,513	0,999	0,134	0,194
0,40	0,820	1,010	0,704	0,999	0,355	0,541	1,171	0,9403	0,518	0,999	0,138	0,214
0,45	0,821	1,008	0,694	0,999	0,335	0,524	1,170	0,9438	0,523	0,999	0,147	0,214
0,50	0,822	1,007	0,686	0,998	0,326	0,512	1,168	0,9473	0,527	0,999	0,152	0,229

Важным физическим свойством процесса является начальная температура образца. Таблица 2.15 составлена при $t_0 = 0,3$ с, $t_1 = 1,245$ с, $h_1 = h_2$. Асимметрия слабо проявляется при $x = 0$, $x = h$. По мере роста T^0 наблюдаем: 1) ослабление асимметричных свойств температуры на левой границе (см. $A_T^{(0)}$) и на границе слоев (см. $A_T^{(z)}$); 2) усиление асимметрии гистерезисных свойств: $A_{\sigma}^{(z)}$ и $A_G^{(z)}$ убывают примерно такими же темпами, какими нарастает T^0 . Для системы Fe–Mo – асимметрия температуры на границе слоев меняется слабо $A_T^{(z)} \cong 1,14$, на левой границе $A_T^{(0)}$ монотонно растет; для системы Fe–V – $A_T^{(z)} \cong 0,93$, $A_T^{(0)} \cong 1,165$.

Таблица 2.15

Влияние начальной температуры образца на ПА

T^0, K	Система Fe–Mo						Система Fe–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
300	1,175	0,933	0,507	0,99	0,127	0,195	0,815	1,010	0,725	0,996	0,388	5,740
325	1,168	0,935	0,501	0,99	0,118	0,190	0,822	1,008	0,717	0,997	0,375	5,628
350	1,160	0,936	0,495	1,00	0,111	0,181	0,829	1,007	0,709	0,997	0,363	5,543
375	1,154	0,938	0,490	1,00	0,103	0,175	0,836	1,005	0,703	0,997	0,352	5,275
400	1,147	0,940	0,485	1,00	0,099	0,167	0,843	1,004	0,696	0,997	0,349	5,153
425	1,141	0,942	0,480	1,00	0,094	0,158	0,850	1,003	0,690	0,997	0,342	5,103
450	1,134	0,944	0,474	1,00	0,088	0,153	0,857	1,002	0,684	0,998	0,330	4,910
475	1,128	0,946	0,469	1,00	0,085	0,141	0,865	1,001	0,677	0,998	0,324	4,741
500	1,121	0,949	0,463	1,00	0,079	0,138	0,872	1,001	0,670	0,998	0,310	4,416

2.3.2. Нелинейные свойства параметров асимметрии

Содержащиеся здесь результаты относятся к варьированию металлов, заполняющих слои; в каждом варианте расчета толщины h_1, h_2 фиксированные (табл. 2.16). Здесь $q_{\max} = 1,926 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$, $t_0 = 0,3 \text{ с}$, $t_1 = 1,245 \text{ с}$. В зоне контакта отчетливо выражена асимметрия теплового потока. Асимметрия температуры на правой границе выражена незначительно (см. $A_T^{(w)}$). Зависимость $A_T^{(z)}$ от h_2/h_1 немонотонная, имеет максимум. По мере роста толщины второго слоя наблюдаем следующие явления: для системы Fe–Mo – асимметрия производства энтропии (см. $A_G^{(z)}$) и асимметрия ДТГ (см. $A_G^{(z)}$) увеличиваются; для системы Fe–V – асимметрия гистерезисных процессов ослабевает (см. $A_G^{(z)}$ и $A_G^{(z)}$), приближается к 1 со стороны меньших значений.

Таблица 2.16

Влияние перестановки металлов на ПА при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

h_2/h_1	Система Fe–Mo						Система Fe–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
9,000	1,044	0,814	0,832	1,153	0,584	0,565	0,956	1,109	0,658	1,042	0,309	0,489
4,000	1,121	0,824	0,714	1,099	0,369	0,358	0,842	1,081	0,685	1,030	0,332	0,531
2,333	1,155	0,840	0,645	1,064	0,252	0,293	0,802	1,076	0,706	1,023	0,369	0,614

Окончание табл. 2.16

h_2/h_1	Система Fe–Mo						Система Fe–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
1,500	1,167	0,886	0,573	1,030	0,181	0,235	0,795	1,062	0,746	1,011	0,440	0,661
1,000	1,175	0,933	0,506	1,000	0,126	0,195	0,790	1,017	0,796	1,000	0,527	0,707
0,667	1,173	0,958	0,437	0,969	0,079	0,151	0,786	0,987	0,863	0,988	0,652	0,802
0,429	1,168	0,939	0,370	0,939	0,048	0,105	0,782	0,974	0,944	0,976	0,802	0,931
0,250	1,166	0,909	0,310	0,909	0,026	0,071	0,780	0,962	0,999	0,963	0,946	0,983
0,111	1,165	0,879	0,258	0,879	0,014	0,045	0,779	0,948	1,006	0,948	0,969	0,993

Обсудим результаты расчета при перестановке толщин слоев вместе с наполняющими их металлами (табл. 2.17). Параметры q_{\max} , t_0 , t_1 такие же, как в табл. 2.16. Видим, что при перестановке слоев металлов появляются своеобразные черты процесса: существует значение $(h_2/h_1)_*$, для которого $A_T^{(z)}$ и $A_q^{(z)}$ близки к 1, при отклонении отношения толщин слоев в обе стороны от $(h_2/h_1)_*$ появляется хорошо выраженная асимметрия температуры и теплового потока в зоне контакта; на правой границе $x=h$ асимметрия температуры практически отсутствует; параметры асимметрии гистерезисных процессов меняются в очень широком числовом диапазоне (см. $A_G^{(z)}$, $A_G^{(z)}$). В системе Fe–Mo параметр асимметрии температуры на левой границе $A_T^{(0)}$ как функция h_2/h_1 имеет максимум, а в системе Fe–V – минимум.

Основные параметры влияния на асимметрию теплопереноса: температурная зависимость коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$; знаки производных $(d\lambda/dT)_{M_1}$, $(d\lambda/dT)_{M_2}$; начальная температура образца T^0 ; отношение толщин слоев h_1/h_2 ; время достижения t_0 максимального теплового потока q_{\max} . Сопоставление с результатами расчетов (§ 2.2), выполненных для изотермической правой границы образца, позволяет непосредственно оценить количественные различия, наблюдаемые в этих двух классах явлений. Качественные закономерности теплопереноса для обоих видов граничных условий одинаковые.

Таблица 2.17

Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на ПА

h_2/h_1	Система Fe–Mo						Система Fe–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
9,000	1,146	1,246	7,628	1,101	507,2	127,9	0,878	1,570	18,77	1,057	8900	1112
4,000	1,176	1,112	2,802	1,041	24,71	12,02	0,814	1,327	6,578	1,024	356,8	105,3
2,333	1,180	1,017	1,470	1,002	3,350	2,457	0,789	1,173	2,901	1,001	29,15	15,78
1,500	1,180	0,990	0,850	1,002	0,613	0,679	0,786	1,076	1,474	1,000	3,646	3,159
1,000	1,175	0,933	0,505	1,000	0,126	0,195	0,790	1,017	0,796	0,999	0,527	0,706
0,667	1,161	0,857	0,295	0,997	0,023	0,052	0,795	0,974	0,437	0,998	0,079	0,167
0,429	1,143	0,776	0,162	0,997	0,003	0,017	0,795	0,894	0,229	0,998	0,010	0,036
0,250	1,112	0,674	0,079	0,960	0,001	0,003	0,807	0,784	0,104	0,968	0,001	0,005

2.3.3. Примеры расчета

В табл. 2.18–2.21 представлены еще два примера расчета систем с теплоизолированной правой стенкой: Fe–W ($d\lambda/dT$ – одного знака) и W–V ($d\lambda/dT$ – разных знаков).

Таблица 2.18

Влияние свойств поверхностного импульса энергии на ПА

t_0, c	Система Fe–W						Система W–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,186	0,923	0,434	1,000	0,070	0,091	0,709	1,169	1,916	1,00	5,462	6,417
0,15	1,195	0,920	0,456	1,000	0,081	0,134	0,723	1,168	1,699	1,00	3,884	4,600
0,20	1,197	0,920	0,471	1,000	0,095	0,146	0,731	1,162	1,563	1,00	2,857	3,490
0,25	1,197	0,923	0,482	1,000	0,103	0,170	0,738	1,154	1,472	1,00	2,304	2,893
0,30	1,195	0,926	0,490	1,000	0,111	0,178	0,744	1,143	1,409	1,00	1,960	2,510
0,35	1,193	0,930	0,496	1,000	0,122	0,193	0,750	1,133	1,363	1,00	1,734	2,242
0,40	1,191	0,934	0,502	1,000	0,128	0,191	0,755	1,123	1,328	1,00	1,572	2,198
0,45	1,188	0,938	0,506	0,999	0,134	0,207	0,761	1,113	1,302	1,00	1,453	1,932
0,50	1,168	0,947	0,527	0,999	0,152	0,229	0,766	1,104	1,282	1,00	1,365	1,820

Таблица 2.19

Влияние начальной температуры образца на ПА

T^0, K	Система Fe–W						Система W–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_G^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
300	1,197	0,926	0,489	0,999	0,111	0,168	0,739	1,139	1,392	0,997	1,903	2,417
325	1,188	0,927	0,483	0,999	0,104	0,165	0,745	1,134	1,396	0,997	1,987	2,438
350	1,179	0,929	0,477	1,000	0,096	0,161	0,751	1,129	1,399	0,997	2,066	2,453

Окончание табл. 2.19

T^0, K	Система Fe–W						Система W–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
375	1,171	0,931	0,471	1,000	0,089	0,148	0,756	1,124	1,403	0,998	2,143	2,458
400	1,163	0,934	0,466	1,000	0,084	0,145	0,762	1,119	1,406	0,998	2,223	2,464
425	1,155	0,936	0,460	1,000	0,079	0,130	0,768	1,115	1,410	0,998	2,296	2,500
450	1,147	0,938	0,455	1,000	0,074	0,147	0,773	1,111	1,413	0,998	2,373	2,518
475	1,140	0,941	0,448	1,000	0,070	0,144	0,778	1,106	1,417	0,998	2,447	2,538
500	1,132	0,943	0,442	1,000	0,066	0,132	0,784	1,102	1,421	0,998	2,513	2,535

Таблица 2.20

**Влияние перестановки металлов на ПА при фиксированных
в каждом варианте толщинах слоев**

h_2 / h_1	Система Fe–W						Система W–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
9,000	1,038	0,866	0,829	1,165	0,585	0,550	1,031	1,266	1,019	0,889	0,432	0,636
4,000	1,124	0,838	0,711	1,107	0,365	0,350	0,873	1,320	1,023	0,929	0,569	0,900
2,333	1,168	0,831	0,639	1,069	0,256	0,287	0,798	1,376	1,073	0,956	0,800	1,510
1,500	1,185	0,880	0,561	1,032	0,169	0,241	0,764	1,251	1,218	0,979	1,230	1,844
1,000	1,198	0,925	0,487	1,000	0,110	0,167	0,740	1,143	1,414	1,000	2,011	2,523
0,667	1,197	0,951	0,414	0,967	0,069	0,128	0,727	1,063	1,704	1,022	3,517	3,571
0,429	1,193	0,935	0,346	0,935	0,039	0,088	0,718	1,045	2,128	1,045	6,962	5,739
0,250	1,195	0,903	0,286	0,903	0,020	0,061	0,713	1,070	2,696	1,070	15,08	9,428
0,111	1,190	0,871	0,236	0,871	0,011	0,035	0,706	1,094	3,238	1,094	32,62	14,02

Таблица 2.21

**Влияние перестановки металлических слоев разной толщины
на параметры асимметрии**

h_2 / h_1	Система Fe–W						Система W–V					
	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(0)}$	$A_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$A_T^{(w)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
9,000	1,162	1,287	7,129	1,102	412,95	98,375	0,894	2,039	35,65	1,112	11469	1902
4,000	1,197	1,114	2,656	1,041	20,990	10,436	0,837	1,709	11,70	1,054	559,9	222,6
2,333	1,204	1,010	1,410	1,002	2,9789	2,1481	0,787	1,464	5,125	1,003	65,55	47,21
1,500	1,203	0,985	0,818	1,002	0,5579	0,6275	0,758	1,282	2,610	1,003	10,56	10,33
1,000	1,198	0,925	0,487	1,000	0,1100	0,1672	0,740	1,143	1,414	1,000	2,011	2,523
0,667	1,179	0,850	0,285	0,997	0,0209	0,0494	0,732	1,038	0,795	0,997	0,410	0,637
0,429	1,157	0,769	0,157	0,997	0,0034	0,0118	0,729	0,982	0,445	0,985	0,085	0,184
0,250	1,122	0,679	0,077	0,960	0,0004	0,0020	0,743	0,826	0,236	0,943	0,015	0,038
0,111	1,064	0,586	0,027	0,931	0,0001	0,0002	0,814	0,679	0,093	0,876	0,001	0,005

Эти данные не требуют дополнительных пояснений.

2.4. Термоциклическое воздействие на двухслойную пластину

2.4.1. Два типа асимметрии

Будем изучать нестационарные свойства контактного теплообмена в двухслойной металлической пластине, обращая внимание на следующие явления: зависимость теплофизических свойств металлов от температуры; динамический тепловой гистерезис при циклическом температурном воздействии на образец; асимметрия теплового потока. Рассматриваем два типа асимметрии. К асимметрии 1-го типа мы относим явления, связанные с перестановкой слоев (см. § 2.2).

Свойства асимметрии-1 будем обсуждать для двух серий расчетов: 1) выполняется перестановка металлов, наполняющих слои разной толщины (толщины слоев не переставляются); 2) перестановка толщин слоев вместе с наполняющими их металлами.

Понятие об асимметрии 2-го типа введем для ситуации, когда металлы не переставляются, а толщины слоев зафиксированы. В этом случае асимметрия обусловлена последовательностью термических воздействий, а именно: в одном случае это «нагрев – охлаждение», в другом – «охлаждение – нагрев».

Уравнение энергии и закон Фурье для теплового потока имеют вид (1.11). Искомыми функциями являются температура и тепловой поток в двух контактирующих областях. Первый слой: $T = T^{(1)}(x, t)$, $q = q^{(1)}(x, t)$, $x \in [0, h_1]$. Второй слой: $T = T^{(2)}(x, t)$, $q = q^{(2)}(x, t)$, $x \in [h_1, h]$. Толщина образца равна $h = h_1 + h_2$. Условия идеального теплового контакта:

$$x = h_1, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad q^{(1)} = q^{(2)}.$$

Правая граница двухслойного образца теплоизолирована:

$$x = h, \quad q^{(2)}(h, t) = 0.$$

Температура $T_0(t)$ характеризует термическое воздействие на левой границе:

$$x = 0, \quad T^{(1)}(0, t) = T_0(t).$$

Начальная температура образца однородная по координате:

$$t = 0, \quad T(x, 0) = T^0 \equiv \text{const},$$

причем $T_0(0) = T^0$.

Теплофизические свойства металлов аппроксимируются полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами (2.8).

Процессы нагрева и охлаждения рассматриваются в интервалах температур, для которых фазовые превращения не происходят. Построение аппроксимирующих полиномов выполняется на основе справочных данных [29].

Зависимость $T_0(t)$ возьмем в виде, характерном для термоциклирования:

$$T_0(t) = T^0 + \Theta \sin(mt) > 0 \text{ при } t \in [0, t_j]; \quad \Theta, m - \text{const.} \quad (2.10)$$

$$T_0(t) \equiv T^0 \text{ при } t \in [t_j, t^0].$$

Здесь $t_1 = 2\pi/m$ – период колебаний; $t_j = jt_1$; $j \geq 1$ – целое число; t^0 – время установления (стабилизации) теплового процесса: при $t = t^0$ петля ДТГ становится замкнутой. Представленная далее в таблицах информация относится к основному варианту $j = 1$. Примеры расчетов для $j > 1$ комментируются отдельно. В режиме «нагрев – охлаждение» берем $\Theta > 0$, т. е. $T_0(t) \in [T^0 - |\Theta|, T^0 + |\Theta|]$, и соответствующие параметры процесса отмечаем двойным нижним индексом $+ -$; в режиме «охлаждение – нагрев» берем $\Theta < 0$, т. е. $T_0(t) \in [T^0 + |\Theta|, T^0 - |\Theta|]$, и применяем индекс $- +$.

Параметры асимметрии 1-го типа (ПА-1) такие:

– ПА-1 теплового потока на левой границе:

$$A_q^{(0)} = \frac{(q_0)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_0)_{M_2-M_1}^{\max}}; \quad \bar{A}_q^{(0)} = \frac{(q_0)_{M_1-M_2}^{\min}}{(q_0)_{M_2-M_1}^{\min}};$$

– ПА-1 температуры в зоне контакта:

$$A_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_z)_{M_2-M_1}^{\max}}; \quad \bar{A}_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{M_1-M_2}^{\min}}{(T_z)_{M_2-M_1}^{\min}};$$

– ПА-1 теплового потока в зоне контакта:

$$A_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_z)_{M_2-M_1}^{\max}}; \quad \bar{A}_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{M_1-M_2}^{\min}}{(q_z)_{M_2-M_1}^{\min}};$$

– ПА-1 температуры на правой границе $x_w = h$:

$$A_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_w)_{M_2-M_1}^{\max}}; \quad \bar{A}_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{M_1-M_2}^{\min}}{(T_w)_{M_2-M_1}^{\min}};$$

– ПА-1 производства энтропии в зоне контакта:

$$A_{\sigma}^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,S)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,S)}};$$

– ПА-1 динамического теплового гистерезиса в зоне контакта:

$$A_G^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,Q)}}.$$

Параметры асимметрии 2-го типа (ПА-2) такие:

– ПА-2 теплового потока на левой границе:

$$B_q^{(0)} = \frac{(q_0)_{+-}^{\max}}{(q_0)_{-+}^{\max}}; \quad \bar{B}_q^{(0)} = \frac{(q_0)_{+-}^{\min}}{(q_0)_{-+}^{\min}};$$

– ПА-2 температуры в зоне контакта:

$$B_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{+-}^{\max}}{(T_z)_{-+}^{\max}}; \quad \bar{B}_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{+-}^{\min}}{(T_z)_{-+}^{\min}};$$

– ПА-2 теплового потока в зоне контакта:

$$B_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{+-}^{\max}}{(q_z)_{-+}^{\max}}; \quad \bar{B}_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{+-}^{\min}}{(q_z)_{-+}^{\min}};$$

– ПА-2 температуры на правой границе $x_w = h$:

$$B_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{+-}^{\max}}{(T_w)_{-+}^{\max}}; \quad \bar{B}_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{+-}^{\min}}{(T_w)_{-+}^{\min}};$$

– ПА-2 производства энтропии в зоне контакта:

$$B_{\sigma}^{(z)} = \frac{F_{+-}^{(g,S)}}{F_{-+}^{(g,S)}};$$

– ПА-2 динамического теплового гистерезиса в зоне контакта:

$$B_G^{(z)} = \frac{F_{+-}^{(g,Q)}}{F_{-+}^{(g,Q)}}.$$

Индексом z отмечены значения функций при $x = h_1$. В качестве M_1, M_2 применяем химические символы металлов; расположение ин-

дексов $M_1 - M_2$ и $M_2 - M_1$ указывает на расположение металлических слоев до и после перестановки. Полагаем, что термическое воздействие всегда происходит на левой границе образца, т. е. ситуация аналогична той, что изображена на рис. 2.4. Буквами $F_{M_1-M_2}^{(g,S)}$, $F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}$ и т. д. обозначаем площади петель ДТГ в плоскостях «градиент температуры – производство энтропии» и «градиент температуры – тепловой поток». При вычислении $A_q^{(0)}$, $A_T^{(z)}$, $A_q^{(z)}$, $A_T^{(w)}$ и $\bar{A}_q^{(0)}$, $\bar{A}_T^{(z)}$, $\bar{A}_q^{(z)}$, $\bar{A}_T^{(w)}$ применяем максимальные и, соответственно, минимальные достигаемые в данном процессе значения функций $q_0 = q(0, t)$, $T_z = T(h_1, t)$, $q_z = q(h_1, t)$, $T_w = T(h, t)$, $t \in [0, t_1]$. Для ПА-2 структура обозначений такая же.

Асимметричные свойства тепловых процессов выражены тем сильнее, чем больше ПА-1, ПА-2 отличаются от единицы.

Рассматриваем два варианта: 1) в каждом слое $d\lambda/dT < 0$; в качестве примера берем железо и молибден; 2) в одном слое $d\lambda/dT < 0$, а в другом $d\lambda/dT > 0$; в качестве примера берем железо и ванадий. Построение аппроксимирующих полиномов вида (2.8) было выполнено в следующих температурных интервалах: Fe – [300, 1040]; Mo – [300, 2600]; V – [300, 2000]; значения температуры указаны в кельвинах. При вычислении Q, S берем $\lambda(T^0) = \lambda_{Fe}(T^0)$. Для всех рассмотренных вариантов $h = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $T_b = 100$ К, $q_b = 1 \cdot 10^6$ Вт/м², $T^0 = 650$ К, $\Theta = 350$ К, $m = \pi c^{-1}$, $t^0 = 5$ с. Говоря о зависимости параметров асимметрии от отношения толщин слоев, подразумеваем далее, что h_1/h_2 растет от 1/9 до 9. Примеры типичных петель ДТГ в зоне контакта даны на рис. 2.9.

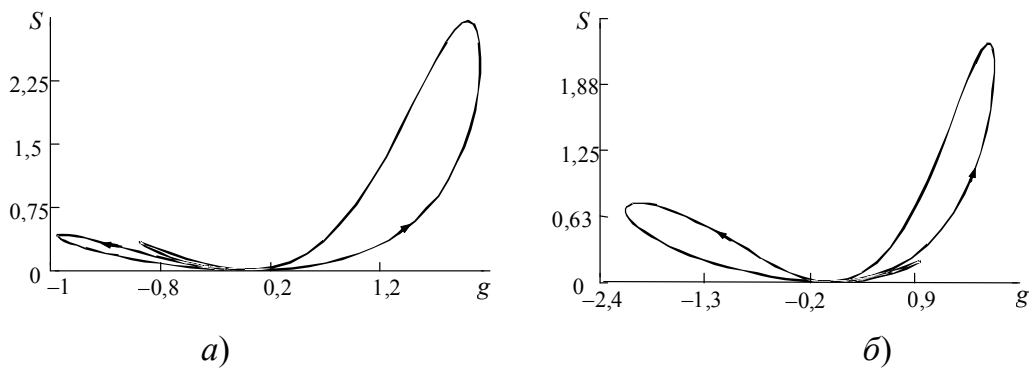


Рис. 2.9. Гистерезисная зависимость в плоскости (g, S) на границе слоев для системы Fe–Mo: *a* – нагрев – охлаждение; *б* – охлаждение – нагрев. Стрелка указывает движение вдоль линии с течением времени

2.4.2. Динамические свойства контактного теплообмена

Система Fe–Mo. Пусть в каждом варианте расчета толщины h_1 , h_2 фиксированные, и выполняется перестановка металлов, заполняющих эти слои. Основные свойства ПА-1 в зоне контакта видны из табл. 2.22: $A_T^{(z)}$ имеет при $h_1/h_2 \cong 3/7$ слабо выраженный минимум, $\bar{A}_T^{(z)}$ – максимум; отчетливо выражена асимметрия теплового потока и асимметрия гистерезисных процессов. Укажем поведение ПА-1 на левой и правой границах образца по мере роста h_1/h_2 .

Таблица 2.22

Влияние перестановки металлов на ПА-1 в зоне контакта при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

Нагрев – охлаждение													
$h_1 \cdot 10^2$, м	$h_2 \cdot 10^2$, м	Fe–Mo						Fe–V					
		$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_q^{(0)}$	$\bar{A}_q^{(0)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	0,90	0,903	1,160	0,801	1,031	0,412	0,577	1,050	1,217	0,753	0,981	1,402	0,993
0,20	0,80	0,873	1,230	0,620	0,857	0,317	0,344	1,239	1,604	0,760	1,250	2,748	1,646
0,30	0,70	0,865	1,241	0,505	0,714	0,160	0,192	1,287	1,710	0,764	1,386	3,428	1,823
0,40	0,60	0,868	1,221	0,421	0,590	0,081	0,118	1,299	1,696	0,774	1,440	3,792	1,909
0,50	0,50	0,875	1,183	0,350	0,477	0,038	0,066	1,299	1,667	0,787	1,461	3,579	1,705
0,60	0,40	0,885	1,137	0,287	0,371	0,018	0,049	1,304	1,646	0,798	1,486	2,500	1,607
0,70	0,30	0,893	1,099	0,228	0,276	0,007	0,030	1,306	1,639	0,801	1,510	1,591	1,187
0,80	0,20	0,893	1,091	0,179	0,201	0,003	0,019	1,311	1,635	0,779	1,503	0,909	0,968
0,90	0,10	0,880	1,114	0,156	0,155	0,002	0,011	1,296	1,646	0,703	1,359	0,567	0,648
Охлаждение – нагрев													
$h_1 \cdot 10^2$, м	$h_2 \cdot 10^2$, м	Fe–Mo						Fe–V					
		$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_q^{(0)}$	$\bar{A}_q^{(0)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	0,90	0,873	1,119	0,896	0,987	0,622	0,532	1,038	1,210	0,769	0,958	0,938	0,831
0,20	0,80	0,833	1,180	0,695	0,841	0,289	0,323	1,307	1,580	0,817	1,209	1,735	1,298
0,30	0,70	0,824	1,198	0,565	0,718	0,149	0,208	1,411	1,681	0,842	1,345	2,319	1,624
0,40	0,60	0,831	1,193	0,463	0,612	0,084	0,126	1,409	1,694	0,862	1,417	2,847	1,719
0,50	0,50	0,850	1,175	0,373	0,513	0,041	0,069	1,381	1,697	0,893	1,455	2,875	1,893
0,60	0,40	0,879	1,153	0,291	0,420	0,021	0,049	1,362	1,696	0,936	1,481	1,846	1,864
0,70	0,30	0,902	1,140	0,223	0,335	0,017	0,031	1,353	1,693	0,980	1,498	1,167	1,617
0,80	0,20	0,910	1,149	0,169	0,262	0,016	0,025	1,354	1,697	0,987	1,482	0,979	1,273
0,90	0,10	0,900	1,179	0,129	0,221	0,011	0,022	1,356	1,682	0,896	1,366	0,565	1,134

Режим «нагрев–охлаждение»: $A_q^{(0)}$ убывает от 0,9511 до 0,801; $\bar{A}_q^{(0)}$ убывает от 1,079 до 0,841; для температуры на правой границе $A_T^{(w)}$ убывает от 1,1017 до 0,8816, $\bar{A}_T^{(w)}$ растет от 0,8979 до 1,1137. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \in [6,8647; 8,6235]$, $(q_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \in [0,1577; 5,2757]$.

Режим «охлаждение – нагрев»: на левой границе монотонно убывает $A_q^{(0)}$ от 1,0035 до 0,7857; $\bar{A}_q^{(0)}$ – от 1,0451 до 0,8785, $A_T^{(w)}$ убывает от 1,0682 до 0,9008, $\bar{A}_T^{(w)}$ возрастает от 0,8615 до 1,1785. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \in [6,5031; 8,2564]$, $(q_z)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \in [0,1750; 7,2489]$.

При перестановке слоев металлов наблюдается очень сильное количественное проявление асимметрии-1 в зоне контакта (табл. 2.23). ПА-1 для гистерезисных процессов изменяются в широком диапазоне. Обращает на себя внимание усиление асимметрии температуры в сравнении с данными в табл. 2.22 (см. $A_T^{(z)}$ и $\bar{A}_T^{(z)}$). На левой и правой границах образца асимметрия проявляется незначительно. Об этом говорят следующие результаты.

Режим «нагрев – охлаждение»: $A_q^{(0)}$ немонотонно изменяется от 0,8343 до 0,9131; в промежуточной точке при $h_1/h_2 \cong 3/7$ имеет минимум, равный 0,7909; $\bar{A}_q^{(0)} \cong 0,88$; $A_T^{(w)} \cong 0,98$; $\bar{A}_T^{(w)} \cong 1,0$. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max} \in [7,7953; 9,5410]$, $(q_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max} \in [1,009; 6,5317]$.

Режим «охлаждение – нагрев»: $A_q^{(0)}$ немонотонно изменяется от 0,8387 до 0,9401; в промежуточной точке при $h_1/h_2 \cong 35/65$ имеет минимум, равный 0,7778; $\bar{A}_q^{(0)}$ немонотонно изменяется от 0,9421 до 0,9748, при $h_1/h_2 \cong 35/65$ имеет минимум, равный 0,8785; $A_T^{(w)} \cong 0,97$; $\bar{A}_T^{(w)} \cong 1,0$. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max} \in [7,2248; 9,4530]$, $(q_z)_{\text{Mo-Fe}}^{\max} \in [1,3561; 8,0893]$.

Таблица 2.23

**Влияние перестановки металлических слоев разной толщины
на ПА-1 в зоне контакта**

Нагрев – охлаждение												
$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–Mo						Fe–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,106	0,727	5,229	5,793	221,9	53,38	1,308	0,555	16,57	28,77	23451	795,7
0,20	1,032	0,855	1,963	2,407	19,22	7,874	1,214	0,654	6,076	12,28	2148	190,4
0,30	0,974	0,964	1,026	1,340	2,277	1,422	1,138	0,753	2,861	5,946	283,6	57,43
0,40	0,922	1,073	0,593	0,802	0,308	0,323	1,074	0,839	1,477	2,951	38,42	11,32
0,50	0,876	1,183	0,350	0,477	0,038	0,066	1,018	0,918	0,787	1,461	3,579	1,704
0,60	0,834	1,294	0,203	0,273	0,004	0,018	0,964	0,991	0,418	0,725	0,247	0,271
0,70	0,794	1,416	0,112	0,147	0,001	0,004	0,909	1,065	0,214	0,352	0,019	0,037
0,80	0,756	1,570	0,056	0,071	$5 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,849	1,157	0,097	0,153	0,001	0,008
0,90	0,719	1,779	0,024	0,027	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	0,776	1,345	0,032	0,046	$3 \cdot 10^{-5}$	0,001
Охлаждение – нагрев												
$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–Mo						Fe–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,142	0,766	5,345	6,428	194,8	34,00	1,335	0,565	21,14	23,17	5563	748,8
0,20	1,042	0,882	2,012	2,633	12,90	5,333	1,221	0,651	7,804	10,03	610,0	174,0
0,30	0,971	0,980	1,054	1,440	1,806	1,185	1,135	0,741	3,553	5,115	103,8	60,07
0,40	0,906	1,076	0,619	0,856	0,292	0,298	1,063	0,826	1,747	2,720	18,62	12,27
0,50	0,850	1,174	0,372	0,513	0,041	0,069	0,997	0,903	0,892	1,455	2,875	1,892
0,60	0,806	1,277	0,217	0,300	0,006	0,021	0,938	0,978	0,461	0,771	0,282	0,261
0,70	0,766	1,394	0,119	0,167	0,002	0,005	0,887	1,056	0,232	0,393	0,026	0,044
0,80	0,726	1,536	0,058	0,083	$4 \cdot 10^{-4}$	0,002	0,831	1,160	0,103	0,178	0,003	0,009
0,90	0,687	1,722	0,022	0,034	$4 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,754	1,343	0,032	0,056	$1 \cdot 10^{-4}$	0,001

Для асимметрии 2-го типа результаты представлены в табл. 2.24. Отметим здесь немонотонность параметров $B_q^{(0)}$, $\bar{B}_q^{(0)}$, $B_q^{(z)}$, $B_\sigma^{(z)}$. Существенно, что асимметрия-2 для энтропийных и гистерезисных процессов чутко реагирует на отношение толщин слоев металлов (см. $B_\sigma^{(z)}$, $B_G^{(z)}$ для систем Fe–Mo и Mo–Fe). По отношению к температуре асимметрия-2 практически отсутствует: $B_T^{(z)} \cong 1,0$; $\bar{B}_T^{(z)} \cong 1,0$; $B_T^{(w)} \cong 1,0$; $\bar{B}_T^{(w)} \cong 1,0$. Например, для системы Mo–Fe имеем наибольшее значение $\bar{B}_T^{(z)} = 1,1168$ при $h_1/h_2 = 9$.

Таблица 2.24

Влияние толщины слоев на ПА-2

$h_1 \cdot 10^2$, м	$h_2 \cdot 10^2$, м	Fe–Mo						Fe–V			
		$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$
0,10	0,90	0,7726	1,237	0,728	1,255	0,811	1,112	0,8099	1,234	1,4877	0,9359
0,20	0,80	0,7915	1,203	0,717	1,227	1,353	1,102	0,7974	1,214	1,5815	1,6014
0,30	0,70	0,8064	1,189	0,717	1,198	1,312	0,941	0,8038	1,170	1,4312	1,8270
0,40	0,60	0,8144	1,186	0,721	1,166	1,164	0,912	0,8199	1,115	1,2066	2,0584
0,50	0,50	0,8166	1,190	0,728	1,133	1,092	0,875	0,8305	1,064	0,9855	1,9623
0,60	0,40	0,8171	1,189	0,741	1,099	0,947	0,848	0,8274	1,031	0,7917	1,7308
0,70	0,30	0,8159	1,191	0,755	1,062	0,444	0,764	0,8162	1,015	0,7143	1,3571
0,80	0,20	0,8186	1,195	0,778	1,027	0,155	0,556	0,8078	1,005	0,416	1,0909
0,90	0,10	0,7918	1,202	0,901	0,972	0,105	0,352	0,8120	0,992	0,354	0,6479
$h_1 \cdot 10^2$, м	$h_2 \cdot 10^2$, м	Mo–Fe						V–Fe			
		$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$
0,10	0,90	0,8151	1,198	0,8074	1,202	1,2269	1,025	0,8276	1,205	0,995	0,9424
0,20	0,80	0,8168	1,203	0,8051	1,204	1,2313	1,037	0,8574	1,174	0,998	0,9729
0,30	0,70	0,8154	1,212	0,8021	1,206	1,2208	1,019	0,8852	1,137	0,968	1,0020
0,40	0,60	0,8109	1,223	0,7921	1,208	1,2089	0,976	0,9136	1,097	0,905	1,0573
0,50	0,50	0,8053	1,230	0,7744	1,219	1,1812	0,910	0,9419	1,060	0,791	1,0893
0,60	0,40	0,8012	1,234	0,7533	1,244	1,1059	0,842	0,9699	1,028	0,584	1,1364
0,70	0,30	0,7942	1,240	0,7373	1,287	1,0414	0,784	0,9984	1,007	0,523	1,1765
0,80	0,20	0,7880	1,249	0,7353	1,342	0,9085	0,746	1,0242	0,991	0,449	1,1273
0,90	0,10	0,7767	1,256	0,744	1,393	0,7126	0,708	1,0337	0,994	0,352	1,0597

Таким образом, если $d\lambda/dT < 0$ в обоих слоях металлов, то асимметрия теплопереноса сосредоточена в зоне контакта и хорошо проявляется в режимах «нагрев – охлаждение» и «охлаждение – нагрев».

С увеличением числа периодов воздействия [см. (2.10)] получаем при перестановке слоев металлов следующие результаты. Режим «нагрев – охлаждение»: $j = 3$, $A_T^{(z)} \in [0,7196; 1,1062]$, $A_q^{(z)} \in [0,0301; 5,3957]$; $j = 7$, $A_T^{(z)} \in [0,7213; 1,1063]$, $A_q^{(z)} \in [0,0226; 5,4112]$. Режим «охлаждение – нагрев»: $j = 3$, $A_T^{(z)} \in [0,6876; 1,1318]$, $A_q^{(z)} \in [0,0245; 5,3493]$; $j = 7$, $A_T^{(z)} \in [0,6874; 1,1317]$, $A_q^{(z)} \in [0,025; 5,345]$.

Остальные параметры асимметрии при росте j ведут себя похожим образом. Сравнение с данными табл. 2.23, 2.24 и практика наших расчетов говорят о том, что увеличение длительности периоди-

ческого воздействия не дает значительных качественных и количественных отличий от значений ПА-1 и ПА-2 при $j = 1$.

Система Fe–V. Сразу отметим, что отличия от системы Fe–Mo имеют прежде всего количественный характер; по ряду признаков наблюдаются интересные в физическом отношении качественные различия.

Изученные варианты перестановки металлов при фиксированных толщинах слоев (табл. 2.22) позволяют утверждать следующее. Здесь имеется немонотонность для $A_q^{(z)}$ и $\bar{A}_q^{(z)}$, в то время как асимметрия по отношению к температуре практически отсутствует: $A_T^{(z)} \cong 1,0$; $A_T^{(w)} \cong 1,0$; $\bar{A}_T^{(w)} \cong 0,97$.

Режим «нагрев – охлаждение»: $\bar{A}_T^{(z)}$ возрастает от 0,7703 до 0,9686. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\max} \in [6,854; 8,9732]$, $(q_z)_{\text{Fe-V}}^{\max} \in [0,1576; 3,7109]$.

Режим «охлаждение – нагрев»: $\bar{A}_T^{(z)}$ возрастает от 0,7897 до 0,9614. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{Fe-V}}^{\max} \in [6,5028; 8,8195]$, $(q_z)_{\text{Fe-V}}^{\max} \in [0,1941; 4,5817]$.

Перестановка слоев металлов (табл. 2.23) приводит к ярко выраженной асимметрии-1 по отношению к температуре и тепловому потоку в зоне контакта; параметры асимметрии гистерезисных процессов изменяются в очень широком интервале.

Режим «нагрев – охлаждение»: $A_q^{(0)}$ немонотонно изменяется от 1,1611 до 1,1724; в промежуточной точке при $h_1 / h_2 \cong 6/4$ имеет максимум, равный 1,3068; похожим образом ведет себя $\bar{A}_q^{(0)}$. Кроме того, $A_T^{(w)} \cong 1,0$; $\bar{A}_T^{(w)} \cong 0,97$. Тепловое состояние контакта: $(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\max} \in [6,8584; 8,8317]$, $(q_z)_{\text{V-Fe}}^{\max} \in [0,224; 4,9252]$.

В режиме «охлаждение – нагрев» поведение $A_q^{(0)}$, $\bar{A}_q^{(0)}$, $A_T^{(w)}$, $\bar{A}_T^{(w)}$ аналогичное, а тепловое состояние контакта такое: $(T_z)_{\text{V-Fe}}^{\max} \in [6,6034; 8,6238]$, $(q_z)_{\text{V-Fe}}^{\max} \in [0,2167; 5,9512]$.

Для ассимметрии-2 (табл. 2.24) оказывается по-прежнему существенным порядок расположения слоев металлов, когда речь идет о производстве энтропии и о гистерезисе.

Остальные ПА-2 (для Fe–V и V–Fe) ведут себя следующим образом: $B_q^{(0)} \cong 0,82$; $\bar{B}_q^{(0)} \cong 1,22$; $B_T^{(z)} \cong 1,0$; $\bar{B}_T^{(z)} \cong 1,0$; $B_T^{(w)} \cong 1,0$; $\bar{B}_T^{(w)} \cong 1,0$.

Расчеты при $j = 3; 7$ показали, что и для этой пары металлов увеличение числа периодов не дает существенных изменений поведения системы в сравнении с $j = 1$.

Таким образом, тепловое взаимодействие металлов в системе Fe–V находится под влиянием конкуренции знаков производных $(d\lambda/dT)_{\text{Fe}} < 0$, $(d\lambda/dT)_{\text{V}} > 0$. При одинаковых по своей природе внешних термических воздействиях появляются значительные количественные и (или) качественные отличия от системы Fe–Mo.

2.4.3. Роль знака производной $d\lambda/dT$

Рассмотренные выше два типа асимметрии наблюдаются также в системах Fe–W ($d\lambda/dT$ – одного знака) и W–V ($d\lambda/dT$ – разных знаков) (табл. 2.25–2.27).

Таблица 2.25

Влияние перестановки металлов на ПА при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

Нагрев–охлаждение												
$h_1 \cdot 10^2$, м	Fe–W						W–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_q^{(0)}$	$\bar{A}_q^{(0)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	0,899	1,190	0,807	1,043	0,720	0,577	0,977	1,006	0,907	0,895	2,006	1,670
0,20	0,867	1,270	0,610	0,844	0,292	0,316	1,319	1,496	1,229	1,344	8,971	4,604
0,30	0,858	1,282	0,490	0,687	0,135	0,188	1,505	1,799	1,554	1,833	25,67	7,506
0,40	0,860	1,258	0,402	0,556	0,064	0,109	1,592	1,943	1,914	2,405	61,04	16,44
0,50	0,867	1,216	0,329	0,440	0,028	0,056	1,626	2,007	2,349	3,162	141,5	28,90
0,60	0,876	1,165	0,264	0,335	0,013	0,030	1,654	2,029	2,915	4,245	278,7	36,69
0,70	0,884	1,125	0,207	0,244	0,005	0,019	1,651	2,048	3,677	5,790	639,8	56,52
0,80	0,883	1,118	0,160	0,174	0,002	0,014	1,650	2,051	4,563	7,855	1477	128,3
0,90	0,869	1,148	0,123	0,130	0,001	0,014	1,667	2,091	5,148	9,174	1776	261,8
Охлаждение – нагрев												
$h_1 \cdot 10^2$, м	Fe–W						W–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_q^{(0)}$	$\bar{A}_q^{(0)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,025	1,046	0,913	0,991	0,630	0,599	0,922	1,044	0,848	0,926	1,378	1,401
0,20	0,885	0,935	0,695	0,823	0,269	0,330	1,321	1,509	1,200	1,359	5,480	3,205
0,30	0,818	0,883	0,553	0,689	0,128	0,204	1,575	1,770	1,570	1,811	15,15	4,746
0,40	0,785	0,862	0,443	0,576	0,066	0,114	1,706	1,896	2,004	2,318	35,76	11,21
0,50	0,771	0,853	0,349	0,474	0,031	0,056	1,766	1,963	2,590	2,925	85,12	23,91
0,60	0,762	0,846	0,267	0,381	0,015	0,030	1,800	1,987	3,443	3,709	177,0	51,58
0,70	0,758	0,847	0,200	0,297	0,006	0,018	1,821	2,001	4,672	4,771	463,5	188,8
0,80	0,749	0,844	0,153	0,229	0,003	0,013	1,831	2,004	6,199	6,103	1226	571,8
0,90	0,737	0,843	0,121	0,180	0,001	0,007	1,844	1,996	7,514	6,760	1568	1524

Таблица 2.26

**Влияние перестановки металлических слоев разной толщины
на ПА в зоне контакта**

Нагрев–охлаждение												
$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–W						W–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,090	0,756	4,812	5,237	170,4	53,80	1,396	0,509	31,24	37,26	29710	16100
0,20	1,018	0,884	1,815	2,174	12,23	6,023	1,344	0,554	13,51	17,84	52931	2978
0,30	0,962	0,991	0,954	1,218	1,534	1,276	1,293	0,603	7,116	9,346	6347	529,0
0,40	0,912	1,102	0,555	0,735	0,211	0,272	1,240	0,658	4,016	5,345	887,6	102,9
0,50	0,867	1,216	0,329	0,440	0,028	0,056	1,184	0,718	2,349	3,162	141,5	28,98
0,60	0,826	1,329	0,191	0,253	0,004	0,012	1,127	0,787	1,389	1,911	19,164	5,844
0,70	0,788	1,454	0,106	0,138	0,001	0,003	1,067	0,862	0,803	1,135	2,586	0,800
0,80	0,752	1,607	0,053	0,067	$5 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-4}$	1,006	0,940	0,415	0,592	0,250	0,196
0,90	0,717	1,807	0,021	0,026	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	0,923	1,076	0,149	0,219	0,012	0,026
Охлаждение – нагрев												
$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–W						W–V					
	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$	$A_T^{(z)}$	$\bar{A}_T^{(z)}$	$A_q^{(z)}$	$\bar{A}_q^{(z)}$	$A_\sigma^{(z)}$	$A_G^{(z)}$
0,10	1,120	0,794	4,968	5,845	134,1	26,42	1,448	0,527	39,05	32,70	$2 \cdot 10^5$	25956
0,20	1,026	0,909	1,867	2,390	10,49	4,128	1,391	0,569	15,66	15,34	34966	3470,
0,30	0,956	1,006	0,980	1,314	1,355	1,053	1,333	0,615	7,983	8,363	4004	517,7
0,40	0,894	1,104	0,578	0,786	0,216	0,245	1,274	0,666	4,437	4,881	523,1	86,33
0,50	0,840	1,203	0,349	0,474	0,031	0,056	1,211	0,722	2,590	2,924	85,21	23,82
0,60	0,798	1,309	0,205	0,279	0,004	0,014	1,139	0,784	1,555	1,761	12,09	6,680
0,70	0,758	1,426	0,113	0,156	0,001	0,003	1,063	0,850	0,919	1,034	1,756	1,734
0,80	0,721	1,567	0,057	0,079	$1 \cdot 10^{-4}$	0,001	0,991	0,926	0,474	0,541	0,193	0,525
0,90	0,685	1,745	0,022	0,031	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0,899	1,051	0,163	0,191	0,010	0,082

Таблица 2.27

Влияние толщины слоев на ПА-2

$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–W						W–V					
	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$
0,10	0,761	1,244	0,713	1,263	1,414	0,994	0,841	1,228	0,832	1,246	1,438	1,078
0,20	0,785	1,209	0,706	1,234	1,339	0,971	0,841	1,216	0,827	1,246	1,497	1,217
0,30	0,804	1,191	0,708	1,203	1,316	0,941	0,828	1,222	0,819	1,250	1,464	1,250
0,40	0,813	1,186	0,714	1,170	1,170	0,919	0,806	1,237	0,805	1,260	1,428	1,123
0,50	0,816	1,187	0,722	1,136	1,091	0,888	0,789	1,250	0,783	1,282	1,385	0,925

Окончание табл. 2.27

$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–W						W–V					
	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$
0,60	0,815	1,193	0,735	1,102	1,053	0,841	0,777	1,261	0,753	1,318	1,325	0,668
0,70	0,813	1,186	0,750	1,066	0,984	0,817	0,768	1,267	0,723	1,356	1,274	0,365
0,80	0,814	1,194	0,757	1,032	0,938	0,752	0,762	1,273	0,706	1,379	1,191	0,318
0,90	0,821	1,192	0,751	1,016	0,885	0,722	0,755	1,282	0,713	1,483	1,127	0,298
Охлаждение – нагрев												
$h_1 \cdot 10^2,$ м	Fe–W						W–V					
	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$	$B_q^{(0)}$	$\bar{B}_q^{(0)}$	$B_q^{(z)}$	$\bar{B}_q^{(z)}$	$B_\sigma^{(z)}$	$B_G^{(z)}$
0,10	0,815	1,197	0,807	1,201	1,238	1,032	0,795	1,275	0,778	1,289	0,988	0,904
0,20	0,816	1,200	0,805	1,203	1,235	1,012	0,843	1,228	0,808	1,259	0,914	0,847
0,30	0,813	1,207	0,798	1,207	1,245	0,987	0,866	1,203	0,827	1,236	0,864	0,790
0,40	0,807	1,217	0,787	1,212	1,215	0,958	0,863	1,207	0,844	1,215	0,837	0,766
0,50	0,799	1,225	0,767	1,224	1,204	0,890	0,857	1,223	0,863	1,186	0,833	0,765
0,60	0,792	1,231	0,744	1,252	1,194	0,828	0,845	1,235	0,889	1,151	0,842	0,939
0,70	0,785	1,237	0,727	1,298	1,163	0,752	0,847	1,237	0,918	1,119	0,923	1,222
0,80	0,773	1,250	0,726	1,357	1,147	0,665	0,846	1,243	0,959	1,071	0,988	1,420
0,90	0,763	1,263	0,736	1,410	1,113	0,488	0,834	1,224	1,041	1,094	0,995	1,739

С учетом изложенного в п. 2.4.3 эти данные не требуют дополнительных пояснений.

Глава 3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

В данной главе изучается генерация двумерных периодических тепловых полей в системе «локально-неравновесная среда – объемный источник энергии». Прикладные аспекты этой проблемы связаны прежде всего с явлением взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку. Представленная теплофизическая модель позволяет определить основные типы периодических структур и проанализировать динамические свойства тепловых полей в их зависимости от колебательно-релаксационных режимов в системе «среда – источник энергии». Содержание главы основано на публикациях [32]–[41].

3.1. Тепловая модель периодической кристаллизации

3.1.1. Предварительные замечания

Взрывная кристаллизация наблюдается в пленках аморфных веществ, напыленных на подложку [42]–[44]. Этот процесс инициируется локальным внешним воздействием – механическим или тепловым: укол пленки иглой, нагрев лазерным или электронным лучом. Наблюдаемые в экспериментах границы плоских кристаллических участков имеют периодическую структуру.

Укажем причины возникновения взрывной (ударной) кристаллизации аморфных веществ [45]. На устойчивость аморфной среды по отношению к кристаллизации влияют два физических параметра: частота образования зародышевых кристаллов; скорость роста этих зародышей. Для аморфного состояния оба эти параметра являются возрастающими функциями температуры, поэтому в процессе кристаллизации существует положительная обратная связь между скоростью кристаллизации и выделением теплоты фазового перехода. Из-за такой обратной связи малые тепловые возмущения могут лавинообразно нарастать и приводить к развитию взрывной кристаллизации. Именно тепловой аспект этого вопроса составляет предмет данного исследования.

В задаче о взрывной кристаллизации аморфных пленок физические предпосылки применения модели локально-неравновесного теп-

лопереноса состоят в следующем: 1) фронт кристаллизации движется скачкообразно, с периодическими остановками [42]. Это означает, что модуль ускорения $|dN/dt|$ изменяется в широком диапазоне; например, при $N \sim 8$ м/с, $|dN/dt| \sim N/\gamma \sim 4 \cdot 10^8$ м/с²; 2) в закристаллизованной области появляются периодически расположенные полосы, а также «лепестки» и «чешуйки» [42], [46], [47]. В дополнение к этому отметим, что и для кристаллизации металла в изложнице характерны периодические полосчатые структуры [49]. Скоростная кристаллизация, присущая лазерной обработке, сопровождается формированием ячеистых структур [50]. Возможны варианты, когда внешние структурные формы взрывной кристаллизации аналогичны кругам на воде, распространяющимся от брошенного в нее камня [42]. В книге [42] Л. Н. Александров высказал предположение о волновой природе взрывной (ударной) кристаллизации. Отметим еще, что авторы [48] при качественном анализе результатов своих экспериментальных наблюдений применяли модель, ассоциирующуюся с последовательным падением многих кегль. Объективная трудность при теоретическом исследовании взрывной кристаллизации заключается в том, что экспериментальные работы по этой проблеме имеют в основном качественный характер, а именно измеряется скорость фазовой границы кристаллизации (**ФГК**) и проводится качественный анализ влияния физических параметров процесса на морфологические свойства кристаллических участков пленки. Физические и физико-химические причины образования периодической неоднородности могут быть весьма разнообразными. Наша цель состоит в том, чтобы дать наглядное теплофизическое истолкование условий развития периодических структур при кристаллизации.

3.1.2. Функции источников

Рассмотрим волновой теплоперенос, который определяется уравнением (1.9):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = w^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + k_v(T), \quad (3.1)$$

где $k_v = q_v / (c\gamma)$. В одномерном процессе нужно принять $\partial T / \partial y \equiv 0$. Для жидкой (аморфной) и кристаллической фаз предполагаем, что $\lambda_l = \lambda_s$, $(c\gamma)_l = (c\gamma)_s$. Уравнение (3.1) применим к качественному

описанию тепловых процессов при периодической кристаллизации. Функции источников записываем в виде:

$$k_v(T) = k_v^{(1)}(T) + k_v^{(2)}(T); \quad (3.2)$$

$$k_v^{(1)}(T) = a_1 \exp(T - T_c) = b_1 \exp T, \quad b_1 = a_1 \exp(-T_c); \quad (3.3)$$

$$k_v^{(2)}(T) = a_2 \exp[-2(T - T_a)] = b_2 \exp(-2T), \quad b_2 = a_2 \exp(2T_a); \quad (3.4)$$

$$b_1, b_2 - \text{const}; \quad T_a, T_c - \text{const}.$$

Это аналогично тому, что было взято в эллиптической задаче [51] для зависимости завихренности от функции тока при исследовании двумерного стационарного течения невязкой жидкости. В дальнейшем воспользуемся для наших целей некоторыми математическими результатами работы [51]. В целом содержание § 3.1 является подробным изложением результатов статьи [32].

При обезразмеривании уравнений берем масштабы величин (они отмечены индексом b), обеспечивающие инвариантность размерной и безразмерной форм записи: $\lambda_b t_b = x_b^2 c_b$, $\lambda_b T_b = x_b^2 (q_v)_b$ и т. д. (см. § 1.1). Будем рассматривать два физических явления.

1. *Периодическая кристаллизация аморфной пленки на подложке.* Доминируют два тепловых процесса: 1) тепловыделение на фронте затвердевания; 2) теплоотдача в подложку. Моделируем эту ситуацию двумя конкурирующими источниками энергии. Положительный источник $k_v^{(1)}(T) > 0$ локализован вблизи изотермы $T = T_c$, которая ассоциируется с фазовой границей; T_c – равновесная температура кристаллизации. Сток энергии $k_v^{(2)}(T) < 0$ локализован в окрестности изотермы $T = T_a$, которая ассоциируется с холодной подложкой. Аналогичная ситуация наблюдается при периодической кристаллизации расплава металла в изложнице: здесь тоже существует конкуренция между выделением кристаллизационного тепла и теплоотдачей в стенку изложницы. Тепловое поле в образующейся твердой фазе изучаем между двумя изотермами, $T \in [T_a, T_c]$. Для наглядности укажем зависимость коэффициентов a_1, a_2 в (3.3), (3.4) от основных параметров процесса: $a_1 = LN / (c\gamma a^0)$, $a_2 = q / (c\gamma a^0)$, где $N, |q|$ – характерные (например, максимальные) скорость фазовой границы и модуль теплового потока в подложку; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества; величина a^0 имеет размерность длины.

II. *Взрывная кристаллизация с учетом «горячих» зародышевых центров.* Согласно [52], [53] именно учет распределенных в объеме аморфной фазы зародышевых центров кристаллизации позволяет объяснить большую скорость фронта фазовых превращений: 1) «путь кристаллизации» сокращается за счет встречающихся кристаллических «мостиков»; 2) растущие «горячие» зародыши экранируют кристаллизационное тепло. Такие процессы можно моделировать двумя положительными источниками энергии: в работе [45] решена параболическая задача о скорости движения кристаллизационной автоволны в аморфной среде с распределенными в ней зародышевыми кристаллами. Ряд теплофизических аспектов проблемы высокоскоростной кристаллизации изложен в [10].

Для задачи II применяем функции источников (3.2)–(3.4). Так же как в задаче I, источник $k_v^{(1)}(T) > 0$ является образом фазовой границы кристаллизации. Источник $k_v^{(2)}(T) > 0$ локализован вблизи изотермы $T = T_a < T_c$, характерной для аморфной фазы. Коэффициент a_2 в (3.4) запишем по аналогии с формулой [45] для мощности источника тепловыделения в зоне роста зародышевых кристаллов:

$$a_2 = LN_1 l^2 [c\gamma l_*^3 |1 - (N/w)|^3]^{-1}, \quad (3.5)$$

где l , N_1 – характерные линейный размер и линейная скорость роста кристалла в аморфной фазе; l_* – минимальное расстояние между зародышами. Тепловое поле изучаем в области перед фазовой границей, $T \in [T_a, T_c]$.

3.1.3. Дозвуковой процесс: конкуренция двух источников энергии

Для задачи I рассмотрим автомодельный процесс, в котором температура зависит от двух аргументов типа распространяющейся волны:

$$\alpha = x + at, \quad \beta = y + bt; \quad a, b - \text{const.}$$

Волновое уравнение теплопереноса (3.1) принимает вид:

$$(a^2 - w^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + 2ab \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha \partial \beta} + (b^2 - w^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = k_v(T). \quad (3.6)$$

Источниковый член определяется формулами (3.2)–(3.4), причем $b_1 > 0$, $b_2 < 0$. Тепловой аналог газодинамического числа Маха да-

ется формулой $M^2 = (a^2 + b^2)/w^2$. Основным интерес представляет дозвуковой процесс, когда $M^2 < 1$, и уравнение (3.6) имеет эллиптический тип. Применяем характеристические переменные

$$\xi = \beta - k_1\alpha, \quad \eta = -k_2\alpha$$

и записываем (3.6) в канонической форме:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = h_1 \exp T + h_2 \exp(-2T); \quad (3.7)$$

$$h_1 = b_1 / [(a^2 - w^2)k_2^2] < 0, \quad h_2 = b_2 / [(a^2 - w^2)k_2^2] > 0, \quad (3.8)$$

$$k_1 = ab/(a^2 - w^2), \quad k_2 = w(w^2 - a^2 - b^2)^{1/2}/(a^2 - w^2).$$

Таким образом, в дозвуковом процессе ($a^2 < w^2$) происходит инверсия знака источника энергии $k_v(T)$, [см. (3.8), (3.3), (3.4)]. Уравнение (3.7) – математический аналог стационарного уравнения для функции тока невязкого течения. При построении решения и его анализе следуем алгоритму [51]:

$$E \equiv \exp T = f(\eta) + g(\xi) > 0; \quad (3.9)$$

$$(f')^2 = H_1(f), \quad H_1 = 2h_1 f^3 - \mu f^2 + 2h_0 f + a_0; \quad (3.10)$$

$$(\dot{g})^2 = H_2(g), \quad H_2 = 2h_1 g^3 + \mu g^2 + 2h_0 g - h_2 - a_0. \quad (3.11)$$

Штрих и точка над символом функции означают обыкновенное дифференцирование по аргументам η и ξ соответственно. Здесь a_0, h_0, μ – произвольные постоянные. Качественный анализ уравнений (3.10), (3.11) дает следующие результаты.

Если алгебраическое уравнение $H_1(f) = 0$ имеет три действительных различных корня f_1, f_2, f_3 , таких, что $f_1 < f_2 < f_3$, то уравнение $\tilde{H}_2(g) \equiv h_2 + H_2(g) = 0$ имеет корни $\tilde{g}_1 = -f_1, \tilde{g}_2 = -f_2, \tilde{g}_3 = -f_3$. График функции $H_2(g)$ получается из графика $\tilde{H}_2(g)$ параллельным переносом вниз вдоль оси ординат. Далее для наших целей достаточно взять $h_0 = 0$. Для двух корней f_2, f_3 имеем формулы:

$$\mu/(2h_1) = (f_2^2 + f_2 f_3 + f_3^2)/(f_2 + f_3), \quad a_0/(2h_1) = f_2^2 f_3^2/(f_2 + f_3).$$

Примем сначала, что $a_0 < 0$, $\mu < 0$, и корни уравнения $H_1(f) = 0$ такие: $f_1 < 0 < f_2 < f_3$. Тогда функция $H_1(f)$ имеет два экстремума (рис. 3.1): минимум при $f_* = 0$, максимум при $f_{**} = \mu / (3h_1)$. Следовательно, $f(\eta)$ – периодическая функция; ее область значений: $f \in [f_2, f_3]$. Далее берем $a_0 + h_2 < 0$ и на основе поведения зависимости $H_2(g)$ получаем корни $g_3 < g_2 < 0 < g_1$, для которых выполнены равенства:

$$\frac{\mu}{2h_1} = \frac{-(g_2^2 + g_2g_3 + g_3^2)}{g_2 + g_3}, \quad \frac{a_0 + h_2}{2h_1} = \frac{-g_2^2g_3^2}{g_2 + g_3}.$$

Это означает, что функция $g(\xi)$ – периодическая при $g \in [g_2, g_1]$. Ясно, что здесь выполняется ограничение $E > 0$.

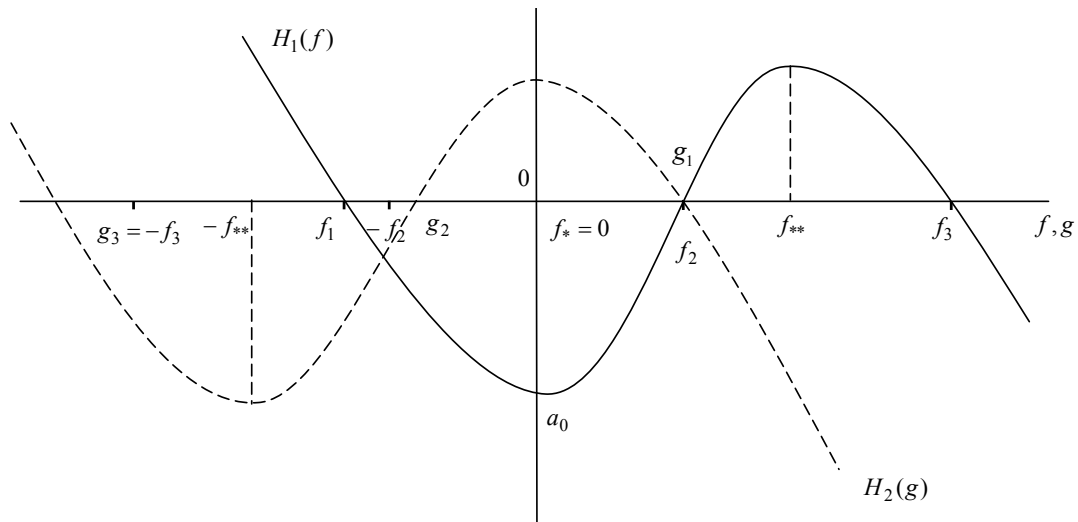


Рис. 3.1. Схема расположения корней $H_1(f) = 0$, $H_2(g) = 0$ в дозвуковом процессе при $a_0 < 0$, $\mu < 0$. Область периодических решений $f \in [f_2, f_3]$, $g \in [g_2, g_1]$

Теперь допустим, что $a_0 > 0$, $\mu > 0$, и корни уравнения $H_1(f) = 0$ такие: $f_1 < f_2 < 0 < f_3$. Тогда $\tilde{g}_3 < 0 < \tilde{g}_2 < \tilde{g}_1$, и получаем корни уравнения $H_2(g) = 0$: $g_3 < 0 < g_2 < g_1$ (рис. 3.2). Функция $f(\eta)$ – периодическая и $f \in [f_2, f_3]$. Функция $g(\xi)$ тоже периодическая, $g \in [g_2, g_1]$. Выполнено неравенство $f_2 + g_2 > 0$, поэтому $E > 0$. Итак, имеются два варианта для корней f_1, f_2, f_3 , когда существуют периодические решения по каждому аргументу ξ и η . В первом случае $f > 0$ в своей области значений, во втором случае $g > 0$ в своей области значений.

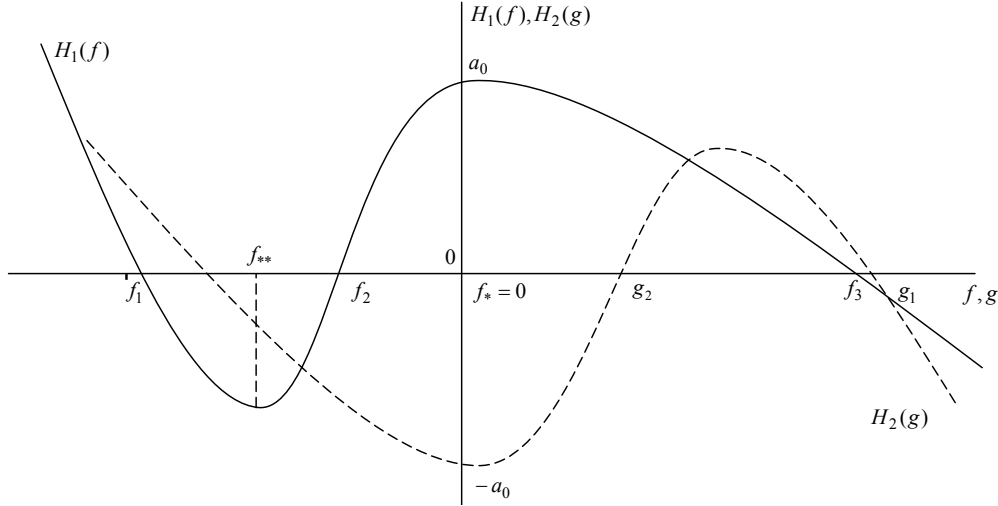


Рис. 3.2. Схема расположения корней $H_1(f) = 0$, $H_2(g) = 0$ в дозвуковом процессе при $a_0 > 0$, $\mu > 0$. Область периодических решений $f \in [f_2, f_3]$, $g \in [g_2, g_1]$

Обсудим поведение изотерм $T(\xi, \eta) = T_i = \text{const}$. Из формулы для линии уровня $E(T_i) \equiv E_i = f(\eta) + g(\xi)$ следует уравнение линии изотермы

$$d\eta / \dot{g}(\xi) = d\xi / [-f'(\eta)] = d\alpha^1,$$

где α^1 – параметр. Соответствующая динамическая система принимает форму записи

$$d\xi / d\alpha^1 = -f'(\eta), \quad d\eta / d\alpha^1 = \dot{g}(\xi). \quad (3.12)$$

После преобразования сдвига по аргументам ξ , η для уравнений (3.10), (3.11) получается, что у функций $f(\eta)$, $g(\xi)$ максимум находится в нуле. Тогда имеем $f = f_{\max}$ при $\eta = M\tau_f$; $f = f_{\min}$ при

$$\eta = [M + (1/2)]\tau_f,$$

где τ_f – период функции $f(\eta)$; M – любое целое число. Значение $g = g_{\max}$ получается при $\xi = M\tau_g$; $g = g_{\min}$ – при

$$\xi = [M + (1/2)]\tau_g,$$

где τ_g – период функции $g(\xi)$. Точки экстремума функций $f(\eta)$, $g(\xi)$ являются точками покоя динамической системы (3.12). Характеристические корни r удовлетворяют уравнению

$$r^2 + \ddot{g}(\xi)f''(\eta) = 0.$$

Значит, точки плоскости (η, ξ) , в которых $f(\eta)$, $g(\xi)$ имеют экстремумы одинакового вида (или максимум, или минимум, т. е. $\ddot{g}f'' > 0$), являются особыми точками типа «центр» для динамической системы (3.12). В точках, где $\ddot{g}f'' < 0$, имеется «седло». Точка (ξ_0, η_0) считается критической, если $[f'(\eta_0)]^2 + [g'(\xi_0)]^2 = 0$. Соответствующее критическое значение температуры равно $T_0 = T(\xi_0, \eta_0)$, т. е. $E_0 = E(T_0)$. Таким образом, в классе решений (3.9)–(3.11) существуют четыре критических значения:

$$E(T_1) = f_3 + g_1, \quad E(T_2) = f_2 + g_1, \quad E(T_3) = f_3 + g_2, \quad E(T_4) = f_2 + g_2.$$

Изотермам T_1, T_4 соответствуют устойчивые состояния равновесия типа «центр». В силу периодичности решения каждая такая точка покоя содержится внутри замкнутой траектории, которая носит название «кошачий глаз». Изотермам T_2, T_3 соответствуют неустойчивые седловые особенности. Фазовый портрет динамической системы (3.12) иллюстрирует качественные свойства поля изотерм (рис. 3.3).

Линии $T = T_2$ и $T = T_3$ являются сепаратрисами системы (3.12), идущими из седла в седло. На рис. 3.3, а показано расположение изотерм при $T_3 < T_2$; седла лежат на линиях $\xi = \tau_g M / 2$; параллельные цепочки изотерм расположены в шахматном порядке. Для наглядности правую часть уравнения (3.7) представим в виде

$$(a^2 - w^2)k_v / [w^2(w^2 - a^2 - b^2)].$$

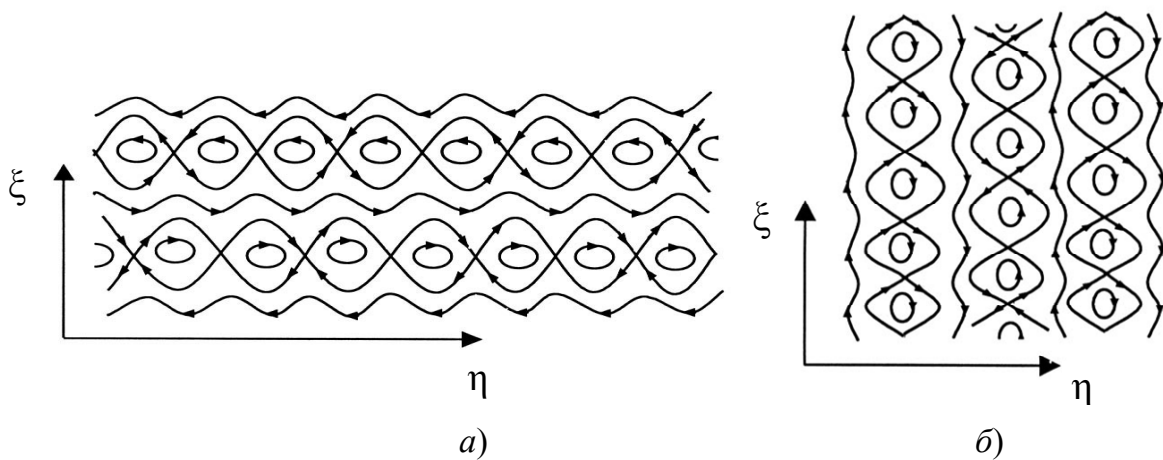


Рис. 3.3. «Кошачьи глаза» и шахматный порядок расположения цепочек изотерм в системе «пленка – подложка»

Для фиксированной цепочки это выражение имеет один знак, а для соседней цепочки этот знак меняется на противоположный. Такая инверсия обусловлена конкурирующим влиянием объемных источников энергии $k_v^{(1)}$ и $k_v^{(2)}$. На рис. 3.3, б дано расположение изотерм при $T_2 < T_3$; здесь седла лежат на линиях $\eta = \tau_f M / 2$. Для обоих вариантов на рис. 3.3 имеются изотермы, расположенные между цепочками. При $T_2 = T_3$ такие изотермы отсутствуют, т. е. соседние цепочки имеют общие границы.

В физической плоскости (x, y) данный процесс выглядит следующим образом. Линии $\eta = \text{const}$ перемещаются вдоль оси OX со скоростью $(-a)$. Линии $\xi = \text{const}$ перемещаются с дозвуковой скоростью

$$N_\xi = w^2 b / [(a^2 - w^2)^2 + a^2 b^2]^{1/2}.$$

В каждый фиксированный момент времени температура есть периодическая функция аргументов: $y - k_1 x$, $-k_2 x$. В каждой фиксированной точке (x, y) функция $E(T)$ является суперпозицией двух периодических функций аргументов $(b - k_1 a)t$, $-k_2 a t$. Периоды колебаний этих функций по времени t такие:

$$\tau_g / (b - k_1 a), \quad \tau_f / (-k_2 a).$$

Для каждой изотермы $T_i \in [T_a, T_c]$, $\beta = \beta_i(\alpha)$ можно записать скорость перемещения линии $E_i \equiv \exp T_i = f(\eta) + g(\xi)$:

$$N_E = \frac{a(d\beta_i/d\alpha) - b}{(d\beta_i/d\alpha)^2 + 1} = \frac{a[k_1 - k_2(d\xi/d\eta)] - b}{\{[k_1 - k_2(d\xi/d\eta)]^2 + 1\}^{1/2}}.$$

В точках изотермы, для которых $f = f_2$ либо $f = f_3$, имеем $d\xi/d\eta = 0$, т. е. в этих точках $N_E^2 = (ak_1 - b)^2 / (1 + k_1^2) = N_\xi^2$, что соответствует скорости перемещения ξ -линии. В точках изотермы, для которых $g = g_1$ либо $g = g_2$, имеем $d\xi/d\eta \rightarrow \infty$, т. е. в этих точках $N_E^2 = a^2$, что соответствует скорости перемещения η -линии. Отсюда становится ясным физический смысл параметров a, b : они характеризуют дозвуковые скорости перемещения изотерм в точках, где $f = f_2$, $f = f_3$, $g \in (g_2, g_1)$, либо $g = g_1$, $g = g_2$, $f \in (f_2, f_3)$.

Вычислим периоды колебаний. Работаем с уравнением (3.11). Функцию $H_2(g)$ запишем в виде:

$$H_2 = -2h_1(-g^3 + \tilde{\mu}g^2 + \tilde{h}_0g - \tilde{a}_0),$$

$$\tilde{\mu} = \frac{-\mu}{2h_1}, \quad \tilde{h}_0 = \frac{-h_0}{h_1}, \quad \tilde{a}_0 = \frac{a_0 + h_2}{(-2h_1)}.$$

Здесь $h_1 < 0$, $h_2 > 0$; знак константы h_0 пока не фиксируем. Сделаем замену переменной: $g = z + (\tilde{\mu}/3)$ и получим

$$H_2 = 2h_1[-z^3 + z(\tilde{h}_0 + \frac{\tilde{\mu}^2}{3}) + (\frac{2\tilde{\mu}^3}{27} + \frac{\tilde{\mu}\tilde{h}_0}{3} - a_0)].$$

Допустим, что три константы связаны двумя соотношениями:

$$1) \quad \tilde{h}_0 + \frac{\tilde{\mu}^2}{3} = 0, \quad \text{т. е. } \mu^2 / 12 = h_0 h_1 > 0; \tag{3.13}$$

$$2) \quad 2\tilde{\mu}^3 + 9\tilde{\mu}\tilde{h}_0 = 27(1 + \tilde{a}_0). \tag{3.14}$$

Тогда $H_2 = -2h_1(1 - z^3)$ и уравнение (3.11) принимает форму записи

$$\frac{dz}{(1 - z^3)^{\frac{1}{2}}} = \pm (-2h_1)^{\frac{1}{2}} d\xi, \quad z \leq 1.$$

Это дает возможность работать с эллиптическими интегралами 1-го рода.

Вариант 1:

$$(-2h_1)^{\frac{1}{2}} \xi = C \pm \int_{-\infty}^z \frac{dz}{(1 - z^3)^{1/2}}, \quad C \equiv \text{const};$$

$$(-2h_1)^{\frac{1}{2}} \xi = C \pm \frac{1}{\sqrt{3}} F(\varphi, k); \quad F(\varphi, k) = \chi; \quad \chi = \pm \sqrt{3} (-2h_1)^{\frac{1}{2}} \xi \mp C \sqrt{3};$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arccos \frac{z - 1 + \sqrt{3}}{z - 1 - \sqrt{3}},$$

$$k = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad \varphi = \text{am} \chi, \quad \cos \varphi = \text{cn} \chi; \quad \sin \varphi = \text{sn} \chi,$$

$$\text{sn}^2 \chi + \text{cn}^2 \chi = 1; \quad z = \frac{\sqrt{3} - 1 + (1 + \sqrt{3}) \text{cn} \chi}{\text{cn} \chi - 1}.$$

Здесь k – число, которое называется модулем эллиптической функции; эллиптический синус $\text{sn}(\chi, k)$ – периодическая функция χ периода \mathfrak{G}_χ . При изменении φ на 2π величина χ изменяется на

$$\mathfrak{G}_\chi = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = 4K(k),$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Следовательно, период колебаний по аргументу ξ равен

$$\mathfrak{G}_\xi = \frac{\mathfrak{G}_\chi}{\sqrt{3}(-2h_1)^{1/2}}. \quad (3.15)$$

Согласно (3.8),

$$h_1 = \frac{b_1(a^2 - w^2)}{w^2(w^2 - a^2 - b^2)}.$$

Отсюда ясна роль параметра $b_1 > 0$ источника энергии (3.3) на фазовой границе кристаллизации: $\mathfrak{G}_\xi \sim 1/\sqrt{b_1}$.

Вариант 2:

$$\pm (-2h_1)^{1/2} \xi + C = \int_z^1 \frac{dz}{(1-z^3)^{1/2}};$$

$$F(\varphi, k) = \chi, \quad \chi = \pm 3^{1/4} (-2h_1)^{1/2} \xi + \text{const}; \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}-1+z}{\sqrt{3}+1-z},$$

$$k = \sin \frac{5\pi}{12}, \quad z = \frac{(\sqrt{3}+1)\text{cn}\chi + 1 - \sqrt{3}}{1 + \text{cn}\chi},$$

$$\sin \varphi = \text{cn}\chi, \quad \cos \varphi = \text{sn}\chi.$$

Формула для периода \mathfrak{G}_χ такая же, как для варианта 1, и тогда

$$\mathfrak{G}_\xi = \frac{\mathfrak{G}_\chi}{3^{1/4}(-2h_1)^{1/2}}. \quad (3.16)$$

Теперь рассмотрим уравнение (3.10). Функцию $H_1(f)$ запишем в виде:

$$H_1 = -2h_1(-f^3 - \tilde{\mu}f^2 + \tilde{h}_0f - \tilde{a}_1),$$

где $\tilde{a}_1 = a_0/(-2h_1)$; остальные обозначения прежние. Сделаем замену переменной: $f = z_1 - (\tilde{\mu}/3)$ и получим

$$H_1 = -2h_1 \left[-z_1^3 + z_1 \left(\tilde{h}_0 + \frac{\tilde{\mu}^2}{3} \right) - \left(\tilde{a}_1 + \frac{\tilde{h}_0}{3} + \frac{2\tilde{\mu}^3}{27} \right) \right].$$

В дополнение к связям (3.13), (3.14) примем третье ограничение $2h_1 = h_2/2$, и тогда $H_1 = -2h_1(1 - z_1^3)$. Следовательно, имеем

$$\frac{dz_1}{(1 - z_1^3)^{1/2}} = \pm(-2h_1)^{1/2} d\zeta, \quad z_1 \leq 1.$$

Ясно, что должно быть $z_1 + z > 0$. Дальнейший анализ этого дифференциального уравнения полностью совпадает с построением решения для функции $z(\chi)$. Формулы для периода колебания сохраняют свой физический смысл.

3.1.4. Пульсации скорости изотермы

Для решения задачи II (см. п. 3.1.2) применяем одномерный вариант уравнения (3.1). Разделение переменных x и t выполняем, взяв форму записи решения, аналогичную эллиптической задаче:

$$E \equiv \exp T = f(x) + g(t) > 0; \tag{3.17}$$

$$w^2(f')^2 = F(f), \quad F = -2b_1f^3 + \mu f^2 - 2b_0f - a_0; \quad f' = df(x)/dx; \tag{3.18}$$

$$(\dot{g})^2 = G(g), \quad G = 2b_1g^3 + \mu g^2 + 2b_0g - a_0 - b_2, \quad \dot{g} = dg(t)/dt. \tag{3.19}$$

Здесь a_0, b_0, μ – произвольные постоянные; $b_1 > 0, b_2 > 0$. Проведем качественный анализ этих уравнений. Для этого изучим поведение действительных корней уравнений $F(f) = 0, G(g) = 0$. Трём действительным различным корням f_1, f_2, f_3 уравнения $F(f) = 0$ соответствуют три корня $\tilde{g}_1 = -f_3, \tilde{g}_2 = -f_2, \tilde{g}_3 = -f_1, f_1 < f_2 < f_3$ уравнения $\tilde{G} \equiv b_2 + G(g) = 0$. Уравнение $G(g) = 0$ имеет корни g_1, g_2, g_3 : $g_1 < g_2 < g_3$. Обсудим условия, при которых $g(t)$ – решение урав-

нения (3.19) – периодическая функция. Зависимость $G(g)$ имеет два экстремума: максимум при $g = g_* = (-\mu - D^{1/2})/(6b_1)$, минимум при $g = g_{**} = (-\mu + D^{1/2})/(6b_1)$. Здесь $D = \mu^2 - 12b_0b_1 > 0$, $\mu < 0$; $0 < g_* < g_{**}$. Возьмем три положительных корня уравнения $G(g) = 0$: $0 < g_1 < g_2 < g_3$ (рис. 3.4).

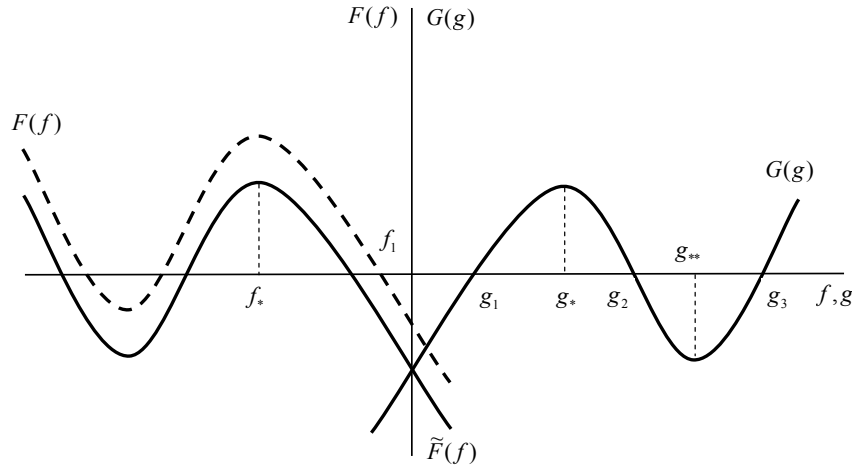


Рис. 3.4. Одномерный волновой процесс.
Схема расположения корней уравнений $F(f) = 0$, $G(g) = 0$

Тогда находим, что

$$g_1g_2 + g_2g_3 + g_1g_3 = b_0/b_1 > 0, \quad g_1 + g_2 + g_3 = -\mu/(2b_1),$$

$$g_1g_2g_3 = (a_0 + b_2)/(2b_1) > 0.$$

Функция $g(t) > 0$ – периодическая по аргументу t при $g \in [g_1, g_2]$. Уравнение $\tilde{F} \equiv F(f) - b_2 = 0$ имеет отрицательные корни $\tilde{f}_1 = -g_1$, $\tilde{f}_2 = -g_2$, $\tilde{f}_3 = -g_3$; $\tilde{f}_3 < \tilde{f}_2 < \tilde{f}_1 < 0$. График $F(f)$ получается из графика $\tilde{F}(f)$ параллельным переносом вверх вдоль оси ординат (рис. 3.5).

Следовательно, при $b_2 > 0$ получаем корень $f_1 < 0$, $F(f_1) = 0$ и такой, что $f_1 + g_1 > 0$. Ограничение $E > 0$ в (3.17) будет выполнено, если $f \in [f_0, f_1)$, когда начальное значение f_0 удовлетворяет неравенствам $(-g_1) < f_0 < f_1$. Константа a_0 удовлетворяет условию $a_0 + b_2 \geq 0$. Из формул (3.18) вычисляем:

$$w(df/dx) = [F(f)]^{1/2} > 0, \quad x \in [0, \infty); \quad x = 0, \quad f(0) = f_0; \quad x \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow f_1.$$

Для $x \in (-\infty, 0]$ формулы аналогичные. График функции $f(x)$ показан на рис. 3.6.

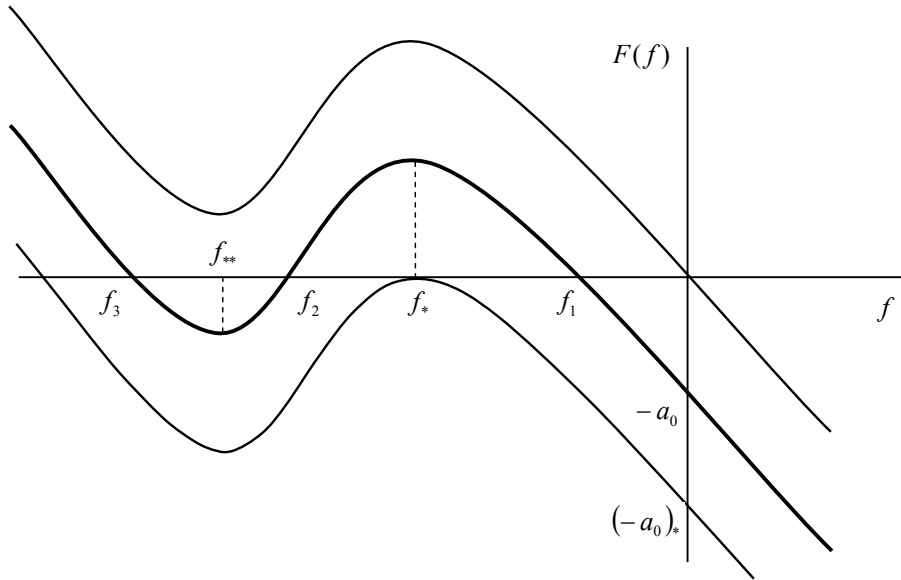


Рис. 3.5. Пороговое значение параметра $(-a_0^*)$

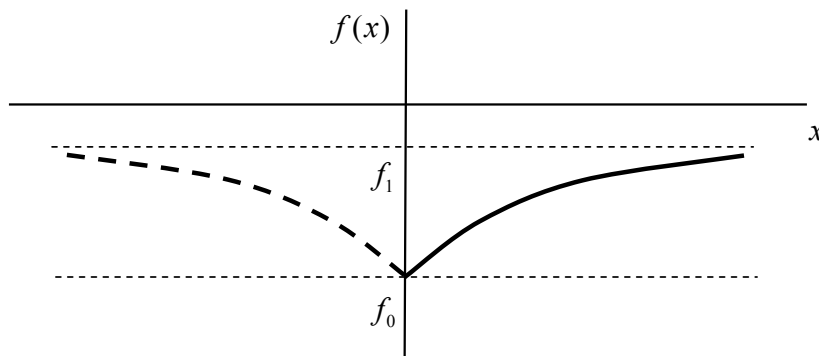


Рис. 3.6. Аперриодическое поведение функции $f(x)$

Для изотермы, идущей вправо ($dx > 0$), будет $df/dx > 0$. Для изотермы, идущей влево ($dx < 0$), будет $df/dx < 0$, т. е. по-прежнему $df > 0$. В обоих случаях $dF/df < 0$. Таким образом, температура изменяется на полуоткрытом интервале: $E \in [g_1 + f_0, g_2 + f_1)$. Возьмем изотерму $T = T_i \equiv \text{const}$: ее уравнение движения $x = x_i(t)$. Ясно, что $f[x_i(t)] = E_i - g(t)$ – периодическая по t функция и ограничена сверху значением $E_i - g_1$, а снизу – значением $E_i - g_2$, где $E_i = \exp T_i$. Любая изотерма из интервала $E_i \in [g_1 + f_0, g_2 + f_1)$ движется с конечной скоростью N_i : $N_i^2 / w^2 = G(g) / F[f(x_i)]$. Эта формула верна на любом ко-

нечном интервале x . Функция $N_i(t)$ периодически обращается в ноль; амплитуда колебаний скорости N_i – тоже периодическая функция времени (рис. 3.7).

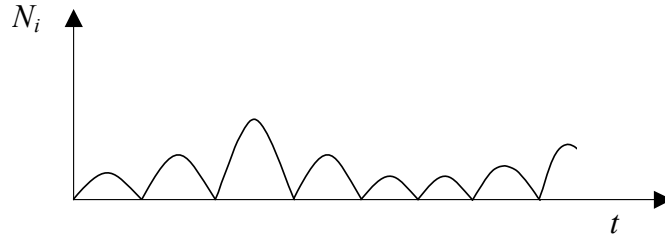


Рис. 3.7. Пульсации скорости фазовой границы взрывной кристаллизации

Этот колебательный процесс представляет собой своеобразные биения. Естественно, что данный вывод относится и к изотермам $T = T_a$, $T = T_c$, ограничивающим изучаемый температурный интервал. Далее в п. 3.1.5 будет показано, что существует двумерное решение с аналогичными свойствами. Такое поведение скорости фазовой границы объясняет наблюдаемые в экспериментах (см. [42] и [53]) характерные «лепестковые» и «чешуйчатые» структуры взрывной кристаллизации в пленках. В дополнение к изложенному выше отметим, что появление точек остановки фазовой границы кристаллизации в переохлажденном расплаве имеет принципиальное значение [54]–[55]: наличие неподвижной точки на линии роста кристалла является предвестником зарождения боковой ветви дендрита. Константа a_0 характеризует начальное (при $t = 0$) тепловое поле $T(x, 0)$ аморфной фазы. Имеем периодический во времени тепловой процесс, если a_0 и $b_2 > 0$ (параметр источника энергии в зоне роста зародышей) удовлетворяют оценкам $(-a_0^*) < (-a_0) < b_2$, где константа a_0 может быть и положительной, и отрицательной. Воспользуемся рис. 3.4, 3.5 и определим пороговое значение $(-a_0^*)$. Нужное нам решение $f(x)$ отсутствует, если $F(f_*) = 0$. Отсюда подсчитываем

$$-a_0^* = 2b_1 f_*^3 - \mu f_*^2 + 2b_0 f_* < 0,$$

где $f = f_* = -g_*$ – точка максимума функции $F(f)$. В итоге получаем

$$\frac{a_0^*}{b_1} = 2g_*^3 - 2g_*^2(g_1 + g_2 + g_3) + 2g_*(g_1g_2 + g_2g_3 + g_1g_3) > 0.$$

Решение дифференциального уравнения (3.19) представим в виде конечно-модового галеркинського приближения:

$$g(t) = l_0 + l_1 \sin kt + l_2 \cos kt + l_3 \sin 2kt + l_4 \cos 2kt + \dots \quad (3.20)$$

Приближения такого типа оказались эффективными при изучении нелинейного поведения распределенных кинетических систем с апериодической неустойчивостью [56]. Подставляя (3.20) в (3.19) и отбрасывая гармоники выше второй, получаем:

$$l_2 = 0, \quad l_3 = 0.$$

$$\frac{3}{2} b_1 l_1^2 = (l_4 - 2l_0)(2b_1 l_0 - b_1 l_4 + \mu) - 2k^2 l_4 - 2b_0 - 2b_1 \left(l_0^2 + \frac{l_4^2}{2} - l_0 l_4 \right); \quad (3.21)$$

$$l_1^2 \left(2b_1 l_4 - 3b_1 l_0 - \frac{k^2}{2} - \frac{\mu}{2} \right) + l_4 (6b_1 l_0^2 + 2\mu l_0 + 2b_0) + b_1 l_4^3 = 0; \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} l_1^2 \left(\frac{\mu}{2} - \frac{k^2}{2} + 3b_1 l_0 - \frac{3}{2} b_1 l_4 \right) + (\mu + 2b_1 l_0) \left(l_0^2 + \frac{l_4^2}{2} \right) = \\ = 2k^2 l_4^2 - 2b_1 l_0 l_4^2 - 2b_0 l_0 + a_0 + b_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Эти три алгебраических уравнения содержат частоту k и три коэффициента l_0, l_1, l_4 . Обсудим свойства данного решения:

$$g(t) = l_0 + l_1 \sin kt + l_4 \cos 2kt, \quad \dot{g}(t) = k \cos kt (l_1 - 4l_4 \sin kt).$$

Здесь $l_0 + l_4 = g(0)$ характеризует начальное значение температуры в фиксированной точке x ; $(l_0 - l_4)$ – это «среднее» значение, около которого происходят колебания:

$$kt_1 = \frac{\pi}{2}, \quad g(t_1) = (l_0 - l_4) + l_1, \quad kt_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad g(t_2) = (l_0 - l_4) - l_1.$$

Следовательно, $2l_1$ – размах колебаний. Вычисления показывают, что

$$k^2 = 2 \left(2b_1 l_4 - 3b_1 l_0 - \frac{\mu}{2} \right) + \frac{2l_4}{l_1^2} (6b_1 l_0^2 + 2\mu l_0 + b_1 l_4^2). \quad (3.24)$$

Тогда l_1^2 определяется как решение следующего уравнения:

$$(l_1^2)^2 - a(l_1^2) + c = 0,$$

$$a = \frac{2}{3} \left(18l_0l_4 - 10l_4^2 - 6l_0^2 - \frac{2b_0}{b_1} + \frac{3l_4\mu}{b_1} - \frac{2\mu l_0}{b_1} \right),$$

$$c = \frac{8}{3} l_4^2 \left(6l_0^2 + \frac{2l_0\mu}{b_1} + \frac{2b_0}{b_1} + l_4^2 \right).$$

Оценим параметры задачи, для которых это уравнение имеет один положительный корень:

$$2l_1^2 = a + \sqrt{a^2 - 4c}, \quad c < 0.$$

Для определенности примем $l_0 = (g_1 + g_2)/2$. В этом случае

$$c = \frac{8}{3} l_4^2 \left[l_4^2 - \frac{1}{2} (g_2 - g_1)^2 \right],$$

откуда следует, что нужно иметь $l_4^2 < (g_2 - g_1)^2 / 2$. Кроме того, получаем:

$$\frac{3}{2} a = 3l_4(g_1 + g_2 - 2g_3) + \frac{1}{2} (g_2 - g_1)^2,$$

$$\frac{k^2}{b_1} = 2[g_3 - g_1 \left(2\delta + \frac{1}{2} \right) + g_2 \left(2\delta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\delta}{l_1^2} (2\delta^2 - 1)(g_2 - g_1)^3].$$

Здесь $l_4 = \delta(g_2 - g_1)$, поэтому ясно, что $2\delta^2 < 1$. Естественное ограничение $k^2 > 0$ выполняется, если

$$D > \frac{l_4(1 - 2\delta^2)(g_2 - g_1)^2}{2l_1^2}, \quad D = 2\delta(g_2 - g_1) - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) + g_3.$$

Это неравенство будет верным при $D \geq 0$, если $\delta < 0$, т. е. $l_4 < 0$. Значит,

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} < \delta < 0, \quad l_1^2 > a > 0.$$

Проводя дальнейшее уточнение оценок, находим, что

$$2\sqrt{-c} < a < l_1^2 < a \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

Константа a_0 подсчитывается по формуле

$$\begin{aligned} \frac{a_0 + b_2}{b_1} = & (g_1 + g_2)(g_2 - g_1)^2 \delta^2 + g_1 g_2 (g_1 + g_2) + \\ & + (g_1 + g_2)^2 \left[\frac{1}{2}(g_1 + g_2) - 2\delta(g_2 - g_1) \right] + D(g_1 + g_2)^2 + \\ & + l_1^2 \left[\frac{\delta}{2}(g_2 - g_1) - 2D \right] - D \left[\frac{1}{2}(g_1 + g_2)^2 + \delta^2(g_2 - g_1)^2 \right] - \\ & - [g_1 + g_2 - 2\delta(g_2 - g_1)] \left[\frac{1}{2}(g_1 + g_2)^2 + \delta^2(g_2 - g_1)^2 \right] - \\ & - 2l_1^2 \left[2D + \delta(2\delta^2 - 1) \frac{(g_2 - g_1)^3}{l_1^2} \right] - \frac{\delta}{2}(2\delta^2 - 1)(g_2 - g_1)^3. \end{aligned}$$

Должно выполняться неравенство $(a_0 + b_2) > 0$.

Пусть $D = 0$, тогда имеем

$$a = (g_2 - g_1)^2 \left(8\delta^2 + \frac{1}{3} \right).$$

Значит, изучаемое неравенство будет заведомо верное, если

$$\begin{aligned} & g_1 g_2 (g_1 + g_2) - \delta(g_2 - g_1)(g_1 + g_2)^2 > \\ & > (-\delta)(g_2 - g_1)^3 \left[\delta^2 + \frac{1}{2} + \frac{(1 + \sqrt{2})}{4} \left(8\delta^2 + \frac{1}{3} \right) + \frac{2\delta^2(1 - 2\delta^2)}{\left(8\delta^3 + \frac{1}{3} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Итак, получена оценка величины $(g_1 + g_2)$ – основного параметра начального состояния системы – при заданных δ и размахе колебаний $g_2 - g_1$. Кроме того, имеем пропорциональность $l_1^2 \sim a \sim (g_2 - g_1)^2$, а также цепочку неравенств:

$$\frac{2(-\delta)(1 - 2\delta^2)(g_2 - g_1)}{(1 + \sqrt{2}) \left(8\delta^2 + \frac{1}{3} \right)} < \frac{k^2}{b_1} < \frac{(-\delta)(1 - 2\delta^2)(g_2 - g_1)}{\left(8\delta^2 + \frac{1}{3} \right)}.$$

Следовательно, частота колебаний обладает таким свойством:

$$k \sim [b_1(g_2 - g_1)]^{\frac{1}{2}}; l_1^2 = (g_2 - g_1)^2 \delta_1^2,$$

$$2\delta_1^2 = 8\delta^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(480\delta^4 + 96\delta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Примечательно, что такой же качественный результат для периода колебаний $[(2\pi/k) \sim b_1^{-1/2}]$ был получен в двухмерном дозвуковом процессе при $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ [см. п. 3.1.3, формулы (3.15), (3.16)].

Если $D \neq 0$, то

$$\frac{k^2}{b_1} = 2D + \frac{\delta(2\delta^2 - 1)}{l_1^2}(g_2 - g_1)^3, \quad c = \frac{8}{3}\delta^2\left(\delta^2 - \frac{1}{2}\right)(g_2 - g_1)^4 < 0.$$

$$a = (g_2 - g_1)^2 \left[\frac{1}{3} - 4\delta(D_1 - 2\delta) \right], \quad D = D_1(g_2 - g_1).$$

Применяя выражение $(a_0 + b_2)$ и формулу $(a_0 + b_2)/b_1 = 2g_1g_2g_3$, получаем уравнение, не содержащее $(g_1 + g_2)$:

$$l_1^2 \left[\frac{\delta}{2}(g_2 - g_1) - 2D \right] + \delta^3(g_2 - g_1)^3 = 5D\delta^2(g_2 - g_1)^2 + \frac{2l_4^2}{l_1^2}(2\delta^2 - 1)(g_2 - g_1)^3 + \frac{\delta}{2}(g_2 - g_1)^3 - \frac{D}{2}(g_2 - g_1)^2.$$

Взяв для удобства записи $D_1 = D_2\delta$, приходим к формуле

$$2D_1^2 = \frac{1}{3} - 4\delta^2(D_2 - 2) + \left[\left(\frac{1}{3} - 4\delta^2(D_2 - 2) \right)^2 - \frac{32}{3}\delta^2\left(\delta^2 - \frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что $D_1^2 > 0$, если $D_2 - 2 < 0$.

Теперь вернемся к основному варианту (3.21)–(3.24) построения коэффициентов в (3.20). Введем обозначения

$$\frac{\mu}{b_1} = \mu_1, \quad \frac{b_0}{b_1} = b_*, \quad \frac{k^2}{b_1} = k_1^2$$

и первые два уравнения (3.21), (3.22) запишем в следующей форме:

$$\mu_1(l_4 - 2l_0) - 2b_* = A_1, \quad \mu_1(2l_0l_4 - \frac{l_1^2}{2}) - 2l_4b_* = A_2,$$

$$A_1 = 2l_4k_1^2 + \frac{3}{2}l_1^2 + 6l_0^2 - 4l_0l_4, \quad A_2 = \frac{1}{2}l_1^2k_1^2 - l_4^3 - 6l_0^2l_4 - l_1^2(2l_4 - 3l_0).$$

Решение этой системы алгебраических уравнений имеет вид:

$$\mu_1 = \frac{2}{(2l_4^2 - l_1^2)} \left[k_1^2 \left(2l_4^2 + \frac{l_1^2}{2} \right) - l_4^3 - \frac{1}{2} l_1^2 l_4 + 3l_0 l_1^2 - 4l_0 l_4^2 \right]; \quad (3.25)$$

$$b_* = \frac{2}{(2l_4^2 - l_1^2)} \left[k_1^2 \left(\frac{3}{2} l_1^2 l_4 - l_0 l_1^2 - 4l_0 l_4^2 \right) - l_4^4 + \frac{3}{4} l_1^4 + 2l_0^2 l_4^2 - 2l_1^2 l_4^2 + \right. \\ \left. + 2l_0 l_4 l_1^2 + 2l_0 l_4^3 - 3l_0^2 l_1^2 \right]. \quad (3.26)$$

Здесь должны выполняться неравенства $\mu_1 < 0$, $b_* > 0$. Кроме того, необходимо иметь положительную величину $(a_0 + b_2)$:

$$\frac{a_0 + b_2}{b_1} = \frac{\mu_1 - k_1^2}{2} + 3l_0 - \frac{3}{2} l_4 + \\ + (\mu_1 + 2l_0) \left(l_0^2 + \frac{l_4^2}{2} \right) - 2l_4^2 k_1^2 + 2l_0 l_4^2 + 2l_0 b_*. \quad (3.27)$$

Сходимость формального ряда (3.20), представляющего квазигармоническое решение уравнения (3.19), можно доказать методом [57]. В данном случае получаем необходимые условия сходимости:

$$|l_0| > |l_1| > |l_4|; \quad l_4 < 0; \quad |4l_4/l_1| < 1; \quad 0 < k_1^2 < 5.$$

Изучение формулы (3.27) на плоскости $(k^2, a_0 + b_2)$ дает информацию о поведении прямой $a_0 + b_2 = A^1 k^2 + A^0$, а именно:

$$A^1 = \frac{l_1^4 + \frac{7}{2} l_1^2 l_4^2 - l_0^2 l_1^2 - 4l_0^2 l_4^2 - 2l_4^4 3l_0 l_4 l_1^2}{2l_4^2 - l_1^2} > 0.$$

Выражение A^0 для дальнейших рассуждений не потребуется, поэтому его запись здесь не приводится.

Таким образом, имеем неравенство

$$\frac{d(a_0 + b_2)}{d(k^2)} > 0.$$

Выводы: 1. Чем больше $b_2 > 0$, т. е. чем сильнее выражены условия, обеспечивающие ускорение фазовой границы, тем больше k^2 – квадрат циклической частоты; согласно (3.5), имеем $b_2 \sim a_2 \sim l_*^{-3}$, поэтому периодичность распространения фронта взрывной кристалли-

зации существенно зависит от концентрации зародышей кристаллов. 2. Постоянные μ, b_0 линейно зависят от каждого из параметров источников b_1 и b_2 , или, что то же, от b_1 и k^2 . 3. Константы a_0, b_0, μ подсчитываются через l_0, l_1, l_4 по формулам (3.25)–(3.27); если заранее заданы параметры температурных колебаний (размах колебаний $2l_1$, начальная температура $l_0 + l_4$, «средняя» температура $l_0 - l_4$), то частота колебаний определяется по формуле (3.24).

Пример. Возьмем $l_0 = 5$; $l_1 = 1$; $l_4 = -0,1$. Приближенное решение

$$g(t) \cong 5 + \sin kt - 0,1 \cos 2kt$$

дает:

$$kt_1 = \pi/2, \quad g(t_1) = g_2 = 6,1; \quad kt_2 = 3\pi/2, \quad g(t_2) = g_1 = 4,1.$$

Подсчитываем μ_1, b_* по формулам (3.25), (3.26) и при $k_1^2 = 1$, $b_1 = 1$ получаем из (3.27): $(a_0 + b_2)/b_1 = 280,12242$. Вместе с тем из алгебраических выражений $G(g_1) = 0$, $G(g_2) = 0$ [см. (3.19)] вычисляем, соответственно:

$$(a_0 + b_2)/b_1 = 281,34206; \quad (a_0 + b_2)/b_1 = 285,00458.$$

Указанные три числа различаются между собой не более чем на 1,75 %, что означает хорошую практическую сходимость данного квазигармонического приближения.

Таким образом, установлена прямая пропорциональность между размахом колебаний и квадратом циклической частоты: $(g_2 - g_1) \sim k^2 / b_1$, где $k^2 \sim b_2 \sim l_*^{-3}$. Следовательно, существует конечный интервал значений l_* , такой, что при убывании минимального расстояния l_* между замороженными зародышевыми кристаллами уменьшается период и растет размах колебаний температуры. Периодические остановки изотермы $T = T_c$ говорят о резких изменениях скорости фазовой границы кристаллизации (рис. 3.7).

Для рассмотренных задач I и II необходимыми условиями формирования пространственно-временной периодичности температурного поля являются: 1) волновой механизм теплопереноса; 2) наличие двух источников энергии, которые локализованы на двух различных изотермах. В задаче I о периодической кристаллизации («пленка – подложка», «расплав – изложница») эти источники являются конку-

рирующими, в задаче II о взрывной кристаллизации с учетом «горячих» зародышевых центров они оба положительные.

3.1.5. Сверхзвуковой процесс: роль инверсии знака источника

Обсудим роль следующих факторов влияния: 1) двухмерность автомодельного процесса; 2) сверхзвуковой ($M^2 > 1$) режим эволюции поля. Уравнение (3.6) запишем в канонической форме:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = \frac{(a^2 - w^2)k_v}{w^2(w^2 - a^2 - b^2)} \equiv k_v^1, \quad (3.28)$$

$$\xi = \beta - k_1 \alpha, \quad \zeta = -k_3 \alpha, \quad k_1 = ab / (a^2 - w^2),$$

$$k_3 = w(a^2 + b^2 - w^2)^{1/2} / (a^2 - w^2).$$

Направление вдоль оси OX условимся называть основным в двухмерной задаче. Если в основном направлении процесс сверхзвуковой ($a^2 > w^2$), то, независимо от величины b , имеем гиперболическое уравнение (3.28), в котором знак k_v^1 противоположен знаку k_v . В этом сверхзвуковом процессе происходит инверсия знака источника энергии. Если в основном направлении скорость дозвуковая, но процесс в целом гиперболический, т. е.

$$a^2 < w^2 < a^2 + b^2, \quad (3.29)$$

то инверсия знака отсутствует. Исследование уравнения (3.28) было выполнено на основе решения вида (3.17)–(3.19). Нужные переобозначения очевидны: $x \leftrightarrow \zeta$, $t \leftrightarrow \xi$, $k_v \leftrightarrow k_v^1$. Подробности изложены в [58].

Основной вариант здесь – (3.29), сверхзвуковой процесс без инверсии. Оказывается, что полученный в п. 3.1.4 результат о пульсации во времени скорости фазовой границы можно распространить на двухмерный автомодельный случай. Для изотермы $T_i = T(\alpha, \beta_i(\alpha)) = \text{const}$, $\beta = \beta_i(\alpha)$ условие остановки фазовой границы $N_i = 0$ дает уравнение

$$G(g) = a_*^2 F(f), \quad a_*^2 = a^2(a^2 + b^2 - w^2) / (b^2 w^2) < 1; \quad (3.30)$$

$$E(T_i) = f(\zeta) + g(\xi), \quad f \in [f_0, f_1], \quad g \in [g_1, g_2].$$

Здесь $f(\zeta)$ – монотонная функция. Каждому значению f соответствует единственное значение g , при котором выполнено (3.30). Функция $g(\xi)$ – периодическая по аргументу $\xi = y - k_1x + t(b - ak_1)$, поэтому на изотерме $y_i + bt = \beta_i(x + at)$ имеем периодичность скорости N_i по аргументу $x + at$. Значит, при каждом фиксированном x скорость N_i периодически обращается в ноль (именно этот результат был установлен при решении одномерной задачи). Вместе с тем в каждый момент времени t на линии $T = T_i$ имеются точки $(x, y_i(x, t))$, в которых скорость изотермы нулевая. Расположение этих неподвижных точек – периодическое по координате x . Это явление имеет отчетливо выраженный двухмерный характер. Полученные сильные пространственно-временные температурные неоднородности обладают периодическими свойствами и служат причиной образования «лепестковых» и «чешуйчатых» структур в пленках. Отметим еще, что изученные на основе (3.28) и (3.7) классы решений задачи II указывают на физическую невозможность влияния «горячих» центров на взрывную кристаллизацию для двух автомодельных вариантов: 1) сверхзвуковой процесс ($M^2 > 1$) с инверсией знака источника; 2) дозвуковой характер эволюции теплового поля. Для более общего класса решений этот вопрос остается открытым.

Теперь рассмотрим периодическую кристаллизацию в системах «пленка – подложка» и «расплав металла – изложница» (задача I) в сверхзвуковом режиме. Одномерное и автомодельные двухмерные решения не содержат принципиальных качественных различий. В одномерном случае для гиперболического уравнения (3.1) в классе решений (3.17)–(3.19) оказывается, что при $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ отсутствуют процессы, периодические по t . Функция $E(x, t) = f(x) + g(t)$ является периодической по x и релаксирует во времени от начального состояния $E(x, 0)$ к состоянию $E_\infty(x)$ при $t \rightarrow \infty$. В отрелаксировавшем состоянии наибольшее достигаемое значение температуры снижается по мере роста ($-b_2$) – параметра стока энергии в подложку либо в стенку изложницы.

Двухмерные варианты: 1) в сверхзвуковом случае с инверсией знака k_0 периодический процесс наблюдается по аргументу ξ , т. е. вдоль линии, наклон которой к основному направлению равен k_1 ; решение релаксирует по аргументу ζ ; 2) если инверсии нет [см. (3.29)], то периодичность развивается по аргументу ζ , т. е. вдоль основного дозвукового направления; решение релаксирует по ξ . Отличительный

признак этих сверхзвуковых процессов: на плоскости (x, y) линии изотерм незамкнутые.

Данные результаты, а также два варианта для цепочек изотерм на рис. 3.3 согласуются в качественном отношении с экспериментальными наблюдениями [59]. В этой работе изучалось расположение пор и наличие других дефектов в профилированных кристаллах сапфира в зависимости от режимов роста; отмечено влияние молибденового тигля, из которого ведется выращивание; обнаружены периодические построения из цепочек отдельных пор небольшого размера. Существенно, что цепочки выстраиваются с определенным периодом параллельно направлению выращивания, перпендикулярно или под углом к нему. В дозвуковом случае формирование шахматного порядка расположения цепочек изотерм (рис. 3.3) обусловлено конкуренцией источников энергии. Это явление имеет два гидродинамических аналога: 1) плоское вихревое течение идеальной жидкости [51]; 2) плоское периодическое течение вязкой жидкости, возникающее под действием пространственно-периодической силы в канале конечных размеров [60].

Таким образом, волновой теплоперенос в системе «среда – два нелинейных источника энергии» является причиной формирования пространственно-временной периодичности при кристаллизации. Нелинейные динамические свойства процесса существенным образом зависят от дозвукового либо сверхзвукового режимов эволюции температурного поля.

3.2. Генерация периодических тепловых полей объемным источником энергии

В этом параграфе мы изучаем температурные периодические неоднородности, которые возбуждает знакопеременный объемный источник энергии.

Рассматриваем эволюционные процессы в классе решений «бегущая волна», когда

$$T = T(z), \quad q = q(z), \quad z = x + bt, \quad b \equiv \text{const}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dz}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = b \frac{d}{dz}.$$

На основе системы уравнений (1.4) при $v = 0$ решаем обратную задачу, а именно постулируем физически содержательную зависимость $T(z)$ либо $q(z)$ и вычисляем $q_v(z)$. Это дает возможность определить температурную зависимость источника энергии $q_v = q_v(T)$ и замкнуть задачу.

3.2.1. Источник энергии в среде с одним временем релаксации

Параметры среды: $\lambda, c, \gamma_1 = \gamma - \text{const}; \gamma_2 \equiv 0$.

Процесс определяется следующими формулами:

$$q + \gamma b \frac{dq}{dz} = -\lambda \frac{dT}{dz}, \quad q_v = cb \frac{dT}{dz} + \frac{dq}{dz}.$$

Если $T = T(z)$ – известная функция, то

$$q(z) = q_0 E^{-1} - E^{-1} \int_0^z \frac{\lambda E}{\gamma b} \left(\frac{dT}{dz} \right) dz, \quad E = \exp(z/\gamma b).$$

Если $q = q(z)$ – известная функция, то

$$T(z) - T(z_0) = \frac{-1}{\lambda} \int_0^z q(z) dz - \frac{\gamma b}{\lambda} [q(z) - q(z_0)] \geq 0.$$

Все расчеты выполнены в безразмерных переменных (см. § 1.1), характерные масштабы теплофизических параметров взяты такими, что в безразмерных переменных имеем $\lambda=1, c=1, \gamma=1$. Тогда $w^2 = \lambda/(c\gamma) = 1$. Параметр b представляет скорость бегущей волны, распространяющейся влево ($b > 0$) либо вправо ($b < 0$). Таким образом, имеем дозвуковой процесс, если $|b| < 1$; процесс сверхзвуковой, если $|b| > 1$.

Пример 1

$$T = T_0 + A_1 \sin(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin(\alpha_2 z + \beta_2), \quad (3.31)$$

$$A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const}.$$

Три дозвуковых варианта даны на рис. 3.8, а три сверхзвуковых варианта – на рис. 3.9. На плоскости (T, q_v) наблюдаем гистерезисные кривые, причем имеются случаи самопересечения гистерезисной кривой. Отметим существование температурных интервалов, где гистерезис выражен очень слабо, и зависимость $q_v(T)$ можно считать однозначной. На рис. 3.8, u петля гистерезиса образована двумя немонотонными ветвями, вдоль каждой из которых q_v зависит от температуры по синусоидальному типу.

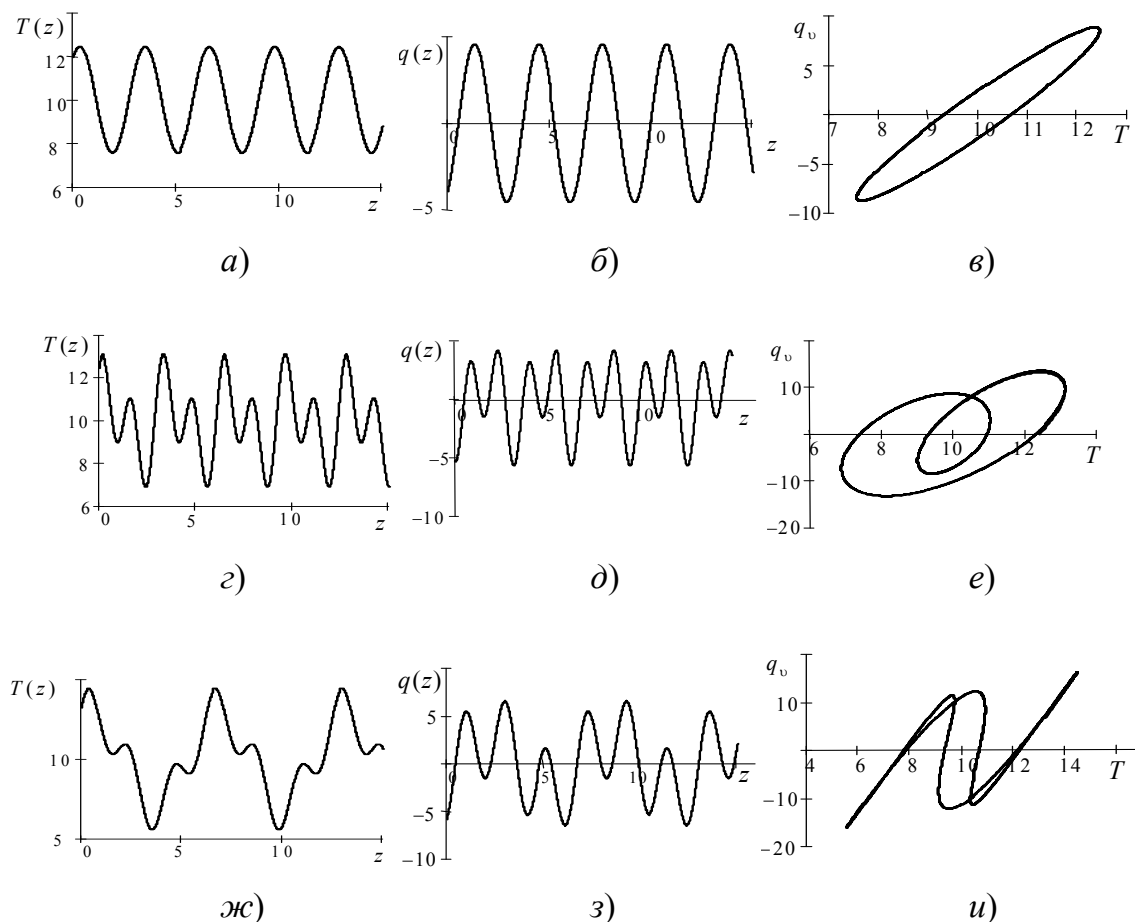


Рис. 3.8. Тепловые колебания в дозвуковом процессе

Пример 2

$$T = T_0 + A_1 \sin^3(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin^3(\alpha_2 z + \beta_2), \quad (3.32)$$

$$A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const.}$$

Дозвуковые варианты показаны на рис. 3.10. Сравнение с примером 1 говорит о значительном влиянии характера аналитической зависимости $T(z)$ на конфигурацию петель гистерезиса на плоскости (T, q_v) . Обращает на себя внимание третья строка на рис. 3.10, где гистерезис практически отсутствует, и функция источника $q_v(T)$ – монотонная и знакопеременная. В сверхзвуковых вариантах форма петель слабо реагирует на изменение поведения зависимостей $T(z)$ и $q(z)$.

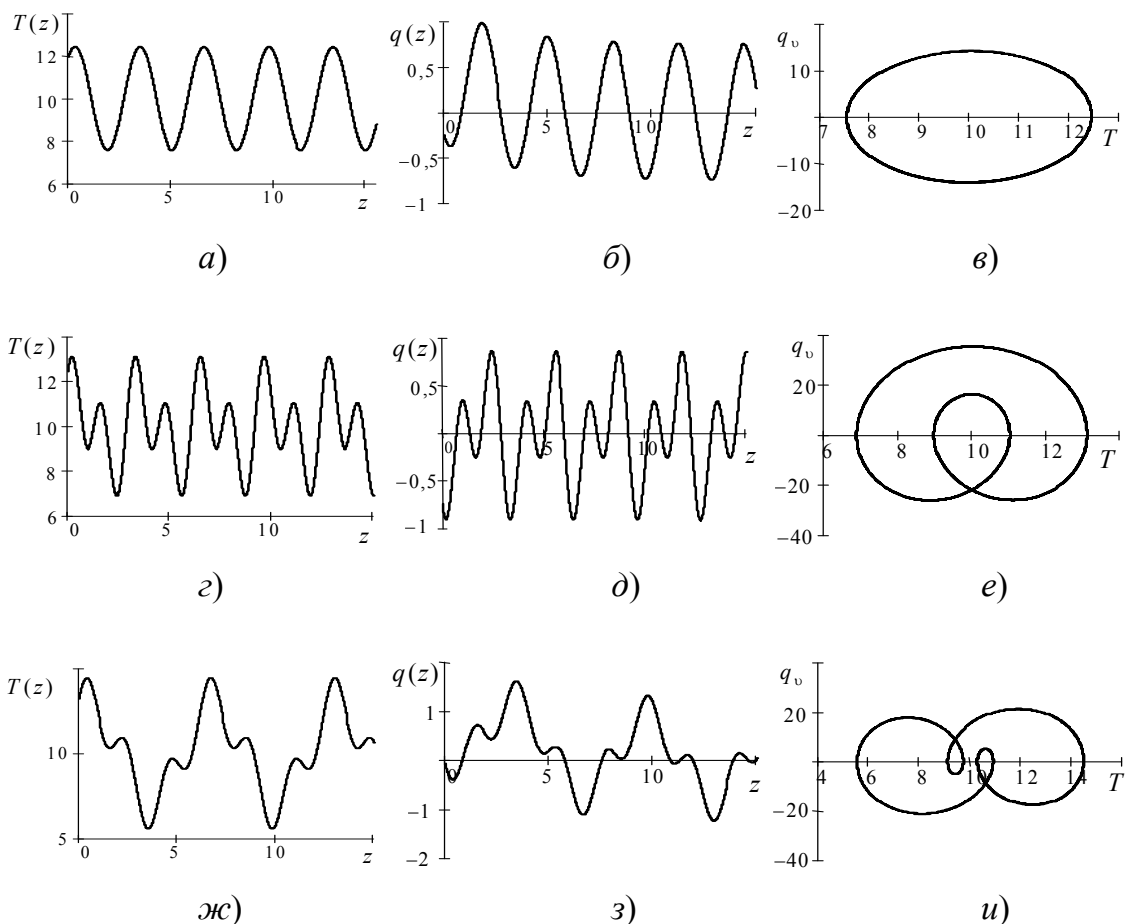


Рис. 3.9. Тепловые колебания в сверхзвуковом процессе

Пример 3

$$q = \frac{A_1}{\alpha_1 + \beta_1(z - z_1)^2} + \frac{A_2}{\alpha_2 + \beta_2(z - z_2)^2} + \frac{A_3}{\alpha_3 + \beta_3(z - z_3)^2},$$

$$A_1, A_2, A_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3 - \text{const},$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0.$$

В этом примере были рассчитаны варианты, для которых функция $q(z)$ обладает своеобразными «всплесками» и является либо положительной, либо знакопеременной. Сравнение между собой дозвукового и сверхзвукового процессов при $q(z) > 0$ (рис. 3.11) говорит о появлении в сверхзвуковом случае знакопеременности источника $q_v(T)$.

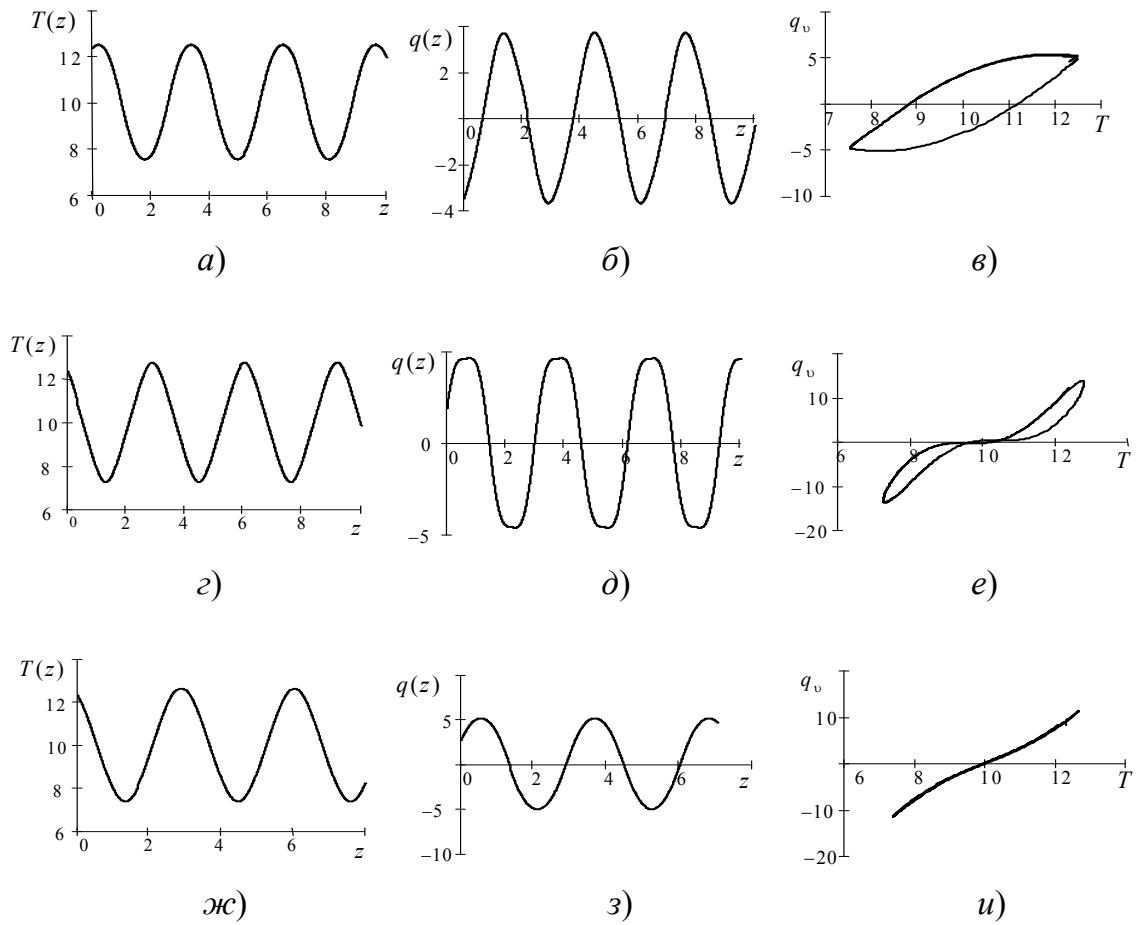


Рис. 3.10. Периодические колебания температуры: тепловые и гистерезисные свойства дозвучкового процесса

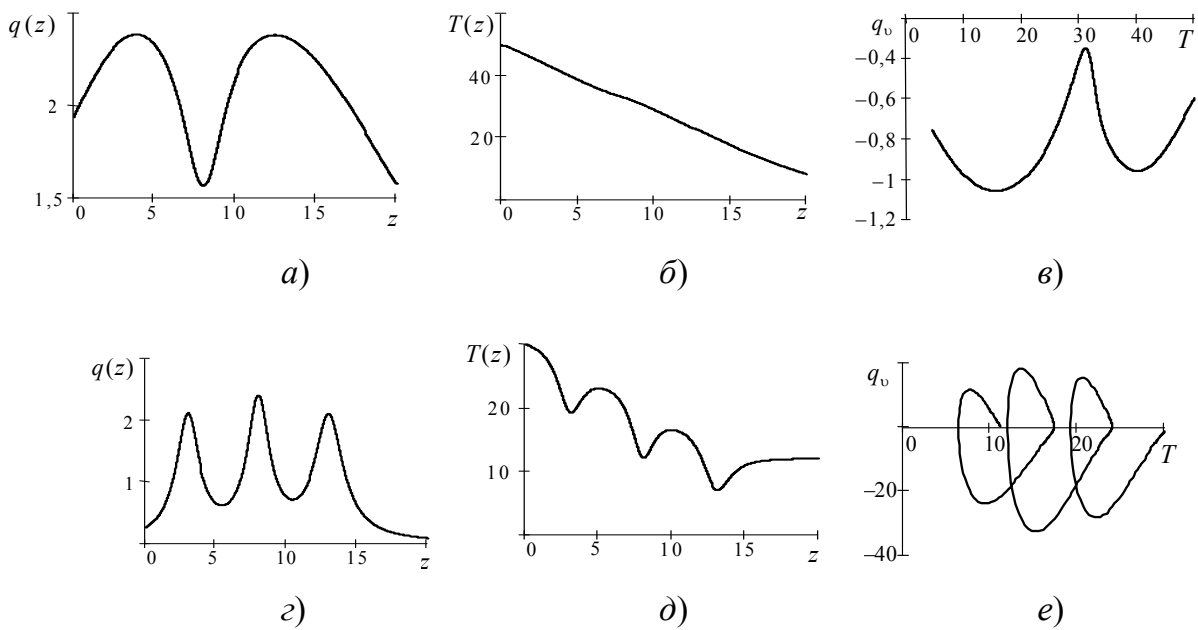


Рис. 3.11. «Всплески» теплового потока: дозвучковой процесс – первая строка рисунков; сверхзвуковой процесс – вторая строка

3.2.2. Источник энергии в среде с двумя временами релаксации

Закон теплопереноса (1.10) дает в классе решений типа бегущей волны такие зависимости:

$$q + \gamma_1 b \frac{dq}{dz} = -\lambda \frac{dT}{dz} - \lambda \gamma_2 b \frac{d^2 T}{dz^2}; \quad q_v = cb \frac{dT}{dz} + \frac{dq}{dz}.$$

Расчет теплового потока выполняем по формуле

$$q = q_0 E^{-1} - \frac{\lambda E^{-1}}{\gamma_1 b} \int_0^z \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_2 b \frac{d^2 T}{dz^2} \right) E dz, \quad E = \exp(z/\gamma_1 b).$$

Далее берем $0 < \gamma_2 \leq \gamma_1$, т. е. $w_1^2 = \lambda/(c\gamma_1) < w_2^2 = \lambda/(c\gamma_2) > 1$.

Пример 4. Температуру $T(z)$ берем в виде (3.31). Два дозвуковых варианта показаны в первой и второй строках на рис. 3.12; весьма выразительным является их сопоставление со сверхзвуковыми процессами (третья и четвертая строки на рис. 3.12), а именно для первого процесса на рис. 3.12 гистерезиса нет, но он сразу же возникает, при прочих равных условиях, если $M_1^2 \equiv b^2/w_1^2 > 1$, а также $\gamma_1 \gg \gamma_2$. Если же γ_1 и γ_2 различаются не слишком сильно, то в дозвуковом случае (вторая строка на рис. 3.12) может наблюдаться слабо выраженный гистерезис на плоскости (T, q_v) .

Пример 5. Температуру $T(z)$ берем в виде (3.32). Для этой серии расчетов в дозвуковом случае гистерезис начинает проявляться сильнее при уменьшении γ_2 . В сверхзвуковых процессах такой тенденции нет. Пример немонотонной (синусоидальной) зависимости $q_v(T)$ для дозвукового процесса показан в пятой строке на рис. 3.12, *n*.

Пример 6

$$q = q_0 + A_1 \sin(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin(\alpha_2 z + \beta_2), \quad A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const.}$$

Для дозвуковых (первая строка на рис. 3.13) и сверхзвуковых (вторая строка на рис. 3.13) случаев здесь рассмотрены ситуации, когда тепловой поток знакопеременный либо положительный/отрицательный. В двух последних случаях имеем: 1) функция $q_v(T)$ близка к линейной, монотонно убывающей, и ее знак противоположен знаку $q = q(z)$; 2) эти закономерности наблюдаются и в дозвуковом, и в сверхзвуковом процессах. Если $q(z)$ – знакопеременная функция, то имеется гистерезис, который в сверхзвуковом случае выражен отчетливее, чем в дозвуковом. Именно наличие второго времени релакса-

ции $\gamma_2 > 0$ приводит к монотонизации функции $q_v(T)$; при $\gamma_2 = 0$ эта закономерность отсутствует (рис. 3.11).

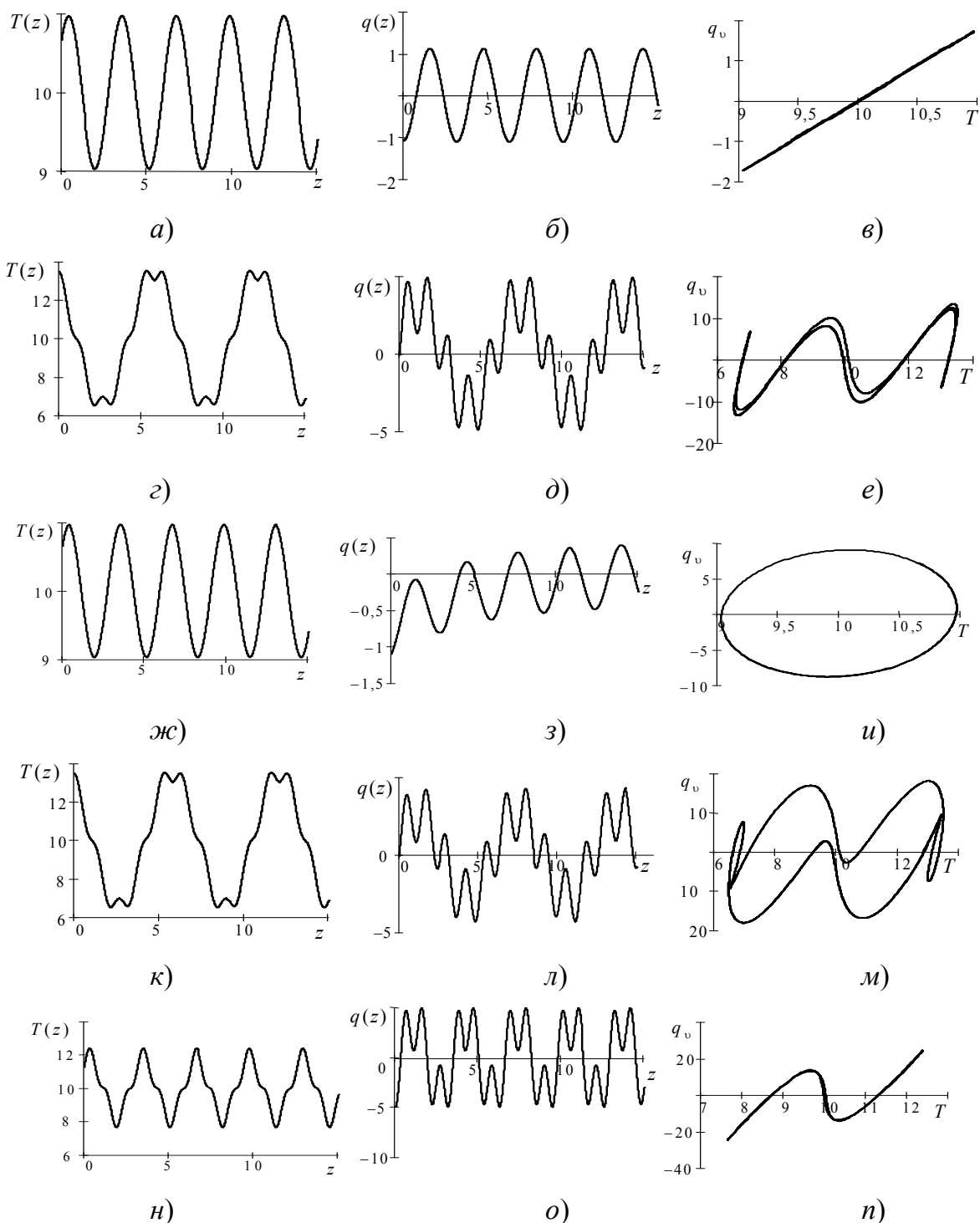


Рис. 3.12. Тепловые и гистерезисные свойства процесса в среде с двумя временами релаксации: дозвуковой процесс – первая, вторая и пятая строки рисунков; сверхзвуковой процесс – третья и четвертая строки рисунков

Представленные примеры демонстрируют существование нетривиальных ситуаций при взаимодействии источника энергии со средой, а именно монотонный источник (сток) $q_v(T)$ при определенных обстоятельствах инициирует формирование периодических по $z = x + bt$ тепловых полей. Теоретические аспекты этого явления и их приложения к задачам кристаллизации были обсуждены в § 3.1.

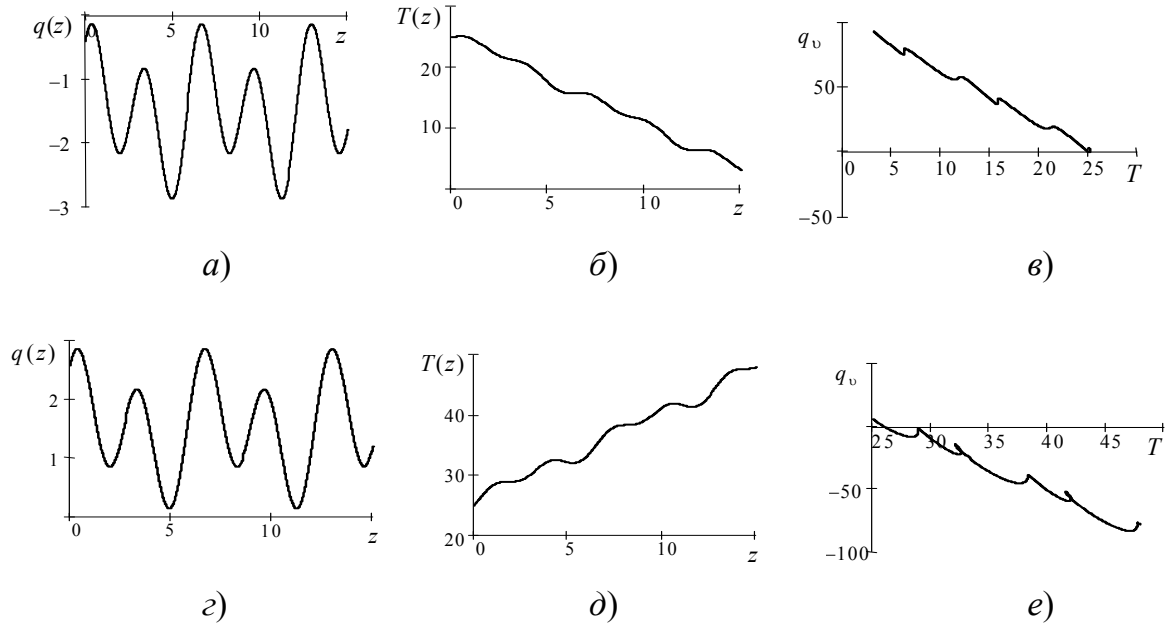


Рис. 3.13. Примеры вырождения гистерезисной зависимости $q_v(T)$:
дозвуковой процесс – первая строка рисунков;
сверхзвуковой процесс – вторая строка

Чтобы подчеркнуть принципиальную роль неравновесности, рассмотрим нелинейную среду с нулевым временем релаксации (закон теплопереноса Фурье):

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T; \quad c \equiv \text{const}; \quad \gamma_1 \equiv 0; \quad \gamma_2 \equiv 0.$$

Формула для источника энергии имеет вид:

$$q_v = bc \frac{dT}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right).$$

Количественные свойства процесса в значительной степени зависят от безразмерной скорости волны:

$$l = \frac{(\lambda/c)_{T=T_0}}{|b|x_b|}.$$

Два основных варианта: 1) $l < 1$, т. е. $|b| > 1$; 2) $l > 1$, т. е. $|b| < 1$. Ни в одном из представленных примеров (3.31) и (3.32) для параболических процессов не обнаружены ситуации, при которых петли гистерезиса на плоскости (T, q_v) вырождались бы в однозначные линии $q_v(T)$.

Таким образом, для представленной здесь многовариантной серии расчетов нелинейный объемный источник энергии $q_v = q_v(T)$, возбуждающий одномерные автомодельные периодические по $z = x + bt$ тепловые поля, обладает следующими свойствами:

1. В локально-неравновесной среде с одним или с двумя временами релаксации наблюдаются существенные различия между дозвуковыми и сверхзвуковыми тепловыми процессами. Возможны ситуации, когда происходит самопересечение гистерезисной кривой $q_v = q_v(T)$.

2. Основной результат, важный в практическом отношении, состоит в том, что генерация периодических структур может происходить под действием положительного, отрицательного или знакопеременного источника, не обязательно обладающего гистерезисной зависимостью $q_v(T)$. В отсутствие гистерезиса зависимость $q_v(T)$ линейная (рис. 3.10, *и*; рис. 3.12, *в*; рис. 3.13) либо синусоидальная (рис. 3.12, *е*, *п*). В главе 4 мы подробно рассматриваем волновой теплоперенос в среде с источником синус-Гордона.

3.3. Двухмерные периодические тепловые структуры

Будем изучать двухмерные плоские тепловые поля, когда $T = T(x, y, t)$, а вектор теплового потока имеет две компоненты $q_1 = q_1(x, y, t)$, $q_2 = q_2(x, y, t)$, где x, y – прямоугольные декартовы координаты [см. (1.3)]. Теплофизические свойства среды считаем постоянными: $\lambda, c, \gamma - \text{const}$.

Объемный источник энергии линейно зависит от температуры:

$$q_v = q_v^0 + q_v^1 T; \quad q_v^0, q_v^1 - \text{const}, \quad (3.33)$$

причем полагаем $q_v^0 < 0$, $q_v^1 > 0$. Важным параметром процесса служит температура $T_0^0 = -q_v^0 / q_v^1 > 0$, при которой $q_v(T_0^0) = 0$. Далее изотерму $T(x, y, t) = T_0^0$ будем называть нейтральной, поскольку при $0 < T < T_0^0$ идет теплоотдача, а при $T > T_0^0$ происходит тепловыделе-

ние. Изотерму $T = T' < T_0^0$ далее для наглядности называем «холодной»; этот же термин применяем для температурной области, где $q_v(T) < 0$. Для изотермы $T = T'' > T_0^0$ и температурной области, где $q_v(T) > 0$, применяем термин «горячий».

Устанавливающееся в ходе релаксационного процесса ($t \rightarrow \infty$) стационарное температурное поле определяется одной из трех следующих зависимостей:

а) аддитивная двухмерность:

$$T_0 = T_0^0 + A_0 \sin(k_1 x + \alpha_0) + B_0 \sin(k_1 y + \beta_0), \quad (3.34)$$

$$k_1^2 = q_v^1 / \lambda, \quad A_0, B_0, \alpha_0, \beta_0 - \text{const};$$

б) мультипликативная двухмерность:

$$T_0 = T_0^0 + T_0^1 \sin(k_1 x + \alpha_0) \sin(k_2 y + \beta_0), \quad (3.35)$$

$$k_1^2 + k_2^2 = q_v^1 / \lambda, \quad T_0^1, \alpha_0, \beta_0 - \text{const}.$$

Здесь одна из частот k_1, k_2 произвольная;

в) «ребристые» профили температур, составленные из конечной суммы точных решений:

$$\begin{aligned} T_0 = T_0^0 + \sum_{i=1}^n T_{01} \sin(k_1 x + \alpha_0) \exp[r_1 (y - y_i)] + \\ + \sum_{i=1}^n T_{02} \sin(k_2 y + \beta_0) \exp[r_2 (x - x_i)], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{q_v^1}{\lambda} = k_1^2 - r_1^2 > 0, \quad \frac{q_v^1}{\lambda} = k_2^2 - r_2^2 > 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $r_1 < 0$ при $y \geq y_i$; $r_1 > 0$ при $y \leq y_i$, т. е. при $y = y_i$ имеем «ребро» – всплеск температуры; аналогично $r_2 < 0$ при $x \geq x_i$; $r_2 > 0$ при $x \leq x_i$, и получаем второе семейство «ребер» $x = x_i$, ортогональное линиям $y = y_i$. Расчеты были выполнены для $n = 5$, «ребра» располагались равномерно с шагом $\Delta x = \Delta y = 7,5$; $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Далее на рисунках, относящихся к решению (3.36), представлена центральная часть области, занятой «ребрами».

3.3.1. Колебательно-релаксационный режим теплопереноса

Рассмотрим два основных варианта эволюции теплового поля во времени: апериодический режим; затухающие периодические колебания. Сначала изучим теплоперенос в среде с одним временем релаксации: ($\gamma_1 \equiv \gamma > 0$; $\gamma_2 \equiv 0$) [см. уравнения (1.3) и (1.10)].

Апериодический во времени процесс (АП) определяется следующим решением:

$$T = T_0(x, y) + \tau T_1(x, y), \quad T_1 = A_1 \sin(k_* x + \alpha_1) + B_1 \sin(k_* y + \beta_1), \quad (3.37)$$

$$\tau = \exp(-kt), \quad k > 0, \quad \lambda_* = \frac{\lambda}{(1-\gamma k)}, \quad k_1^2 = \frac{q_0^1}{\lambda}, \quad k_*^2 = \frac{q_0^1 + ck}{\lambda_*},$$

$$A_0, B_0, A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1, k - \text{const.}$$

Здесь $T_0(x, y)$ – одно из решений вида (3.34), (3.35) или (3.36). Величина $1/k$ – характерное время. Условие $k_*^2 > 0$ означает в данном случае, что $0 < \gamma k < 1$. Следовательно, имеем периодичность по координатам x, y в медленном апериодическом по времени процессе: $1/k > \gamma$. Двухмерные свойства теплового поля зависят от отношения амплитуд в (3.34) и (3.37). Далее приведены результаты расчетов при $A_0/B_0 = A_1/B_1 = \Delta$, где $\Delta \in (0, 1]$ – параметр двухмерности. Условие $0 < \Delta < 1$ означает, что у вектора градиента температуры компонента $(\text{grad}T)_y$ выражена сильнее, чем $(\text{grad}T)_x$, т. е. степень неоднородности теплового поля вдоль оси y выше, чем вдоль оси x . Ясно, что это обстоятельство может быть следствием условий теплообмена изучаемого материала с внешней средой. При $\Delta = 1$ двухмерная неоднородность одинаковая вдоль осей x и y . Для мультипликативного решения (3.35) параметром двухмерной неоднородности является отношение частот k_1/k_2 . В решении (3.36) имеем три параметра неоднородности: 1) амплитудный T_{01}/T_{02} ; 2) частотный k_1/k_2 ; 3) параметр $|r_1/r_2|$ крутизны всплеска температуры на «ребрах», характеризуемый величинами $|r_1|$, $|r_2|$, входящими в показатели экспонент [см. (3.36)].

Периодический во времени процесс (ПП) определяется следующим решением:

$$T = T_0(x, y) + A(t) \sin(h_1 x + \beta_1) + B(t) \sin(h_2 y + \beta_2), \quad (3.38)$$

где $T_0(x, y)$ – одно из решений вида (3.34), (3.35) или (3.36); $h_1, h_2, \beta_1, \beta_2$ – const. Амплитуды $A(t), B(t)$ есть решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{A} + 2n_1\dot{A} + \omega_1^2 A &= 0, & \ddot{B} + 2n_2\dot{B} + \omega_2^2 B &= 0, & (3.39) \\ 2n_i = \frac{1}{c\gamma}(c - \gamma q_v^1) &\geq 0, & \omega_i^2 = \frac{1}{c\gamma}(\lambda h_i^2 - q_v^1) &> 0; & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Точка над символом функции означает дифференцирование по времени.

Начальные условия $t = 0, A(0) = A_1, B(0) = B_1$ важны при выборе исходного состояния системы «среда – источник энергии». Нестационарные решения (3.37) и (3.38) обладают аддитивной двумерностью по координатам x, y . Практика наших расчетов показала, что именно такая структура наиболее содержательна в физическом отношении.

Структуру пространственно-периодических тепловых полей иллюстрируем на плоскости (x, y) построением семейств изотерм. Накопленный нами опыт вычислений позволяет утверждать, что существуют три основных варианта: 1) цепочка (полоса) изотерм, включающая в себя замкнутые изотермы (в гидродинамике такие изолинии носят название «кошачьи глаза») (см. рис. 3.3); 2) ячеистая структура, состоящая только из замкнутых изотерм; 3) решетчатая структура, состоящая из сомкнувшихся между собой ячеек и/или полос изотерм. Кроме того, наблюдаются смешанные варианты, которые являются комбинацией перечисленных трех типов. В наиболее сложных случаях такие комбинации дают мозаичную структуру. На рис. 3.14 показана роль амплитудного параметра Δ двумерной неоднородности. При $0 < \Delta < 1$ основным элементом периодической структуры является полоса, тянущаяся вдоль оси y . При $\Delta \rightarrow 1$ нейтральные изотермы образуют решетку, конфигурация которой зависит от входных данных задачи. Во всех изучавшихся нами вариантах наблюдалось симметричное расположение отдельных элементов решетки относительно некоторых линий на плоскости (x, y) .

На рис. 3.15, *а* при слабо выраженной двумерности ($\Delta = 0,1$) апериодического процесса имеем нейтральные изотермы, близкие к прямолинейным и разделяющие холодные и горячие области; «кошачьи глаза» чередуются регулярным образом. При возрастании параметра двумерности ($\Delta = 0,5$, рис. 3.15, *б*) нейтральные изотермы принимают синусоидальную форму. Если процесс периодический и

$\Delta = 1$, то нейтральная изотерма представляет собой решетку (рис. 3.15, в), в клетках которой «шахматным» образом чередуются холодные и горячие изотермы.

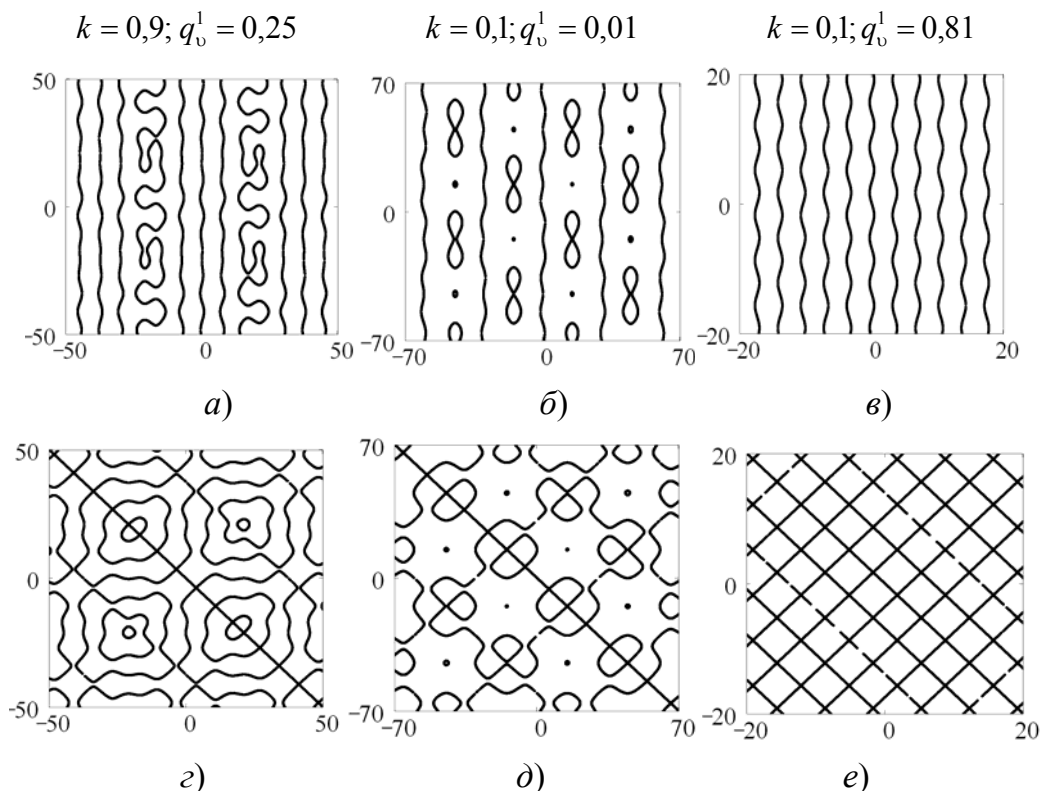


Рис. 3.14. Двухмерные свойства начального теплового поля при аддитивной двухмерности. Нейтральная изотерма $T = 0,5$: верхняя полоса рисунков $\Delta = 0,3$; нижняя полоса – $\Delta = 1,0$

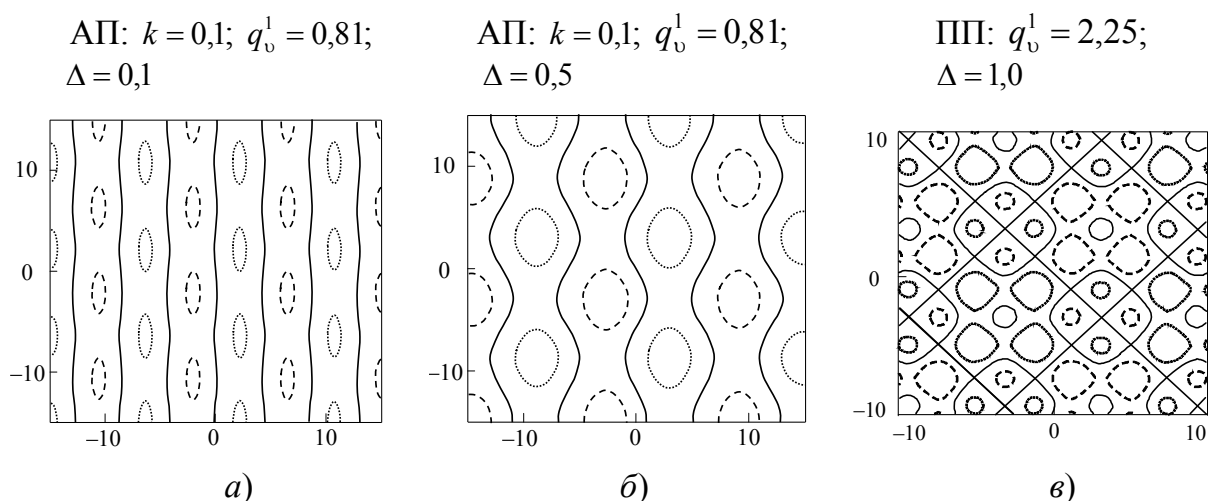


Рис. 3.15. Примеры начальных состояний тепловых полей при аддитивной двухмерности: изотерма $T' = 0,4$ (пунктирная линия), нейтральная изотерма $T = 0,5$ (сплошная линия —); изотерма $T'' = 0,6$ (штриховая линия ---)

Рис. 3.16, *а*: в ходе аperiодической эволюции теплового поля ячеистая структура холодной изотермы преобразуется в полосы изотерм, вытянувшиеся вдоль оси y . Здесь и далее $t^* \approx 1$ – характерный промежуточный момент времени. Рис. 3.16, *б*: в начальном состоянии холодная изотерма образует комплексы, составленные из двух концентрических линий; в ходе эволюции каждый такой комплекс распадается на четыре ячейки, расположенные симметрично относительно исходного центра; в итоге имеем ячеистую структуру. Рис. 3.16, *в*: процесс периодический с отчетливо сформировавшейся двумерностью ($\Delta = 1$); для нейтральной изотермы исходная решетка имеет замысловатую конфигурацию мозаичного типа, а в результате эволюции получаем простейшую решетку с прямоугольными клетками.

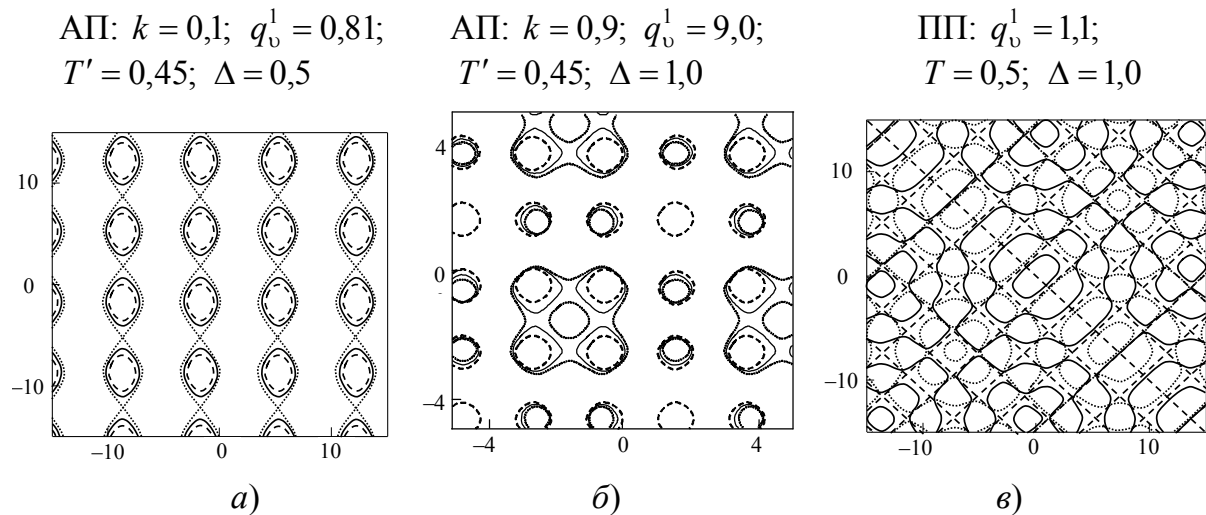


Рис. 3.16. Эволюция во времени изотерм при аддитивной двумерности:
 $t = 0$ (пунктирная линия \cdots); $t = t^*$ (сплошная линия $—$);
 $t = \infty$ (штриховая линия $---$)

Из рассмотрения рис. 3.17 ясно, что в мультипликативном варианте структура начальных состояний холодной, нейтральной и горячей изотерм имеет свойства, во многом похожие на те, что наблюдаются в аддитивном варианте (рис. 3.15). На рис. 3.18, *а*, *б* нейтральная изотерма образует в начальном состоянии полосчатую структуру, трансформирующуюся в типичную решетку с прямоугольными клетками; здесь различие между АП- и ПП-режимами в том, что в промежуточном АП-состоянии существуют уединенные «кошачьи глаза», а в ПП-состоянии их нет. На рис. 3.18, *в* показана горячая изотерма с хорошо выраженным частотным параметром неоднородности: исходные вдвоенные ячейки ориентированы и вдоль оси x , и вдоль оси y ; в промежуточном состоянии наблюдаем полосы, вытянутые вдоль оси x ,

а ИТОГОМ ЭВОЛЮЦИИ ЯВЛЯЮТСЯ ЭЛЛИПСОВИДНЫЕ ЯЧЕЙКИ, ВЫТЯНУТЫЕ ВДОЛЬ ОСИ y .

АП: $T' = 0,42; T'' = 0,58;$ $T_0^1 = 0,033; A_1 = 0,05;$ $B_1 = 0,05; k_1 = 0,5;$ $k = 0,5; k_1/k_2 = 0,62$	АП: $T' = 0,36; T'' = 0,64;$ $T_0^1 = 0,05; A_1 = 0,075;$ $B_1 = 0,075; k_1 = 0,5;$ $k = 0,5; k_1/k_2 = 1,291$	ПП: $T' = 0,34; T'' = 0,66;$ $T_0^1 = 0,05; A_1 = 0,075;$ $B_1 = 0,0; k_1 = 0,01;$ $k_1/k_2 = 0,012$
---	---	---

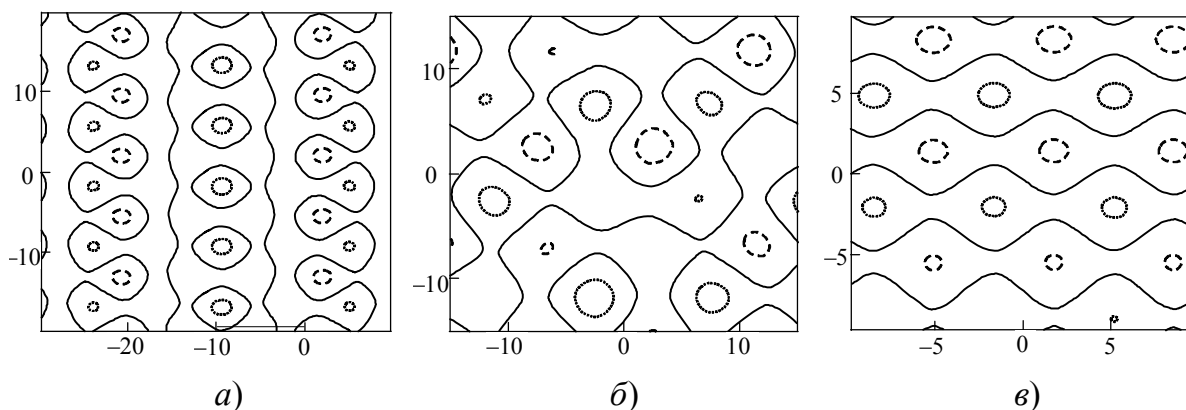


Рис. 3.17. Примеры начальных состояний тепловых полей при мультипликативной двумерности: изотерма $T = T'$ (пунктирная линия); нейтральная изотерма $T = 0,5$ (сплошная линия —); изотерма $T = T''$ (штриховая линия ---)

АП: $T = 0,5; T_0^1 = 0,0625;$ $A_1 = 0,1875; B_1 = 0,1;$ $k_1 = 0,707; k = 0,95; k_1/k_2 = 1$	ПП: $T = 0,5; T_0^1 = 0,1;$ $A_1 = 0,3; B_1 = 0,05;$ $k_1 = 0,4; k_1/k_2 = 0,686$	ПП: $T'' = 0,53; T_0^1 = 0,06;$ $A_1 = 0,1; B_1 = 0,1;$ $k_1 = 0,7; k_1/k_2 = 2,213$
--	---	--

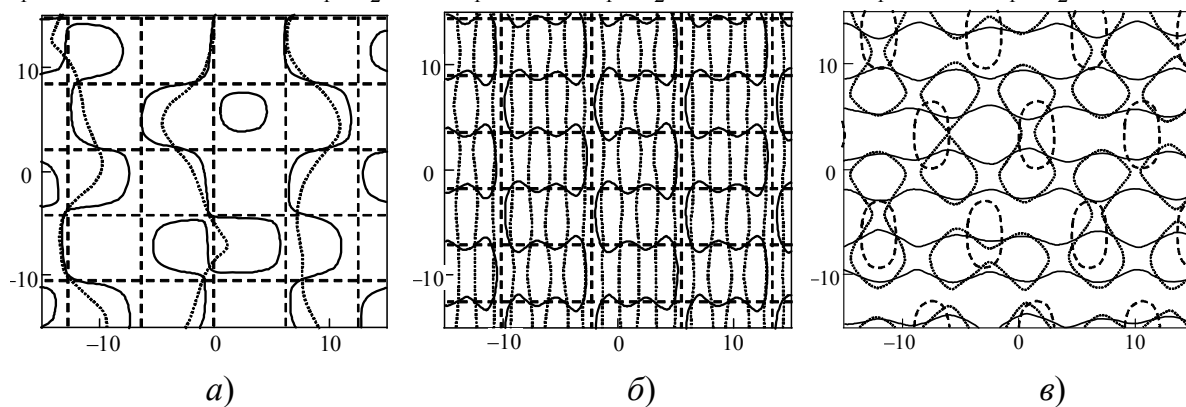


Рис. 3.18. Эволюция во времени изотерм при мультипликативной двумерности: $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —); $t = \infty$ (штриховая линия ---)

«Ребристые» профили температур дают весьма своеобразные примеры поведения двумерных температурных полей. На рис. 3.19, *а* вытянутые вдоль оси x полосы изотерм содержат холодные и горячие «кошачьи глаза»; вдоль оси y идет чередование холодных и горячих полос. На рис. 3.19, *б* отчетливо выражен «шахматный» порядок расположения холодных и горячих областей. На рис. 3.19, *в* имеем чередование холодных и горячих полос, разделенных нейтральными изотермами синусоидальной формы.

Рис. 3.20, *а* демонстрирует АП-ситуацию, когда все три параметра двумерности (амплитудный, частотный и крутизны всплеска) равны 1. Семейство нейтральных изотерм образует полосчатую структуру и ведет себя нетривиальным образом: при переходе в стационарное состояние эти полосы синхронно поворачиваются на 90° . На рис. 3.20, *б* показано, что в АП-режиме ячеистая структура, образуемая горячей изотермой, сохраняется при $t \in [0, \infty]$ в условиях резко выраженной двумерной неоднородности теплового поля. Еще один возможный вариант поведения семейства нейтральных изотерм в периодическом процессе показан на рис. 3.20, *в*: синусоидальные линии распрямляются и образуют простейшую совокупность прямых полос.

АП: $T' = 0,38; T'' = 0,62;$	АП: $T' = 0,42; T'' = 0,58;$	ПП: $T' = 0,38; T'' = 0,62;$
$T_{01} = 0,05; T_{02} = 0,05;$	$T_{01} = 0,05; T_{02} = 0,05;$	$T_{01} = 0,04; T_{02} = 0,04;$
$k = 0,2; r_1 = 1,0; r_2 = 0,5;$	$k = 0,95; r_1 = 1,25;$	$r_1 = 0,1;$
$k_1 = 1,225; k_2 = 0,866$	$r_2 = 1,25; k_1 = 1,569;$	$r_2 = 5,0; k_1 = 0,49;$
	$k_2 = 1,569$	$k_2 = 5,023$

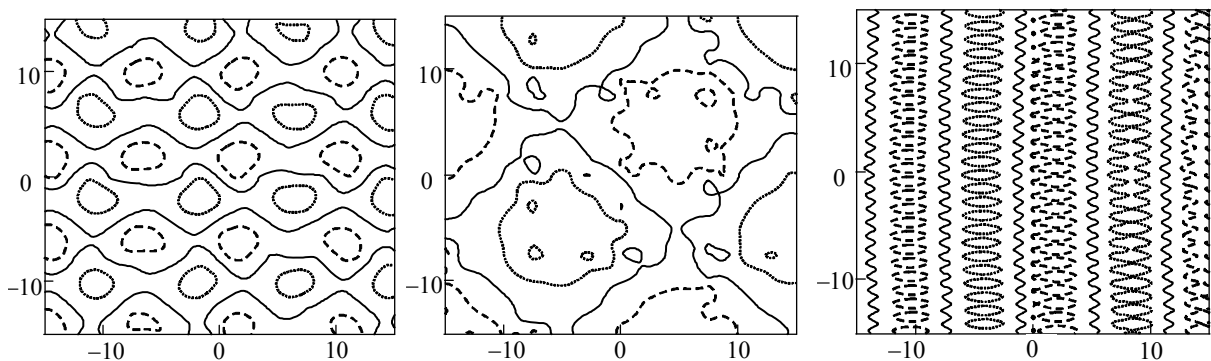


Рис. 3.19. Примеры начальных состояний тепловых полей при «ребристом» профиле температур: изотерма $T = T'$ (пунктирная линия), нейтральная изотерма $T = 0,5$ (сплошная линия —); изотерма $T = T''$ (штриховая линия ---)

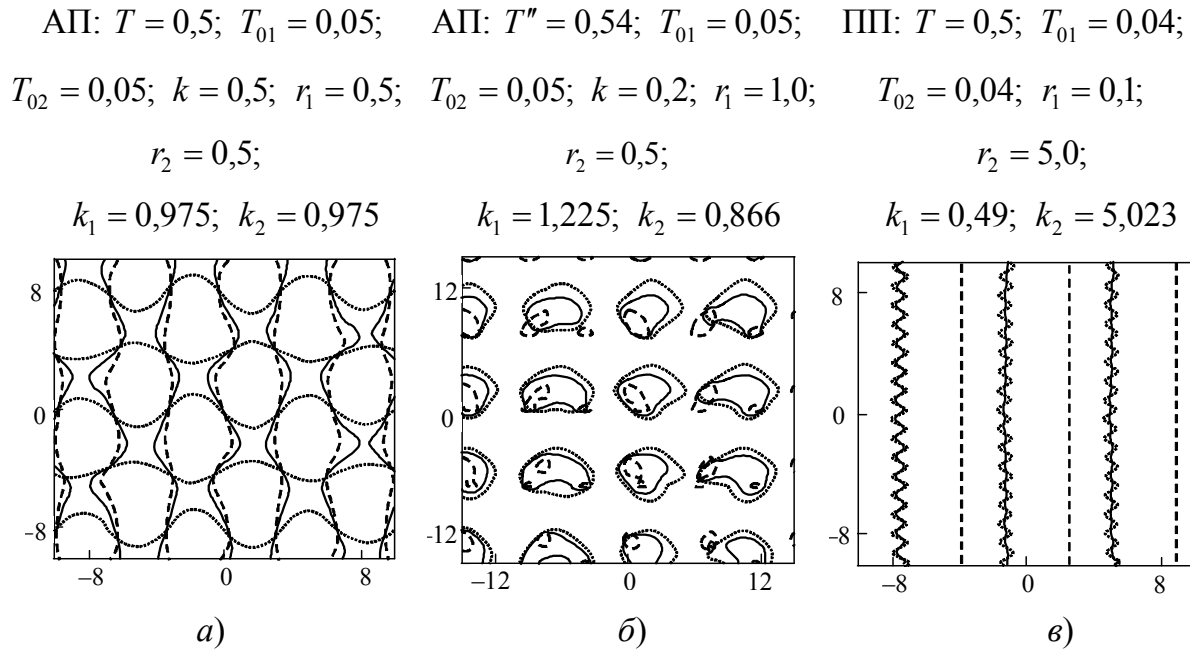


Рис. 3.20. Эволюция во времени изотерм при «ребристом» профиле температур:

$t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —);
 $t = \infty$ (штриховая линия - - -)

Отметим важную особенность: во всех выполненных нами расчетах (см., в частности, рис. 3.15, 3.17, 3.19) существует симметрия типов периодических структур в холодных и горячих областях, располагающихся по разные стороны нейтральной изотермы. Например, на рис. 3.17, а холодные и горячие изотермы образуют «кошачьи» глаза. На рис. 3.19, в холодные и горячие изотермы составляют ряды из сомкнувшихся ячеек одинаковой формы. Вопрос об асимметрии тепловых процессов в нелинейных нестационарных условиях подробно изучен нами в главе 2.

Представленные здесь качественные свойства изотерм сохраняются, если: 1) в аperiodическом процессе вида (3.37) происходит немонотонное по t изменение температуры; 2) в периодическом процессе (3.38) происходят гармонические колебания ($n_i = 0, i = 1, 2$) по времени.

3.3.2. Релаксация и ретардация

Для локально-неравновесной среды (1.10) с двумя временами релаксации решение выглядит следующим образом.

Аperiodический процесс: все формулы (3.37) остаются прежними, меняется только λ_* :

$$\lambda_* = \lambda \frac{(1 - \gamma_2 k)}{(1 - \gamma_1 k)},$$

где γ_1 – время релаксации; γ_2 – время ретардации. Имеем периодичность по координатам x, y , если $k_*^2 > 0$, т. е. в данном случае при $\lambda_* > 0$: 1) $1 < \gamma_1 k$, $1 < \gamma_2 k$; 2) $1 > \gamma_1 k$, $1 > \gamma_2 k$. Это означает, в частности, что при $\gamma_2 = 0$ периодичность существует только в медленном процессе, для которого $k^{-1} > \gamma_1$, где k^{-1} – характерное время. Если $k^{-1} < \gamma_1$, то имеем режим быстрой релаксации. Решение (3.37) описывает монотонное изменение температуры во времени. Присоединение к (3.37) слагаемых вида $\exp(-k_2 t) T_2(x, y)$, $k_2 > 0$ и изучение немонотонного по t апериодического режима не дает существенных изменений в поведении изотерм.

Периодический во времени процесс: все формулы (3.38)–(3.39) остаются прежними, изменяются только выражения для коэффициентов затухания n_i и частот ω_i :

$$2n_i = \frac{1}{c\gamma_1} (c - \gamma_1 q_v^1 + \lambda\gamma_2 h_i^2) \geq 0, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{c\gamma_1} (\lambda h_i^2 - q_v^1) > 0; \quad i = 1, 2.$$

Обращает на себя внимание корреляция между частотами колебаний по координате и по времени, а именно: при $\gamma_2 = 0$ квадрат частоты $\Omega_i^2 = \omega_i^2 - n_i^2$, $i = 1, 2$ есть линейно возрастающая функция аргумента h_i^2 . Если же $\gamma_2 > 0$, то зависимость Ω_i^2 от h_i^2 немонотонная, имеет максимум.

Рассмотрим аддитивную двухмерность. При $0 < \Delta < 1$ характерным элементом структуры поля является полоса изотерм. Для отчетливо выраженных двухмерных состояний типичны решетчатые либо ячеисто-решетчатые структуры.

Сначала обсудим апериодический во времени медленный процесс. Принципиальная роль знакопеременного источника энергии в том, что он генерирует шахматный порядок расположения изотерм.

На рис. 3.21, а показано чередование ячеек в областях подвода и отвода энергии, расположенных между полосами нейтральной изотермы. Эволюция изотерм во времени обладает нетривиальными свойствами (рис. 3.22). Рассмотрим рис. 3.22, а, б. В первом случае ясно, что существуют своеобразные пульсации: ряды ячеек преобразуются в полосы, после чего происходит возвращение к ячеистой структуре. Во втором случае (рис. 3.22, б) таких пульсаций нет. Идет преобразование полос в ячейки. По мере роста параметра двухмерности (рис. 3.22, в) имеем: исходные мелкие ячейки принимают замы-

словатый узорчатый вид, после чего переходят в крупные ячейки, расположенные рядами. В области теплоподвода $T > 0,5$ эволюционные свойства изотерм аналогичны тем, что показаны на рис. 3.22. В быстром процессе перечисленные закономерности в основном сохраняются: типичные примеры даны на рис. 3.23.

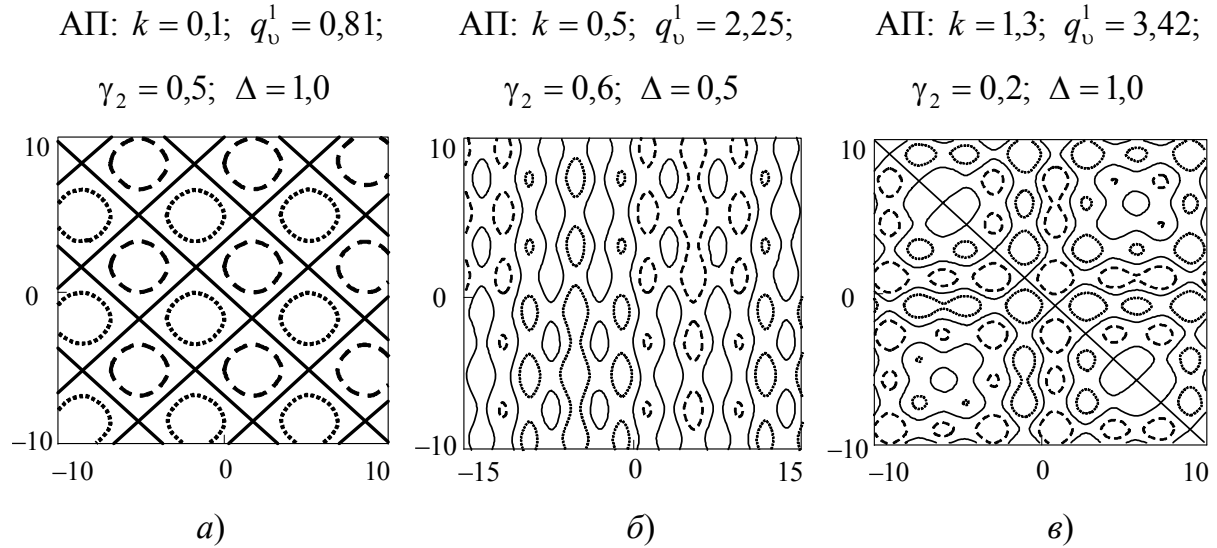


Рис. 3.21. Аперодический во времени процесс.

Примеры начальных состояний тепловых полей в медленном режиме:

- изотерма $T' = 0,3$ (пунктирная линия);
- нейтральная изотерма $T = 0,5$ (сплошная линия —);
- изотерма $T'' = 0,7$ (штриховая линия ---)

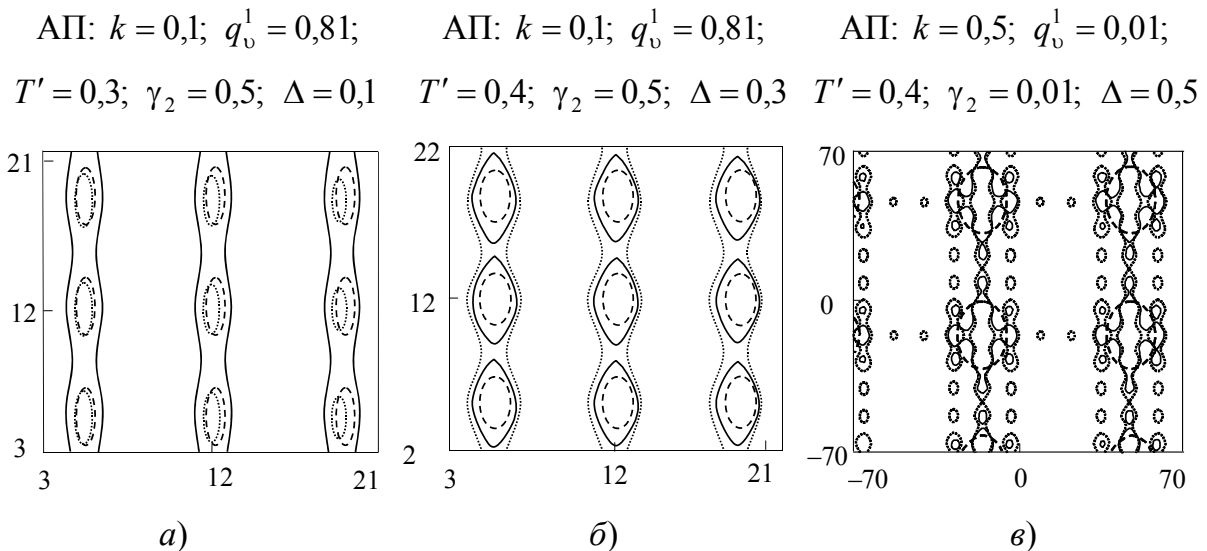


Рис. 3.22. Аперодическая во времени эволюция изотерм

в медленном режиме: $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —); $t = \infty$ (штриховая линия ---)

Для затухающего периодического процесса были рассмотрены два основных варианта: 1) преобразование одного пространственно-периодического состояния в другое, тоже пространственно-периодическое; 2) переход системы из однородного состояния $T(x, y, t = 0) \equiv \text{const}$ в двумерное периодическое $T = T_0(x, y)$; запись аналитического решения и примеры расчетов для второго варианта здесь не приводятся. Качественные свойства изотерм в обоих вариантах одинаковые.

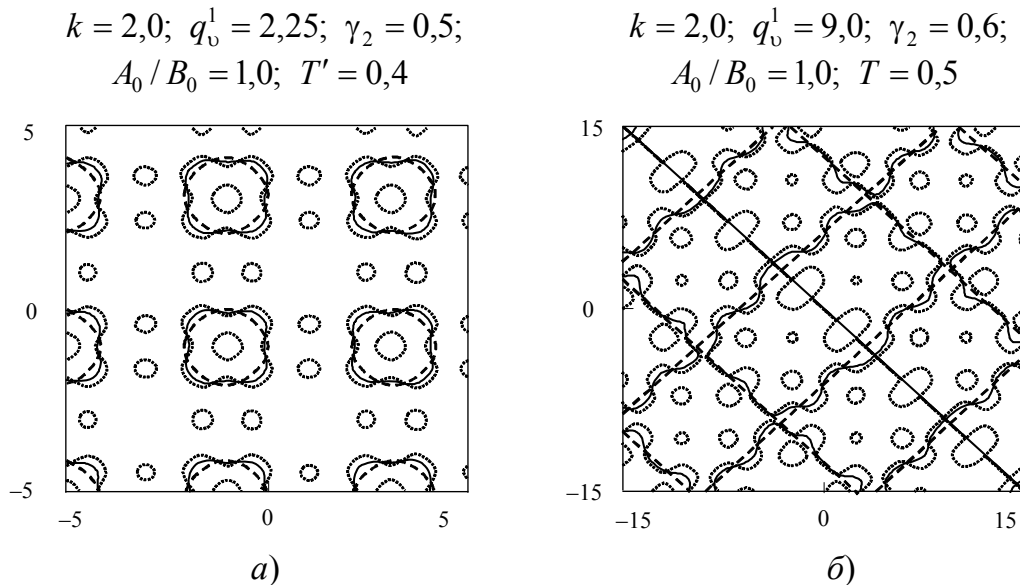


Рис. 3.23. Аперриодическая во времени эволюция изотерм в быстром режиме:
 $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —);
 $t = \infty$ (штриховая линия ---)

Для первого варианта приведем типичные результаты, относящиеся к случаю (3.38) при $A_0(0) \neq 0, B_0(0) \neq 0$. На рис. 3.24, б, в хорошо видно, что шахматный порядок расположения ячеек приобретает своеобразные геометрические свойства, а принципиальное влияние конкуренции температурных областей с теплоподводом и теплоъемом полностью сохраняется.

Колебания температуры по t дают новые свойства. Нейтральная изотерма (рис. 3.24, а) преобразуется из системы «кошачьих глаз» в решетчатую структуру. Пульсация изотерм, наблюдавшаяся в аперриодическом режиме (рис. 3.22, а), здесь происходит на отдельных полосах, которые регулярным образом чередуются между собой на плоскости (x, y) (рис. 3.24, б). На рис. 3.24, в имеем в исходном состоянии ряды ячеек, причем в этих рядах периодическим образом расположены «восьмерки»; с ростом времени «восьмерки» поворачиваются на плоскости (x, y) , а затем поле изотерм переходит в обычную ячеистую структуру.

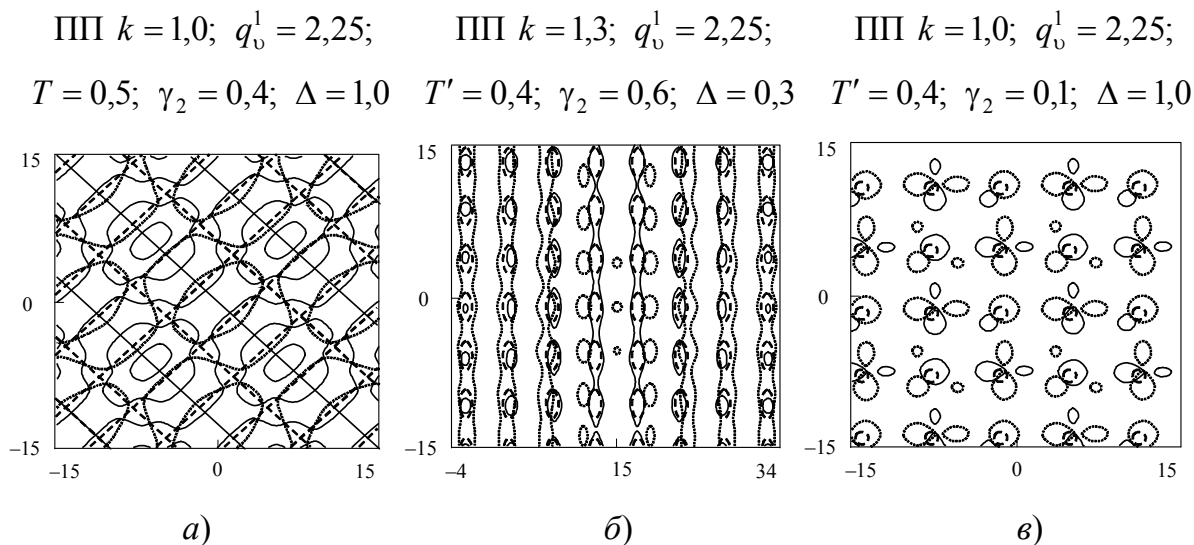


Рис. 3.24. Затухающие во времени периодические колебания.

Эволюция изотерм: $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —); $t = \infty$ (штриховая линия - - -)

Перечисленные закономерности поведения изотерм сохраняются для мультипликативной (рис. 3.25) и «ребристой» двухмерности (рис. 3.26).

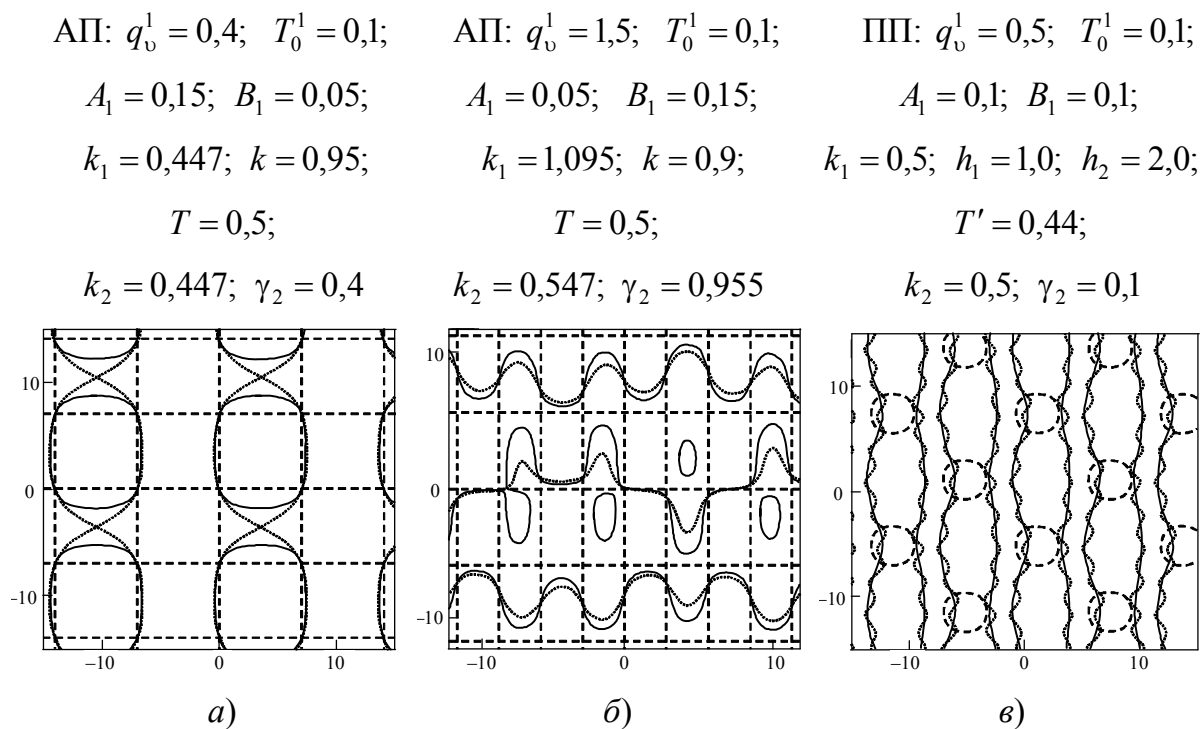


Рис. 3.25. Эволюция во времени изотерм

при мультипликативной двухмерности: $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —); $t = \infty$ (штриховая линия - - -)

АП: $q_v^1 = 0,5; T_0^1 = 0,05;$ $T_0^{(2)} = 0,15;$ $r_1 = 0,5; r_2 = 0,5;$ $A_1 = 0,15; B_1 = 0,05;$ $k = 0,85; \gamma_2 = 0,1023;$ $T' = 0,44$	АП: $q_v^1 = 0,5; T_0^1 = 0,05;$ $T_0^{(2)} = 0,15;$ $r_1 = 0,5; r_2 = 0,5;$ $A_1 = 0,05; B_1 = 0,15;$ $k = 0,85;$ $T = 0,5$	ПП: $q_v^1 = 0,8; T_0^1 = 0,05;$ $T_0^{(2)} = 0,15;$ $r_1 = 0,447; r_2 = 0,447;$ $A_1 = 0,1; B_1 = 0,1;$ $\gamma_2 = 0,1023; h_1 = 3,0; h_2 = 3,0;$ $T = 0,5; \gamma_2 = 0,04$
--	---	---

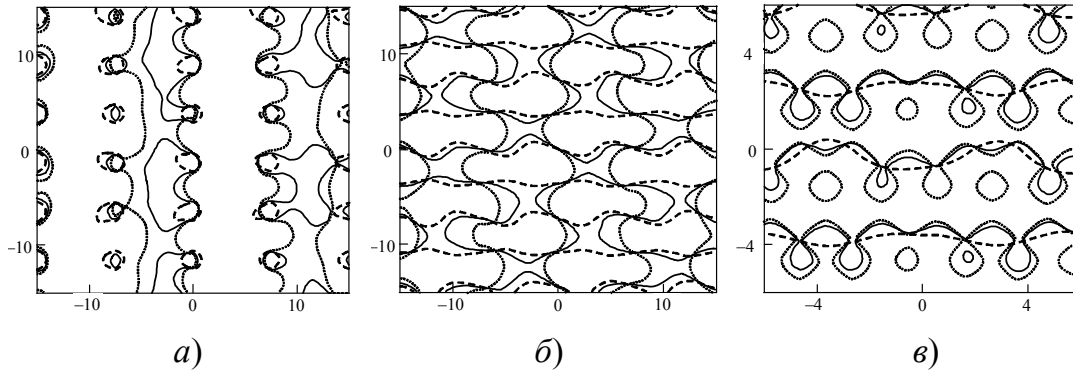


Рис. 3.26. Эволюция во времени изотерм при «ребристой» двухмерности:
 $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^*$ (сплошная линия —);
 $t = \infty$ (штриховая линия ---)

3.4. Морфологические свойства периодических структур

3.4.1. Линии остановки и линии неподвижности изотерм

В § 3.1 (см. также [32], [55]) показано, что периодические остановки изотерм говорят о резких изменениях скорости ФГК и служат причиной образования пространственно-периодических структур при переходе аморфной пленки в устойчивое кристаллическое состояние. Между каждыми двумя последовательными остановками происходит чередование двух режимов: 1) рост скорости ФГК от нуля до конечного значения; 2) убывание скорости ФГК от конечного значения до нуля. Ясно, что решение двумерной нестационарной задачи с явным выделением неизвестной ФГК и детализацией процессов теплообмена получить очень трудно. Чтобы определить в простой, наглядной форме основные качественные закономерности теплопереноса при взрывной кристаллизации, развиваем здесь теоретический подход, изложенный в § 3.1, и моделируем конкуренцию между генерацией энергии и теплоотдачей знакопеременным объемным источником энергии, который линейно зависит от температуры T :

$$q_v = q_v^0 + q_v^1 T; \quad q_v^0, q_v^1 - \text{const}, \quad T \in [T_w, T_c],$$

причем полагаем $q_v^0 < 0$, $dq_v/dT = q_v^1 > 0$. Температура $T = T_w$ характерна для подложки: $q_v(T_w) < 0$. Изотерма $T = T_c > T_w$ является образом ФГК: $q_v(T_c) > 0$. Важным параметром процесса служит температура $T_0^0 = -q_v^0/q_v^1 > 0$, при которой тепловыделение и теплоотдача уравниваются [$q_v(T_0^0) = 0$], взрывная кристаллизация прекращается. Терминология прежняя [см. комментарий к формуле (3.33)]: $T(x, y, t) = T_0^0$ – нейтральная изотерма; $T = T_w < T_0^0$ – «холодная» изотерма; $T = T_c > T_0^0$ – «горячая» изотерма. Основным интерес для нас представляет семейство линий, образуемых при периодических остановках изотермы $T = T_c$. Эти линии остановки, а также линии неподвижности изотерм ассоциируются с наблюдаемыми в экспериментах границами плоских кристаллических участков, которые имеют вид полосы, «чешуйки» или «лепестка». Таким образом, в рамках развиваемого здесь феноменологического подхода к проблеме взрывной кристаллизации мы рассматриваем макроскопические свойства ФГК.

Наша цель: изучить качественные свойства линий остановки и линий неподвижности изотерм двухмерного релаксирующего теплового поля.

Для изучаемых нами тепловых процессов физически содержательным является решение (3.38):

$$T = T_0^0 + A(t) \sin(h_1 x + \beta_1) + B(t) \sin(h_2 y + \beta_2), \quad (3.40)$$

$$h_1, h_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const}, \quad x \in [-\infty, \infty], \quad y \in [-\infty, \infty], \quad t \geq 0,$$

где $T_0^0 = T(x, y, t \rightarrow \infty) \equiv \text{const}$ – нейтральная температура, которая устанавливается в ходе релаксационного процесса. Практика наших расчетов показала, что этот вариант является основным. Процесс установления неоднородного стационарного теплового поля $T(x, y, t \rightarrow \infty) = T_0(x, y)$ [см. (3.34)–(3.36)] не имеет закономерностей, отличающихся от основного варианта. Амплитуды $A(t)$, $B(t)$ есть периодические решения дифференциальных уравнений (3.39), где $\omega_i^2 > n_i^2$; $i = 1, 2$. Начальные условия $t = 0$, $A(0) = A_1^1$, $B(0) = B_1^1$ важны при выборе исходного состояния системы «среда – источник энергии». В формуле (3.40) частоты колебаний h_1, h_2 определяют неоднородность теплового поля вдоль координатных осей x, y . Частотный параметр двухмерности равен

$$\Delta = (h_1 / h_2) \sim |(\text{grad}T)_x| / |(\text{grad}T)_y|$$

и характеризует количественное соотношение между модулями компонентов вектора градиента температуры. Следовательно, величина Δ опосредованным образом несет информацию о двухмерных свойствах условий теплообмена изучаемого материала с внешней средой.

Скорость перемещения изотермы $T(x, y, t) - T_c = 0$, $t > 0$, равна

$$N = -\frac{\partial T}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

поэтому условие остановки в момент времени $t = t_r$ имеет вид:

$$(\partial T / \partial t)_{t=t_r} = 0.$$

Линия остановки изотермы – это линия на плоскости (x, y) , удовлетворяющая условию $N(x, y, t_r) = 0$. Линия неподвижности изотермы – это линия, на которой условие остановки выполнено в каждый момент времени:

$$N(x, y, t \geq 0) = 0. \quad (3.41)$$

Точка неподвижности $x = x_r$, $y = y_r$ также удовлетворяет условию (3.41).

3.4.2. Полосчатые и чешуйчатые структуры

Исследование решения (3.40) дает конфигурации I – V периодических структур. Обсудим свойства этих конфигураций. Результаты расчетов даны при $T_c = 0,54$; $T_0^0 = 0,5$.

I. Из формулы (3.40) находим точки неподвижности изотерм; координаты этих точек – решения двух элементарных уравнений $\sin(h_1 x + \beta_1) = 0$, $\sin(h_2 y + \beta_2) = 0$. Следовательно, точки неподвижности (x_r, y_r) образуют узлы стационарной «решетки» и расположены периодическим образом вдоль координатных осей x и y (рис. 3.27); здесь параметры a_1, a_2 – начальные фазы колебаний функций $A(t), B(t)$. На этом же рисунке показаны «чешуйки» (конфигурация V); условия их существования даны в конце п. 3.4.2.

II. Допустим, что

$$B(t) = B_1 A(t), \quad B_1 \equiv \text{const}, \quad h_1 = h_2 = h, \quad (3.42)$$

т. е. $\Delta = 1$. Тогда условие (3.41) дает уравнение

$$B_1 \sin(hy + \beta_2) + \sin(hx + \beta_1) = 0. \quad (3.43)$$

Если $B_1 = \pm 1$, то из (3.43) получаем неподвижную «решетку». Например, при $B_1 = 1$ имеем:

$$h(x + y) + \beta_1 + \beta_2 = 2\pi n_0, \quad h(x - y) + \beta_1 - \beta_2 = \pm\pi + 4\pi n_0,$$

где n_0 – любое целое число. Примеры таких «решеток» показаны на рис. 3.28. По мере удаления $|B_1|$ от единицы «решетка» распадается на неподвижные полосы (рис. 3.29). Формула (3.43) позволяет утверждать, что линии неподвижности («решетки» и полосы) совпадают с семейством линий нейтральной изотермы. Следовательно, именно нейтральные линии, на которых уравниваются тепловыделение и теплоотдача ($q_v(T_0^0) = 0$), образуют решетчатые и полосчатые структуры, заключающие в себе кристаллические участки.

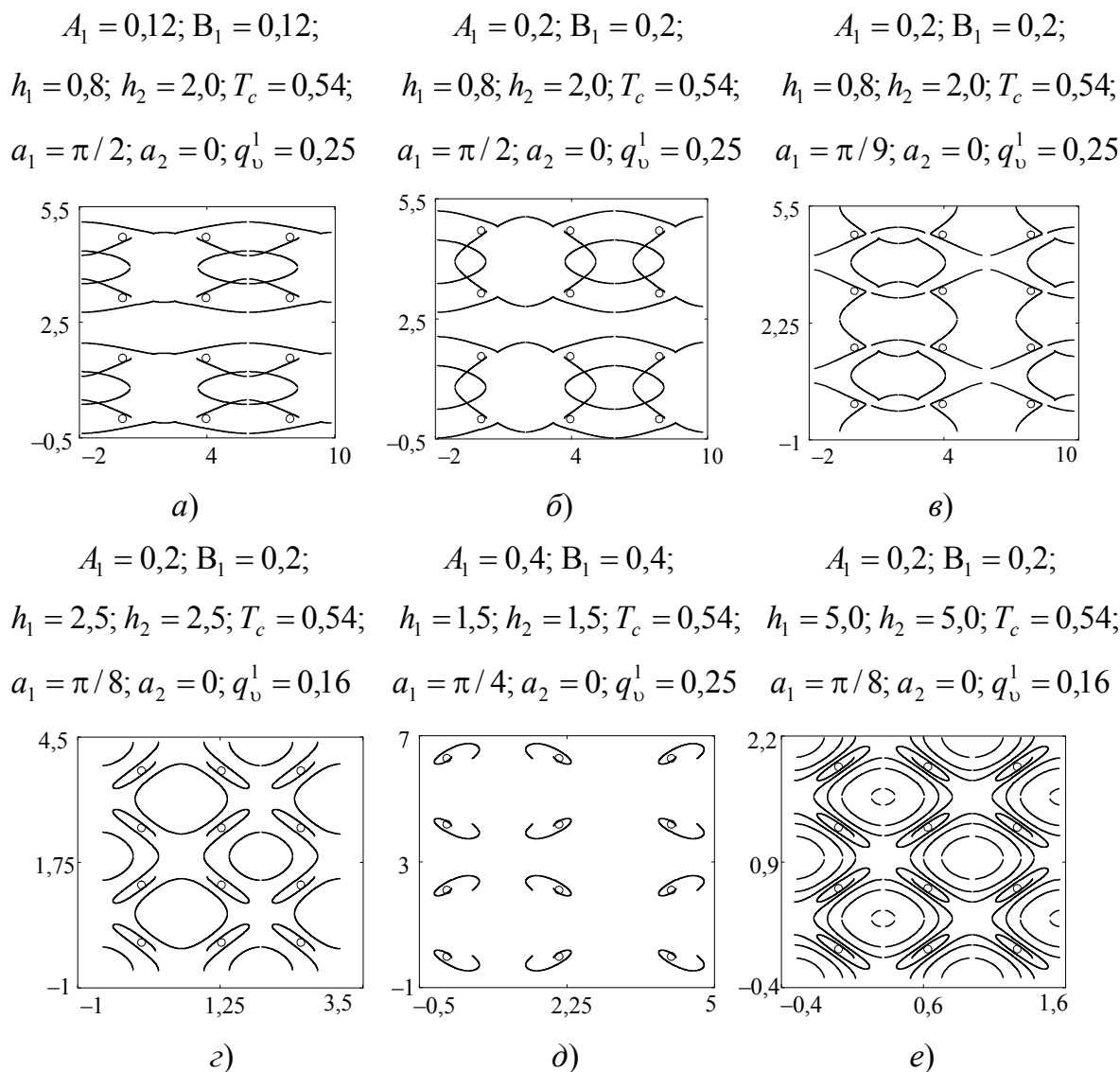


Рис. 3.27. Примеры точек неподвижности и линий неподвижности

III. Моменты остановки $t = t_r$ – корни уравнения $\dot{A}(t) = 0$ [см. (3.39)]:

$$A(t) = A_1 \exp(-n_1 t) \sin(r_1 t + a_1), \quad r_1 = (\omega_1^2 - n_1^2)^{1/2}, \quad A_1, a_1 - \text{const}; \quad (3.44)$$

$$r_1 t_{n_0} + a_1 = \text{arctg} \frac{r_1}{n_1} + \pi n_0. \quad (3.45)$$

Следовательно, $t_r = t_{n_0}$, где $n_0 = 0, 1, 2, \dots$. В момент остановки изотерма $T = T_c$ имеет вид:

$$T_c - T_0^0 = A(t_{n_0}) [B_1 \sin(hy + \beta_2) + \sin(hx + \beta_1)].$$

$$h_1 = 2,0; h_2 = 2,0; q_v^1 = 0,16; \quad h_1 = 1,7; h_2 = 1,7; q_v^1 = 0,7225; \quad h_1 = 3,2; h_2 = 1,6; q_v^1 = 0,64;$$

$$A_0 = 0; B_0 = 0; \quad A_0 = 0,025; B_0 = 0,025; \quad A_0 = 0,025; B_0 = 0,025;$$

$$A_1 = 0,133; B_1 = 1,0; T_c = 0,54 \quad A_1 = 0,018; B_1 = 1,0; T_c = 0,54 \quad A_1 = 0,016; B_1 = 1,0; T_c = 0,54$$

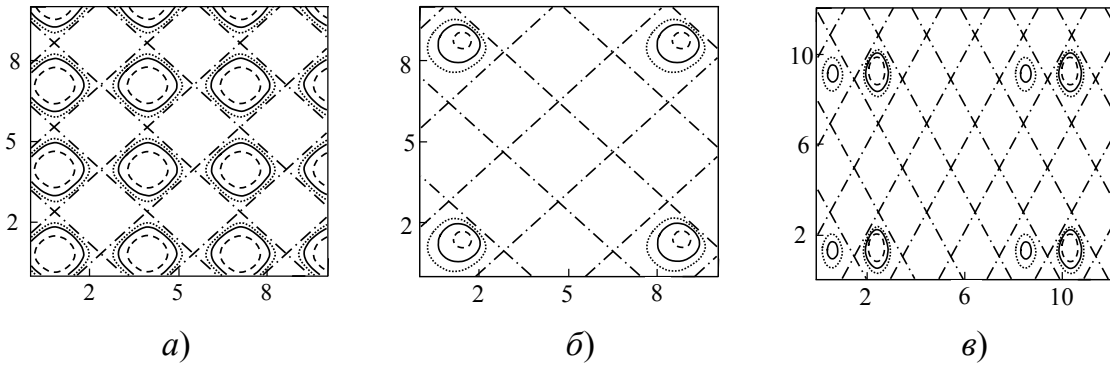


Рис. 3.28. Линии неподвижности (штрихпунктирная линия - · - · -) и сужающийся «кошачий глаз»

$$h_1 = 1,5; h_2 = 1,5; q_v^1 = 0,5625; \quad h_1 = 1,5; h_2 = 1,5; q_v^1 = 0,5625; \quad h_1 = 1,6; h_2 = 1,6; q_v^1 = 0,5625;$$

$$A_1 = 0,08; B_1 = 1,05; T_c = 0,54 \quad A_1 = 0,04; B_1 = 2,5; T_c = 0,54 \quad A_1 = 0,0103; B_1 = 8,0; T_c = 0,54$$

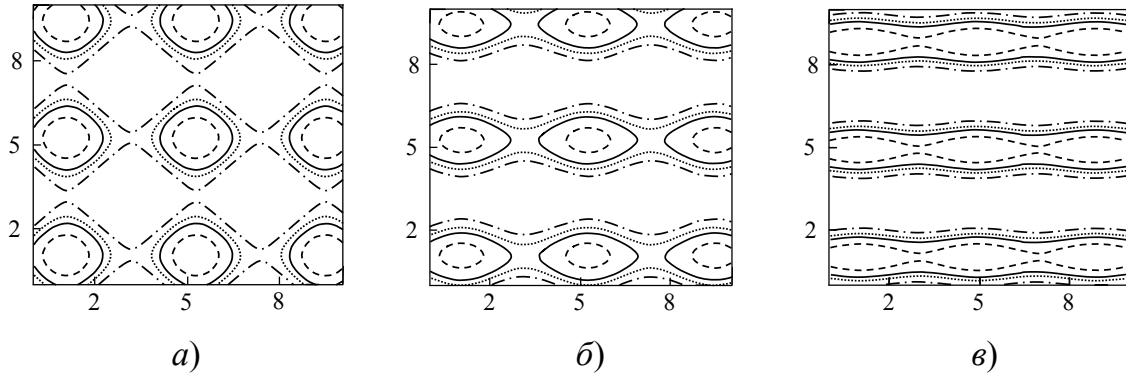


Рис. 3.29. Линии неподвижности (штрихпунктирная линия - · - · -).

Линии остановки: $n_0 = 0$ (пунктирная линия ······),
 $n_0 = 1$ (сплошная линия —), $n_0 = 2$ (штриховая линия - - -)

На рис. 3.28, 3.29 показаны примеры расчета линий остановки и линий неподвижности «горячей» изотермы $T = T_c$. Проанализируем формулы (3.44), (3.45). Для наглядности параметр q_v^1 источника энергии запишем в виде:

$$q_v^1 = [q_v(T_c) - q_v(T_w)] / (T_c - T_w).$$

Отсюда ясно, что на фиксированном температурном интервале увеличение интенсивности теплоотдачи (увеличение $|q_v(T_w)|$) приводит к росту q_v^1 , т. е. к уменьшению параметра n_1 затухания колебаний [см. (3.39), (3.44)]. Рассмотрим режим слабого затухания $n_1 \approx 0$, для которого величина $\gamma q_v^1 / c \approx 1$ находится в левой малой окрестности 1. В этом случае частота колебаний $r_1 \sim \omega_1$, а условием существования периодического решения $A(t)$ является неравенство $\gamma > \gamma_*$, где $\gamma_* = c / (\lambda h^2)$ – пороговое значение времени тепловой релаксации. Пусть входные параметры задачи такие, что $t_r > 0$ существует. Тогда для момента остановки ФГК получаем: $t_r \sim (1/r_1) \sim \gamma^{1/2}$. Отсюда важный вывод: чем больше γ , т. е. чем сильнее выражена тепловая неравновесность процесса, тем дольше движется ФГК до остановки и тем шире интервал времени между остановками. Численные расчеты подтверждают этот вывод (рис. 3.30).

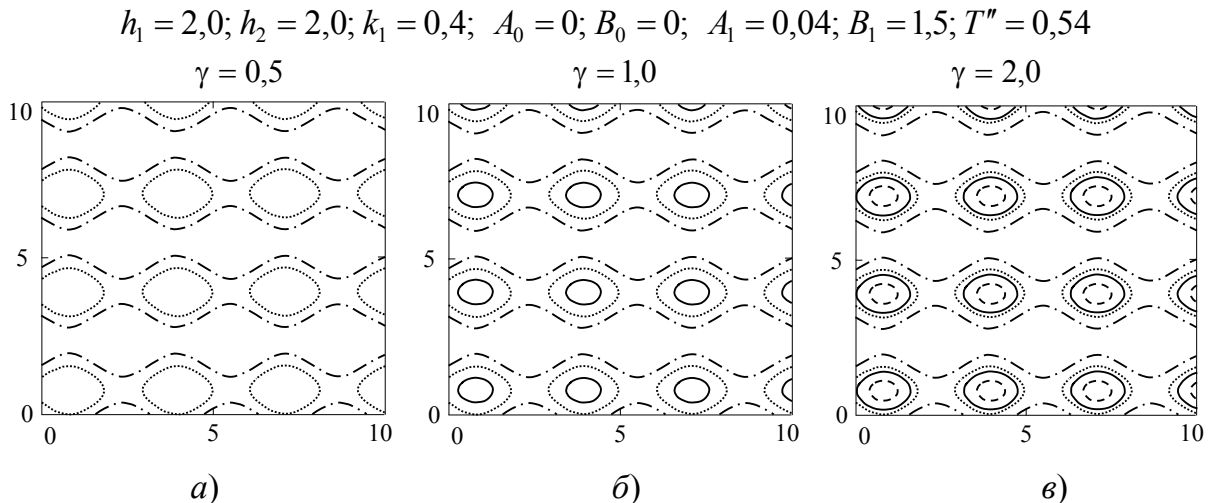


Рис. 3.30. Влияние времени релаксации γ на поведение линий неподвижности (штрихпунктирная линия $-\cdot-\cdot-$) и линий остановок: $n_0 = 0$ (пунктирная линия \cdots), $n_0 = 1$ (сплошная линия $—$), $n_0 = 2$ (штриховая линия $- - -$)

IV. Важным элементом периодических тепловых структур являются замкнутые изотермы – «кошачьи глаза». Замкнутые изотермы сходятся к центру «глаза» пульсирующим образом, совершая остановки в моменты времени (3.45). Своеобразие этого процесса состоит в следующем. Если «глаз» сужается в холодной области, то температура в центральной части «глаза» ниже, чем во внешней области «глаза». Если «глаз» сужается в горячей области, то в его центре температура выше, чем снаружи. На рис. 3.28 показана комбинация стационарной решетки неподвижности и сужающихся «глаз». Чтобы получить замкнутую изотерму, расширяющуюся в пульсирующем режиме, нужно дополнить выражение $A(t)$ в (3.44) слагаемыми, обеспечивающими выполнение свойств (см. § 3.1): 1) наличие незатухающих колебаний; 2) наличие биений – колебаний с периодически изменяющейся амплитудой. Итоговое выражение имеет вид:

$$A(t) = [A_1 \exp(-n_1 t) + A_2 - 2mA_4] \sin(r_1 t + a_1) + [A_3 + A_4 \sin(r_* t)] \cos(r_1 t + a_1); \quad (3.46)$$

$$r_* = 2mr_1; \quad A_3 = n_1 A_2 / r_1, \quad a_1 = \arctg(r_1 / n_1),$$

где $A_1 = -A_2$, A_4 – произвольные постоянные; $2m$ – любое четное положительное число; моменты остановки $t_r = t_{n0}$ определяются по формуле (3.45). Данный нестационарный процесс обеспечивается резонансным источником энергии:

$$q_v(T, t) = \frac{k_v(t)}{A(t)} (T - T_0^0),$$

где $k_v(t)$ есть решение линейного дифференциального уравнения

$$k_v + \gamma \frac{dk_v}{dt} = c\dot{A} + c\gamma\ddot{A} + \lambda h^2 A,$$

правая часть которого подсчитывается с помощью (3.46). Развернутая запись функции $k_v(t)$ здесь не приводится. Пульсирующий расширяющийся «глаз» (рис. 3.31) ведет себя аналогично сужающемуся «глазу»: в холодной/горячей области температура в центре «глаза» ниже/выше, чем снаружи.

V. Оставаясь в классе решений (3.39), (3.40), снимем ограничения (3.42). Полагаем, что $\Delta \neq 1$, а функции $A(t)$, $B(t)$ независимы друг от друга. Формула для $B(t)$ записывается по аналогии с (3.44) с уче-

том очевидных переобозначений и замены индекса 1 на 2. Линии неподвижности изотермы $T = T_c$ удается записать в параметрическом виде. Из условия (3.41) находим

$$\sin(h_2 y + \beta_2) = \frac{-\dot{A} \sin(h_1 x + \beta_1)}{\dot{B}}.$$

Тогда из уравнения изотермы получаем

$$\frac{(T_c - T_0^0)\dot{B}}{A\dot{B} - \dot{A}B} = \sin(h_1 x + \beta_1), \tag{3.47}$$

где $A\dot{B} \neq \dot{A}B$, $t \geq 0$. В итоге имеем:

$$\frac{(T_0^0 - T_c)\dot{A}}{A\dot{B} - B\dot{A}} = \sin(h_2 y + \beta_2). \tag{3.48}$$

$A_0 = 0,02; B_0 = 0,02; A_1 = 0,0257; A_0 = 0,02; B_0 = 0,02; A_1 = 0,0257; A_0 = 0,03; B_0 = 0,03; A_1 = 0,036;$

$A_2 = -0,0257; A_4 = 0,0057; A_2 = -0,0257; A_4 = 0,0028; A_2 = -0,036; A_4 = 0,008;$

$q_v^1 = 0,81; h = 1,8;$

$q_v^1 = 0,81; h = 1,8;$

$q_v^1 = 0,16; h = 1,8;$

$m = 1; T_0 = 0,5; T_c = 0,54$

$m = 1; T_0 = 0,5; T_c = 0,54$

$m = 1; T_0 = 0,5; T_c = 0,54$

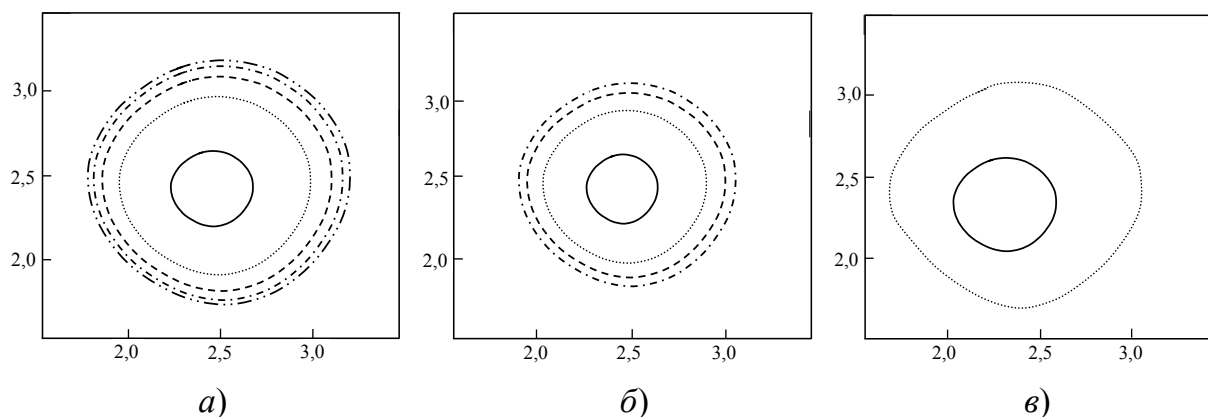


Рис. 3.31. Примеры остановок изотерм для расширяющегося «глаза»

Две зависимости (3.47), (3.48) дают посредством параметра $t \geq 0$ линии неподвижности – «чешуйки» на плоскости (x, y) (рис. 3.27). Результаты расчетов показывают, что сильными средствами воздействия на конфигурацию «чешуек» являются: частотный параметр двумерности Δ , начальные амплитуды и фазы колебаний функций $A(t), B(t)$, параметр источника q_v^1 .

3.4.3. Автомодельный процесс формирования полос

На плоскости (x, y) применяем две независимые переменные типа распространяющейся волны

$$\alpha = x + at, \quad \beta = y + bt; \quad a, b - \text{const.}$$

На основе системы уравнений (1.3) при $q_v = q_v^0 + q_v^1 T$; $q_v^0, q_v^1 - \text{const}$ получаем уравнение, определяющее температуру $T = T(\alpha, \beta)$:

$$(a^2 - w^2)T_{\alpha\alpha} + 2abT_{\alpha\beta} + (b^2 - w^2)T_{\beta\beta} = k_v^0 + k_v^1 T + a_1 T_\alpha + b_1 T_\beta, \quad (3.49)$$

$$w^2 = \lambda / (c\gamma), \quad k_v^0 = q_v^0 / (c\gamma), \quad k_v^1 = q_v^1 / (c\gamma),$$

$$a_1 = a(\gamma q_v^1 - c) / (c\gamma), \quad b_1 = b(\gamma q_v^1 - c) / (c\gamma).$$

Уравнение (3.49) имеет гиперболический тип, если процесс сверхзвуковой: $M^2 \equiv (a^2 + b^2) / w^2 > 1$. Это возможно в двух случаях: 1) $a^2 < w^2 < (a^2 + b^2)$ при $b^2 < w^2$; вдоль оси x и вдоль оси y процесс дозвуковой, но в целом теплоперенос подчиняется уравнению гиперболического типа; 2) $a^2 > w^2$, т. е. при любом b^2 имеем гиперболичность; для наших целей этот случай не представляет интереса. Уравнение (3.49) имеет эллиптический тип, если процесс дозвуковой: $M^2 < 1$. Решение представим в следующей форме:

$$T(\alpha, \beta) = T_0^0 + f(\alpha) + g(\beta), \quad (3.50)$$

где $T \in [T_1, T_2] \subset [T_w, T_c]$. Тогда получаем для $f(\alpha)$ и $g(\beta)$ два обыкновенных дифференциальных уравнения, каждое из которых есть уравнение затухающих колебаний. Обсудим здесь ситуацию, при которой оба эти уравнения имеют периодические решения. На плоскости (x, y) работаем для определенности в первом квадранте: $x \geq 0, y \geq 0, a > 0, b > 0; \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Решение имеет вид:

$$f(\alpha) = f_0 \exp(-n\alpha) \sin(\alpha \sqrt{k^2 - n^2} + \delta_1), \quad (3.51)$$

$$2n = \frac{a_1}{w^2 - a^2} \geq 0, \quad k^2 = \frac{k_v^1}{w^2 - a^2} > 0;$$

$$g(\beta) = g_0 \exp(-m\beta) \sin\left(\beta\sqrt{l^2 - m^2} + \delta_2\right), \quad (3.52)$$

$$2m = \frac{b_1}{w^2 - b^2} \geq 0, \quad l^2 = \frac{k_v^1}{w^2 - b^2} > 0.$$

Здесь $a^2 < w^2$, $b^2 < w^2$, а также $q_v^1 \geq c/\gamma$, поэтому $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$. В рамках этих ограничений допускаются дозвуковой ($M^2 < 1$) и сверхзвуковой ($M^2 > 1$) варианты. Неравенства $k^2 > n^2$ и $l^2 > m^2$ дают оценку параметра q_v^1 источника энергии:

$$\frac{c}{\gamma} \leq q_v^1 < \frac{c}{\gamma} + \min\left\{\frac{2c}{\gamma a}(w^2 - a^2)^{1/2}, \frac{2c}{\gamma b}(w^2 - b^2)^{1/2}\right\}.$$

Постоянные f_0 , g_0 , δ_1 , δ_2 произвольны.

Скорость перемещения изотермы $T(\alpha, \beta) = T_i \equiv \text{const}$ равна

$$N_i = -(aT_\alpha + bT_\beta) \left[(T_\alpha)^2 + (T_\beta)^2 \right]^{-1/2}.$$

Условие неподвижности $N_i = 0$ означает, что

$$a(df/d\alpha) + b(dg/d\beta) = 0.$$

Тогда из уравнений $df/d\alpha = 0$, $dg/d\beta = 0$ находим:

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} (\text{arctg } D + \pi n_0 - \delta_1); \quad (3.53)$$

$$\beta_r = \frac{1}{\sqrt{l^2 - m^2}} (\text{arctg } \tilde{D} + \pi \tilde{n}_0 - \delta_2), \quad (3.54)$$

$$D = \sqrt{k^2 - n^2}/n, \quad \tilde{D} = \sqrt{l^2 - m^2}/m,$$

где n_0 , \tilde{n}_0 – целые положительные числа. Следовательно, на плоскости (x, y) получаем $x + at = \alpha_r$, $y + bt = \beta_r$, а линия неподвижности изотерм – прямая:

$$y = (b/a)x + \beta_r - (b/a)\alpha_r. \quad (3.55)$$

Из соображений симметрии понятно, что во 2-м, 3-м и 4-м квадрантах нужно брать, соответственно, $a < 0$, $b > 0$; $a < 0$, $b < 0$; $a > 0$, $b < 0$. Решению (3.53), (3.54) соответствует изотерма $(T_i)_r = T_0^0 + f(\alpha_r) + g(\beta_r)$ или, что то же,

$$(T_i)_r = T_0^0 + (-1)^{n_0} f_0 \exp(-\alpha_r n) \left(\sqrt{k^2 - n^2} / k \right) + \\ + (-1)^{\tilde{n}_0} g_0 \exp(-\beta_r m) \left(\sqrt{l^2 - m^2} / l \right).$$

Линии нейтральной изотермы образуют полосы (3.55) при условии, что $(T_i)_r = T_0^0$. Отсюда следуют соотношения между параметрами решения:

$$\tilde{n}_0 = \mu n_0, \quad \mu_1^2 \equiv n^2 / (k^2 - n^2) = \mu^2 m^2 / (l^2 - m^2), \\ (f_0 E_1 \sqrt{k^2 - n^2} / k) + (g_0 E_2 \sqrt{l^2 - m^2} / l) = 0, \\ E_1 = \exp \left[(\operatorname{arctg} D - \delta_1) / \sqrt{k^2 - n^2} \right], \\ E_2 = \exp \left[(\operatorname{arctg} \tilde{D} - \delta_2) / \sqrt{l^2 - m^2} \right],$$

где μ – целое нечетное число; одна из констант f_0 , g_0 произвольна. Если $\mu = 1$, то $a^2 = b^2$. Если целое нечетное $\mu \geq 3$, то $a^2 \neq b^2$; в этом случае имеем такие неравенства: $b^2 < a^2 < w^2$,

$$\mu^2 > a^2 (w^2 - b^2) / [b^2 (w^2 - a^2)], \\ \mu_1^2 = [w^2 (a^2 - \mu^2 b^2) + a^2 b^2 (\mu^2 - 1)] / [w^2 (b^2 - a^2)] > 0.$$

Данные ограничения обеспечивают существование физически содержательного теплового поля (3.50)–(3.52), главным свойством которого является наличие семейства неподвижных линий (3.55) нейтральной изотермы (рис. 3.32) [41].

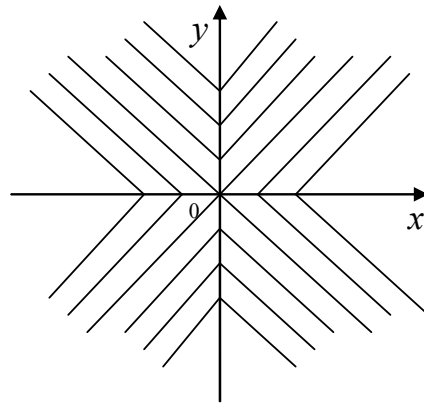


Рис. 3.32. Полосчатые структуры в автомодельном режиме теплопереноса

Эти линии делят плоскость (x, y) на характерные полосы, что в качественном отношении соответствует результатам экспериментальных наблюдений.

Изучим производство энтропии σ на границах полос (3.55), учитывая, что вдоль них $q_v(T_0^0) = 0$, $\sigma = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) / (\lambda T^2)$ [см. (1.2)]. Основную трудность представляет вычисление квадрата вектора теплового потока $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$. Промежуточные аналитические выкладки здесь не приводятся. Взяв за масштаб

$$\sigma_b = (q_{1r})_{D=1}^2 / \left[(T_0^0)^2 \lambda \right],$$

запишем относительную величину производства энтропии в виде:

$$\delta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_b} - 1 \right)^2 = (A_r - 1)^2,$$

$$A_r = \left[(q_{1r})^2 + (q_{2r})^2 \right] / (q_{1r})_{D=1}^2;$$

$$D^2 + 1 = 1 / (\Gamma_1 a_2), \quad \tilde{D}^2 + 1 = 1 / (\Gamma_1 b_2),$$

$$a_2 = M_1^2 / (1 - M_1^2), \quad b_2 = M_2^2 / (1 - M_2^2),$$

$$M_1^2 = a^2 / w^2, \quad M_2^2 = b^2 / w^2, \quad \Gamma_1 = (\Gamma - 1)^2 / (4\Gamma),$$

где $\Gamma = \gamma q_v^1 / c \geq 1$ – параметр неравновесности системы «среда – источник энергии». Нетрудно убедиться, что $A_r > 1$. Анализ показал, что функция $\delta = \delta(M_1^2, M_2^2)$ имеет экстремумы по своим аргументам, когда скорости перемещения a, b – околосвуковые: $a^2 = w^2 - \varepsilon_1$, $b^2 = w^2 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 > 0$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – независимые друг от друга величины 1-го порядка малости. Кроме того, нужно иметь $\Gamma_1 \sim \varepsilon_1^2$. Условия экстремумов $\partial \delta / \partial (M_1^2) = 0$, $\partial \delta / \partial (M_2^2) = 0$ означают, что

$$(\arctg D + \pi n_0) / D = (1 - a_2 \Gamma_1) / (1 + a_2) > 0;$$

$$(\arctg \tilde{D} + \pi \tilde{n}_0) / \tilde{D} = (1 - b_2 \Gamma_1) / (1 + b_2) > 0. \quad (3.56)$$

Ясно, что равенство (3.56) может быть выполнено только при некотором единственном значении n_0 , т. е. экстремум существует на одной из линий всего семейства линий нейтральной изотермы. Например, если действовать обратным способом, то при фиксированном конеч-

ном n_0 всегда можно указать подходящее значение ε_1 , при котором будет выполнено (3.56). Расчеты показывают, что вдоль этой линии

$$\partial^2 \delta / \partial (M_1^2)^2 < 0,$$

т. е. относительная величина производства энтропии имеет максимум по отношению к аргументу M_1^2 . Аналогичные утверждения справедливы и для условий достижения δ_{\max} по отношению к аргументу M_2^2 . Ограничение $\Gamma_1 \sim \varepsilon_1^2$ означает, что данный результат верен для значений Γ из правой малой окрестности 1.

Рассмотрим зависимость производства энтропии от параметра неравновесности Γ . Для простоты записи возьмем далее линию нейтральной изотермы $\alpha = 0$, $\beta = 0$ при $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Характерное значение производства энтропии равно

$$\sigma_b = (q_1^2)_{\substack{n=0 \\ \alpha=0}} / \left[(T_0^0)^2 \lambda \right].$$

Относительная величина производства энтропии имеет вид:

$$\chi = \left(\frac{\sigma}{\sigma_b} - 1 \right)^2 = (A_0 - 1)^2,$$

$$A_0 = (q_1^2 + q_2^2)_{\alpha=0, \beta=0} / (q_1^2)_{\alpha=0, n=0}.$$

Условие экстремума $\partial \chi / \partial \Gamma = 0$ выполнено при $\Gamma = \Gamma_*$:

$$\Gamma_* = 1 + 2 \left[f_0^2 (w^2 - a^2) + g_0^2 (w^2 - b^2) \right] (a^2 f_0^2 + b^2 g_0^2)^{-1}. \quad (3.57)$$

Расчеты показывают, что физический смысл имеет точка экстремума, в которой $A_0(\Gamma = \Gamma_*) > 1$. Значит, должно быть выполнено одно из двух условий: 1) $g_0^2 (w^2 - b^2) / [f_0^2 (w^2 - a^2)] > 1/2$; это обеспечивается подходящим выбором одной из констант f_0 , g_0 ; 2) $b^2 \leq a^2 < w^2$, т. е. вдоль каждой из координатных осей процесс дозвуковой. Следовательно, в точке экстремума (3.57) имеем максимум производства энтропии:

$$\left(\partial^2 \chi / \partial \Gamma^2 \right)_{\Gamma=\Gamma_*} < 0.$$

Таким образом, в конечной окрестности $T = T_0^0$ существуют автомодельные процессы формирования полосчатых структур, в кото-

рых максимум производства энтропии наблюдается по отношению к локальным числам Маха M_1^2 , M_2^2 , а также по отношению к параметру неравновесности Γ .

3.4.4. Эффект «домино»

Уравнения теплопереноса (1.3) с источником рассмотрим в полярных координатах (r, φ) :

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial r} + \frac{q_1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = q_v;$$

$$q_1 + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}; \quad q_2 + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi},$$

где q_1 и q_2 – радиальная и трансверсальная составляющие вектора теплового потока. Эту систему уравнений нетрудно преобразовать к одному гиперболическому уравнению:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + c\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + q_v + \gamma \frac{\partial q_v}{\partial t}. \quad (3.58)$$

Здесь по-прежнему принимаем $\lambda, c, \gamma - \text{const}$;

$$q_v = q_v^0 + q_v^1 T; \quad q_v^0, q_v^1 - \text{const}; \quad (3.59)$$

$$T_0^0 = -q_v^0/q_v^1 > 0, \quad q_v^0 < 0, \quad q_v^1 > 0 \text{ (см. § 3.3)}.$$

Изучаем процесс, в котором

$$T = T(\alpha, r), \quad \alpha = \varphi + bt, \quad b \equiv \text{const}.$$

Искомое решение:

$$T = T_0^0 + \exp(-n\alpha) [\sin(v\alpha)\theta_1(r) + \cos(v\alpha)\theta_2(r)]; \quad (3.60)$$

$$r \geq r_0 > 0, \quad n > 0; \quad r_0, n - \text{const},$$

где $v \geq 1$ целое число. Функции $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ определяются из двух сцепляющихся друг за друга уравнений:

$$(c - \gamma q_v^1) b (-n\theta_1 - k_1\theta_2) + \left(c\gamma b^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) [n(n\theta_1 + k_1\theta_2) - k_1(k_1\theta_1 - n\theta_2)] =$$

$$= q_v^1 \theta_1 + \lambda \left(\frac{d^2 \theta_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_1}{dr} \right),$$

$$\begin{aligned} (c - \gamma q_v^1) b (k_1 \theta_1 - n \theta_2) + \left(c \gamma b^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) [-n(k_1 \theta_1 - n \theta_2) - k_1(n \theta_1 + k_1 \theta_2)] = \\ = q_v^1 \theta_2 + \lambda \left(\frac{d^2 \theta_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_2}{dr} \right). \end{aligned}$$

Для упрощения решения устраним в первом из этих уравнений слагаемые с θ_2 , не содержащие явно r , а во втором – слагаемые с θ_1 , не содержащие явно r . С этой целью возьмем коэффициент затухания n равным

$$n = (c - \gamma q_v^1) / (2bc\gamma) \geq 0,$$

где $b > 0$, $c \geq \gamma q_v^1$. Тогда система уравнений, определяющая функции $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$, имеет вид [41]:

$$L[\theta_1] + n^2 \theta_1 + 2nv\theta_2 = 0, \quad L[\theta_2] + n^2 \theta_2 - 2nv\theta_1 = 0, \quad (3.61)$$

где $L[\theta]$ – линейный дифференциальный оператор Бесселя,

$$L[\theta] = r^2 \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} + (r^2 g^2 - v^2) \theta;$$

$$g^2 = \left[(c + \gamma q_v^1)^2 + 4c^2 \gamma^2 b^2 v^2 \right] (4\lambda c \gamma)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что для системы уравнений (3.61) справедлива классическая теорема о непрерывной зависимости решения от малого положительного параметра n . При $n = 0$ уравнения (3.61) одинаковые; решение имеет вид:

$$\theta_0(r) = C_1 J_v(gr) + C_2 N_v(gr), \quad r \geq r_0 > 0, \quad (3.62)$$

где C_1 , C_2 – произвольные постоянные; J_v – цилиндрическая функция первого рода; N_v – функция Неймана. Далее рассмотрим в (3.60) случай незатухающих колебаний по α , а порождающее решение (3.62) возьмем в простейшем виде ($C_2 = 0$):

$$T = T_0^0 + C_1 J_v(gr) \sin(v\alpha), \quad T \in [T_1, T_2]. \quad (3.63)$$

Это решение определяет тепловое поле в конечной окрестности нейтральной изотермы: $T_w < T_1 < T_0^0 < T_2 < T_c$. Константа $(-b) < 0$ – это угловая скорость луча $\varphi = -bt$, $t \geq 0$, который вращается по часовой

стрелке вокруг полюса – центра пятна нагрева $x = 0, y = 0$. С точки зрения теории цилиндрических функций $J_\nu(gr)$ – аналог функции $\cos(gr)$, поэтому g ассоциируется с частотой колебаний по радиальной координате r . Три безразмерных параметра $M^2 = b^2 / (g^2 w^2)$, $(\gamma b)^2$, v^2 связаны между собой соотношением: $M^{-2} = (\gamma b)^{-2} + v^2$. Из (3.63) ясно, что линии нейтральной изотермы определяются равенством

$$J_\nu(gr)\cos(v\alpha) = 0$$

и содержат два семейства линий (рис. 3.33): 1) неподвижные концентрические окружности («круги на воде») $r = r_k$, где gr_k – корни уравнения $J_\nu(gr) = 0$, причем каждый последующий корень больше предыдущего: $r_{k+1} > r_k$; 2) нейтральные лучи

$$\varphi_0 = -bt + (\pi n_0 / v),$$

вращающиеся вокруг полюса; здесь n_0 – номер луча; $2v$ – число нейтральных лучей; $0 \leq n_0 \leq 2v - 1$.

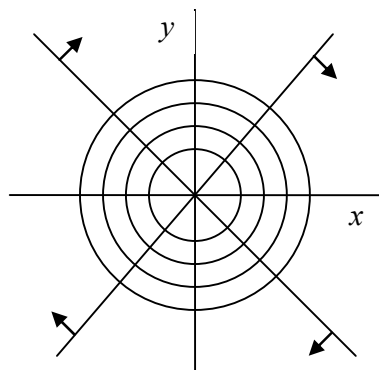


Рис. 3.33. Кольцевые структуры и вращающиеся лучи нейтральной изотермы

Именно эти лучи моделируют ситуацию, когда экспериментально наблюдается лавинообразное появление кристаллических участков пленки: эффект «падающих кегль» или, что то же, модель «домино» [48].

3.4.5. Лепестковые структуры

Продолжим исследование двумерных плоских тепловых полей в полярных координатах r, φ : $T = T(r, \varphi, t)$. Теплофизические закономерности изучаемого процесса описываются следующим точным решением уравнения теплопереноса (3.58), (3.59):

$$T = T_0^0 + \theta(r, t)\sin(\omega\varphi), \quad r \geq r_0 > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad t \geq 0; \quad (3.64)$$

$$\theta(r, t) = \theta_0(r) + \exp(-nt) \sin(k_1 t + \alpha_1) \theta_1(r); \quad (3.65)$$

$$\theta_0(r) = A_0 J_\varepsilon(g_0 r), \quad \theta_1(r) = A_1 J_\varepsilon(r \sqrt{c_1}),$$

$$n = (c - \gamma q_v^1) / (2c\gamma), \quad g_0 = (q_v^1 / \lambda)^{1/2},$$

$$\lambda c_1 = n(c - \gamma q_v^1) - c\gamma(n^2 - k_1^2) + q_v^1. \quad (3.66)$$

Данное решение рассматривается во внешней области центрального пятна нагрева радиуса r_0 . Считаем, что $0 < q_v^1 < c/\gamma$, поэтому выполнено неравенство $c_1 > 0$; J_ε – цилиндрическая функция первого рода, причем $\varepsilon = \omega$ – целое положительное число; α_1, k_1, A_0, A_1 – произвольные постоянные. Здесь мы рассматриваем два варианта: 1) $A_0 = 0$, т. е. тепловое поле релаксирует к однородному состоянию, $T(r, \varphi, t \rightarrow \infty) = T_0^0$; 2) $A_0 \neq 0$, т. е. в ходе релаксационного процесса устанавливается двухмерное неоднородное по координатам тепловое поле, $T(r, \varphi, t \rightarrow \infty) = \theta_0(r) \sin(\omega\varphi)$. Практика наших расчетов показала, что между этими вариантами принципиальных физических различий нет.

Формула (3.65) содержит одну частоту k_1 колебаний по времени. Обобщение этого решения, содержащее конечный спектр частот $k_1, k_2, \dots, k_p, p \geq 1$, имеет вид:

$$T = T_0^0 + \sin(\omega\varphi) [\theta_0(r) + \exp(-nt) (\sin(k_1 t + \alpha_1) \theta_1(r) + \sin(k_2 t + \alpha_2) \theta_2(r) + \dots + \sin(k_p t + \alpha_p) \theta_p(r))]; \quad (3.67)$$

$$\theta_j(r) = A_1^{(j)} J_\varepsilon(r \sqrt{c_1^{(j)}}), \quad j = 1, 2, \dots, p;$$

$$\lambda c_1^{(j)} = n(c - \gamma q_v^1) - c\gamma(n^2 - k_j^2) + q_v^1, \quad (3.68)$$

где $\alpha_j, k_j, A_1^{(j)}$ – произвольные постоянные. Известно, что цилиндрическая функция J_ε является аналогом функции \cos , поэтому $\sqrt{c_1^{(j)}}$ ассоциируется с частотой колебаний по радиальной координате. Значит, формула (3.68), также как и (3.66), представляет корреляцию между частотами колебаний по t и по r .

Скорость перемещения изотермы $T(r, \varphi, t) - T_c = 0, t > 0$ равна

$$N = -\frac{\partial T}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

поэтому условие остановки в момент времени $t = t_r$ имеет вид $(\partial T / \partial t)_{t=t_r} = 0$. Это аналогично плоскому случаю, изученному в п. 3.4.1. Линия остановки изотермы – это линия на плоскости (r, φ) , удовлетворяющая условию $N(r, \varphi, t_r) = 0$. Линия неподвижности изотермы – это линия, на которой условие остановки выполнено в каждый момент времени:

$$N(r, \varphi, t \geq 0) = 0. \quad (3.69)$$

В режиме колебаний с одной (основной) частотой k_1 из решения (3.65) получаем моменты остановки $t = t_r = t_{n_0}$:

$$k_1 t_{n_0} + \alpha_1 = \arctg \frac{k_1}{n} + \pi n_0, \quad n_0 = 0, 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Для спектра частот выбор констант α_j, k_j , входящих в решение (3.67), выполняется так: 1) $\alpha_j = \arctg(k_j / n)$, т. е. начальный момент времени $t = 0$ является моментом остановки; 2) считаем, что основной период колебаний $2\pi / k_1$ равен целому числу $n_j > 1$ периодов остальных колебаний, $2\pi / k_1 = n_j(2\pi / k_j)$; n_j – свободный параметр задачи. Результаты расчетов даны при $T_0^0 = 0,5$ и $T_c = 0,54$ и относятся к процессу колебаний на основной частоте k_1 . Влияние спектра частот носит преимущественно количественный характер, и мы указываем здесь кратко его основные признаки.

Прежде всего отметим, что линии неподвижности – это лучи $\varphi = \pi n_0 / \omega$, $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ и окружности $r = r_j$, где радиусы окружностей есть корни уравнения $J_\varepsilon(r_j \sqrt{c_1}) = 0$. Совокупность этих линий образует паутинообразную решетку и при $A_0 = 0$ совпадает с семейством линий нейтральной изотермы $T = T_0^0$. Отсюда важный вывод: именно нейтральные линии, на которых уравниваются тепловыделение и теплоотдача ($q_v(T_0^0) = 0$), образуют решетчатую структуру, ячейки которой заключают в себе кристаллические участки.

На рис. 3.34 представлен типичный пример начального расположения «горячей» изотермы $T = T''$ и его эволюция во времени. Рисунки 3.34, а, б относятся к процессам колебаний на одной (основной) частоте; рис. 3.34, в – для спектра частот при $p = 3$, $n_j = j$. Для «холодной» изотермы $T = T'$ закономерности эволюции аналогичные.

Отличительный признак этих процессов – «шахматный» порядок расположения «холодных» и «горячих» изотерм. Эта ситуация аналогична той, что показана на рис. 3.15, 3.17 на плоскости (x, y) . В момент остановки изотерма $T = T_c$ имеет вид:

$$T_c - T_0^0 = \theta(r, t_{n_0}) \sin(\omega\varphi).$$

На рис. 3.35 показаны примеры лепестковых структур, образуемых линиями неподвижности и линиями остановки изотермы $T = T_c$. Значения $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ относятся к последовательным остановкам, см. (3.70). Хорошо видно, что с течением времени идет заполнение сектора круга (лепестка) линиями остановки ФГК. Рисунки 3.35, а, б получены для колебаний на единственной частоте k_1 ; рис. 3.35, в – для спектра частот при $p = 3, n_j = j$.

Важное значение имеет степень тепловой неравновесности процесса, т. е. величина γ (рис. 3.36). Расчеты показывают, что чем больше γ , тем дальше движется ФГК до остановки; причина этого – волновой механизм теплопереноса. На рис. 3.36 видно, что с ростом γ линии остановки ФГК занимают все ячейки неподвижной решетки и с течением времени сгущаются: последующая линия ($n_0 = 2$) располагается внутри предыдущей ($n_0 = 1$).

$$\begin{array}{lll} A_0 = 0,0; A_1 = 0,35; k = 1,2; & A_0 = 0,1; A_1 = 0,35; k = 0,5; & A_0 = 0,05; A_1 = 0,14; \\ q_v^{(1)} = 0,5; T'' = 0,51; \omega = 6 & q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,52; \omega = 5 & A_2 = 0,14; A_3 = 0,14; k_1 = 0,5; \\ & & q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,51; \omega = 5 \end{array}$$

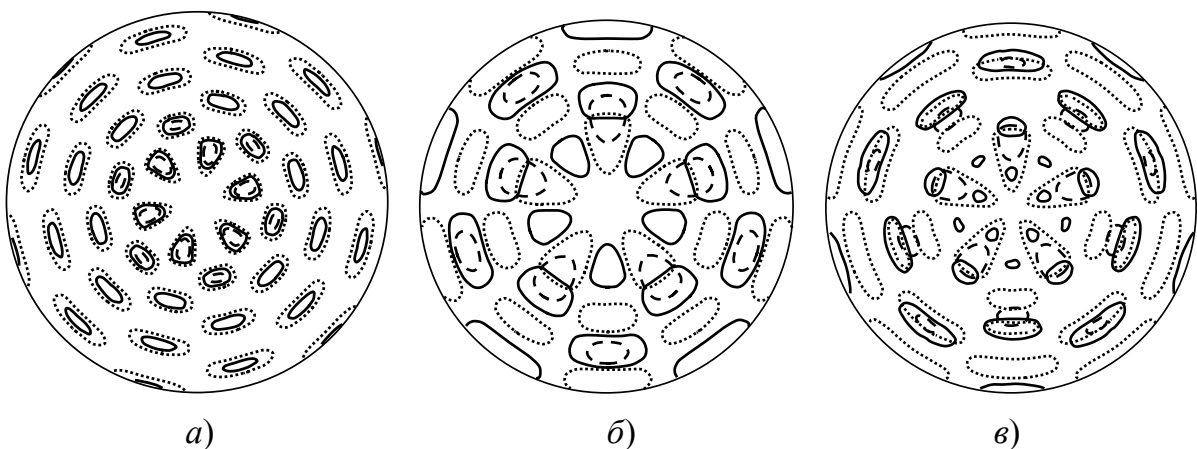


Рис. 3.34. Эволюция во времени изотермы $T = T''$:
 $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^* \sim 1$ (сплошная линия —);
 $t \rightarrow \infty$ (штриховая линия ---)

$A_0 = 0; A_1 = 1,60; k = 1,0;$ $q_v^{(1)} = 0,5; T'' = 0,54; \omega = 5$	$A_0 = 0; A_1 = 0,80; k = 1,2;$ $q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,54; \omega = 7$	$A_0 = 0,04; A_1 = 0,10;$ $A_2 = 0,05; A_3 = 0,10; k_1 = 0,5;$ $q_v^{(1)} = 0,5; T'' = 0,51; \omega = 7$
--	--	--

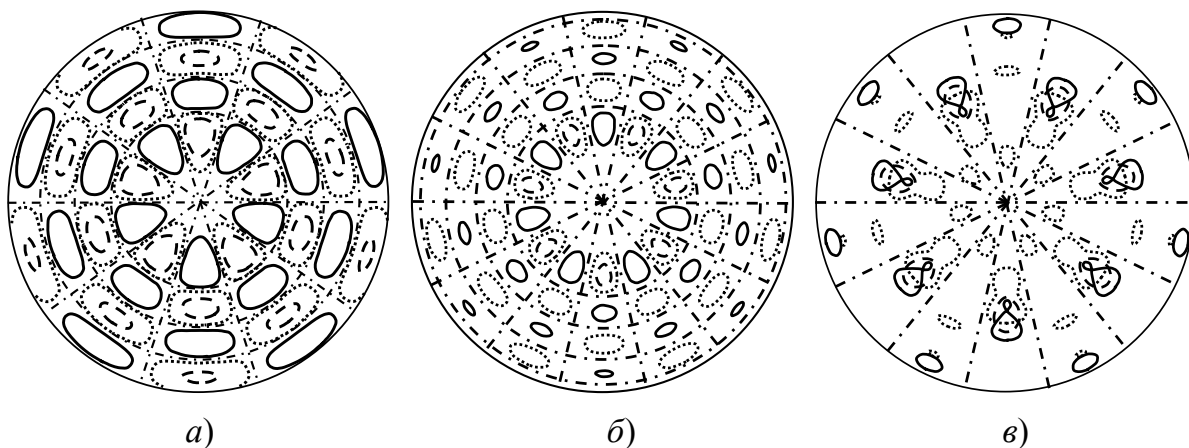


Рис. 3.35. Лепестковые структуры:

линии неподвижности (штрихпунктирная линия - · - · - ·);
 линии остановки: $n_0 = 0$ (пунктирная линия ·····),
 $n_0 = 1$ (сплошная линия —), $n_0 = 2$ (штриховая линия - - -)

$A_0 = 0; A_1 = 0,7; k = 0,4; q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,54$	$A_0 = 0; A_1 = 0,7; k = 0,4; q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,54$	$A_0 = 0; A_1 = 0,7; k = 0,4; q_v^{(1)} = 0,8; T'' = 0,54$
$\gamma = 0,5$	$\gamma = 1,0$	$\gamma = 1,2$

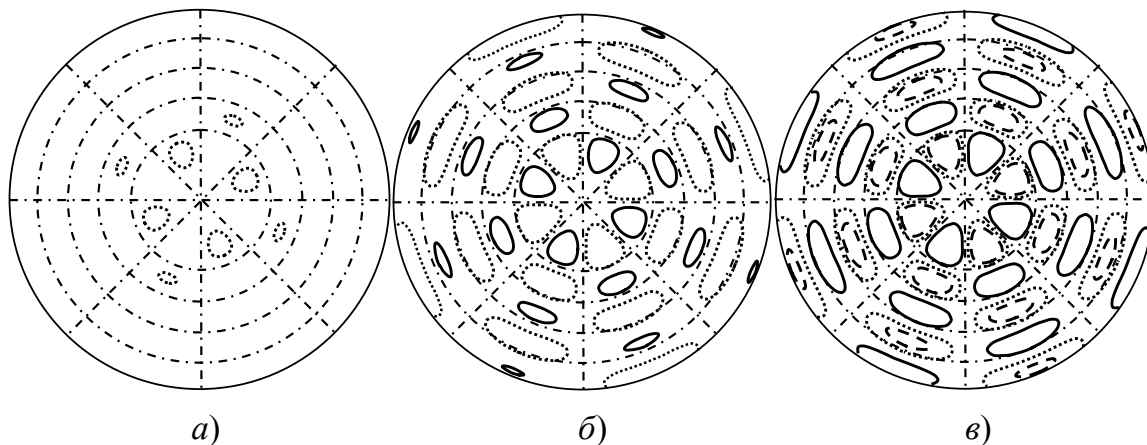


Рис. 3.36. Влияние времени релаксации γ

на конфигурацию кристаллических участков:
 линии неподвижности (штрихпунктирная линия - · - · - ·);
 линии остановок: $n_0 = 0$ (пунктирная линия ·····),
 $n_0 = 1$ (сплошная линия —), $n_0 = 2$ (штриховая линия - - -)

Полученные здесь периодические структуры качественно соответствуют результатам экспериментальных наблюдений. На рис. 3.37 пока-

заны полосчатые (*a*, *з*); чешуйчатые (*г*, *е*); смешанные (*ж*); лепестковые (*б*) структуры, а также кольцевая (*в*) и паутинообразные решетки (*д*).

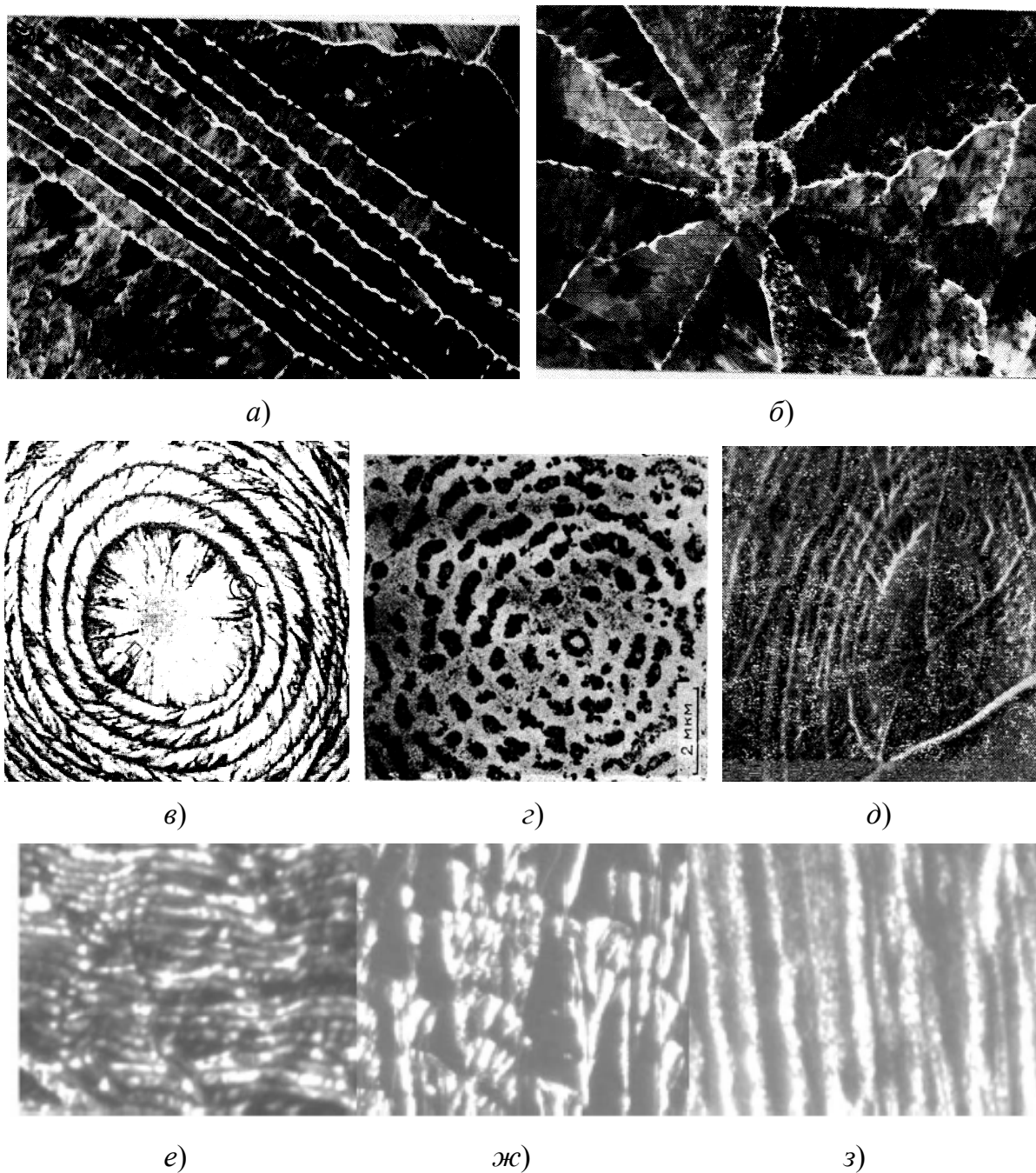


Рис. 3.37. Периодические структуры, наблюдавшиеся в экспериментах по взрывной кристаллизации аморфных пленок: *a*, *з* – полосчатые; *г*, *е* – чешуйчатые; *ж* – смешанные; *б* – лепестковые структуры, а также кольцевая *в* и паутинообразная решетки *д*; *a*, *б* – железо [47], *в* – кремний [46], *г*, *д* – кремний [42], *е*, *ж*, *з* – германий [44]

3.4.6. Разрушение периодических тепловых полей

Рассмотрим пострелаксационную стадию разрушения периодических тепловых полей и эволюцию их в однородное изотермическое состояние.

Начальное условие

$$T(x, y, t = 0) = \delta(x - x_i) \left[2G_1 + 2B_n^{(i)} \cos(ny + \alpha_i) \right] + G_0 \quad (3.71)$$

означает, что вдоль линии $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, m_1$ задано периодическое возмущение температуры, которое накладывается на исходную изотерму (константа G_1), параллельную оси y ; здесь $\delta(x - x_i)$ – дельта-функция. Граничное условие по отношению к координате y такое:

$$T(x; y \rightarrow \pm\infty; t) = G_0 \equiv \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (3.72)$$

Для параболического уравнения теплопроводности (1.7), $q_\nu = 0$ решение задачи (3.71), (3.72) имеет вид [61]:

$$T(x, y, t) = G_0 + \frac{G_1}{\sqrt{a\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - x_i)^2}{4at}\right] + \frac{B_n^{(i)}}{\sqrt{a\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - x_i)^2}{4at}\right] \exp(-n^2 at) \cos(ny + \alpha_i). \quad (3.73)$$

Сюда входит фундаментальное решение уравнения теплопроводности и слагаемое, определяющее эволюцию периодического возмущения. Далее мы рассматриваем начальное состояние, являющееся суперпозицией условий вида (3.71). Соответствующее решение поставленной линейной задачи является суперпозицией решений вида (3.73). Возмущения температуры малы, поэтому принимаем ограничение $\sum_n B_n^{(i)} \leq G_1$. Число первоначальных линий (полос), тянущихся

параллельно оси y , было взято равным $m_1 = 9$; полосы располагаются равномерно: $\vartheta_x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ и т. д. На каждой такой линии константа G_1 своя, и ее значение подсчитывается по формуле $G_1 = G_1^0 + G_1^1 \sin(mx)$. Таким образом, здесь учитывается периодический по x характер расположения невозмущенных изотерм, $\vartheta_T = 2\pi/m$. Важным параметром задачи является также период возмущающих колебаний $\vartheta_y = 2\pi/n$. Данный вариант является основным по своему фи-

зическому содержанию. Примеры, в которых параметры n_i, α_i выбраны различными для каждой линии $x = x_i$, не имеют принципиальных отличий. Расчеты выполнены в безразмерных величинах. На рис. 3.38 показаны три типичных варианта поведения изотерм; здесь $t^* \sim 1$ – характерный промежуточный момент времени; $t^{**} \cong 5t^*$.

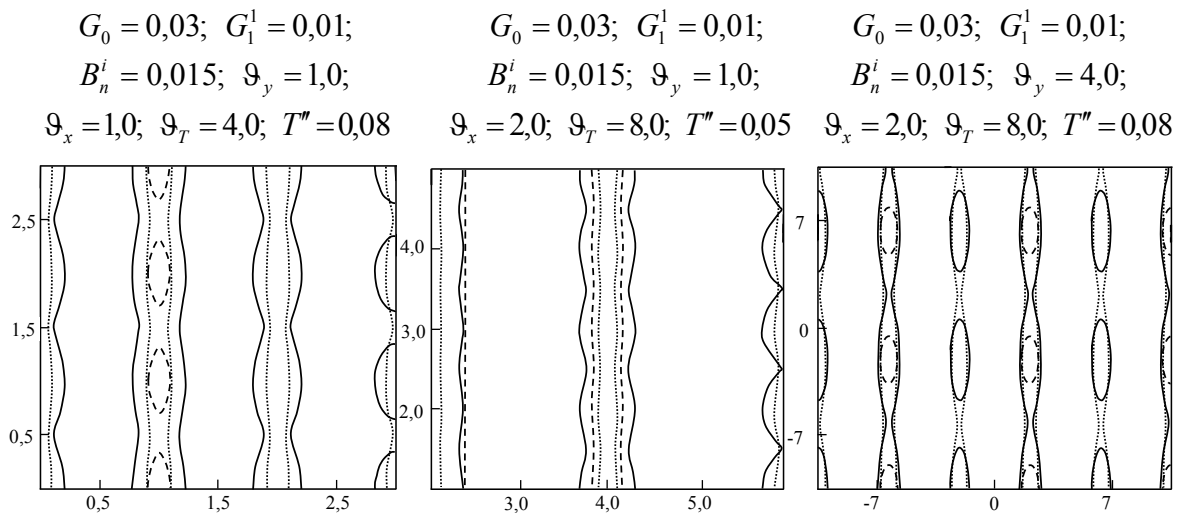


Рис. 3.38. Эволюция во времени изотерм: $t = 0$ (пунктирная линия);
 $t = t^*$ (сплошная линия —); $t = t^{**}$ (штриховая линия - - -)

Главная особенность процесса: в ходе эволюции теплового поля наблюдаются биения изотерм. Видно, что первоначальные линии изотерм расходятся (удаляются друг от друга) на конечное расстояние, а затем сближаются, образуя полосы изотерм либо «кошачьи глаза». Причина биений – взаимное влияние исходных линий $x = x_i$. Гидродинамическим аналогом этого явления служат колебания вихревых слоев при медленном плоском течении вязкой несжимаемой жидкости [61].

Расчет времени разрушения t_d периодического поля выполняется так: вычисляется максимальная температура, достигаемая в начальном состоянии $T(x, y, t = 0)$; для представленных здесь примеров $T_{\max} = 2,5$. Процесс разрушения считается законченным, когда на всех полосах (с различием, не превосходящим 2 %) наибольшая температура T_d не превосходит заданную малую величину. Для представленных здесь примеров $T_d = 0,05$. На рис. 3.39 показана роль параметров ϑ_x, ϑ_y . Хорошо видно, что высокая частота n начального возмущения температуры затягивает процесс разрушения периодического поля (рис. 3.39, а). Такую же роль выполняет увеличение расстояния ϑ_x между исходными линиями $x = x_i$ (рис. 3.39, б, в).

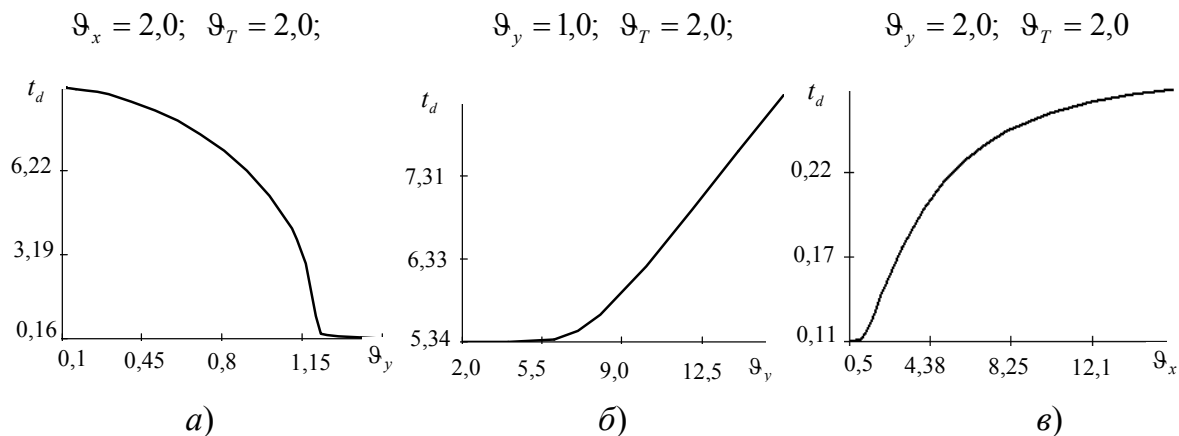


Рис. 3.39. Влияние периода возмущающих колебаний по координатам на время разрушения периодического поля

3.5. Фазовая граница взрывной кристаллизации аморфной пленки германия

3.5.1. Феноменологическая оценка времени тепловой релаксации

Изложенный в § 3.4 подход применим к феноменологическому описанию теплопереноса при взрывной кристаллизации аморфных пленок. Воспользуемся некоторыми теоретическими и экспериментальными результатами работы [44]. Эти эксперименты проводились при различных толщинах δ аморфной пленки германия, напыленной на кварцевую пластину. Теплоотдача от фронта кристаллизации в подложку учитывалась объемным стоком энергии вида $-\beta_v(T - T_w)$, где T_w – температура подложки; β_v , Дж/(м³·с·град) – полуэмпирический коэффициент пропорциональности. При теоретическом расчете авторы [44] применяли одномерное параболическое уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами и рассматривали автомодельное решение типа распространяющейся волны.

Следует отметить, что сведений о теплофизических свойствах аморфных пленок очень мало. Числовые значения плотности и теплоты фазового перехода могут существенно зависеть от условий приготовления пленок [43].

Далее принимаем следующие значения:
германий в аморфной фазе [44]:

$$\lambda_* = 25,15 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; c_* = 3979430 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{град)};$$

$$T_c = 1210 \text{ К}; L = 2703000000 \text{ Дж/м}^3;$$

германий в кристаллической фазе [62], [63]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s(T) &= 123,32 - 0,3148 \cdot T + 3,516 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - \\ &- 1,782 \cdot 10^{-7} \cdot T^3 + 3,531 \cdot 10^{-11} \cdot T^4, \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; \\ c_s(T) &= 1525696 + 886,3 \cdot T - 0,3362 \cdot T^2, \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{град)}; \end{aligned} \right\} (3.74)$$

$$T, \text{ К} \in [250, 1210];$$

кварц SiO_2 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda(T) &= 8,91 + 0,01643 \cdot T - 4,148 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + \\ &+ 3,304 \cdot 10^{-8} \cdot T^3 - 9,508 \cdot 10^{-12} \cdot T^4, \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; \\ c(T) &= 2467718 + 64,77 \cdot T - 0,1347 \cdot T^2, \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{град)}; \end{aligned} \right\} (3.75)$$

$$T, \text{ К} \in [250, 1000].$$

Эти зависимости – результат аппроксимации табличных значений [63].

Изучим тепловые свойства фронта кристаллизации, учитывая релаксацию теплового потока и нелинейность теплофизических свойств (3.74), (3.75). Представленные здесь аналитические построения относятся к скорости $N(t)$ одномерной ФГК $x = x_j(t)$, перемещающейся вдоль оси x либо к скорости $N(y = y^1, t)$, $y^1 \equiv \text{const}$ отдельной точки на двумерной ФГК $x = x_j(y, t)$, перемещающейся на плоскости декартовых координат (x, y) .

Пусть аморфная пленка находится в однородном тепловом состоянии: $T_* \equiv \text{const}$, $q_* \equiv 0$. Фронт кристаллизации распространяется с периодическими остановками [42] (рис. 3.40, см. также п. 3.1.4). Свойства линий остановок ФГК подробно изложены в п. 3.4.2.

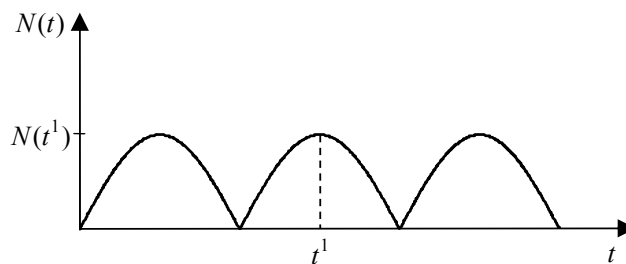


Рис. 3.40. Пульсации скорости фронта взрывной кристаллизации

Рассмотрим фиксированный момент времени $t = t^1$, когда для данного периода пульсации скорость достигает максимального значения $N = N(t^1) > 0$: $dN(t)/dt|_{t=t^1} = 0$. Баланс энергии на границе фаз имеет в этом случае вид [10], [54]:

$$q_j = -NL_j, \tag{3.76}$$

$$L_j = L + c_j(T_c - T_j) - c_*(T_c - T_*),$$

где T_c – равновесная температура кристаллизации; T_j – температура твердой фазы; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества; индексы $*, j$ относятся к аморфной и кристаллической фазам. Температура аморфной пленки равна температуре подложки: $T_* = T_w$.

Для аморфной пленки заданной толщины δ в каждом отдельном опыте измеренному значению N соответствуют температуры T_w и T_j . Значит, в каждой изучаемой экспериментальной точке имеем свою тройку параметров $\{N, T_w, T_j\}$. С помощью температурных зависимостей (3.74), (3.75) находим:

$$\lambda_j = \lambda_s(T_j), \quad c_j = c_s(T_j), \quad \lambda_w = \lambda(T_w), \quad c_w = c(T_w). \tag{3.77}$$

Коэффициент β_v , определяющий теплоотдачу, подсчитываем по приближенной формуле

$$\beta_v = \frac{N}{\delta} \left(\frac{\lambda_w c_w c_*}{\lambda_*} \right)^{1/2}, \tag{3.78}$$

которая получена в [44] с помощью простой оценки толщины теплового пограничного слоя в подложке.

Построим аналитическое выражение для объемного источника энергии $q_v = q_v^0 + q_v^1 T$, который моделирует конкуренцию между выделением кристаллизационного тепла и теплоотдачей в подложку (см. §§ 3.1, 3.2). Тепловые потоки $|q_c| = LN$ и $|q_j| = L_j N$, соответствующие температурам $T = T_c$ и $T = T_j$, отнесем к эффективной толщине теплового слоя Δ :

$$T = T_c, \quad q_v(T_c) = \frac{LN}{\Delta} - \beta_v(T_c - T_w);$$

$$T = T_j, q_v(T_j) = \frac{L_j N}{\Delta} - \beta_v(T_j - T_w).$$

Отсюда находим:

$$q_v^1 = \frac{q_v(T_c) - q_v(T_j)}{T_c - T_j}; \quad (3.79)$$

$$T_0^0 = T_c - \frac{q_v(T_c)}{q_v^1}, \quad 0 < T_0^0 < T_j,$$

где T_0^0 – нейтральная температура: $q_v(T_0^0) = 0$. Параметр Δ характеризует объемное распределение энергии в системе «пленка–подложка» при $T \in [T_j, T_c]$. Критерием выбора Δ является условие экстремума производства энтропии $\sigma_j = \sigma_j(T_w, N, \Delta)$ на ФГК:

$$\partial \sigma_j / \partial N = 0. \quad (3.80)$$

В локально-неравновесных условиях производство энтропии σ согласно (1.2) равно

$$\sigma = \frac{q_v}{\theta} + \frac{q^2}{\lambda T^2}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} + \frac{\gamma q^2}{\lambda c T^3}, \quad (3.81)$$

где θ – неравновесная температура. Следовательно,

$$\sigma_j = \frac{q_j^2}{\lambda_j T_j^2} + \frac{q_v(T_j)}{T_j} \left[1 + \frac{\gamma_j q_j^2}{\lambda_j c_j T_j^2} \right]. \quad (3.82)$$

Связь скорости N с температурой T_j определяется кинетическим законом Френкеля–Вильсона:

$$N = A_c \exp \left[\frac{-E}{k_B T_j} \right] \left\{ 1 - \exp \left[\frac{L}{k_B N_c} \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_j} \right) \right] \right\}, \quad (3.83)$$

где A_c – предэкспоненциальный множитель; E – энергия активации; k_B – постоянная Больцмана; N_c – плотность числа энергетических состояний. В данном случае для германия имеем [44]: $A_c = 0,53 \cdot 10^4$ м/с, $E = 8,0 \cdot 10^{-20}$ Дж, $N_c = 4,56 \cdot 10^{28}$.

В режиме незатухающих колебаний скорости находим из формулы (3.39) при $n_1 = n_2 = 0$ время тепловой релаксации:

$$\gamma_j = c_j / q_v^1. \quad (3.84)$$

При фиксированной толщине пленки δ и заданной температуре подложки T_w три параметра N, T_j, Δ подчинены двум связям (3.80), (3.83). Остальные параметры процесса, а именно: $q_j, \lambda_j, c_j, \lambda_w, c_w, \beta_v, q_v^1, \gamma_j$, подсчитываются по формулам (3.76)–(3.79) и (3.84). Таким образом, каждая экспериментальная точка $\{N, T_w, T_j\}$ принимает вид $\{N(T_j), T_w, T_j\} \rightarrow \{T_w, T_j\}$. Чтобы замкнуть задачу, присоединим к названным уравнениям зависимость между T_j и T_w :

$$1) \delta = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}; N \in [4, 9]; T_j \in [1025, 1170]; T_w \in [720, 1000];$$

$$T_j = 5192,6 - 26,91 \cdot T_w + 5,746 \cdot 10^{-2} \cdot T_w^2 - 5,061 \cdot 10^{-5} \cdot T_w^3 + 1,6059 \cdot 10^{-8} \cdot T_w^4; \quad (3.85)$$

$$2) \delta = 0,89 \cdot 10^{-6} \text{ м}; N \in [5, 9]; T_j \in [1025, 1160]; T_w \in [740, 1000];$$

$$T_j = -2547,07 + 10,022 \cdot T_w - 9,172 \cdot 10^{-3} \cdot T_w^2 + 2,8736 \cdot 10^{-6} \cdot T_w^3; \quad (3.86)$$

$$3) \delta = 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ м}; N \in [6, 9]; T_j \in [1025, 1150]; T_w \in [780, 1000];$$

$$T_j = -23,31 + 102,8 \cdot T_w - 0,1654 \cdot T_w^2 + 1,201 \cdot 10^{-4} \cdot T_w^3 - 3,2987 \cdot 10^{-8} \cdot T_w^4. \quad (3.87)$$

Значения T_j, T_w даны в кельвинах, значения скорости N – в м/с. Формулы (3.85)–(3.87) получены в результате компьютерной обработки экспериментально-расчетных данных [44]. Вычисление производных $\partial \sigma_j / \partial N, \partial^2 \sigma_j / \partial N^2$ и решение нелинейных алгебраических уравнений выполнялось с помощью пакета Maple.

Результаты расчетов представлены в табл. 3.1–3.3. Для всех трех изученных толщин пленок можно отметить следующие результаты: 1) температурная зависимость времени тепловой релаксации $\gamma_j(T_j)$ немонотонная, имеет минимум; 2) параметр $q_v^1 = dq_v / dT$, характеризующий теплообмен в системе «пленка–подложка», зависит от T_w немонотонно.

тонным образом: функция $q_v^1(T_w)$ имеет максимум; 3) зависимость $\sigma_j = \sigma_j(N)$ производства энтропии от скорости ФГК во всех рассчитанных точках $\{N, T_w, T_j\}$ имеет минимум: $\partial\sigma_j/\partial N = 0$, $\partial^2\sigma_j/\partial N^2 > 0$.

Таблица 3.1

**Тепловые свойства фазовой границы кристаллизации германия
при толщине пленки $\delta = 1,8 \cdot 10^{-6}$ м**

T_w, K	T_j, K	$q_j \cdot 10^{-10}, \text{Вт/м}^2$	$\gamma_j \cdot 10^8, \text{с}$	$N, \text{м/с}$	T_0^0, K	$q_v^1 \cdot 10^{-14}$	$\Delta \cdot 10^6, \text{м}$
730	1042,14	-1,8225	2,7833	8,879	941,51	0,7488	0,9859
750	1062,64	-1,8092	2,4739	8,8246	969,03	0,8439	0,9791
770	1081,40	-1,7629	2,2883	8,5922	994,53	0,9137	0,9916
790	1098,31	-1,6893	2,1940	8,2106	1017,7	0,9542	1,0211
810	1113,35	-1,5952	2,1721	7,7166	1038,5	0,9648	1,0662
830	1126,57	-1,4887	2,2117	7,1502	1056,8	0,9483	1,1257
850	1138,05	-1,374	2,307	6,548	1072,7	0,9097	1,1985
870	1147,96	-1,259	2,457	5,942	1086,4	0,8546	1,2842
890	1156,52	-1,146	2,6667	5,349	1098,2	0,7878	1,3839
910	1164,02	-1,036	2,9493	4,774	1108,6	0,7126	1,5027
930	1170,81	-0,9244	3,3339	4,208	1118,5	0,6295	1,6551
950	1177,28	-0,8068	3,9218	3,626	1129,1	0,5362	1,8763
970	1183,9	-0,6726	4,9170	2,9856	1142,2	0,4278	2,2595

Таблица 3.2

**Тепловые свойства фазовой границы кристаллизации германия
при толщине пленки $\delta = 0,89 \cdot 10^{-6}$ м**

T_w, K	T_j, K	$q_j \cdot 10^{-10}, \text{Вт/м}^2$	$\gamma_j \cdot 10^8, \text{с}$	$N, \text{м/с}$	T_0^0, K	$q_v^1 \cdot 10^{-14}$	$\Delta \cdot 10^6, \text{м}$
750	1022,7	-1,873	3,907	8,771	894,7	0,5324	0,9531
770	1043,9	-1,893	3,288	8,882	924,3	0,6339	0,9265
790	1063,1	-1,881	2,907	8,820	950,7	0,7182	0,9174
810	1080,5	-1,840	2,677	8,608	974,4	0,7809	0,9228
830	1096,0	-1,775	2,554	8,273	995,5	0,8195	0,9407
850	1109,9	-1,692	2,513	7,842	1014,4	0,8338	0,9704
870	1122,3	-1,596	2,541	7,343	1031,3	0,8252	1,0118
890	1133,5	-1,491	2,634	6,800	1046,4	0,7965	1,0653
910	1143,4	-1,379	2,796	6,231	1059,9	0,7508	1,1321
930	1152,3	-1,264	3,036	5,652	1072,1	0,6918	1,2146
950	1160,2	-1,147	3,374	5,074	1083,1	0,6228	1,3163
970	1167,3	-1,031	3,843	4,504	1093,4	0,5470	1,4441

Таблица 3.3

**Тепловые свойства фазовой границы кристаллизации германия
при толщине пленки $\delta = 0,45 \cdot 10^{-6}$ м**

T_w, K	T_j, K	$q_j \cdot 10^{-10}, \text{Вт/м}^2$	$\gamma_j \cdot 10^8, \text{с}$	$N, \text{м/с}$	T_0^0, K	$q_0^1 \cdot 10^{-14}$	$\Delta \cdot 10^6, \text{м}$
790	1016,5	-1,943	7,128	8,706	807,2	0,2919	0,900
810	1039,0	-1,975	5,409	8,872	859,4	0,3852	0,875
830	1058,8	-1,969	4,493	8,850	896,8	0,4645	0,865
850	1076,3	-1,934	3,973	8,674	926,4	0,5260	0,867
870	1092,1	-1,874	3,689	8,372	951,3	0,5672	0,882
890	1106,4	-1,791	3,569	7,965	973,4	0,5868	0,909
910	1119,4	-1,691	3,585	7,472	993,6	0,5848	0,951
930	1131,3	-1,577	3,727	6,915	1011,9	0,5629	1,010
950	1141,9	-1,454	3,997	6,322	1028,0	0,5252	1,084
970	1151,1	-1,331	4,391	5,732	1040,3	0,4783	1,167

3.5.2. Сравнение с экспериментом

Рассмотрим полосчатые структуры (конфигурация II в п. 3.4.2), которые описываются решением (3.39), (3.40), (3.42). В режиме незатухающих колебаний во времени имеем:

$$T = T_0^0 + A(t)[B_1 \sin(hy + \beta_2) + \sin(hx + \beta_1)],$$

$$A(t) = A_1 \sin(\omega t); \quad A_1, B_1 - \text{const}, \quad B_1^2 > 1;$$

$$\omega^2 = \frac{1}{c\gamma} \left(\lambda h^2 - \frac{c}{\gamma} \right). \quad (3.88)$$

На линиях неподвижности

$$B_1 \sin(hy + \beta_2) + \sin(hx + \beta_1) = 0, \quad (3.89)$$

ограничивающих кристаллические участки, получаем выражение для квадрата теплового потока:

$$q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 = k^2 [B_1^2 + \cos(2hx + 2\beta_1)]; \quad (3.90)$$

$$k(t) = k_1 + d_1 \sin(\omega t - \delta_1); \quad (3.91)$$

$$k_1 = -\lambda A_1 h \gamma \omega / (1 + \gamma^2 \omega^2);$$

$$C_1^2 = \omega^2 + \gamma^{-2}, \quad \text{tg} \delta_1 = \gamma \omega, \quad d_1 = k_1 C_1 / \omega.$$

Эти линии неподвижности совпадают с семейством линий нейтральной изотермы ($q_v(T_0^0) = 0$), на которой уравниваются тепловыделение на ФГК и теплоотдача в подложку (см. § 3.2). Следовательно, вдоль каждой такой линии производство энтропии (3.81) имеет вид:

$$\sigma_0(x, t) = \frac{q_0^2(x, t)}{(T_0^0)^2 \lambda},$$

$$q_0^2 = k_1^2 [B_1^2 + \cos(2hx + 2\beta_1)] + B_1^2 d_1 A_2 \sin(\omega t - \delta_1) + \frac{d_1}{2} A_2 [\sin(2hx + \omega t - \delta_1 + 2\beta_1) + \sin(-2hx + \omega t - \delta_1 - 2\beta_1)]; \quad (3.92)$$

$$A_2(t) = 2k_1 + d_1 \sin(\omega t - \delta_1). \quad (3.93)$$

Значит, при каждом фиксированном x на линии неподвижности имеем колебания производства энтропии около стационарного значения

$$\sigma_0^1 = \frac{k_1^2}{(T_0^0)^2 \lambda} [B_1^2 + \cos(2hx + 2\beta_1)]. \quad (3.94)$$

Из условия экстремума $\partial \sigma_0^1 / \partial \gamma = 0$ находим

$$\omega = 1/\gamma, \quad (3.95)$$

а формула (3.88) дает

$$h^2 = \frac{2c}{\lambda \gamma} \equiv \frac{2c_j}{\lambda_j \gamma_j}. \quad (3.96)$$

Из уравнения (3.89) ясно, что линии неподвижности располагаются на плоскости (x, y) с периодом $\vartheta = 2\pi/h$. Таким образом, ϑ ассоциируется с шириной полосы, образованной нейтральными изотермами. Расчет γ_j в (3.96) проводится по алгоритму, изложенному в п. 3.5.1. Результаты вычислений при толщине пленки $\delta = 1,8 \cdot 10^{-6}$ м и различных температурах T_w подложки представлены в табл. 3.4. Здесь же приведены экспериментальные и расчетные значения из [44]. Видим, что расчеты по формуле (3.96) согласуются с экспериментальными данными по двум признакам: 1) имеется качественно верная оценка порядка ширины полосы в кристаллической фазе; 2) температурная зависимость $\vartheta(T_w)$ монотонно убывающая.

Таблица 3.4

**Экспериментальные и теоретические данные
о характерной ширине полосы в кристаллической фазе**

$T_w, \text{ К}$	$\lambda_j, \text{ Вт/(м}\cdot\text{град)}$	$\gamma_j \cdot 10^8, \text{ с}$	$w_j, \text{ м/с}$	$N, \text{ м/с}$	$\mathfrak{D}_{\text{эксп}} \cdot 10^6, \text{ м}$ [44]	$\mathfrak{D}_{\text{теор}} \cdot 10^6, \text{ м}$ [44]	$\mathfrak{D} \cdot 10^6, \text{ м}$
736	17,178	2,675	17,548	8,883	–	4,0	2,085
738	17,174	2,641	17,654	8,880	–	2,3	2,072
740	17,170	2,610	17,756	8,875	6,0	1,1	2,059
750	17,152	2,474	18,222	8,824	–	1,8	2,003
751	17,151	2,462	18,265	8,817	5,9	–	1,998
768	17,134	2,302	18,866	8,622	4,8	–	1,928
770	17,132	2,288	18,922	8,592	5,2	–	1,923

Отметим также, что согласно (3.92), (3.93) выражение для $\sigma_0(x, t)$ содержит информацию о двух волнах производства энтропии, распространяющихся вдоль линий неподвижности с фазовыми скоростями $v = \pm \omega / 2h$. Амплитуда этих волн $A_2(t)d_1 / 2$ переменная: она гармонически колеблется около значения $k_1 d_1$. Применяя (3.88), (3.95), (3.96), находим $v^2 = \lambda \omega / (8c)$. Следовательно, полученные волны производства энтропии обладают аномальной (положительной) дисперсией: $\partial(v^2) / \partial \omega = \lambda / (8c) > 0$.

Этот результат справедлив и при учете затухания колебаний в решении (3.39), (3.40), (3.42), (3.88):

$$n_1 = n_2 = n > 0, \quad A(t) = A_1 \exp(-nt) \sin(rt),$$

$$r = (\omega^2 - n^2)^{1/2}, \quad 2n = \frac{1}{c\gamma}(c - \gamma q_v^1) > 0, \quad \omega^2 = \frac{\lambda h^2}{c\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}(1 - 2n\gamma).$$

Здесь ω – собственная частота колебаний; n – коэффициент затухания. Вид формулы (3.94) сохраняется, но теперь $k_1 = -A_1 cr / h$. Из условия экстремума $\partial \sigma_0^1 / \partial \gamma = 0$ находим на линии неподвижности:

$$\omega = 1/\gamma, \quad h^2 = \frac{2c}{\lambda} \left(\frac{1}{\gamma} - n \right), \quad (3.97)$$

что является обобщением формулы (3.96). В этом случае для фазовой скорости затухающей волны производства энтропии получаем

$$v^2 = \frac{r^2}{4h^2}, \quad h^2 = \frac{2c}{\lambda} \left[(r^2 + n^2)^{1/2} - n \right],$$

и тогда $\partial(v^2)/\partial(r^2) > 0$. Экспериментальные значения n отсутствуют; вопрос о зависимости коэффициента затухания $n = n(\delta, T_w, T_j)$ от параметров процесса остается пока открытым. Вместе с тем из (3.97) ясно, что расчетное значение ширины полосы $\mathfrak{Q} = 2\pi/h$ при $n > 0$ больше, чем в режиме свободных колебаний. Другими словами, учет затухания колебаний допускает принципиальную возможность приблизить теоретические значения \mathfrak{Q} к опытным данным. Чтобы оценить значения n , возьмем в экспериментальных точках (см. табл. 3.4) $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\text{эксп}}$, а $\gamma = \gamma_j$ – из расчета в режиме $n = 0$:

$$n = \frac{1}{\gamma_j} - n_1, \quad n_1 = \frac{2\pi^2\lambda_j}{c_j\mathfrak{Q}_{\text{эксп}}^2}.$$

При таком подсчете подгоночного параметра n оказывается, что $\tau_n/\tau_0 \cong 2$, где τ_n, τ_0 – периоды затухающих и свободных колебаний, соответственно.

Таким образом, в рамках данной феноменологической модели расчеты в режиме незатухающих колебаний дают (см. табл. 3.4) нижнюю границу значений \mathfrak{Q} ширины характерной полосы в кристаллической фазе.

Глава 4 ИСТОЧНИК СИНУС-ГОРДОНА И БИСТАБИЛЬНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Существуют разнообразные физико-энергетические системы, принцип действия которых основан на выделении тепла ($q_v^+ > 0$) и последующем теплоотводе ($q_v^- < 0$): горение конденсированных сред [64]; получение сильных магнитных полей с помощью сверхпроводящих магнитных систем [65]; охлаждение крупных энергетических устройств до рабочей температуры криостатирования [66]; тепловая бистабильность для металлов с электрическим током при охлаждении жидким хладагентом и др. В обзоре [67] эти физические явления рассматриваются с позиций локализованных на неоднородностях нелинейных волн: на основе уравнения теплопроводности выполнен анализ специфических особенностей локализации доменов и доменных стенок. Представленные в главе 4 теоретические исследования относятся к весьма распространенному случаю, когда в системе «среда – источник энергии» имеется одна неизвестная функция – температура, и анализ динамических свойств проводится в рамках параболического либо гиперболического (волнового) уравнения теплопереноса.

Сначала в главе 4 обсуждается параболическая модель бистабильных систем [68]–[70]. Термин «бистабильность» означает, что функция источника

$$q_v(T) = q_v^+(T) + q_v^-(T)$$

имеет синусоидальный вид (рис. 4.1)

$$q_v(T_1) = 0, \quad q_v(T_2) = 0, \quad q_v(T_3) = 0, \quad 0 < T_1 < T_2 < T_3$$

и между двумя устойчивыми состояниями среды $T = T_1$ и $T = T_3$,

$$\left(\frac{dq_v}{dT} \right)_{T=T_1} < 0, \quad \left(\frac{dq_v}{dT} \right)_{T=T_3} < 0,$$

находится одно неустойчивое состояние:

$$T = T_2, \left(\frac{dq_v}{dT} \right)_{T=T_2} > 0.$$

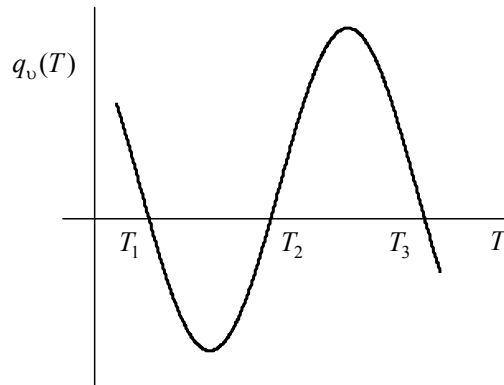


Рис. 4.1. Функция источника энергии в бистабильной теплофизической системе

Синусоидальный характер функции $q_v(T)$ наводит на мысль о возможности изучения волнового теплопереноса на основе гиперболического уравнения синус-Гордона. Действуя в этом направлении, мы рассматриваем вопрос о возбуждении пространственно-временных колебаний в среде с источником энергии типа синус-Гордона [71]–[75]. Изложенные здесь результаты демонстрируют нетривиальные физические свойства одномерных и двухмерных волновых структур.

4.1. Бистабильные тепловые системы

4.1.1. Эволюция начального температурного профиля

Рассмотрим, следуя работе [68], вопрос об асимптотической ($t \rightarrow \infty$) эволюции начального температурного профиля в бистабильных системах. Суть проблемы в том, чтобы определить конечное состояние системы при воздействии на нее теплового возмущения сложной формы (рис. 4.2). В одномерном случае ($\partial/\partial y \equiv 0$) уравнение теплопроводности (1.8) имеет вид

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v^+(T) + q_v^-(T), \quad (4.1)$$

$\lambda, c - \text{const.}$

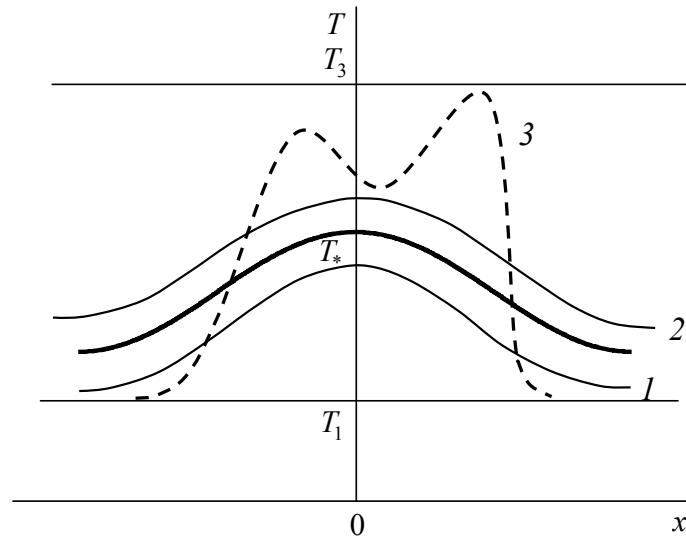


Рис. 4.2. Критический температурный профиль (сплошная жирная линия) и возможные варианты формы (линии 1–3) начальных тепловых возмущений

На рис. 4.3 показаны типичные примеры функций, определяющих теплосъем (охлаждение) $q_v^-(T) < 0$ и генерацию тепловой энергии $q_v^+(T) > 0$. Функции $q_v^+(T)$, $q_v^-(T)$ не обязательно являются монотонными. Требуется только, чтобы условию

$$q_v^+(T) + q_v^-(T) = 0$$

удовлетворяли два устойчивых пространственно однородных состояния с температурами T_1 и T_3 .

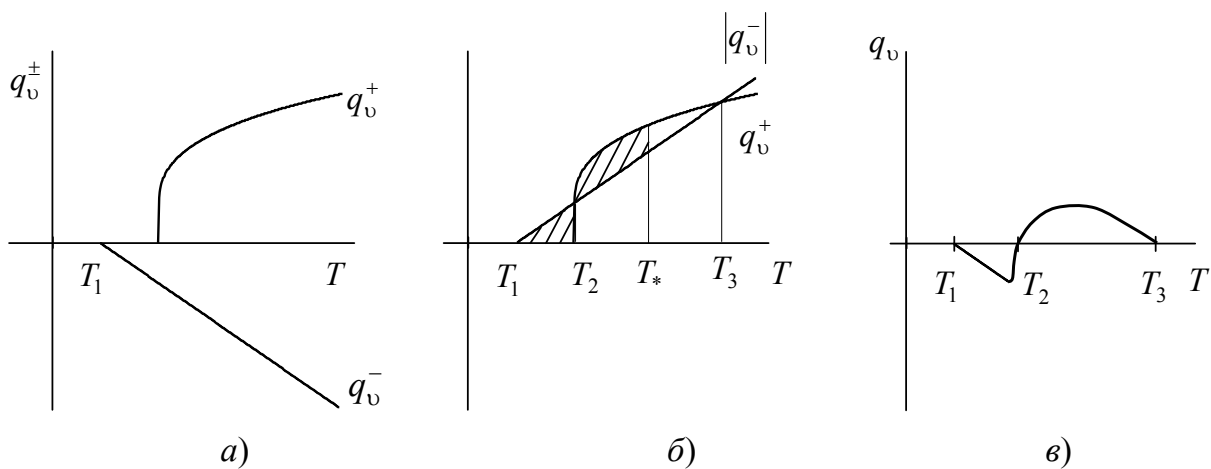


Рис. 4.3. Генерация тепловой энергии и охлаждение (а); иллюстрация критерия равных площадей (б); результат сложения функций ($q_v^+ + q_v^-$) (в)

Основной интерес представляет начальное распределение температуры, которое удовлетворяет стационарному уравнению

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v^+(T) + q_v^-(T) = 0. \quad (4.2)$$

Если генерация является достаточно сильной, то существует температура $T = T_*$, при которой выполняется критерий равных площадей (рис. 4.3, б):

$$\int_{T_1}^{T_*} q_v^+(T) dT + \int_{T_1}^{T_*} q_v^-(T) dT = 0.$$

В этом случае уравнение (4.2) имеет решение $T = T(x)$ такое, что $T \rightarrow T_1$ при $|x| \rightarrow \infty$, и существует максимум температуры $T = T_* > T_1$. Это решение определяет критический неустойчивый стационарный профиль температуры. А именно: все начальные распределения температуры, располагающиеся ниже критического профиля (например, линия 1 на рис. 4.2), будут асимптотически ($t \rightarrow \infty$) эволюционировать в состояние с температурой T_1 . Вместе с тем распределения температуры, превышающие критический профиль (например, линия 2 на рис. 4.2), будут эволюционировать в состояние $T = T_3$. Вопрос о поведении произвольного начального профиля (линия 3 на рис. 4.2) требует отдельного рассмотрения.

Правую часть уравнения (4.1) можно записать в виде вариационной производной от функционала:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\delta V}{\delta [T(x, t)]}, \quad (4.3)$$

$$V\{T(x, t)\} = \int \left\{ \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \int_{T_1}^{T(x, t)} [q_v^+(T') + q_v^-(T')] dT' \right\} dx.$$

Важно, что этот функционал не возрастает по времени на решениях уравнения (4.3) при условии

$$\partial T / \partial x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Следовательно, имеем:

$$\dot{V}\{T(x, t)\} = \int \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\delta V}{\delta [T(x, t)]} dx = - \frac{1}{c} \int \left(\frac{\delta V}{\delta [T(x, t)]} \right)^2 dx \leq 0. \quad (4.4)$$

При любых малых отклонениях температуры в окрестности $T = T_1$ выполнены условия:

$$V\{T(x)\} > 0, \quad V\{T_1\} = 0,$$

т. е. $V\{T(x)\}$ – функционал Ляпунова вблизи $T = T_1$.

Пусть в начальном состоянии системы

$$V\{T(x)\}|_{t=0} \leq 0, \quad T(x,t)|_{t=0} \neq T_1. \quad (4.5)$$

Примем во внимание факт (4.4) монотонного невозрастания $V\{T(x,t)\}$ по времени, а также то, что для критического профиля значение функционала больше нуля. Кроме того, имеем $V\{T_1\} = 0, V\{T_3\} < 0$ и выполнено неравенство (рис. 4.3):

$$\int_{T_1}^{T_3} [q_v^+(T) + q_v^-(T)] dT = \int_{T_*}^{T_3} [q_v^+(T) + q_v^-(T)] dT > 0.$$

Отсюда следует, что начальный профиль, который удовлетворяет условиям (4.5), будет эволюционировать в состояние с температурой $T = T_3$.

На качественном уровне строгости полученный достаточный критерий можно пояснить следующим образом. Проинтегрировав по координате x выражение (4.2), получим, что на критическом профиле генерация энергии уравнивается охлаждением:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v^+(T(x)) + q_v^-(T(x)) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} [q_v^+(T(x)) + q_v^-(T(x))] dx = 0.$$

Значит, естественно ожидать, что если на начальном профиле $T(x, t = 0)$ генерация q_v^+ в среднем превысит теплоотвод $|q_v^-|$, т. е. $Q > 0$, то система будет эволюционировать в состояние $T = T_3$.

Критерий (4.5), полученный для уравнения (4.1), можно распространить на случай $c = c(T), \lambda = \lambda(T)$. Для этого применяем функцию

$$\Lambda(T) = \int_{T_1}^T \lambda(T) dT$$

и строим функционал

$$W\{\Lambda(x,t)\} = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right)^2 + U(\Lambda) \right] dx,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda(T)} = -[q_v^+(T) + q_v^-(T)], \quad W|_{\Lambda=0} = 0.$$

Уравнение теплопроводности представляется в следующей форме:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = - \left. \frac{\delta W}{\delta[\Lambda(x,t)]} \right|_{\Lambda=\Lambda(T)}.$$

Отсюда получаем аналог формулы (4.4):

$$\begin{aligned} \dot{W}\{\Lambda(T(x,t))\} &= \int \left. \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \frac{\delta W}{\delta[\Lambda(x,t)]} \right|_{\Lambda=\Lambda(T)} dx = \\ &= - \int \left. \frac{\lambda}{c} \left(\frac{\delta W}{\delta[\Lambda(x,t)]} \right)^2 \right|_{\Lambda=\Lambda(T)} dx \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, этот функционал не возрастает по времени на решениях уравнения теплопроводности. Теперь остается переформулировать задачу, применяя вместо T функцию $\Lambda(x,t)$.

4.1.2. Фазовый переход «расплав–кристалл»

Рассмотрим задачу о кристаллизации из расплава, применяя условия Стефана на границе раздела фаз. Следуя работе [69], обсудим вопрос об устойчивости стационарных решений уравнения теплопроводности по отношению к конечным (немалым) возмущениям. Уравнение теплопроводности вида (1.8) возьмем в следующей форме записи:

$$c_l(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda_l(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) + q_{vl}^+(T) + q_{vl}^-(T); \quad (4.6)$$

$$c_s(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda_s(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) + q_{vs}^+(T) + q_{vs}^-(T). \quad (4.7)$$

Краевая задача рассматривается в простейшей постановке: не учитываются явления поверхностного натяжения и эффекты переохлаждения (перегрева). Граница фаз $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ изотермическая,

$$T(\mathbf{r} = \mathbf{r}_m, t) = T_m \equiv \text{const}, \quad (4.8)$$

и на ней выполнен баланс тепловых потоков:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m, \quad \mathbf{n} \cdot \left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) = LN \cdot \mathbf{n}. \quad (4.9)$$

Индексы l и s относятся, соответственно, к жидкой и твердой фазам; T_m – температура плавления; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества; \mathbf{r} – радиус-вектор точки; \mathbf{n} – нормаль к фазовой границе, направленная от кристалла к расплаву; \mathbf{N} – нормальная скорость перемещения фазовой границы. В данной постановке задачи температура расплава всегда не ниже, чем температура кристалла, поэтому можно считать, что

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} = \mathbf{n} \left\| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right\|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}.$$

Это ограничение исключает возможность морфологической неустойчивости фазовой границы. Следствием условия изотермичности границы (4.8) является равенство

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{N} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (4.10)$$

Система «расплав–кристалл» находится в капсуле с неподвижными стенками. Возможны два варианта граничных условий на стенках $\mathbf{r} = \mathbf{r}_w$.

Вариант I: задана температура стенок

$$T(\mathbf{r} = \mathbf{r}_w, t) = T_0(\mathbf{r}_w). \quad (4.11)$$

Вариант II: задан тепловой поток

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_w, \quad -\mathbf{n}_w \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = K(T, \mathbf{r}_w), \quad (4.12)$$

где \mathbf{n}_w – внешняя капсуле нормаль. В (4.12) следует принять $\lambda = \lambda_s(T)$ при $T < T_m$ и $\lambda = \lambda_l(T)$ при $T > T_m$.

Сначала рассмотрим 1-й вариант. Для задачи (4.6)–(4.11) построим функционал:

$$V^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\} = J_s + J_l; \quad (4.13)$$

$$J_s = \int_{(s)} \left[\frac{1}{2} \lambda_s^2(T) \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - \int_{T_m}^{T(\mathbf{r}, t)} \lambda_s(T') (q_{vs}^+(T') + q_{vs}^-(T')) dT' \right] d^D \mathbf{r}; \quad (4.14)$$

$$J_l = \int_{(l)} \left[\frac{1}{2} \lambda_l^2(T) \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - \int_{T_m}^{T(\mathbf{r}, t)} \lambda_l(T') (q_{vl}^+(T') + q_{vl}^-(T')) dT' \right] d^D \mathbf{r}, \quad (4.15)$$

где $D = 1, 2, 3$ – размерность пространства. При подсчете J_s и J_l интегрирование выполняется, соответственно, по объему, занятому твердой фазой и расплавом. При подстановке любого решения $T(\mathbf{r}, t)$ задачи (4.6)–(4.11) в (4.13)–(4.15) функционал $V^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\}$ становится функцией аргумента t . Далее следует учесть законы сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(s)} d^D \mathbf{r} = \int_{(m)} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) d^{D-1} \mathbf{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(l)} d^D \mathbf{r} = - \int_{(m)} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) d^{D-1} \mathbf{r},$$

где интегралы в правых частях вычисляются на границе раздела фаз. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\} = & - \int_{(s)} \lambda_s(T) c_s(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 d^D \mathbf{r} - \int_{(l)} \lambda_l(T) c_l(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 d^D \mathbf{r} - \\ & - \frac{1}{2} \int_{(m)} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) \left(\lambda_s(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \lambda_l(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) L \mathbf{n} d^{D-1} \mathbf{r} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Следовательно, на решениях системы (4.6)–(4.11) функционал $V^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\}$ является невозрастающей функцией времени. На физическом уровне строгости (в смысле неравенства (4.16)) $V^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\}$ является функционалом Ляпунова. Из соображений математической строгости условие (4.16) следует дополнить двумя ограничениями:

$$V\{T_0(\mathbf{r})\} = 0; \quad (4.17)$$

$$V\{T_0(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})\} > 0, \quad (4.18)$$

где $T_0(\mathbf{r})$ – стационарное решение задачи (4.6)–(4.11); $\Delta T(\mathbf{r})$ – малое возмущение температуры вблизи $T_0(\mathbf{r})$. Условию (4.17) всегда можно удовлетворить, добавляя подходящую аддитивную константу в правой части (4.13). Для локально устойчивых стационарных решений функционал (4.13) является функционалом Ляпунова и в смысле условий (4.17), (4.18).

Для варианта II краевой задаче (4.6)–(4.9), (4.12) соответствует функционал Ляпунова

$$V^{(II)}\{T(\mathbf{r}, t)\} = V^{(I)}\{T(\mathbf{r}, t)\} + \int_{(w)} \left(\int_{T_m}^{T(\mathbf{r}, t)} \lambda(T') K(T', \mathbf{r}_w) dT' \right) d^{D-1} \mathbf{r}, \quad (4.19)$$

где первое слагаемое подсчитывается по формулам (4.13)–(4.15), а во втором слагаемом интегрирование выполняется на стенках капсулы.

Обсудим устойчивость бистабильной системы, применяя метод функционалов Ляпунова. Допустим, система обладает двумя стационарными распределениями температуры $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$ и $T_3^{(0)}(\mathbf{r})$, устойчивыми по отношению к малым возмущениям. Для определенности примем, что

$$V\{T_3^{(0)}(\mathbf{r})\} > V\{T_1^{(0)}(\mathbf{r})\}, \quad (4.20)$$

причем разность температур $T_3^{(0)}(\mathbf{r}) - T_1^{(0)}(\mathbf{r}) \neq 0$ отличается от нуля по всему объему системы. Значит, согласно (4.13) и (4.19), разность между значениями функционалов Ляпунова для различных стационарных распределений будет содержать множитель, пропорциональный полному объему системы; обычно величина этого объема доминирует в оценках. Тогда из свойства монотонности (4.16) следует, что состояние $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$ будет более устойчиво, чем состояние $T_3^{(0)}(\mathbf{r})$. В самом деле, если

$$V\{T_1^{(0)}(\mathbf{r})\} < V\{T_1^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})\} < V\{T_3^{(0)}(\mathbf{r})\},$$

то, согласно (4.16), возмущенная система может релаксировать только обратно к $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$. Для того чтобы перевести систему из состояния $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$ в $T_3^{(0)}(\mathbf{r})$, необходимы, по меньшей мере, такие возмущения $\Delta T(\mathbf{r})$, что

$$V\{T_1^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})\} > V\{T_3^{(0)}(\mathbf{r})\}.$$

Итак, наиболее устойчивым будет состояние, отвечающее низшему значению функционала Ляпунова. В этом заключается формальная аналогия функционалов Ляпунова с термодинамической свободной энергией.

Для локально устойчивых «метастабильных» стационарных состояний, отвечающих более высоким значениям функционала Ляпунова, можно указать границу допустимых конечных возмущений, переводящих систему в другое стационарное состояние. Оказывается, что в обсуждаемом бистабильном случае (4.20) для состояния $T_3^{(0)}(\mathbf{r})$ существует критерий

$$V\{T_3^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})\} \leq V\{T_3^{(0)}(\mathbf{r})\},$$

который характеризует возмущения $\Delta T(\mathbf{r})$, заведомо переводящие систему в состояние с температурой $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$. Монотонное невозрастание функционала Ляпунова (4.16) обеспечивает асимптотический переход начального распределения $T_3^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta T(\mathbf{r})$ в состояние $T_1^{(0)}(\mathbf{r})$.

4.2. Уравнение синус-Гордона в поле внешнего периодического источника

Рассмотрим одномерное волновое уравнение теплопереноса (1.9) с реономным источником энергии $q_v(T, t)$, явно зависящим от времени:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = k_v(T, t), \quad \alpha = x/w, \quad w^2 = \lambda/(c\gamma) \equiv \text{const}, \quad k_v = q_v/(c\gamma), \quad (4.21)$$

где w – скорость распространения тепловых возмущений.

Если $k_v(T) = \pm \sin T$, то (4.21) является уравнением синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = \pm \sin T, \quad (4.22)$$

которое детально изучено в теории нелинейных эволюционных уравнений. Результаты исследования одного реономного варианта уравнения синус-Гордона в поле внешней периодической силы с затуханием

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \sin T = \Gamma \cos(\omega t) - \varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \varepsilon, \omega, \Gamma - \text{const}$$

представлены в [76]. Численный анализ этого уравнения показал, что структура пространственной части решений является когерентной, а именно: проявляются свойства лишь небольшого числа хорошо выраженных пространственных мод. Это означает, что солитонная структура решения может быть стабильной.

Здесь мы рассматриваем два простых и наглядных примера зависимостей $k_v(T, t)$, для которых можно воспользоваться известными решениями уравнения синус-Гордона.

Представленные далее реономные системы имеют следующие отличительные признаки: 1) источник $k_v(T, t)$ содержит аддитивным образом гармоническую по t функцию (аналог внешней периодиче-

ской силы); 2) значения температур, при которых объемный источник энергии обращается в ноль, $[T = T_i, k_v(T_i, t) = 0, i = 1, 2, 3]$, являются нестационарными. Для этих температур, также как и в случае параболических бистабильных систем, по-прежнему важен знак производной $\partial k_v(T, t)/\partial T$, но вопрос об устойчивости/неустойчивости таких нестационарных состояний остается открытым. Изучаем здесь различия между реономным и склерономным (обычным) уравнениями синус-Гордона, а также динамические гистерезисные свойства реономной системы.

4.2.1. Возбуждение колебаний и ширина гистерезисного интервала

Поведение реономной системы описывается формулами:

$$T - T_0 \equiv \tau(\alpha, t) = \theta(\alpha, t) - f(t), \quad f(t) = f_1 \sin(k_1 t), \quad T_0, f_1, k_1 - \text{const},$$

$$k_v(T, t) = \sin[\tau + f(t)] + k_1^2 f(t), \quad (4.23)$$

где $T_0 > 0$; k_1 – частота возбуждающих колебаний; функция $\theta(\alpha, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} = \sin \theta$$

и определяется известным решением [77]:

$$\theta = -4 \arctan \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \frac{\sin(\alpha \sqrt{1-m^2} + C_2)}{\text{ch}(mt + C_1)} \right], \quad m, C_1, C_2 - \text{const},$$

$$0 < m < 1, \quad t \geq 0.$$

Для дальнейшего важно, что здесь $\theta(\alpha, t)$ – непериодическая функция аргумента t . Если $C_1 > 0$, то $\text{ch}(mt + C_1)$ – монотонно возрастающая функция; если $C_1 < 0$, то $\text{ch}(mt + C_1)$ немонотонная функция, она имеет минимум при $mt_1 + C_1 = 0$; при $t > t_1 > 0$ эта функция монотонно растет. Имеем $k_v(T, t) = 0$, если $\sin \theta = -k_1^2 f(t)$, $\tau = -f + \pi n_0 + (-1)^{n_0} \arcsin(-k_1^2 f)$. Выбор целого числа $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ влияет на интервал температур, в котором изучается решение. В расчетах в качестве τ_1^- и τ_3^- берем два соседних корня, примыкающих

слева и справа к τ_2^+ , где τ_2^+ – самый близкий к нулю корень уравнения $k_v(\tau_2^+, t) = 0$, для которого $\partial k_v(\tau, t) / \partial \tau > 0$, причем $\tau_1^- < \tau_2^+ < \tau_3^-$. Вычислительная процедура состоит в следующем. Работаем на интервале времени, равном одному периоду колебаний функции $f(t)$: $t \in [0, 2\pi/k_1]$. Для каждого фиксированного t строим изотермы τ_1^- и τ_3^- : $\tau_1^- = \theta_1 - f$; $\tau_3^- = \theta_3 - f$; $S_1(\alpha, t) = \tan(-\theta_1/4)$, $S_3(\alpha, t) = \tan(-\theta_3/4)$. Из двух последних формул находим значения α_1, α_3 , которым в изучаемый момент времени t соответствуют температуры τ_1^- , τ_3^- . Совокупность точек $(t, x_1(t))$ и $(t, x_3(t))$ дает возможность построить вдоль каждой изотермы зависимости $N^2(t)$, $g^2(t)$, а затем найти связь $N^2 = N^2(g^2)$, где $N = (-\partial T / \partial t) / (\partial T / \partial x)$ – скорость перемещения изотермы; $g = \partial T / \partial x$ – градиент температуры; $S = \tan(-\theta/4)$. В основной серии расчетов были зафиксированы величины $m = 0,999$; $C_2 = 2$; варьируемые параметры: частота k_1 и константа C_1 . Величина C_1 влияет на амплитуду колебаний по α функции $S(\alpha, t = 0)$, характеризующей температурную неоднородность среды в начальный момент времени. В тех случаях, когда на плоскости (g^2, N^2) динамический гистерезис отсутствует, функция $N^2 = N^2(g^2)$ – монотонно убывающая; график этой зависимости похож на обычную гиперболу. Наличие гистерезиса, наблюдаемого при сравнении двух нестационарных состояний τ_1^- и τ_3^- , для которых $\partial k_v(T_\alpha, t) / \partial T < 0$, связано в первую очередь с алгебраической величиной константы C_1 . В табл. 4.1 представлены левая и правая границы интервала $C_1 \in [C_1^{(1)}, C_1^{(2)}]$, в котором динамический гистерезис на плоскости (g^2, N^2) существует. В этих случаях петли гистерезиса – незамкнутые линии, для которых отдельным значениям g^2 могут соответствовать два или три значения N^2 . На рис. 4.4 показана зависимость $N^2 = N^2(g^2)$ для двух соседних температурных точек: $\tau = \tau_1^-$ – сплошная линия, $\tau = \tau_3^-$ – штриховая линия.

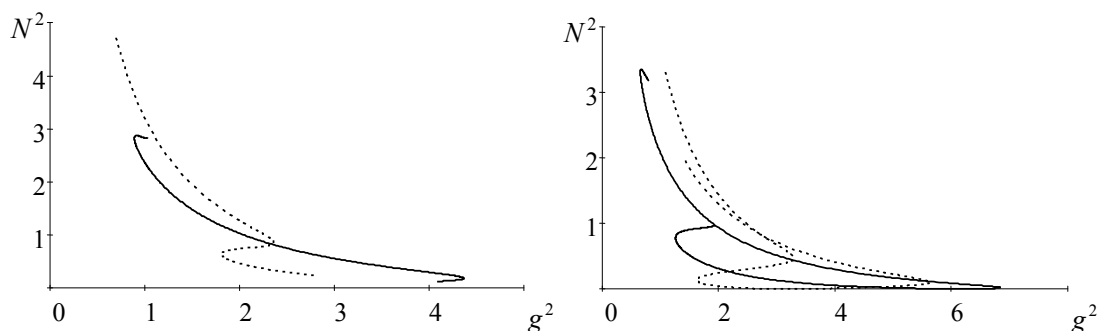


Рис. 4.4. Примеры неоднозначной зависимости между градиентом температуры и скоростью перемещения изотермы

Из числовых данных в табл. 4.1 следует, что рост частоты возбуждающих колебаний в значительной степени увеличивает ширину гистерезисного интервала $\Delta C_1 = C_1^{(2)} - C_1^{(1)}$. Например (см. первую и последнюю строки в табл. 4.1) при увеличении k_1 в 3,89 раза ΔC_1 увеличивается в 12,75 раз. Для обработки данных применяем относительные величины

$$\delta k_1 = (k_1)_l / (k_1)_1, \quad \delta(\Delta C_1) = (\Delta C_1)_l / (\Delta C_1)_1,$$

где $l = 1, 2, \dots, 15$ – номер строки. В результате получаем аппроксимирующий полином

$$\delta(\Delta C_1) = -8,626 + 12,987 \cdot \delta k_1 - 4,382 \cdot (\delta k_1)^2 + 0,502 \cdot (\delta k_1)^3.$$

Таким образом, реономный источник энергии (4.23) обладает принципиальными отличиями от своего склерономного аналога (4.22), а именно: на изотермах $\tau_1^-, \tau_3^-, \partial k_0 / \partial \tau < 0$ наблюдается динамический гистерезис, который обладает сильной чувствительностью к частоте возбуждающих колебаний.

Таблица 4.1

Влияние частоты возбуждающих колебаний на ширину гистерезисного интервала

l	k_1	δk_1	$C_1^{(1)}$	$C_1^{(2)}$	ΔC_1
1	1,80	1,00	-3,7	-3,3	0,40
2	2,00	1,11	-3,7	-2,6	1,10
3	2,25	1,25	-3,7	-1,9	1,80
4	2,50	1,39	-3,7	-1,4	2,30
5	2,75	1,53	-3,7	-0,85	2,85
6	3,00	1,67	-3,7	-0,5	3,20

Окончание табл. 4.1

l	k_1	δk_1	$C_1^{(1)}$	$C_1^{(2)}$	ΔC_1
7	3,25	1,81	-3,6	-0,1	3,50
8	3,50	1,94	-3,6	0,1	3,70
9	3,60	2,00	-3,6	0,2	3,80
10	3,70	2,06	-3,6	0,3	3,90
11	3,80	2,11	-3,6	0,4	4,00
12	4,00	2,22	-3,6	0,5	4,10
13	5,00	2,78	-3,5	0,8	4,30
14	6,00	3,33	-3,5	1,2	4,70
15	7,00	3,89	-3,5	1,6	5,10

4.2.2. Частотный параметр реономной системы

В состав изучаемой теплофизической системы входят следующие элементы: 1) материал (среда), в котором тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью w ; 2) источник энергии $k_v^{(1)} = -\sin[T - T_0 + f(t)]$, который нелинейно зависит от температуры, является знакопеременным и обладает реономными свойствами, поскольку отклонение аргумента синуса есть периодическая функция времени:

$$f(t) = f_1 \sin(k_1 t), \quad f_1, k_1 - \text{const};$$

3) внешний нестационарный периодический источник энергии $k_v^{(2)} = A_1 \sin(k_1 t)$, амплитуда колебаний которого $A_1 = f_1 k_1^2$ пропорциональна квадрату частоты. Таким образом, правая часть уравнения (4.21) имеет вид: $k_v(T, t) = k_v^{(1)}(T, t) + k_v^{(2)}(t)$, т. е.

$$k_v(T, t) = -\sin[\tau + f(t)] + k_1^2 f(t). \quad (4.24)$$

В этом случае существует точное аналитическое решение:

$$T - T_0 \equiv \tau(\alpha, t) = \theta(\alpha, t) - f(t); \quad (4.25)$$

$$\alpha = x/w, \quad T_0 \equiv \text{const};$$

$$\theta = -4 \arctan \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \frac{\sin(t\sqrt{1-m^2} + C_2)}{\text{ch}(\alpha m + C_1)} \right]; \quad (4.26)$$

$$m, C_1, C_2 - \text{const}, \quad 0 < m^2 < 1, \quad t \geq 0, \quad \alpha \in (-\infty, \infty).$$

Здесь $\theta(\alpha, t)$ – известное решение [77] уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \sin \theta.$$

Отличия от варианта (4.23) следующие: 1) изменился знак перед $\sin \theta$; 2) функция $\theta(\alpha, t)$ в (4.26) теперь является периодической по времени.

Обсудим основные параметры теплового поля (4.25), (4.26). Параметр m начального [$t = 0$] состояния системы характеризует неоднородность температуры $T(x; t = 0)$ по координате x . На основе исходного значения m вычисляется «собственная» частота колебаний $\omega = \sqrt{1 - m^2}$ температуры в отсутствие [$f_1 = 0$] внешнего источника. Произвольная постоянная C_1 не является существенной; ее выбор означает сдвиг по координате x . Произвольная постоянная C_2 есть начальная фаза «собственных» колебаний $\sin(\omega t + C_2)$. Вместе с тем C_2 – это разность фаз «собственных» и возбуждающих колебаний. Следовательно, параметр C_2 характеризует когерентность, проявляющуюся при нелинейном суммировании колебаний с частотами ω и k_1 . Частота k_1 возбуждающих колебаний внешнего источника равна частоте колебаний отклонения $f(t)$ аргумента синуса.

Важнейшим параметром процесса является отношение частот

$$h = \omega / k_1.$$

Далее анализируем три случая: частотный параметр h – рациональное (целое либо дробное) число; h – иррациональное число; h – трансцендентное число.

При работе с внешним источником энергии $k_v^{(2)}(t)$ были рассмотрены два варианта: 1) амплитуда отклонения f_1 зафиксирована, и варьируется амплитуда A_1 ; 2) зафиксирована амплитуда A_1 , варьируется k_1^2 . Установлено, что различия между этими вариантами носят только количественный характер.

Для вычисления производства энтропии применяем формулы (1.2):

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i, \quad \sigma_e = \frac{q_v}{T} \left[1 + \gamma \frac{\sigma_i}{c} \right], \quad \sigma_i = q^2 / (\lambda T^2).$$

В рамках модели волнового теплопереноса удельный тепловой поток q подсчитываем двумя способами:

1) численное интегрирование закона Максвелла [см. (1.4)]:

$$q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (4.27)$$

2) аналитическое решение уравнения $\gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, которое следует из (4.27) при $\gamma \partial / \partial t \gg 1$.

В результате имеем:

$$q(\alpha, t) = -4 \frac{\lambda m \operatorname{sh}(m\alpha + C_1)}{\gamma w \operatorname{ch}(m\alpha + C_1)} J(\alpha, t) + q(\alpha, t = 0); \quad (4.28)$$

$$J = \frac{-m}{(1-m^2)2AB \operatorname{ch}(m\alpha + C_1)} \ln \left| \frac{(A+Bz)(A-Bz_0)}{(A-Bz)(A+Bz_0)} \right|, \quad J(\alpha, t = 0) = 0.$$

$$A = (1+B^2)^{1/2} > 0, \quad B = \left[\frac{m^2}{(1-m^2) \operatorname{ch}^2(m\alpha + C_1)} \right]^{1/2} > 0,$$

$$z = \cos(t\sqrt{1-m^2} + C_2), \quad z_0 = \cos C_2.$$

Расчет разнообразных вариантов показал, что в установившемся по времени режиме колебаний формула (4.28) дает результаты, качественно полностью соответствующие закону Максвелла релаксационного теплопереноса. Количественные различия совсем небольшие и не имеют принципиального значения.

4.2.3. Трехмерные конфигурации фазовых траекторий

Градиентные свойства теплового поля изучаем в трехмерном пространстве (T_t, T_α, T) , где каждая из трех функций подсчитывается при фиксированном α и при $t \geq 0$. Приняты обозначения: $T_t = \partial T / \partial t$, $T_\alpha = \partial T / \partial \alpha$. В структуре решения (4.25), (4.26) важная роль принадлежит точке нулевого градиента температуры (**НГТ**): $\alpha = \alpha_* = -C_1/m$, $T_\alpha = 0$. Фазовые портреты в точках $\alpha_* \pm \alpha$, равноудаленных от точки НГТ, одинаковые.

Пусть h – целое число. Фазовые портреты при $h = 1; 2; 3$ даны на рис. 4.5. Для каждого варианта траектория есть замкнутая линия. Случай $h = 1$ – самый простой (рис. 4.5, *a*). Важно то, что при равенстве частот ($\omega = k_1$) качественное поведение системы с возбуждаю-

щим источником [$f_1 \neq 0$] ничем не отличается от ситуации, которая описывается обычным уравнением синус-Гордона [$f_1 = 0$]. Для других целых h траектория по-прежнему замкнутая, но число витков увеличивается (рис. 4.5, б, в). Такое же поведение траекторий наблюдается для рациональных нецелых h ; расчеты были выполнены при $h = 1/3; 1/2; 5/2$.

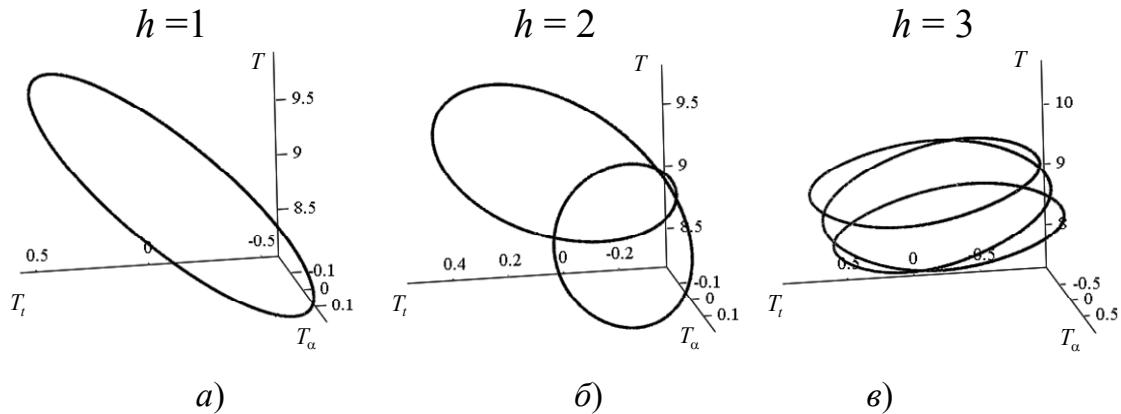


Рис. 4.5. Фазовые траектории на цилиндре: h – целое число

Во всех изученных вариантах траектории располагаются на цилиндрической поверхности, прямолинейная образующая которой перпендикулярна оси T_α , т. е. параллельна плоскости (T_t, T) . Ориентация образующей цилиндра в пространстве (T_t, T_α, T) зависит от входных параметров. На рис. 4.6, а, б показаны примеры поперечных сечений (направляющих линий) таких цилиндров, где β – угол, измеренный в плоскости (T_t, T) между образующей цилиндра и осью T . Во всех точках НГТ цилиндры вырождаются в плоскость $T_\alpha = 0$, на которой располагаются фазовые траектории. Ясно, что $|k_v^{(1)}(T, t)| \leq 1$, поэтому возрастание амплитуды f_1 означает усиление роли возбуждающего реономного источника $k_v^{(2)}(t)$. При $f_1 > 1$ получаем значительный рост размаха колебаний производной T_t . В результате уменьшается размер поперечного сечения цилиндра, а траектории, располагающиеся на его поверхности, сильно вытягиваются вдоль образующей и утрачивают спиралевидную форму.

Пусть h – иррациональное число. В этом случае траектории по-прежнему располагаются на цилиндрической поверхности, но линии эти незамкнутые и занимают на цилиндре конечную область ленточного вида (рис. 4.7). При нелинейной суперпозиции двух

колебательных процессов (4.25), (4.26) на фазовом портрете появляются резкие изгибы (повороты) траектории. Такие повороты типичны для областей с сильной пространственно-временной неоднородностью поля и связаны с переменной знаков производных T_t, T_α . Изгибы «ленты» зрительно воспринимаются как острые кромки. Два «иррациональных» примера поперечных сечений цилиндра даны на рис. 4.6, в, г. Процессы возбуждения колебаний, для которых частотный параметр h – трансцендентное число (были рассмотрены значения $h = \pi; e; \ln 2; 2^{\sqrt{2}}$ и др.), проиллюстрированы на рис. 4.8.

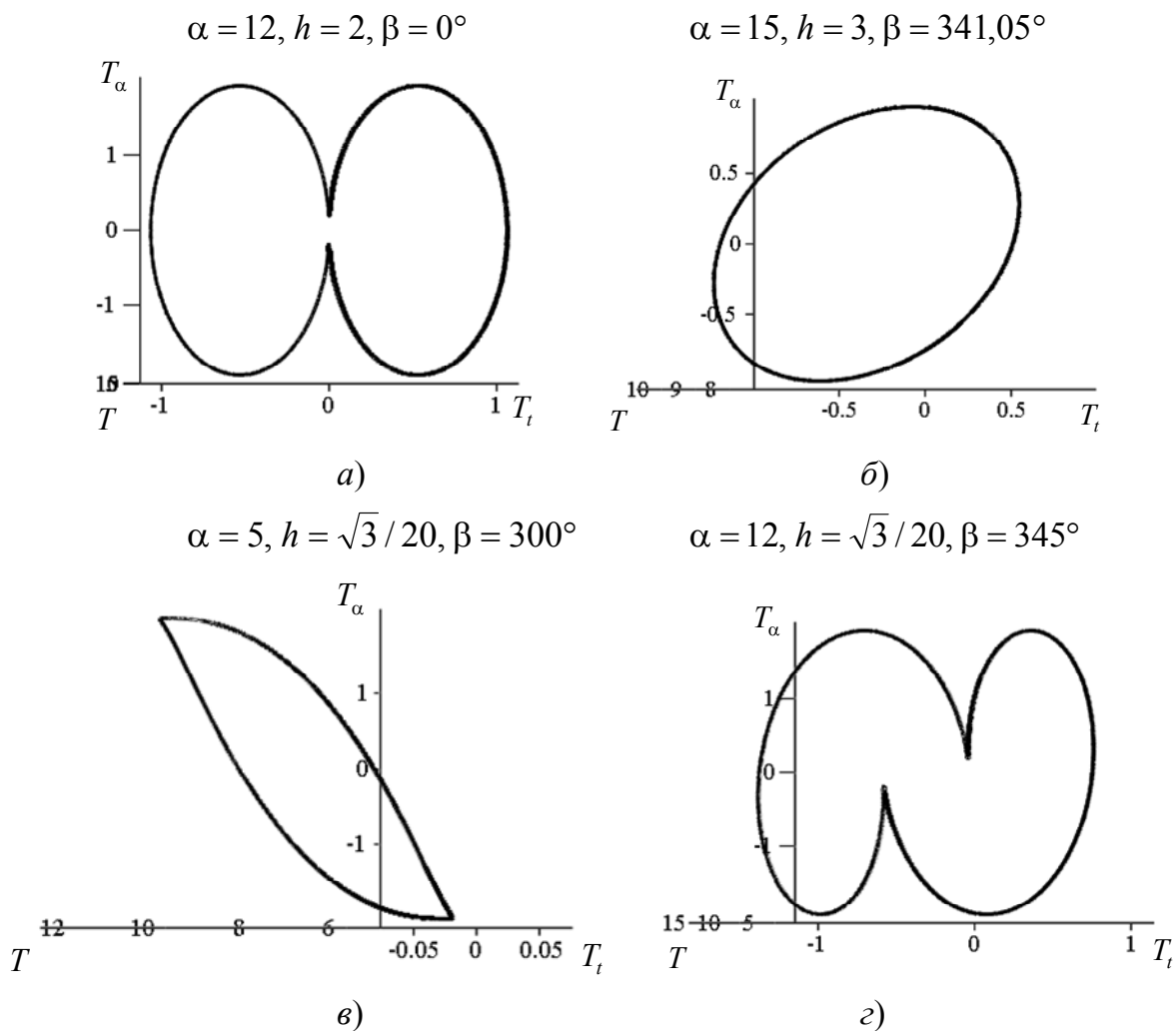


Рис. 4.6. Направляющие линии цилиндрических поверхностей:
а, б – целое значение h ; в, г – иррациональное значение h

$$f_1 = 0,9999; m = 0,5; C_1 = -10; C_2 = 0; h = \sqrt{3}/20; k_1 = \sqrt{1-m^2}/h; \alpha_* = 10,001$$

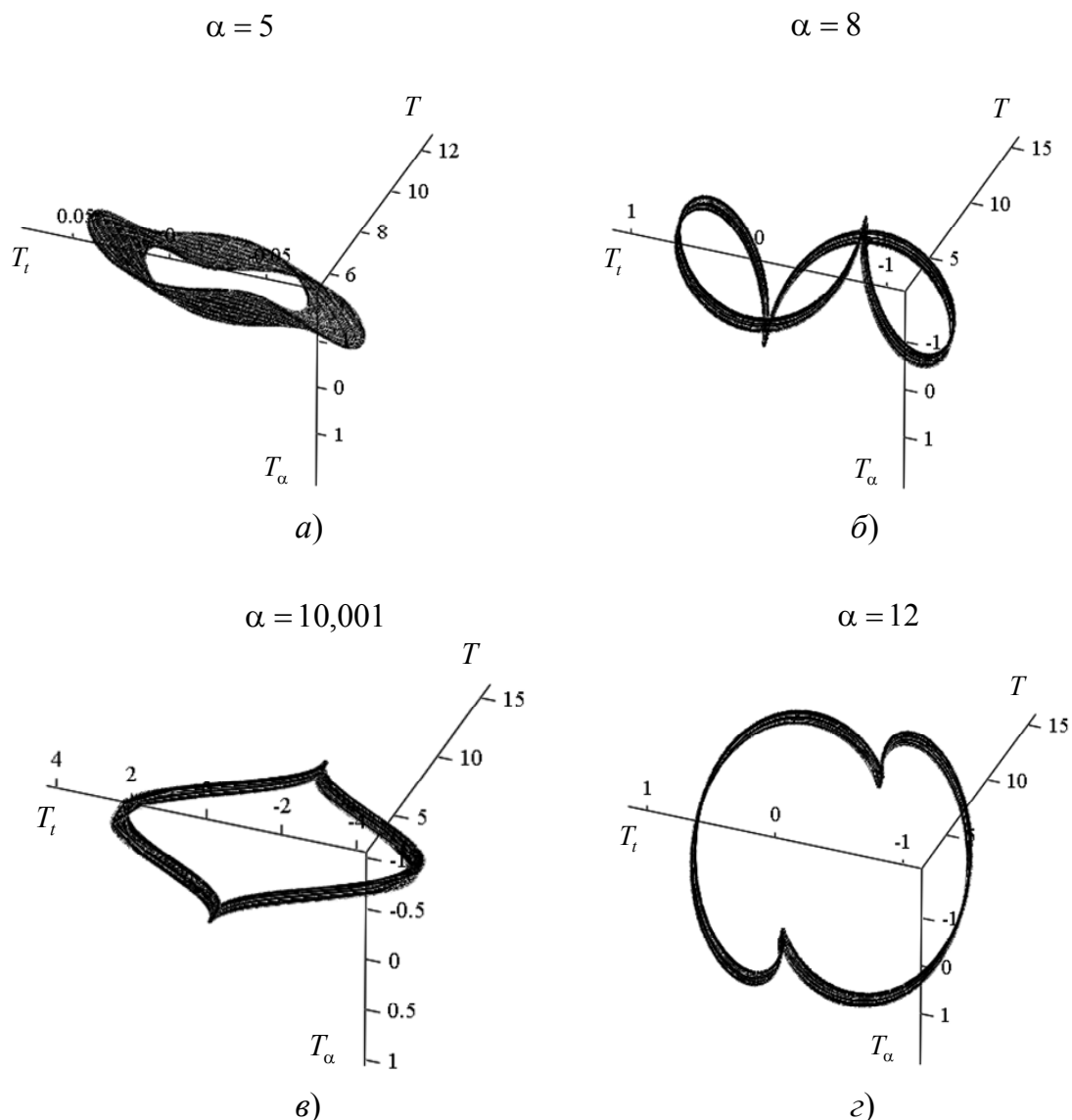


Рис. 4.7. Фазовые траектории на цилиндре: h – иррациональное число

Гистерезисная зависимость между температурой $T(t)$ и производством энтропии $\sigma(t)$ при фиксированном α показана на рис. 4.9. Для h целого зависимость $\sigma = \sigma(T)$ образует одну или несколько замкнутых петель динамического гистерезиса (рис. 4.9, а, б). Для h -иррационального либо трансцендентного с течением времени формируется незамкнутая траектория, которая занимает конечную область на плоскости (T, σ) (рис. 4.9, в, г).

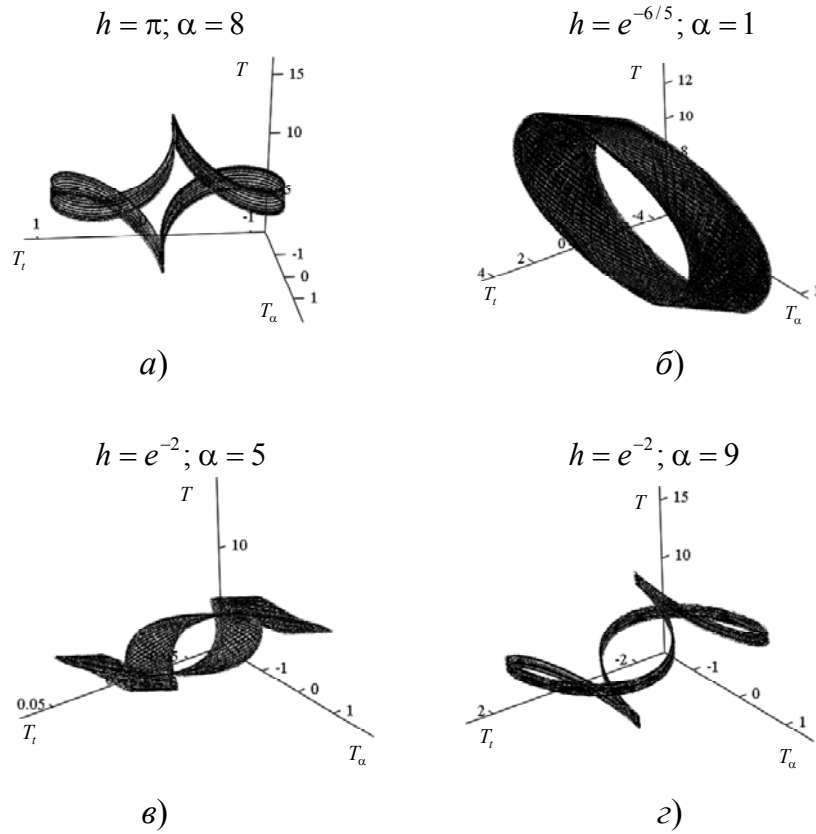


Рис. 4.8. Фазовые траектории на цилиндре: h – трансцендентное число

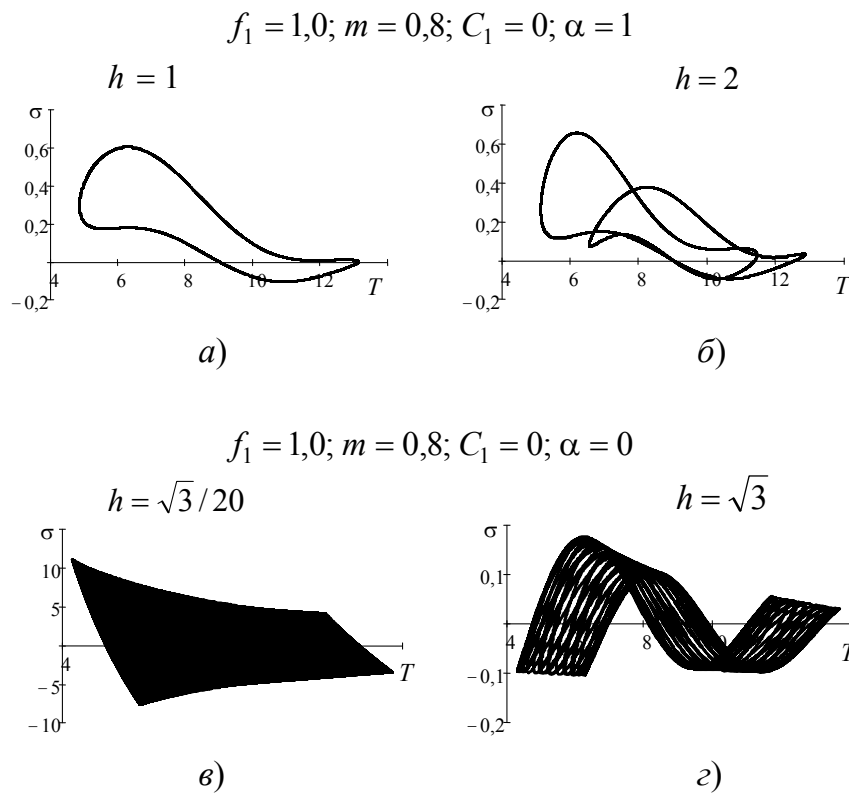


Рис. 4.9. Фазовые траектории на плоскости «температура – производство энтропии»: а, б – целое значение h ; в, г – иррациональное значение h

$$f_1 = 1,0; m = 0,5; C_2 = 0; h = 1; \alpha_* = 20$$

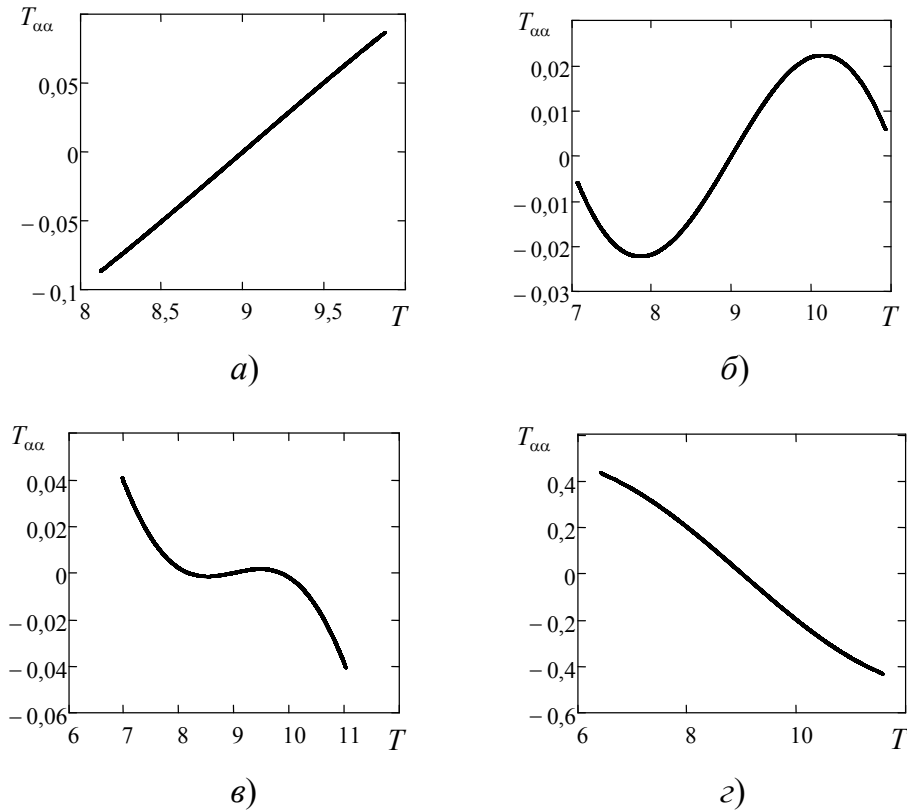


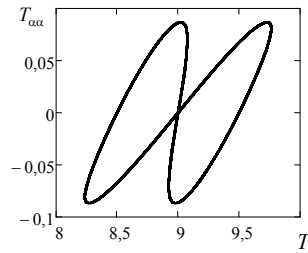
Рис. 4.10. Однозначная зависимость $T \rightarrow T_{\alpha\alpha}$ при $h = 1$

Влияние частотного параметра h удаётся выразительно проиллюстрировать, построив фазовый портрет системы на плоскости $(T, T_{\alpha\alpha})$, где $T_{\alpha\alpha} = \partial^2 T / \partial \alpha^2$ характеризует направление выпуклости / вогнутости линии $T = T(\alpha, t)$. При $h = 1$ имеем однозначную зависимость $T_{\alpha\alpha}$ от температуры при каждом фиксированном α (рис. 4.10). При целом $h > 1$ имеем динамический гистерезис: зависимость $T_{\alpha\alpha}$ от T становится неоднозначной (рис. 4.11, а–г).

Для иррационального либо трансцендентного h неоднозначность наблюдается уже не в отдельных точках, а в конечной двумерной области: участки линии, образующей петлю динамического гистерезиса, сгущаются с течением времени и образуют пятно (рис. 4.11, д–з). Нужно отметить, что рис. 4.11, в, з получены для точки НГТ. Из этих результатов следует, что несмотря на количественные различия «рациональные» фазовые траектории указывают форму контура двумерной области, которая в «иррациональном» варианте становится гистерезисным пятном. Соответствие контуров областей имеем для следующих пар рисунков: 4.11, а – 4.11; д, 4.11, б – 4.11; ж, 4.11, в – 4.11, з.

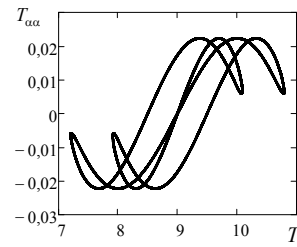
$$f_1 = 1,0; m = 0,5; C_2 = 0; h = 2; \alpha_* = 20$$

$$\alpha = 15$$



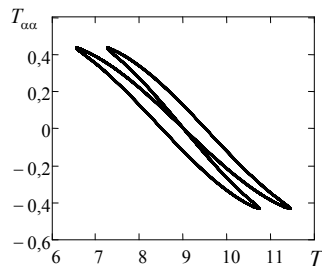
а)

$$\alpha = 18$$



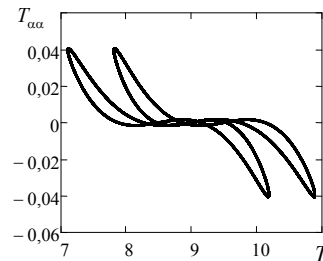
б)

$$\alpha = 20$$



в)

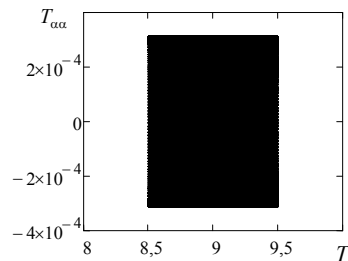
$$\alpha = 18,2$$



г)

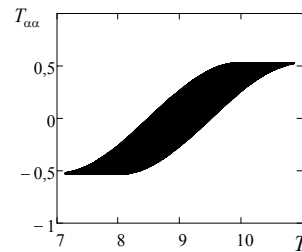
$$f_1 = 1,0; m = 0,8; C_1 = -10; C_2 = 0; h = \sqrt{3}/20; k_1 = \sqrt{1-m^2}/h; \alpha_* = 12,5$$

$$\alpha = 0$$



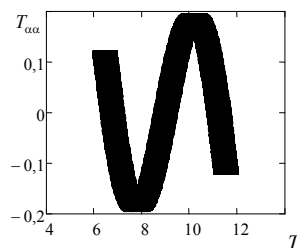
д)

$$\alpha = 10$$



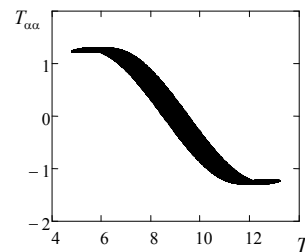
е)

$$\alpha = 11$$



ж)

$$\alpha = 12,5$$



з)

Рис. 4.11. Динамический гистерезис на плоскости $(T, T_{\alpha\alpha})$:

а-г – замкнутые траектории для целого h ;

д-з – гистерезисное «пятно» для иррационального h

4.2.4. Когерентность колебаний

Пространственно-временная структура $T = T(x, t)$ теплового поля (4.25), (4.26) представлена на рис. 4.12. Видно, что параметры h и m (т. е. ω) существенным образом влияют на количественные значения амплитуды и частоты колебаний. В качественном отношении солитонный характер распространения тепловых волн одинаковый во всех рассмотренных вариантах. Обращает на себя внимание важная роль «собственной» частоты колебаний $\omega = \sqrt{1 - m^2}$. На рис. 4.13 температура построена при фиксированных параметрах задачи в пространстве (m, t, T) для отдельных значений координаты x . В частности, в качестве характерной применялась точка НГТ. Эти рисунки демонстрируют эволюцию колебаний температуры во времени по мере роста m . Таким образом, на плоскости событий (x, t) температура обладает сильной физической нелинейностью по отношению к «собственной» частоте ω .

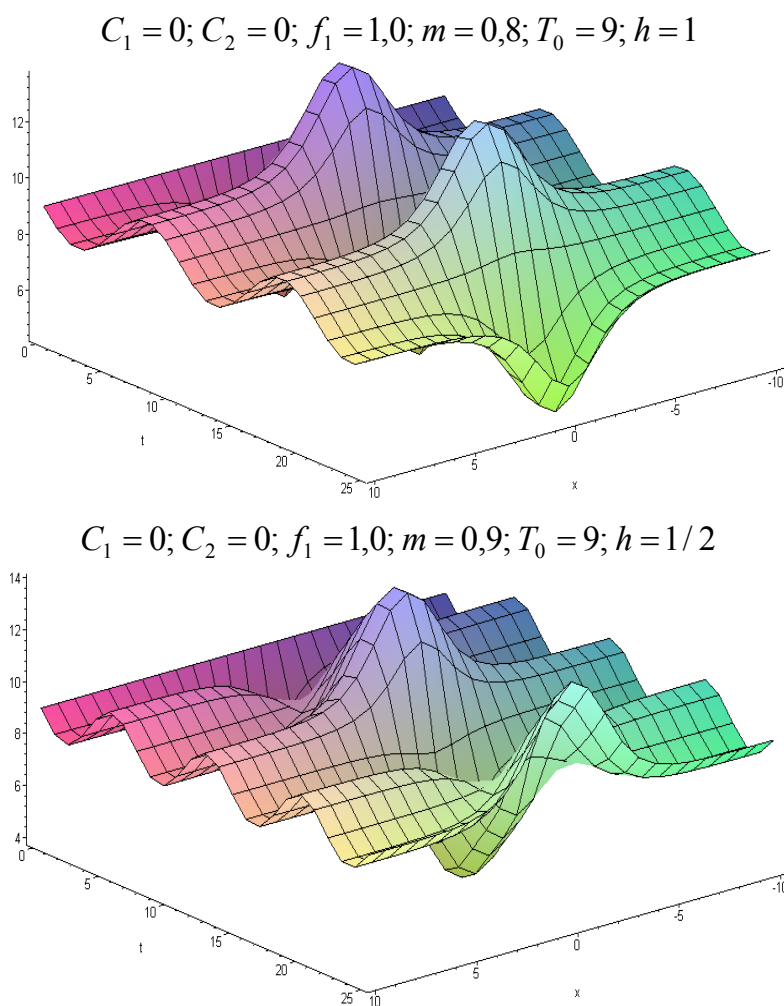
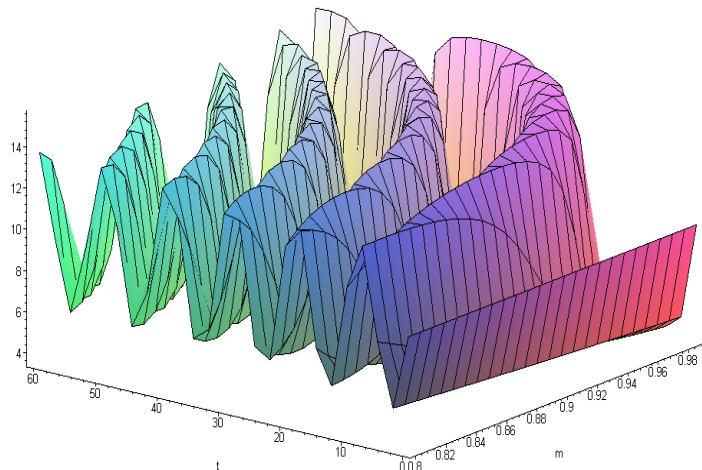


Рис. 4.12. Солитонная структура теплового поля (4.25)

Рассмотрим влияние сдвига фаз C_2 на амплитуды результирующих колебаний температуры A_T , теплового потока A_q и производства энтропии A_σ . Расчеты показали, что даже в простейшем случае $h=1$ колебания в данной системе обладают хорошо выраженными когерентными свойствами (рис. 4.14, *a–в*). Для других значений h (целых и дробных рациональных) наблюдается аналогичная зависимость амплитуды суммарных колебаний от сдвига фаз (рис. 4.14, *г–е*). В количественном отношении изменение C_2 наиболее сильно влияет на A_q , A_σ . Типичной является ситуация, когда монотонному участку зависимости $A_T(C_2)$ соответствует немонотонное поведение $A_q(C_2)$ и $A_\sigma(C_2)$ при $C_2 \in [0, 2\pi]$.

$$C_1 = 0; C_2 = 0; f_1 = 1,0; k_1 = 5; T_0 = 9; \alpha = \alpha_* = 0$$



$$C_1 = 0; C_2 = 0; f_1 = 1,0; k_1 = 0,5; T_0 = 9; \alpha = \alpha_* = 0$$

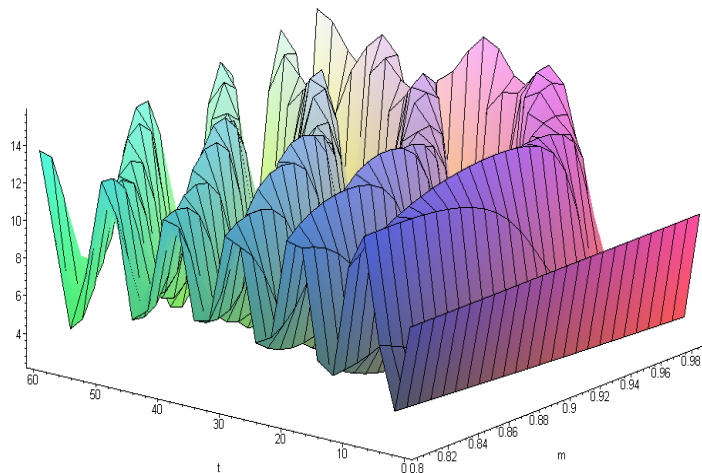


Рис. 4.13. Влияние параметра m на колебания температуры

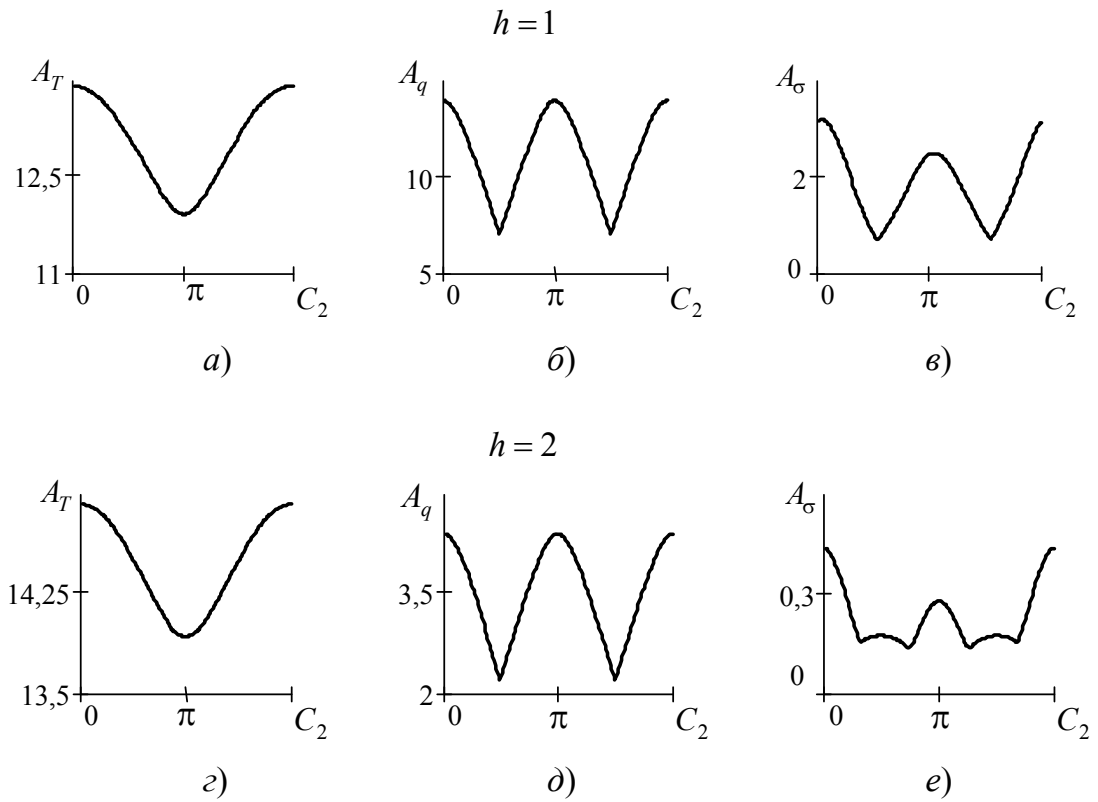


Рис. 4.14. Зависимость амплитуды результирующего колебания от разности фаз

Глава 5 ВОЗДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

В этой главе изучается математическая модель локально-неравновесного теплопереноса (1.1):

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = q_v, \quad \mathbf{q} + \gamma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

а также ее частные случаи: волновое уравнение ($\gamma \partial / \partial t \gg 1$) и параболическое ($\gamma \equiv 0$) уравнение теплопроводности. Представлены результаты, являющиеся развитием аналитических способов решения одномерных, двумерных и трехмерных уравнений теплопереноса с источниками энергии. Даны примеры сред, теплофизические свойства которых нелинейно зависят от температуры, обладают пространственной неоднородностью, а также явно зависят от времени (параметрические или, что то же, реономные среды).

Содержание главы 5 основано на публикациях [79]–[86].

5.1. Колебания и волны в системе «среда – источник энергии»

5.1.1. Двойная волна

Рассмотрим точное решение, которое характеризуется функциональной зависимостью между искомыми функциями: класс двойных волн.

Допустим, что теплофизические свойства среды описываются степенными функциями температуры:

$$\lambda = \lambda_0 T^{n_1}, \quad c = c_0 T^{n_2}, \quad \gamma \equiv \text{const}, \quad q_v = Q_0 T^{1+n_2}; \quad (5.1)$$

$$\lambda_0, c_0, Q_0 - \text{const.}$$

Процесс происходит в плоской двумерной области (x, y) [см. уравнения теплопереноса (1.3)]. Температуру и тепловой поток представим в виде:

$$T = \tau^H \theta(x, y, \tau), \quad q_1 = k\tau^n r(x, y, \tau), \quad q_2 = k\tau^n v(x, y, \tau); \quad (5.2)$$

$$\tau = \exp(-kt), \quad m_2 U = c_0 \theta^{m_2}, \quad R = a_1 U^{\beta+1},$$

$$\gamma k n = 1, \quad m_2 = 1 + n_2 > 0, \quad Q_0 = -H k c_0, \quad H m_2 + 1 = n, \quad H m_2 \beta = 2,$$

$$\beta = (n_1 - n_2) / m_2,$$

$$a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0} \left(\frac{m_2}{c_0} \right)^\beta, \quad a_1 = \frac{a_0}{\gamma(\beta+1)k^2}, \quad \beta+1 \neq 0, \quad m_1 = 1 + n_1.$$

Тогда уравнения (1.3) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial R}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Данные формулы показывают, что параметр нелинейности среды β нужно брать по обе стороны значения $\beta = -1$. Будем применять обозначения:

$$\tau = \tau^1 a_2, \quad a_2 = \left[\left(\frac{1}{\pm a_1} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \frac{(\pm 1)}{(\beta+1)} \right]^{1/2},$$

$$\pm v = v^1 a_2, \quad \pm r = r^1 a_2, \quad \pm R \rightarrow R, \quad U = \left(\frac{\pm R}{\pm a_1} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Здесь берем знак «+» при $\beta+1 > 0$, знак «-» при $\beta+1 < 0$. В обоих случаях система уравнений (5.1)–(5.3) преобразуется в уравнения:

$$R^{\frac{-\beta}{\beta+1}} \frac{\partial R}{\partial \tau^1} = \frac{\partial r^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y}, \quad \frac{\partial r^1}{\partial \tau^1} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^1}{\partial \tau^1} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad (5.4)$$

которые содержат неизвестные функции r^1 , v^1 , R аргументов x , y , τ^1 . Построим точное решение уравнений (5.4), взяв за основу алгоритм [88], который применялся в теории околосвуковых течений идеального газа. В классе двойных волн переменные r^1 , v^1 являются независимыми на некоторой поверхности Σ : $R = R(r^1, v^1)$. Уравнения для компонент вектора теплового потока становятся такими:

$$\frac{\partial r^1}{\partial \tau^1} = \frac{\partial R}{\partial \nu^1} \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial r^1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \nu^1}{\partial \tau^1} = \frac{\partial R}{\partial \nu^1} \frac{\partial \nu^1}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial r^1}{\partial y}.$$

Применяем эти формулы и дифференциальное следствие $\partial \nu^1 / \partial x = \partial r^1 / \partial y$.

Уравнение энергии записываем в виде:

$$\left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial r^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial r^1}{\partial x} + 2R^{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial R}{\partial \nu^1} \frac{\partial \nu^1}{\partial x} + \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial \nu^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial \nu^1}{\partial y} = 0.$$

Здесь $\beta_1 = -\beta / (\beta + 1)$. Выполняем преобразование годографа $(x, y) \leftrightarrow (r^1, \nu^1)$, учитывая, что каждая плоскость $\tau^1 = \text{const}$ физического пространства отображается в пространстве годографа на одну и ту же поверхность Σ . Следовательно,

$$\frac{\partial r^1}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \nu^1}, \quad \frac{\partial r^1}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \nu^1}, \quad \frac{\partial \nu^1}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial r^1}, \quad \frac{\partial \nu^1}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial r^1},$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial r^1} \frac{\partial y}{\partial \nu^1} - \frac{\partial x}{\partial \nu^1} \frac{\partial y}{\partial r^1}, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial r^1}{\partial x} \frac{\partial \nu^1}{\partial y} - \frac{\partial r^1}{\partial y} \frac{\partial \nu^1}{\partial x};$$

$$\left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial \nu^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial x}{\partial r^1} - 2R^{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial \nu^1} \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial y}{\partial r^1} + \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial r^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial y}{\partial \nu^1} = 0.$$

На основе второго и третьего уравнений в (5.4) построим скалярный потенциал $\varphi = \varphi(x, y, \tau^1)$:

$$d\varphi = r^1 dx + \nu^1 dy + R d\tau^1,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau^1} = R, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = r^1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \nu^1.$$

Теперь введем в алгоритм функцию

$$\chi = R\tau^1 + \nu^1 y + r^1 x - \varphi.$$

После простых вычислений находим:

$$d\chi = \left(x + \tau^1 \frac{\partial R}{\partial r^1} \right) dr^1 + \left(y + \tau^1 \frac{\partial R}{\partial \nu^1} \right) d\nu^1,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r^1} = x + \tau^1 \frac{\partial R}{\partial r^1}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial v^1} = y + \tau^1 \frac{\partial R}{\partial v^1}. \quad (5.5)$$

Если эти формулы продифференцировать при $\tau^1 = \text{const}$, то получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r^1} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial (r^1)^2} - \tau^1 \frac{\partial^2 R}{\partial (r^1)^2}, & \frac{\partial y}{\partial r^1} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^1 \partial r^1} - \tau^1 \frac{\partial^2 R}{\partial v^1 \partial r^1}, \\ \frac{\partial y}{\partial v^1} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial (v^1)^2} - \tau^1 \frac{\partial^2 R}{\partial (v^1)^2}. \end{aligned}$$

Итогом преобразований является запись уравнения энергии в плоскости годографа:

1) уравнение для функции $R(r^1, v^1)$ получается после группировки членов, содержащих τ^1 :

$$\begin{aligned} \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial v^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 R}{\partial (r^1)^2} - 2R^{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial v^1} \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial^2 R}{\partial v^1 \partial r^1} + \\ + \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial r^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 R}{\partial (v^1)^2} = 0; \end{aligned} \quad (5.6)$$

2) уравнение для функции $\chi(r^1, v^1)$ получается после группировки членов, содержащих τ^1 в нулевой степени:

$$\begin{aligned} \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial v^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial (r^1)^2} - 2R^{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial v^1} \frac{\partial R}{\partial r^1} \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^1 \partial r^1} + \\ + \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial r^1} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 \chi}{\partial (v^1)^2} = 0. \end{aligned}$$

После решения этих уравнений переход к физической плоскости выполняется по формулам (5.5). Если процесс автомодельный, то $\chi = 0$, $x/\tau^1 = -\partial R/\partial \tau^1$, $y/\tau^1 = -\partial R/\partial v^1$.

Укажем несколько важных примеров, когда уравнение двойной волны удастся преобразовать к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Уравнение (5.6) имеет частное решение:

$$\xi = r^1 / v^1, \quad R = (v^1)^A f(\xi), \quad A = 2(\beta + 1)/(\beta + 2).$$

Задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & \left[f^{\frac{-\beta}{\beta+1}} \left(Af - \xi \frac{df}{d\xi} \right)^2 - 1 \right] \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2f^{\frac{-\beta}{\beta+1}} \left(Af - \xi \frac{df}{d\xi} \right) \frac{df}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left(Af - \xi \frac{df}{d\xi} \right) + \\ & + \left[f^{\frac{-\beta}{\beta+1}} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 - 1 \right] \left[(A-1) \left(Af - \xi \frac{df}{d\xi} \right) - \xi \frac{d}{d\xi} \left(Af - \xi \frac{df}{d\xi} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Другая форма записи выглядит так:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{d\xi^2} \left[A^2 f^{2+\beta_1} + 2\xi^2 f^{\beta_1} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 - \xi^2 - 1 \right] + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \left[A(1-A) f^{1+\beta_1} \right] + \\ & + \left[A(1-A) f + 2(A-1)\xi \frac{df}{d\xi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Допустим, что

$$R = R(\omega), \quad \omega = \left[(v^1)^2 + (r^1)^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда из уравнения (5.6) выводим:

$$\omega \frac{d^2 R}{d\omega^2} - R^{\beta_1} \left(\frac{dR}{d\omega} \right)^3 + \frac{dR}{d\omega} = 0. \quad (5.7)$$

Применяя логарифмический аргумент $z = \ln \omega$, получаем:

$$R = \omega^\alpha B(z), \quad \alpha = 2(\beta + 1)/(\beta + 2),$$

$$\alpha \left(\alpha B + \frac{dB}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left(\alpha B + \frac{dB}{dz} \right) - B^{\beta_1} \left(\alpha B + \frac{dB}{dz} \right)^3 = 0.$$

Это уравнение имеет простое частное решение:

$$B = B_0 \equiv \text{const}, \quad B_0 = \alpha^{-\alpha/2}.$$

Понизив на единицу порядок уравнения, находим:

$$\frac{dB}{dz} = D(B), \quad \frac{d^2 B}{dz^2} = D \frac{dD}{dB}; \quad \alpha \neq 0, \quad \beta + 1 \neq 0;$$

$$D \frac{dD}{dB} = B^{\beta_1} (\alpha B + D)^3 - \alpha^2 B - 2\alpha D.$$

Если пользоваться вместо $R = R(\omega)$ обратной функцией $\omega = \omega(R)$, то (5.7) принимает вид:

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{1}{d\omega/dR} = \frac{1}{\dot{\omega}}, \quad \frac{d^2 R}{d\omega^2} = \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\dot{\omega}} \right) \frac{1}{\dot{\omega}} = -\frac{\ddot{\omega}}{\dot{\omega}^3};$$

$$\omega \ddot{\omega} = \dot{\omega}^2 - R^{\frac{-\beta}{\beta+1}}.$$

Применяя здесь логарифмический аргумент $y = \ln R$, получаем:

$$\omega = R^n B_1(y), \quad n = 1/\alpha = (\beta + 2)/[2(\beta + 1)],$$

$$B_1 \left[(n-1) \left(nB_1 + \frac{dB_1}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(nB_1 + \frac{dB_1}{dy} \right) \right] + 1 = \left(nB_1 + \frac{dB_1}{dy} \right)^2.$$

Данные примеры позволяют рассматривать существенно двухмерные тепловые конфигурации для частных значений параметра нелинейности среды β .

Теперь возвратимся к уравнению (5.6). Для него дифференциальное уравнение характеристик такое:

$$\left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial r^1} \right)^2 - 1 \right] (dr^1)^2 + 2R^{\beta_1} \frac{\partial R}{\partial v^1} \frac{\partial R}{\partial r^1} dv^1 dr^1 + \left[R^{\beta_1} \left(\frac{\partial R}{\partial v^1} \right)^2 - 1 \right] (dv^1)^2 = 0.$$

Вдоль поверхности Σ имеем

$$dR = \frac{\partial R}{\partial r^1} dr^1 + \frac{\partial R}{\partial v^1} dv^1,$$

поэтому характеристические кривые S_+ , S_- на поверхности Σ определяются уравнением

$$R^{\beta_1} (dR)^2 = (dr^1)^2 + (dv^1)^2.$$

Решение этого уравнения получаем в параметрической форме:

$$\pm R = \left(\frac{h}{|\alpha|} \right)^\alpha, \quad r^1 = \int \sin f(h) dh + \text{const},$$

$$v^1 = \int \cos f(h) dh + \text{const}, \quad \alpha = 2(\beta + 1)/(\beta + 2),$$

где $h > 0$ – параметр; $f(h)$ – произвольная функция. На плоскости (x, y) основная формула решения имеет вид:

$$x \sin f(h) + y \cos f(h) + (h/|\alpha|)^{\alpha-1} \tau^1 + F(h) = 0, \quad (5.8)$$

где $F(h)$ – произвольная функция. Вычисление частных производных выполняется с помощью соотношений:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\sin f}{S}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\cos f}{S}, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau^1} = -\frac{1}{S} \left(\frac{h}{|\alpha|} \right)^{\alpha-1},$$

$$S = \dot{F}(h) + x\dot{f}(h)\cos f - y\dot{f}(h)\sin f + \frac{(\alpha-1)\tau^1}{|\alpha|} \left(\frac{h}{|\alpha|} \right)^{\alpha-2};$$

$$\frac{\partial r^1}{\partial \tau^1} = \frac{\partial r^1 / \partial h}{\partial \tau^1 / \partial h}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R / \partial h}{\partial x / \partial h} \text{ и т. п.}$$

Здесь $\alpha > 0$ при $\beta + 1 > 0$ либо при $\beta + 2 < 0$. Если $\beta \in (-2, -1)$, то $\alpha < 0$. При работе с аргументом $\tau = \exp(-kt)$ нужно учитывать, что $\gamma k = \beta/(\beta + 2)$, поэтому:

- 1) при $\beta > 0$ либо $\beta + 2 < 0$ будет $k > 0$, т. е. $\tau \in (0, 1]$;
- 2) при $\beta \in (-2, 0)$ будет $k < 0$, т. е. $\tau \in [1, \infty)$.

Вместе с тем верна формула

$$k = \frac{1}{\gamma} + \frac{Q_0 m_2}{c_0},$$

поэтому вариант $k < 0$ получается для стока энергии ($Q_0 < 0$) достаточно большой интенсивности; вариант $k > 0$ – для источника энергии ($Q_0 > 0$) либо для стока энергии с не слишком большим $|Q_0|$.

Температура и компоненты вектора теплового потока определяются формулами:

$$T^{m_2} = \frac{m_2}{c_0} \left(\frac{1}{|a_1|} \right)^{\beta+1} \left(\frac{h}{|\alpha|} \right)^{\beta+2} \tau^{2/\beta}; \quad (5.9)$$

$$q_1 = k\tau^n \left[\pm a_2 \int \sin f(h) dh + r^0 \right], \quad q_2 = k\tau^n \left[\pm a_2 \int \cos f(h) dh + v^0 \right]. \quad (5.10)$$

Это решение содержит, учитывая (5.8), две произвольные функции $f(h)$, $F(h)$ и две произвольные постоянные r^0 , v^0 . Каждой изомерме $T = \text{const}$, $h = h(T, \tau)$ соответствует пара прямых линий (5.8), расположенных симметрично относительно оси OY . Значит, можно рассматривать симметричное тепловое поле в двух областях: $x \leq 0$ и $x \geq 0$. На оси симметрии $x = 0$ тепловое поле непрерывно.

Точное решение (5.8)–(5.10) дает возможность изучать некоторые нестационарные краевые задачи в плоской двумерной области клиновидной формы (см., например, [80]).

5.1.2. Квазигазовая неустойчивость

Построим тепловой аналог квазичаплыгинских уравнений. Работаем с уравнениями (5.4). Возьмем для определенности $\beta \in (-2, 0)$, т. е. считаем, что в среде присутствует сток энергии достаточно большой интенсивности: $Q_0 < 0$, $k < 0$, $\tau \in [1, \infty)$, $\beta \neq -1$. Запишем уравнение энергии в виде нелинейного волнового уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \tau^1} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau^1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right), \quad \tilde{U}/(\beta + 1) = R^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Допустим, что функция R зависит только от двух аргументов ξ , y , где $\xi = x - b\tau^1$ – автомодельная переменная, $b \equiv \text{const}$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (b^2 \tilde{U} - R) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right).$$

Строим скалярный потенциал $V(\xi, y)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial V}{\partial y} dy;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial P(R)}{\partial \xi} = 0, \quad P(R) = R - b^2 \tilde{U} + \text{const} > 0. \quad (5.11)$$

Система квазилинейных уравнений (5.11) содержит две искомые функции $R(\xi, y)$, $V(\xi, y)$ и является математическим аналогом уравнений одномерной нестационарной газодинамики, записанных в лагранжевых координатах. В терминах газодинамики получаем: y – время; ξ – лагранжева координата; R – удельный объем; P – давле-

ние; V – скорость. Аналогом эйлеровых координат служат переменные y, η , где

$$d\eta = Vdy + Rd\xi.$$

Зависимость $P = P(R)$ – политропная функция состояния изучаемой системы «среда – сток энергии». «Сжимаемость» определяется производной

$$\frac{dP}{dR} = 1 - b^2 \frac{d\tilde{U}}{dR} = 1 - \frac{N^2}{w^2} = 1 - M^2,$$

где $N = dx/dt$ – скорость распространения ξ -линии; $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2}$ – скорость распространения тепловых возмущений; M – тепловое число Маха.

Если $dP/dR < 0$, то тепловой процесс соответствует движению классического газа, для которого увеличение давления приводит к уменьшению объема. В этом случае тепловой процесс «сверхзвуковой», $M^2 > 1$; система (5.11) имеет гиперболический тип.

Если $dP/dR > 0$, то имеем квазичаплыгинскую среду, обладающую аномальной сжимаемостью; тепловой процесс – «дозвуковой», $M^2 < 1$; система (5.11) имеет эллиптический тип. Такие среды являются неустойчивыми, им присущи стоячие нарастающие во времени возмущения. Математические вопросы описания квазичаплыгинских сред даны в [89].

Детальный анализ математической аналогии между уравнениями локально-неравновесного теплопереноса и уравнениями газовой динамики изложен в книге [10].

5.1.3. Тепловой маятник

Систему (1.3) нетрудно преобразовать к одному нелинейному уравнению для температуры:

$$c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \gamma \frac{\partial q_v}{\partial t} + q_v. \quad (5.12)$$

Здесь $c, \gamma = \text{const}$. Далее считаем, что $q_v = q_v^0 + q_v^1 T$; $q_v^0, q_v^1 = \text{const}$. Для коэффициента теплопроводности рассмотрим монотонный и немонотонный варианты зависимости $\lambda(T)$.

Монотонный вариант: $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T$; $\lambda_0, \lambda_1 - \text{const}$. Нетрудно видеть, что существует точное локальное по координатам полиномиальное решение:

$$T(x, y, t) = T_0(t) + xa_1(t) + x^2 a_2(t) + yb_1(t) + y^2 b_2(t).$$

Система определяющих уравнений для коэффициентов $a_2(t)$, $b_2(t)$ имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} c(\dot{a}_2 + \gamma \ddot{a}_2) &= 6\lambda_1 a_2^2 + 2\lambda_1 a_2 b_2 + q_v^1(a_2 + \gamma \dot{a}_2), \\ c(\dot{b}_2 + \gamma \ddot{b}_2) &= 6\lambda_1 b_2^2 + 2\lambda_1 a_2 b_2 + q_v^1(b_2 + \gamma \dot{b}_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Точка над символом функции означает обыкновенное дифференцирование. Эта динамическая система описывает колебание теплового маятника с двумя степенями свободы.

Немонотонный вариант: $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 - \text{const}$. Уравнению (5.12) удовлетворяет локальное по координатам точное решение:

$$T(x, y, t) = T_0(t) + xa_1(t) + yb_1(t).$$

Уравнения теплового маятника имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} c(\dot{a}_1 + \gamma \ddot{a}_1) &= 2\lambda_2 a_1^3 + 2\lambda_2 a_1 b_1^2 + q_v^1(a_1 + \gamma \dot{a}_1), \\ c(\dot{b}_1 + \gamma \ddot{b}_1) &= 2\lambda_2 a_1^2 b_1 + 2\lambda_2 b_1^3 + q_v^1(b_1 + \gamma \dot{b}_1). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Автономные динамические системы (5.13) и (5.14) дают возможность изучать двухмерные колебательно-релаксационные процессы в нелинейных средах. Вывод уравнений трехмерного теплового маятника затруднений не представляет. Методы исследования нелинейных систем вида (5.13), (5.14) представлены в книгах [90], [91].

Изложенный подход естественным образом распространяется на двухфазную систему, поведение которой определяется двумя уравнениями вида (5.12) для неизвестных температур T_1, T_2 . Источники энергии для первой и второй фаз, соответственно, равны

$$q_v^{(i)} = q_v^{(0)} + k_v^{(i)} T_1 + l_v^{(i)} T_2; \quad i = 1, 2.$$

5.1.4. Устойчивость параметрических колебаний

Рассмотрим уравнения теплопереноса (1.4). Теплофизические свойства среды будем описывать следующими зависимостями:

$$\lambda = \lambda_0 T^{n_1} \cdot l(x)m(t); \quad c = c_0 T^{n_2} \cdot k(x)h(t); \quad \gamma = \gamma(t);$$

$$q_v = Q_0(t)k(x)T^{1+n_2}; \quad \lambda_0, c_0, n_1, n_2 - \text{const.}$$

Это означает, что свойства среды явно зависят от времени и неоднородны по координате x . Проведем аналитические преобразования, имеющие целью разделение переменных x и t . Тепловой поток запишем в виде

$$q(x, t) = V(x)B(t)$$

и получим

$$-\frac{\lambda_0}{m_1} \frac{\partial}{\partial x} (T^{m_1}) = \frac{V(x)}{l(x)} \cdot \frac{(B + \gamma \dot{B})}{m(t)}; \quad \dot{B}(t) = dB/dt, \quad m_1 = 1 + n_1.$$

После интегрирования этого равенства по x имеем:

$$\frac{-\lambda_0 T^{m_1}}{m_1} = \frac{(B + \gamma \dot{B})}{m} p(x);$$

$$p(x) = p_0 + \int_{x_0}^x \frac{V(x)}{l(x)} dx; \quad x_0, p_0 - \text{const.}$$

Отсюда выводим следующие формулы:

$$T(x, t) = \left[\frac{-m_1}{\lambda_0 m} (B + \gamma \dot{B}) p(x) \right]^{\frac{1}{m_1}}; \quad E \equiv T^{m_2} = \left[\frac{-m_1}{\lambda_0 m} (B + \gamma \dot{B}) p(x) \right]^{\frac{1}{\beta+1}},$$

где $m_2 = 1 + n_2$; $\beta = (n_1 - n_2) / m_2$ – параметр нелинейности среды.

Уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{c_0 k h}{m_2} \frac{\partial E}{\partial t} + (V' + \frac{v}{x} V) B = Q_0 k E, \quad V'(x) = dV(x)/dx.$$

Далее применяем обозначение:

$$D(t) = \left[\frac{-m_1}{\lambda_0 m} (B + \gamma \dot{B}) \right]^{\frac{1}{\beta+1}}, \quad E = D(t) p^{\frac{1}{\beta+1}}(x),$$

где $D(t)$ – неизвестная функция. Теперь уравнение энергии запишем в виде, удобном для разделения переменных:

$$k p^{\frac{1}{\beta+1}} \left[\frac{c_0 h}{m_2} \dot{D} - Q_0 D \right] = -B \left(V' + \frac{v}{x} V \right).$$

После этого вводим в алгоритм преобразований константу разделения μ :

$$\frac{V' + \frac{v}{x}V}{kp^{\frac{1}{\beta+1}}} = \mu = \frac{Q_0 D - \frac{c_0}{m_2} h \dot{D}}{B}.$$

Таким образом, динамика тепловых процессов по отношению к координате x определяется системой уравнений:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{V(x)}{l(x)}, \quad \frac{dV(x)}{dx} = \mu k(x) p^{\frac{1}{\beta+1}}(x) - \frac{v}{x} V(x),$$

или, что то же, одним уравнением второго порядка для $p(x)$:

$$l(x) \frac{d^2 p}{dx^2} + [l'(x) + \frac{v}{x} l(x)] \frac{dp}{dx} - \mu k(x) p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0. \quad (5.15)$$

Эволюция во времени теплового состояния системы «среда – источник энергии» определяется системой уравнений:

$$\gamma(t) \frac{dB(t)}{dt} = -B - \frac{\lambda_0 m}{m_1} D^{\beta+1}, \quad \frac{c_0 h(t)}{m_2} \frac{dD(t)}{dt} = Q_0(t) D - \mu B.$$

Уравнение для функции $D(t)$ выглядит так:

$$\ddot{D} + \left[\frac{\dot{h}}{h} + \frac{1}{\gamma} - \frac{Q_0 m_2}{c_0 h} \right] \dot{D} - \frac{m_2}{c_0 h} \left(\dot{Q}_0 + \frac{Q_0}{\gamma} \right) D - \frac{\lambda_0 m_2 \mu m}{m_1 c_0 \gamma h} D^{\beta+1} = 0. \quad (5.16)$$

Отметим несколько важных частных случаев, содержащихся в представленном классе решений.

Реономная среда. Изучаем линейный процесс: $\beta = 0$. В уравнении (5.16) обозначим:

$$Q_1(t) = \frac{\dot{h}}{h} + \frac{1}{\gamma} - \frac{Q_0 m_2}{c_0 h}, \quad \mu_1^2(t) = -\frac{m_2}{c_0 h} \left(\dot{Q}_0 + \frac{Q_0}{\gamma} \right) - \frac{\lambda_0 m_2 \mu m}{m_1 c_0 \gamma h} > 0,$$

где $h(t)$, $m(t)$, $\gamma(t)$, $Q_0(t)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции при $t \geq 0$. Условие $\mu_1^2(t) > 0$ обеспечивается подходящим выбором $\mu \equiv \text{const}$. Считаем также, что $\mu_1(t) > 0$ – монотонная функция. Согласно [92], для этого типа уравнений достаточное условие ог-

раниченности параметрических колебаний состоит в следующем: нужно, чтобы коэффициенты $Q_1(t)$, $\mu_1(t)$ удовлетворяли неравенству

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dt} + Q_1 \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть процесс по-прежнему линейный, $\beta = 0$, и действует реономный источник энергии

$$q_v = TQ_0(t).$$

Тогда вместо (5.16) удобнее работать с уравнением для функции $B(t)$:

$$\ddot{B} + Q_2(t)\dot{B} + \mu_2^2(t)B = 0,$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{\gamma} - \frac{m_2 Q_0}{c_0}, \quad \mu_2^2(t) = \frac{m_2}{c_0 m_1 \gamma} (-\lambda_0 \mu - Q_0 m_1) > 0,$$

$$m \equiv 1, \quad h \equiv 1; \quad \gamma = \gamma(t), \quad Q_0 = Q_0(t).$$

Для этого типа колебаний достаточное условие устойчивости решения, т. е. условие отсутствия параметрического резонанса, имеет вид:

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dt} + Q_2 \geq 0, \quad \mu_2(t) > 0, \quad t \geq 0.$$

Квазилинейный (слабо нелинейный) вариант уравнения (5.16) выглядит так:

$$h \equiv 1, \quad \gamma \equiv \text{const}, \quad Q_0 \equiv \text{const}, \quad m = m(t), \quad \beta \neq 0;$$

$$\ddot{D} + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{Q_0 m_2}{c_0} \right) \dot{D} + \left(-\frac{m_2}{c_0 \gamma} Q_0 \right) D = \mu \frac{\lambda_0 m_2 m}{m_1 c_0 \gamma} D^{\beta+1},$$

где $m_2 Q_0 < 0$, μ – малый параметр, характеризующий степень близости системы к линейной. Методы исследования таких процессов хорошо разработаны [90].

Сильно нелинейная квазиконсервативная система [см. (5.16)] с одной степенью свободы:

$$h \equiv 1, \quad \gamma \equiv \text{const}, \quad m \equiv 1,$$

$$\dot{Q}_0 + \frac{Q_0}{\gamma} = Q_1 \equiv \text{const}, \quad Q_0 = \gamma Q_1 + Q_2 \exp(-t/\gamma), \quad Q_2 \equiv \text{const};$$

$$\ddot{D} + D \left(-\frac{m_2 Q_1}{c_0} \right) - \frac{\lambda_0 m_2 \mu}{c_0 m_1 \gamma} D^{\beta+1} = \left(\frac{Q_0 m_2}{c_0} - \frac{1}{\gamma} \right) \dot{D};$$

$$Q_2 = \varepsilon Q_{21}, \quad \frac{m_2 \gamma Q_1}{c_0} - \frac{1}{\gamma} = \varepsilon Q_{11}; \quad Q_{11}, Q_{21} - \text{const},$$

где ε – малый параметр; μ – большой параметр. Это уравнение содержит существенно нелинейный член $D^{\beta+1}$ с большим параметром $\mu = O(\varepsilon^{-\alpha})$, который имеет порядок, равный $\varepsilon^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Методы расчета колебаний таких систем даны в [90], [91].

Неоднородная среда. Для уравнения (5.15) сначала возьмем случай плоской симметрии $\nu = 0$:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \left(\frac{l'}{l} \right) \frac{dp}{dx} - \frac{\mu k}{l} p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0.$$

Изучаем линейный процесс: $\beta = 0$. Обозначим

$$l_1(x) = l'/l, \quad \frac{-\mu k}{l} = \mu_1^2(x) > 0, \quad \mu < 0,$$

где $l(x), k(x)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции при $x \geq 0$; $\mu_1(x)$ – монотонная функция. Достаточное условие устойчивости решения имеет вид:

$$\frac{1}{\mu_1(x)} \frac{d\mu_1(x)}{dx} + l_1(x) \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Еще один пример неоднородности по координате: $\beta = 0$, $l \equiv 1$, $k = k(x)$, т. е.

$$q_v = Tk(x).$$

Безразмерную функцию $\mu k(x)$ возьмем в такой форме: $-\mu k(x) = 1 + k_1(x)$. Согласно теореме, доказанной в [92], для ограниченности решения уравнения

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + [1 + k_1(x)]p = 0$$

достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^x \left| \frac{dk_1(x)}{dx} \right| dx.$$

Нелинейная среда. Изучаем вариант, когда теплофизические параметры однородные по x : $l \equiv 1$, $k \equiv 1$, $\beta \neq 0$. Плоская симметрия: $\nu = 0$,

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \mu p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0.$$

Отсюда находим первый интеграл

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = \frac{2\mu(\beta+1)}{(\beta+2)} p^{\frac{\beta+2}{\beta+1}} + C,$$

где C – произвольная константа.

Центральная симметрия $\nu = 1, 2$:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{dp}{dx} - \mu p^{\frac{1}{\beta+1}} = 0.$$

Применяем логарифмическую координату $z = \ln x$:

$$p = x^{\beta_0} A(z), \quad \beta_0 = 2(\beta+1)/\beta, \quad \beta_1 = \beta_0 + \nu - 1,$$

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (\beta_0 + \beta_1) \frac{dA}{dz} + \beta_0 \beta_1 A = \mu A^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Этому уравнению соответствует динамическая система:

$$\frac{dA}{dz} = M - \beta_0 A, \quad \frac{dM}{dz} = \mu A^{\frac{1}{\beta+1}} - \beta_1 M,$$

где $A(z), M(z)$ – искомые функции. Состояния равновесия (A_0, M_0) определяются уравнениями:

$$\beta_0 A_0 = M_0, \quad A_0 \left(\mu A_0^{\frac{-\beta}{\beta+1}} - \beta_0 \beta_1 \right) = 0.$$

Для сферической симметрии $\nu = 2$ получаем $\beta_0 = -\beta_1 = -1/2$ при $\beta = -4/5$. Тогда имеем уравнение

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{A}{4} = \mu A^5,$$

для которого существует первый интеграл

$$\left(\frac{dA}{dz}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{\mu A^6}{3} + \text{const.}$$

Дальнейший качественный анализ поведения представленных динамических систем выполняется обычными методами теории нелинейных колебаний.

5.2. Динамическое воздействие на неравновесное тепловое поле

5.2.1. Инверсионный режим

Выполним обобщение решения (3.40) [см. § 3.4] на случай реономного источника энергии $q_v = q_v^1(T - T_0)$, полагая $q_v^1 = q_v^1(t)$. Это означает, что мы рассматриваем динамическое воздействие на неравновесную систему «среда – источник энергии». Функция $q_v^1(t)$ определяет режимы параметрического управления колебаниями теплового поля.

Решение строим в виде

$$T = T_0 + A(t)\sin(h_1x + \beta_1) + B(t)\sin(h_2y + \beta_2), \quad (5.17)$$

$$h_1, h_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const},$$

где $T_0 \equiv \text{const}$ – нейтральная температура. Приведем здесь аналитические выкладки для функции $A = A(t)$; для $B = B(t)$ результаты аналогичные. Уравнение параметрических колебаний функции $A(t)$ имеет вид:

$$\ddot{A} + \dot{A} \frac{(c - \gamma q_v^1)}{c\gamma} + A \frac{(\lambda h_1^2 - q_v^1 - \gamma \dot{q}_v^1)}{c\gamma} = 0, \quad (5.18)$$

где $\dot{A}(t) = dA(t)/dt$ и т. д. Это уравнение удается проинтегрировать в конечной форме, если принять следующие связи:

$$f = \frac{1}{\gamma} - \frac{q_v^1}{c}, \quad \frac{f^2}{4} + \frac{\dot{f}}{2} + a = \frac{\lambda h_1^2}{c\gamma} - \frac{q_v^1}{c\gamma} - \frac{\dot{q}_v^1}{c},$$

где $a > 0$ – произвольная постоянная; $f(t)$ – вспомогательная функция. Тогда уравнение (5.18) превращается в уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{u} + au = 0,$$

$$u(t) = A(t) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t f(t) dt \right].$$

Итогом вычислений являются формулы:

$$f(t) = \frac{4/\gamma}{1 - c_1 \exp(2t/\gamma)},$$

$$f(t=0) = 4/[\gamma(1-c_1)], \quad f(t \rightarrow \infty) = 0; \quad (5.19)$$

$$q_v^1(t) = \frac{c}{\gamma} - cf(t); \quad (5.20)$$

$$u(t) = A_1 \sin(t\sqrt{a} + a_1), \quad A_1, a_1 - \text{const};$$

$$F(t) = \frac{(1-c_1)\exp(2t/\gamma)}{1-c_1\exp(2t/\gamma)}, \quad a = \frac{\lambda h_1^2}{c\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} > 0; \quad (5.21)$$

$$A(t) = u(t)/F(t), \quad (5.22)$$

где c_1 – свободный параметр решения. Условие $a > 0$ дает оценку частоты колебаний по координате x : $h_1^2 > c/(\lambda\gamma)$. Функция $B(t)$ имеет вид:

$$B(t) = B_1 \sin(t\sqrt{b} + a_2)/F(t), \quad (5.23)$$

$$B_1, a_2 - \text{const}; \quad b = \frac{\lambda h_2^2}{c\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} > 0.$$

Следовательно, корреляция между частотами \sqrt{a} , \sqrt{b} колебаний во времени и частотами h_1 , h_2 колебаний по координатам выглядит так:

$$b = a + (h_2^2 - h_1^2)w^2 > 0, \quad w^2 = \lambda/(c\gamma).$$

Из (5.19), (5.20) ясно, что

$$q_v^1(t=0) = \frac{(c_1+3)c}{(c_1-1)\gamma}, \quad q_v^1(t \rightarrow \infty) = \frac{c}{\gamma}.$$

Значит, $q_v^1(t)$ может быть знакопостоянной и знакопеременной функцией:

1) $c_1 > 1$; 2) $c_1 + 3 < 0$; 3) $(-3) < c_1 < 0$.

Этот третий вариант заслуживает особого внимания: в этом случае производная

$$\partial q_v(T, t)/\partial T = q_v^1(t)$$

с течением времени меняет знак с «минуса» на «плюс». В момент $t = t_{\text{inv}}$ происходит инверсия знака функции $q_v^1(t)$:

$$q_v^1(t < t_{\text{inv}}) < 0, \quad q_v^1(t = t_{\text{inv}}) = 0, \quad q_v^1(t > t_{\text{inv}}) > 0.$$

Отметим еще одно важное обстоятельство: формула (5.21) говорит о том, что $F(t \rightarrow \infty) = 1 - (1/c_1) \equiv \text{const}$, поэтому при больших $t > 0$

в системе устанавливается режим незатухающих колебаний по времени [см. (5.22), (5.23)].

Приведем здесь основные результаты расчетов, относящиеся к сравнению инверсионного и безынверсионного режимов. На рис. 5.1 показаны асимптотические свойства амплитуды колебаний $1/F(t)$ и параметра источника $q_v^1 = dq_v/dT$ при $t \rightarrow \infty$. Видно, что во всех представленных вариантах на стадии параметрического переключения источника энергии с одного уровня на другой имеем

$$\frac{d}{dt} [F^{-1}(t)] \frac{dq_v^1(t)}{dt} < 0.$$

На рис. 5.2 показана эволюция во времени нейтральной изотермы $T = T_0$, вдоль которой уравниваются тепловыделение и теплоотвод: $q_v(T = T_0, t) = 0$. Инверсионный режим (рис. 5.2, а–д) характеризуется тем, что в начальном состоянии [$t = 0$] полосы нейтральной изотермы вытянуты вдоль оси y , а на стадии установившихся [$t \rightarrow \infty$] колебаний эти полосы повернуты на 90° и вытянуты вдоль оси x . В отсутствие инверсии такого поворота полос нет (рис. 5.2, е): линии изотермы $T = T_0$ для $t = 0$ и для $t \rightarrow \infty$ вытянуты вдоль оси x .

Для построения линий остановок изотермы применяем такой же алгоритм, что и в п. 3.4.1.

Типичные семейства линий остановки изотермы $T = T_0$ показаны на рис. 5.3–5.5. Общие закономерности формирования периодических структур здесь такие же, что были обнаружены в пп. 3.4.1, 3.4.2 при $q_v^1 \equiv \text{const}$. Отличительное свойство процесса параметрического переключения функции q_v^1 с одного уровня на другой состоит в том, что отдельные ячейки и полосы, входящие в периодическую структуру, образованы плотно сконцентрированными линиями остановки. Это уплотнение линий объясняется наличием стадии резкого изменения амплитуды $1/F(t)$ на конечном интервале, ширина которого определяется значениями:

$$F(0) = 1, \quad F(t \rightarrow \infty) = (c_1 - 1)/c_1.$$

В тех случаях, когда режим перехода инверсионный и $|c_1| \ll 1$, получаем, что амплитуда установившихся колебаний

$$1/F(t \rightarrow \infty) = c_1 / (c_1 - 1)$$

– тоже малая величина [см. (5.21)], и уплотнение линий остановки отсутствует (рис. 5.6).

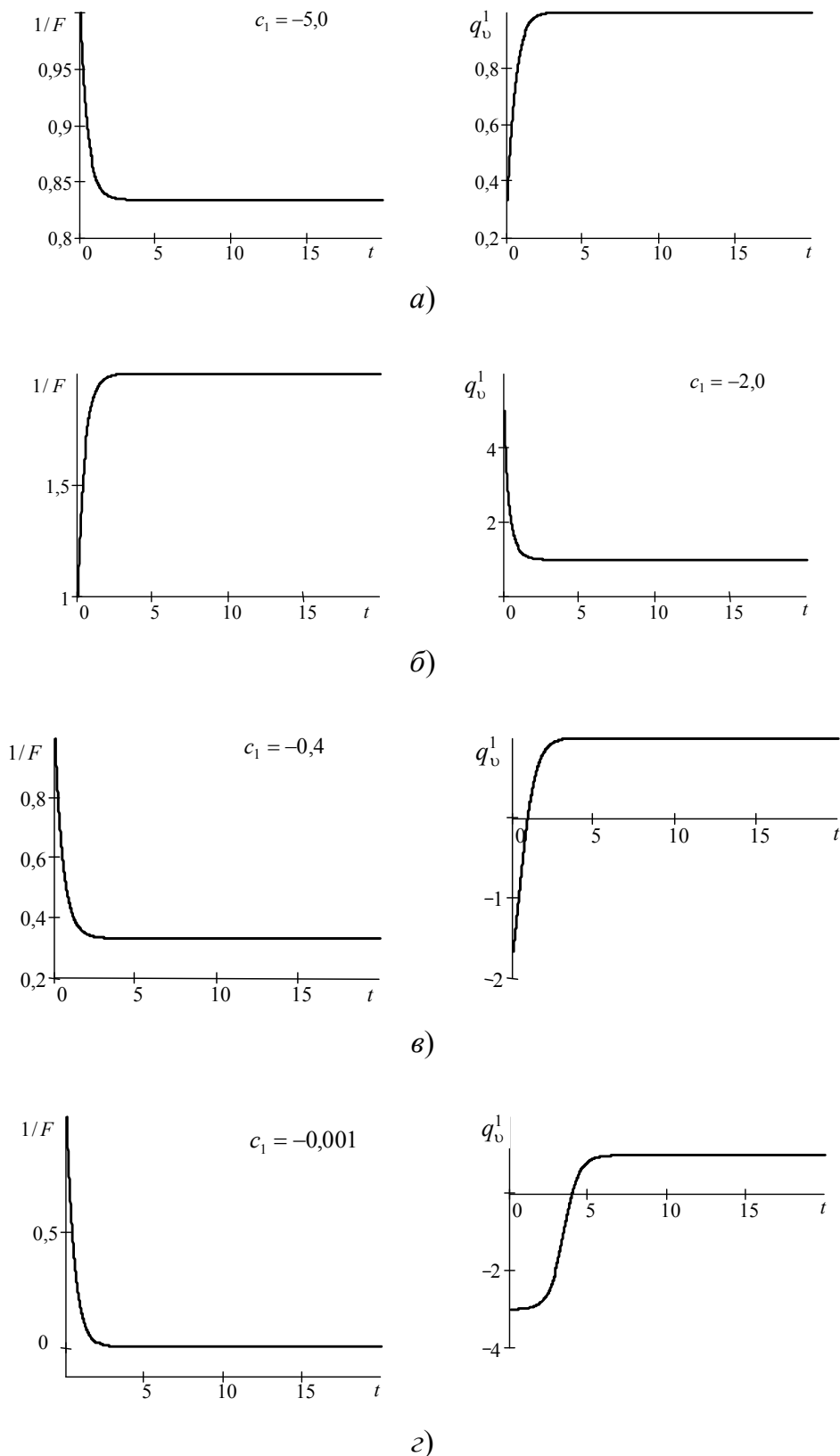


Рис. 5.1. Нестационарные свойства амплитуды $1/F$ колебаний и наклона q_v^1 линии источника энергии:

а, б – параметрический переход в отсутствие инверсии;
в, з – инверсионный режим

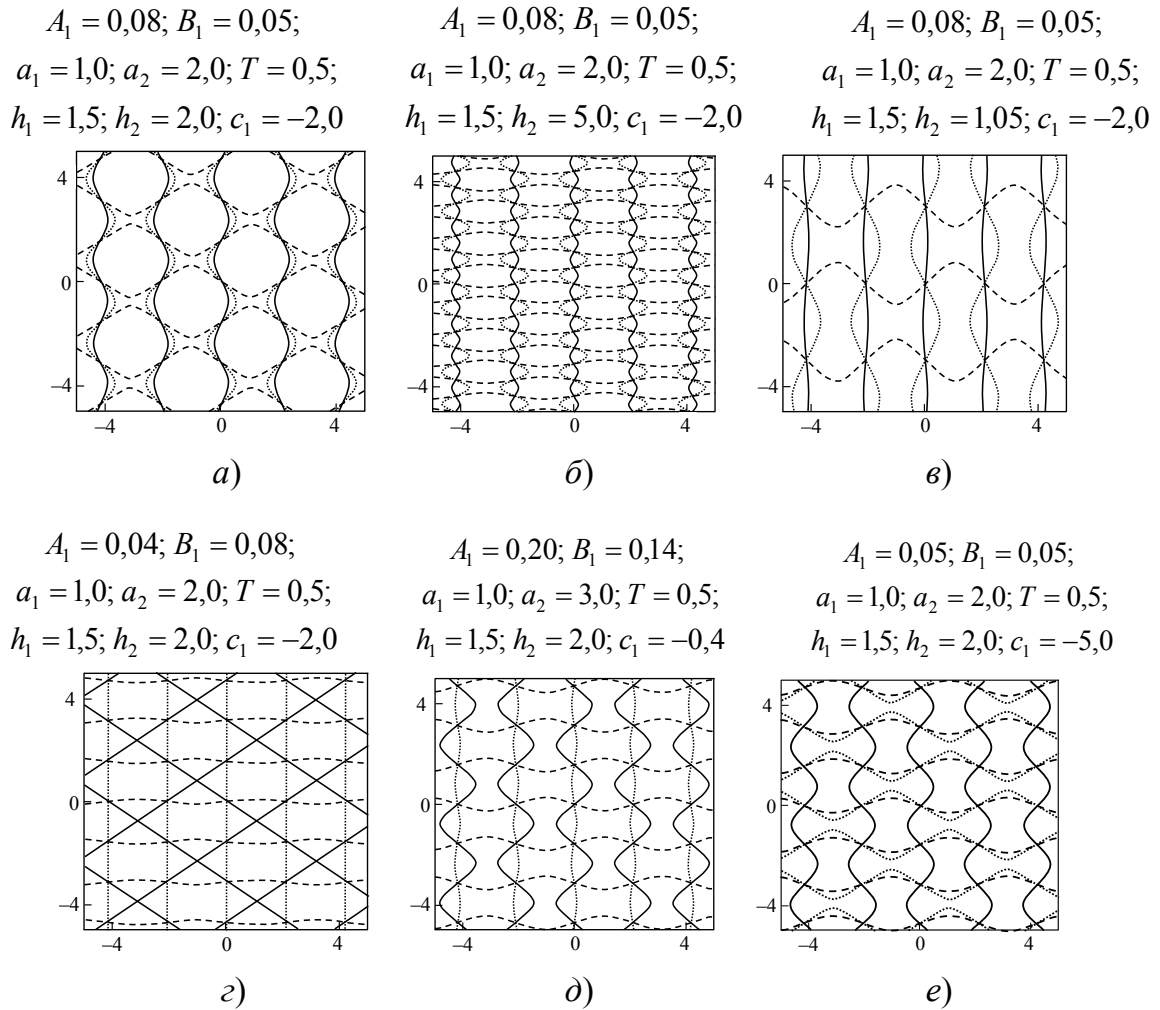


Рис. 5.2. Эволюция во времени нейтральной изотермы:
 $t = 0$ (пунктирная линия); $t = t^* \approx 5$ (сплошная линия —);
 $t = \infty$ (штриховая линия - - -); а-д – инверсионный режим;
 е – инверсия отсутствует

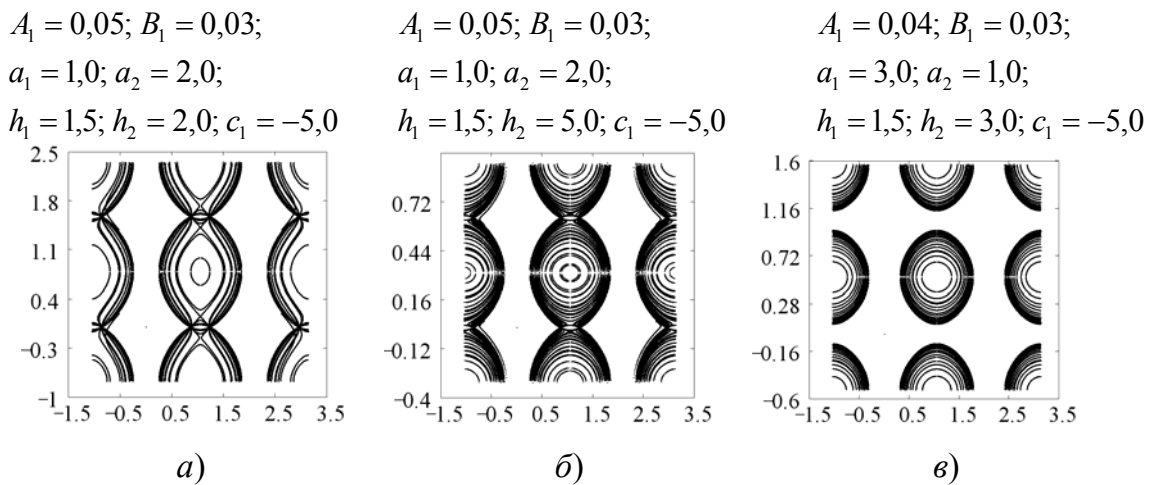


Рис. 5.3. Линии остановки изотермы $T = 0,5$:
 инверсия отсутствует, $c_1 + 3 < 0$

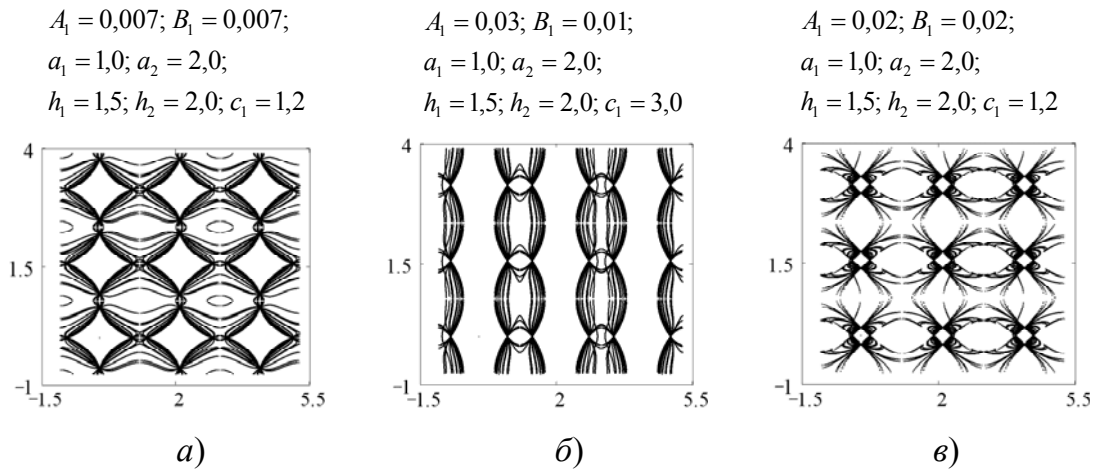


Рис. 5.4. Линии остановки изотермы:
инверсия отсутствует, $c_1 > 1$

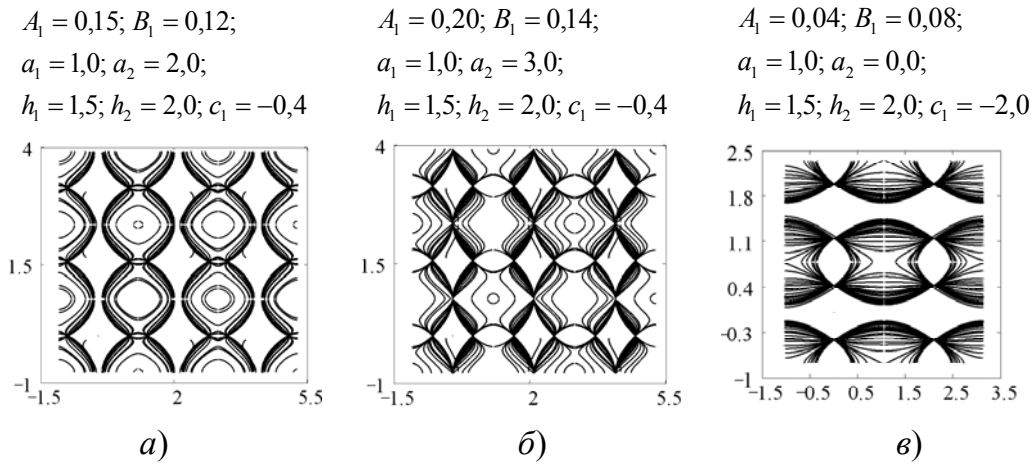


Рис. 5.5. Линии остановки изотермы $T = 0,5$:
инверсионный режим, $(-3) < c_1 < 0$

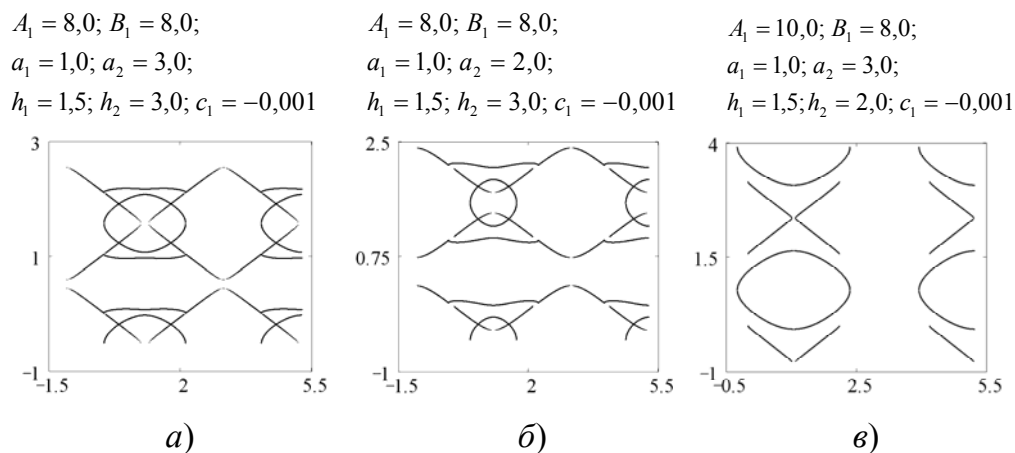


Рис. 5.6. Линии остановки изотермы $T = 0,5$:
инверсионный режим при «малой» амплитуде колебаний;
отсутствует уплотнение линий остановок

5.2.2. Колебательный режим

Рассмотрим другой подход к задаче о параметрическом управлении источником энергии. Уравнение (5.18) запишем в виде дифференциального уравнения для функции $q_v^1(t)$:

$$\dot{q}_v^1 + q_v^1 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{\dot{A}}{A} \right) = G, \quad (5.24)$$

$$G = \frac{1}{A\gamma_1} \left[c\gamma_1 \ddot{A} + \dot{A} (c + \lambda\gamma_2 h^2) + A\lambda h^2 \right].$$

Здесь учтены два времени тепловой релаксации: $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ (см. пп. 3.2.2, 3.3.2). Функция $A(t)$ считается заданной исходя из физических условий процесса. Далее изучаем колебательный режим:

$$A(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t, \quad A_0, A_1 - \text{const}. \quad (5.25)$$

Решение (5.17) анализируем при $h_1 = h_2 = h$, $B(t) = B_1 A(t)$, $B_1 \equiv \text{const}$ (см. п. 3.4.2). Ограничение (5.25) означает, что в каждой точке на плоскости (x, y) температура (5.17) колеблется около постоянного значения. Решение уравнения (5.24) получаем в конечной форме; эта запись здесь не приводится.

В установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$) динамические свойства источника энергии определяются выражением:

$$\left(q_v^1 \right)_\infty = \frac{1}{A} \left[A_0 \lambda h^2 + \frac{A_1 A_3}{\gamma_1 A_2} \sin(\omega t - \delta + \varphi) \right]; \quad (5.26)$$

$$A_2^2 = \frac{1}{\gamma_1^2} + \omega^2, \quad A_3^2 = \omega^2 (c + \lambda\gamma_2 h^2)^2 + (\lambda h^2 - c\gamma_1 \omega^2)^2;$$

$$\text{tg } \delta = \gamma_1 \omega, \quad q_v^1(t=0) = 0, \quad \text{tg } \varphi = \omega (c + \lambda\gamma_2 h^2) / (\lambda h^2 - c\gamma_1 \omega^2).$$

Параметры источника (5.26) A_0 , A_1 , A_2 , A_3 следующим образом влияют на температуру: A_0 характеризует константы, около которых колеблется числитель и знаменатель в (5.26); A_1 – это амплитуда колебаний в (5.25); A_2 определяет частоту колебаний ω , которая, как видно из (5.25), (5.26), одинакова для источника и для температуры; параметр A_3^2 взаимосвязан с h^2 , где h – частота колебаний температуры по координатам x , y . Отношение частот ω/h является характерной скоростью дан-

ного процесса. В дозвуковом случае $\omega^2/h^2 < w^2$ имеем $\operatorname{tg} \varphi > 0$; в сверхзвуковом случае $\omega^2/h^2 > w^2$ имеем $\operatorname{tg} \varphi < 0$. В «звуковой» точке $\omega^2/h^2 = w^2 \equiv \lambda/(c\gamma_1)$ имеем $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$, поэтому фазы колебаний в (5.25) и (5.26) различаются на $(\pi/2) - \delta$. Сдвиг фазы $\delta = \operatorname{arctg}(\gamma_1 \omega)$ существенно зависит от времени γ_1 релаксации теплового потока.

5.2.3. Точное решение

Работаем с уравнениями теплопереноса (1.1). Допустим, что теплофизические свойства среды определяются зависимостями:

$$\gamma = \gamma(t), \quad \lambda = \lambda_0(t) \dot{f}(T) / f(T), \quad c = c_0(t) \dot{f}(T) / f(T), \quad (5.27)$$

где $f(T) > 0$ – непрерывная дифференцируемая функция. Объемный источник энергии имеет вид:

$$q_v(T, t) = l_v(t) \ln f(T), \quad l_v(t) = \left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{1}{\gamma} \right] c_0; \quad (5.28)$$

$$F^2(t) = \gamma(t) / [\lambda_0(t) c_0(t)] > 0. \quad (5.29)$$

Точка над символом функции означает дифференцирование по ее аргументу. Явная зависимость величин $\lambda(T, t)$, $c(T, t)$, $\gamma(t)$, $q_v(T, t)$ от времени характерна для реономных (параметрических) теплофизических систем. В данном классе решений параметры среды $\lambda_0(t)$, $c_0(t)$, $\gamma(t)$ и параметр источника $l_v(t)$ подчинены одной связи (5.29). Ясно, что в случае (5.27), (5.28) уравнения теплопереноса линейны по отношению к функции $\ln f$. Примем следующие ограничения:

$$f = A_1(x, t) A_2(y, t) A_3(z, t); \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0;$$

$$q_1 = q_1(x, t), \quad q_2 = q_2(y, t), \quad q_3 = q_3(z, t).$$

Тогда уравнения теплопереноса имеют точное решение [82]:

$$\ln f = (q_1 + q_2 + q_3)F; \quad (5.30)$$

$$q_1 = \Gamma B_1(\psi_1), \quad \psi_1 = x - \Phi;$$

$$q_2 = \Gamma B_2(\psi_2), \quad \psi_2 = y - \Phi;$$

$$q_3 = \Gamma B_3(\psi_3), \quad \psi_3 = z - \Phi;$$

$$\Gamma = \exp\left(-\int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)}\right); \quad \Phi = \int_0^t w(t) dt; \quad \ln A_i = Fq_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $B_1(\psi_1)$, $B_2(\psi_2)$, $B_3(\psi_3)$ – произвольные функции своих аргументов. Важный частный случай $\gamma \equiv \text{const}$ дает

$$q_v = (-c_0 / \gamma) \ln f(T).$$

Это значит, что при $f(T) > 1$ будет $q_v(T) < 0$; при $f(T) < 1$ будет $q_v(T) > 0$.

Данное решение описывает локально-неравновесный процесс эволюции начального трехмерного температурного профиля в системе «среда – источник энергии». Источник $q_v(T)$ может быть знакопеременным: в этом случае он представляет результат конкурентного взаимодействия двух источников, $q_v = q_v^+(T) + q_v^-(T)$, где q_v^+ описывает генерацию тепла, q_v^- характеризует теплоотвод (теплосъем) (см. §§ 3.1, 4.1). Решение имеет физический смысл на любом конечном температурном интервале, $T \in [T_1, T_2]$. Начальный профиль температуры $T(x, y, z; t = 0)$ может быть задан в рамках связи (5.30) выбором трех произвольных функций $B_1(x)$, $B_2(y)$, $B_3(z)$. Этот профиль есть результат воздействия на систему теплового возмущения. Таким образом, мы получаем возможность в данном классе решений ответить на важный вопрос о промежуточных состояниях системы в зависимости от пространственной формы возмущающего теплового сигнала. Для параболической бистабильной тепловой системы этот вопрос обсуждался в п. 4.1.1.

5.2.4. Параметрический переход системы в другое неравновесное состояние

Рассмотрим двухмерные нестационарные тепловые поля, применяя точное решение (5.30). Время релаксации возьмем в виде:

$$\gamma(t) = \gamma_0 [1 + \gamma_1 \exp(gt)]^2, \quad \gamma_0, \gamma_1, g - \text{const},$$

причем $\gamma_0 > 0$, $g < 0$; $\gamma_1 \geq 0$ либо $-1 < \gamma_1 < 0$. Если $d\gamma/dt > 0$, то имеем параметрический переход среды в состояние с более высокой степенью неравновесности: $\gamma_\infty \equiv \gamma(t \rightarrow \infty) > \gamma(t = 0)$. Если $d\gamma/dt < 0$, то с течением времени получаем $\gamma_\infty < \gamma(t = 0)$. Принимаем далее $\lambda_0, c_0 - \text{const}$, и тогда функции Γ, F, Φ , входящие в решение (5.30), записываются в элементарных функциях (эти формулы здесь не приводятся). Выражение (5.28) для объемного источника энергии принимает вид

$$q_v(T, t) = \frac{c_0}{2\gamma} (\dot{\gamma} - 2) \ln f(T).$$

Следовательно, значение $\dot{\gamma}(t = t_{\text{inv}}) = 2$ является пороговым: при переходе через этот порог происходит инверсия знака источника. Важно отметить, что источник энергии изменяет свой знак в момент времени $t = t_{\text{inv}}$ именно на стадии перехода в состояние с большим временем релаксации ($d\gamma/dt > 2$).

Расчеты выполнены для случая $f(T) = T$:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{T}, \quad c = \frac{c_0}{T}, \quad T > 0.$$

Начальное температурное поле $T(x, y, t = 0)$ при $t \rightarrow \infty$ переходит в однородное состояние: $\Gamma(t) \rightarrow 0$, $q_1 \rightarrow 0$, $q_2 \rightarrow 0$, $T \rightarrow 1$.

Рассмотрим два основных варианта выбора произвольных функций $B_1(\psi_1)$ и $B_2(\psi_2)$.

Экспоненциальный вариант:

$$B_1(\psi_1) = B_{10} + B_{11} \exp[-r_1(\psi_1 - x_1)^2] + \dots + B_{19} \exp[-r_9(\psi_1 - x_9)^2],$$

$$B_{10}, B_{11}, \dots, B_{19} - \text{const}; \quad x_1, x_2, \dots, x_9 - \text{const};$$

положительные параметры r_1, \dots, r_9 тоже постоянны. Вид данной функции говорит о том, что мы задаем всплески температуры при $x = x_1, \dots, x = x_9$. Аналогичное выражение берем для $B_2(\psi_2)$, задавая всплески произвольной величины при $y = y_1, \dots, y = y_9$. Число полос, равное 9, было выбрано для наглядности анализа. В расчетах было принято $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, $y_2 - y_1 = y_3 - y_2$ и т. д. При $t = 0$ функции $B_1(x)$, $B_2(y)$ характеризуют двухмерное неоднородное распределение температуры и теплового потока [см. (5.30)].

Гармонический вариант:

$$B_1(\psi_1) = B_{10} + B_{11} (\sin r_1 \psi_1)^{m_1} + B_{12} (\sin r_2 \psi_2)^{m_2} + B_{13} (\sin r_3 \psi_3)^{m_3}.$$

Здесь все параметры постоянные. Для $B_2(\psi_2)$ формула аналогичная.

Обсудим поведение теплового потока и градиента температуры. Например, вдоль оси x :

$$q_1 = \Gamma B_1(\psi_1), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_0 F \Gamma \frac{dB_1(\psi_1)}{d\psi_1}.$$

Значит, если $B_1(\psi_1)$ и $dB_1/d\psi_1$ одного знака, то составляющая q_1 вектора теплового потока имеет такой же знак, что и составляющая $\partial T/\partial x$ вектора градиента температуры: имеем неклассическую ситуацию. Такое же аномальное поведение градиента температуры было обнаружено при изучении роста дендрита в переохлажденном расплаве [54]. Классическая ситуация, соответствующая модели теплопроводности Фурье, когда осевые составляющие векторов \mathbf{q} и $\text{grad}T$ противоположны друг другу, наблюдается там, где $B_1(\psi_1)$ и $dB_1/d\psi_1$ разных знаков. На рис. 5.7 хорошо видно чередование «классических» и «неклассических» отрезков вдоль оси x ; вдоль оси y поведение q_2 и $\partial T/\partial y$ аналогичное. Таким образом, на плоскости (x, y) наблюдается перемежаемость «классических» и «неклассических» областей конечных размеров.

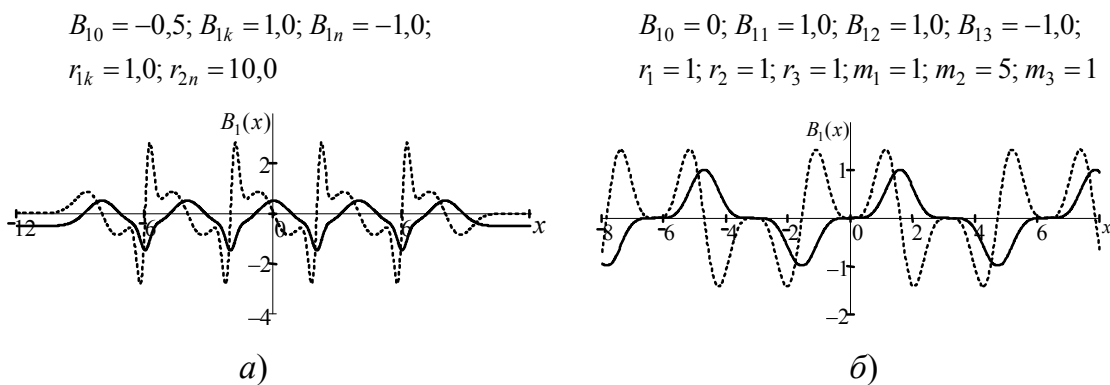
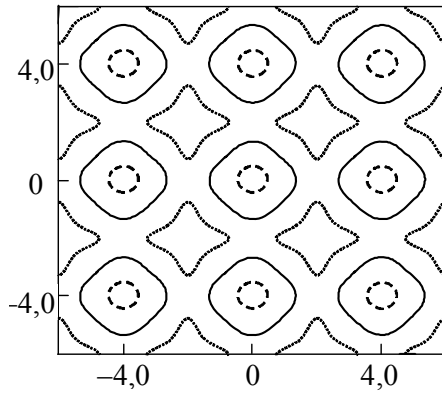


Рис. 5.7. Примеры чередования вдоль оси x «классических» $[q_1 \partial T / \partial x < 0, B_1(x) \dot{B}_1(x) < 0]$ и «неклассических» $[q_1 \partial T / \partial x > 0, B_1(x) \dot{B}_1(x) > 0]$ состояний теплового поля; $B_1(x)$ – сплошная линия, $\dot{B}_1(x)$ – пунктирная линия

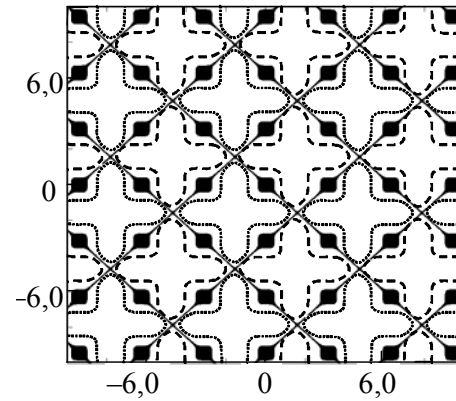
Примеры начальных состояний тепловых полей показаны на рис. 5.8. Изотерма $T_0 = 1$ является нейтральной; изотерму $T' < 1$ для наглядности называем «холодной», изотерму $T'' > 1$ – «горячей» (см. §§ 3.2, 3.3). Выявлены два основных варианта эволюции во времени теплового поля: 1) первоначальная конфигурация изотерм сохраняется с течением времени (рис. 5.9, а); 2) полосчатая структура преобразуется в ячейки (рис. 5.9, б). На рис. 5.10 для $g = -9$, $\gamma_1 = -0,5$ изображено поведение знакопеременного источника энергии до момента инверсии ($t < t_{\text{inv}}$) и после него ($t > t_{\text{inv}}$). Таким образом, в результате инверсии наблюдаются качественные и количественные изменения характера пространственно-временной неоднородности теплового поля.

$$\begin{aligned}
 B_{10} &= -0,5; B_{1k} = 1,0; B_{1n} = -1,0; \\
 B_{20} &= -0,5; B_{2k} = 1,0; B_{2n} = -1,0; \\
 p_k &= 1; p_n = 4; r_k = 1; r_n = 4; \\
 T' &= 0,5; T_0 = 1,0; T'' = 1,5
 \end{aligned}$$



а)

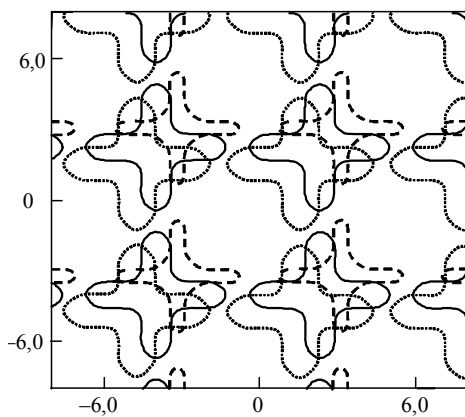
$$\begin{aligned}
 B_{10} &= 0; B_{11} = 0,25; B_{12} = 0,25; \\
 B_{13} &= -0,25; r_1 = 1; r_2 = 1; \\
 r_3 &= 1; m_1 = 1; m_2 = 5; m_3 = 1; \\
 T' &= 0,9; T_0 = 1,0; T'' = 1,1
 \end{aligned}$$



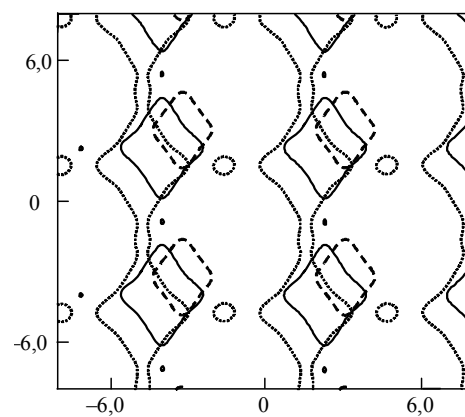
б)

Рис. 5.8. Примеры начальных состояний тепловых полей:
 а – экспоненциальный вариант; б – гармонический вариант:
 холодная изотерма T' (пунктирная линия);
 нейтральная изотерма T_0 (сплошная линия —);
 горячая изотерма T'' (штриховая линия - - -)

$$\begin{aligned}
 B_{10} &= 0,0; B_{11} = 0,25; B_{12} = 0,25; B_{13} = -0,25; & B_{10} &= -0,25; B_{11} = 0,5; B_{12} = 0,5; B_{13} = 0,0; \\
 B_{21} &= 0,25; B_{22} = 0,25; B_{23} = -0,25; r_1 = 1; r_2 = 1; & B_{21} &= 0,5; B_{22} = 0,25; B_{23} = 0,0; r_1 = 1; r_2 = 1; \\
 r_3 &= 1; p_1 = 1; p_2 = 1; p_3 = 1; m_1 = 1; m_2 = 5; & p_1 &= 1; p_2 = 2; m_1 = 1; m_2 = 4; \\
 m_3 &= 1; n_1 = 1; n_2 = 5; n_3 = 1; T'' = 1,1 & n_1 &= 1; n_2 = 4; T'' = 1,25
 \end{aligned}$$



а)



б)

Рис. 5.9. Эволюция во времени горячей изотермы, гармонический вариант:
 $t = 0$ (пунктирная линия); $t \approx 2$ (сплошная линия —);
 $t \approx 4$ (штриховая линия - - -)

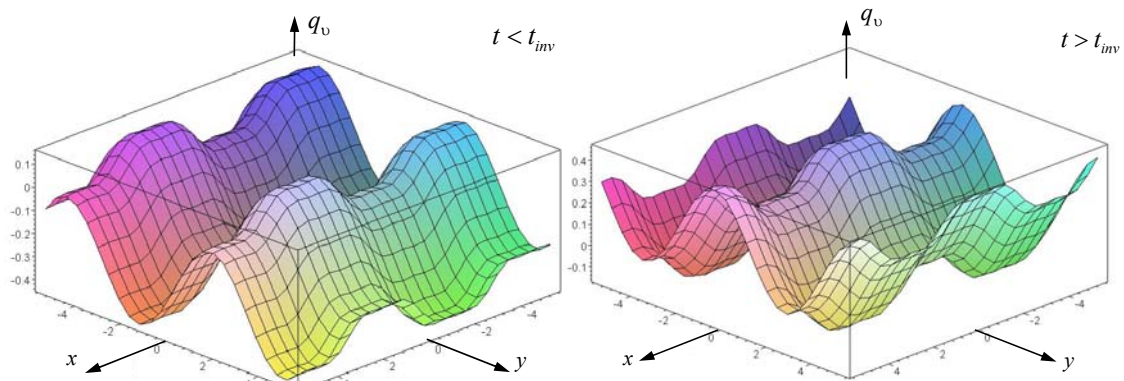


Рис. 5.10. Пример инверсии знака объемного источника энергии

5.3. Тепловые процессы в неоднородных средах

5.3.1. Алгоритм преобразования уравнений теплопереноса

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии [см. (1.1)]. Выполнив несложные преобразования, можно вместо этой системы записать одно уравнение теплопереноса гиперболического типа:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v + \gamma \frac{\partial q_v}{\partial t}, \quad (5.31)$$

где x, y, z – декартовы прямоугольные координаты;

$$\gamma = \gamma(t), \quad c = c(x, y, z, t), \quad \lambda = \lambda(x, y, z, t).$$

Далее источник энергии берем в виде:

$$q_v = q_v^0 + q_v^1 T,$$

где q_v^0, q_v^1 – функции аргументов x, y, z, t . При $\gamma \equiv 0$ получаем из (5.31) классическое уравнение теплопроводности. Для параболического уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами число известных точных решений невелико [93], [94]. Для гиперболического уравнения теплопереноса в неоднородных средах точных решений еще меньше. В практическом отношении наиболее важен случай пространственно-периодической неоднородности теплофизических свойств среды.

Рассмотрим классы сред [85] с неоднородными по координатам и/или по времени теплофизическими свойствами, для которых можно

указать простое аналитическое преобразование исходного уравнения теплопереноса с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами.

Основой нашего исследования служит следующий математический результат: для линейного уравнения с частными производными второго порядка (это уравнение мы называем базовым) существует алгоритм [95] преобразования его общего решения в общее решение другого уравнения, имеющего такую же структуру, но отличающегося от исходного аналитическими выражениями для переменных коэффициентов при частных производных и свободным членом.

Запишем этот алгоритм в общих математических терминах, следуя работе [95]. Исходное уравнение с переменными коэффициентами имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \quad (5.32)$$

$$A_{ij} = A_{ji},$$

где A_{ij}, B_i, C, F – функции аргументов x_1, x_2, \dots, x_n ; $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомая функция. Этому уравнению поставим в соответствие базовое дифференциальное уравнение для функции $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$L[v] + Kv = f, \quad (5.33)$$

$$K = K(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $L[v]$ – линейный дифференциальный оператор

$$L[v] \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + K_1 v, \quad (5.34)$$

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{ji}, \quad b_i = b_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad K_1 = K_1(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Центральным пунктом алгоритма является построение функции $v_* = v_*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая есть решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$L[v] = 0, \quad (5.35)$$

содержащего оператор (5.34). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что если выполнены следующие связи:

$$A_{ij} = \upsilon_*^2 a_{ij}, \quad B_i = \upsilon_*^2 b_i, \quad C = \upsilon_*^2 K, \quad F = \upsilon_*^2 f, \quad (5.36)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

то функция

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\upsilon_*(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

является решением исходного уравнения (5.32).

Ясно, что для наших целей нужно взять постоянные коэффициенты в базовом уравнении (5.33):

$$a_{ij} = a_{ji}, b_i, K, f, K_1 - \text{const.}$$

Это дает возможность преобразовать решение уравнения с постоянными коэффициентами в решение исходного уравнения (5.32) с переменными коэффициентами вида (5.36). Неоднородность коэффициентов (5.36) полностью определяется свойствами функции $\upsilon_*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точного аналитического решения однородного уравнения (5.35), имеющего постоянные коэффициенты.

Данный алгоритм мы применяем к гиперболическому ($\gamma > 0$) уравнению (5.31), к параболическому ($\gamma \equiv 0$) уравнению, а также к эллиптическому ($\partial / \partial t \equiv 0$) уравнению стационарного переноса. Переобозначения функций очевидны:

$$u \rightarrow T, \quad \upsilon \rightarrow \theta, \quad \upsilon_* \rightarrow \theta_*.$$

Итоговые формулы получены в декартовых, сферических (r, τ, φ) и цилиндрических (r, φ, z) координатах.

5.3.2. Параметрические и неоднородные среды

Исходное уравнение:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v + \gamma \frac{\partial q_v}{\partial t}, \quad (5.37)$$

$$c = c(t), \quad \lambda = \lambda(t), \quad \gamma \equiv \text{const}, \quad q_v = q_v(t).$$

Базовое уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tilde{c} \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + k_1 \theta + k_0, \quad (5.38)$$

где $\tilde{\lambda}$, \tilde{c} , k_0 , k_1 – произвольные постоянные. Связь между коэффициентами уравнений (5.37) и (5.38):

$$c = \tilde{c} \theta_*^2, \quad \lambda = \tilde{\lambda} \theta_*^2, \quad q_v + \gamma \frac{dq_v}{dt} = k_0 \theta_*;$$

$$\theta_* = d_1 + d_2 \exp(-t/\gamma); \quad d_1, d_2 - \text{const.}$$

В этом случае

$$T(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) / \theta_*(t).$$

Если, например, $\partial\theta/\partial t \equiv 0$, то данное решение определяет релаксационный переход из одного стационарного состояния в другое.

Теперь рассмотрим одномерное параболическое уравнение теплопереноса. Исходное уравнение:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{v}{x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + q_v^0 + q_v^1 T, \quad (5.39)$$

где $v = 0, 1, 2$ – геометрический параметр, характеризующий тип симметрии (плоский, цилиндрический, сферический). Базовое уравнение с постоянными коэффициентами для $\theta = \theta(x, t)$:

$$\tilde{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{v}{x} \tilde{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tilde{q}_v^0 + (k_v - k) \theta, \quad (5.40)$$

$$\tilde{\lambda}, \tilde{c}, k_v, k, \tilde{q}_v^0 - \text{const.}$$

Связь между коэффициентами уравнений (5.39) и (5.40):

$$c = \tilde{c} \theta_*^2, \quad \lambda = \tilde{\lambda} \theta_*^2, \quad q_v^0 = \tilde{q}_v^0 \theta_*, \quad q_v^1 = k_v \theta_*^2.$$

Здесь $\theta_*(x, t) \neq 0$ – решение уравнения

$$\tilde{c} \frac{\partial \theta_*}{\partial t} = \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x^2} + \frac{v}{x} \tilde{\lambda} \frac{\partial \theta_*}{\partial x} - k \theta_*. \quad (5.41)$$

Тогда искомое решение имеет вид

$$T(x, t) = \theta(x, t) / \theta_*(x, t).$$

Для практических приложений в качестве функции $\theta_*(x, t)$, характеризующей свойства неоднородной параметрической среды, назовем следующие известные (см. [94]) точные решения уравнения (5.41) при $k = 0$.

Плоская симметрия, $\nu = 0$:

$$\theta_* = \theta_0 + \theta_1 \exp(-a \delta^2 t) \sin \delta x, \quad \theta_0 > 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \geq 0; \quad (5.42)$$

$$\theta_* = \theta_0 + \theta_1 (x/t^{3/2}) \exp(-x^2/4at), \quad x \in [0, \infty), \quad t \geq 0; \quad (5.43)$$

$$\theta_* = \theta_0 + \theta_1 \exp(-\delta x) \cos(\omega t - \delta x),$$

$$\delta = (\omega/2a)^{1/2}, \quad x \in [0, \infty), \quad t \geq 0, \quad (5.44)$$

где ω – произвольная константа.

Цилиндрическая симметрия, $\nu = 1$:

$$\theta_* = \theta_0 + (\theta_1/t) \exp(-x^2/4at), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0;$$

$$\theta_* = \theta_0 + \theta_1 \exp(-a \delta^2 t) J_0(\delta x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Сферическая симметрия, $\nu = 2$:

$$\theta_* = \theta_0 + (\theta_1/x) \exp(-a \delta^2 t) \cos(\delta x), \quad x > 0, \quad t \geq 0; \quad (5.45)$$

$$\theta_* = \theta_0 + (\theta_1/t^{3/2}) \exp(-x^2/4at), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Для всех трех случаев симметрии $\theta_0, \theta_1, \delta$ – произвольные постоянные; $a = \tilde{\lambda}/\tilde{c}$. На рис. 5.11–5.14 показаны типичные примеры расчета. Здесь представлены пространственно-временные распределения, характеризующиеся функциями (5.42) – рис. 5.11, (5.43) – рис. 5.12, (5.44) – рис. 5.13, (5.45) – рис. 5.14.

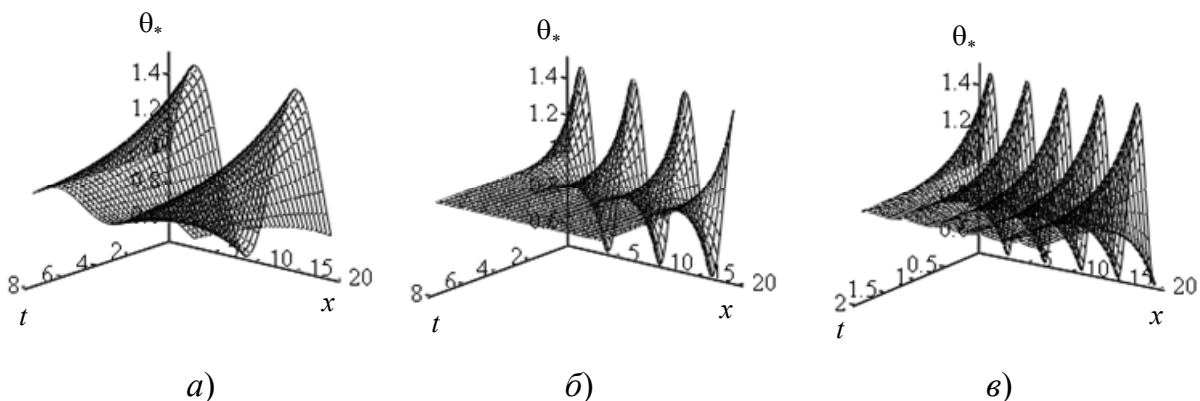


Рис. 5.11. Пространственно-временное распределение функции $\theta_*(x, t)$,

соответствующее решению (5.42):

$$a - \theta_0 = 1; \quad \theta_1 = 0,5; \quad a = 1; \quad \delta = 0,5; \quad \delta - \theta_0 = 1; \quad \theta_1 = 0,5; \quad a = 1; \quad \delta = 1;$$

$$v - \theta_0 = 1; \quad \theta_1 = 0,5; \quad a = 1; \quad \delta = 1,5$$

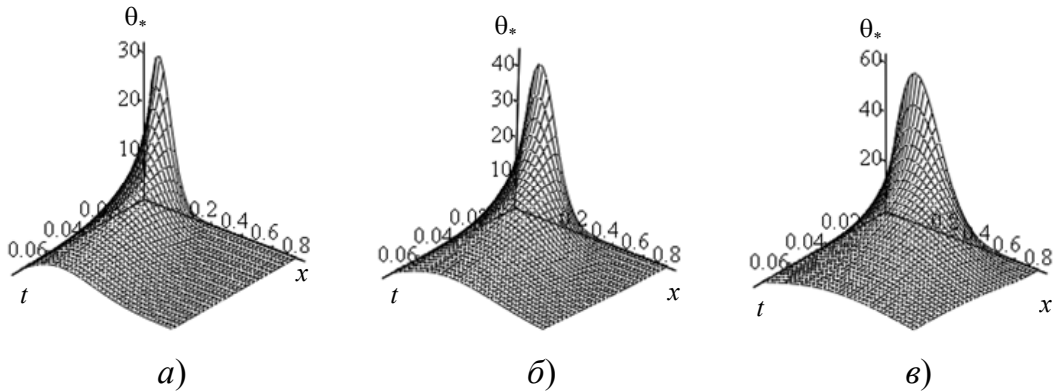


Рис. 5.12. Пространственно-временное распределение функции $\theta_*(x, t)$, соответствующее решению (5.43):
 $a - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; \delta = 1; a = 0,5$; $б - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; \delta = 1; a = 1$;
 $в - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; \delta = 1; a = 2$

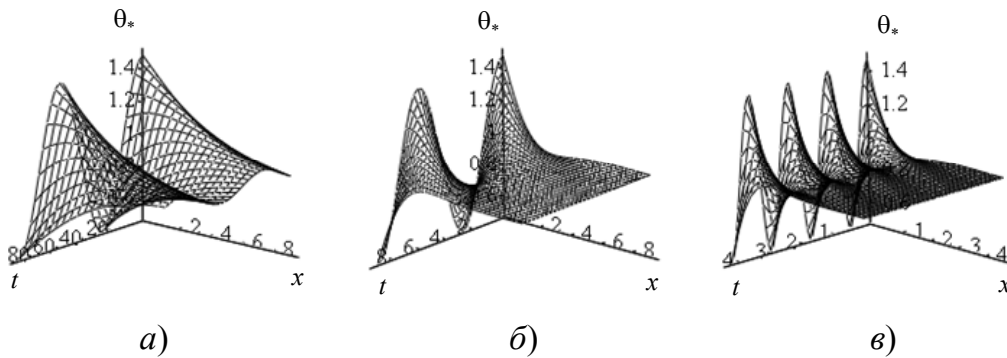


Рис. 5.13. Пространственно-временное распределение функции $\theta_*(x, t)$, соответствующее решению (5.44):
 $a - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \omega = 0,1$; $б - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \omega = 1$;
 $в - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \omega = 5$

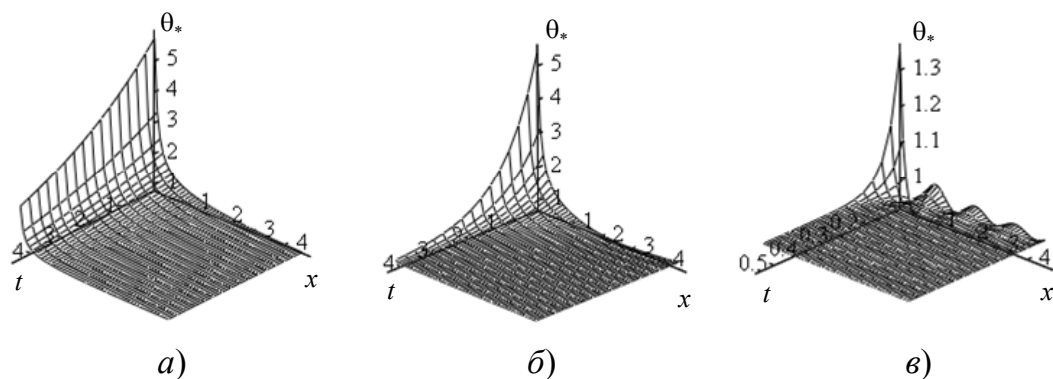


Рис. 5.14. Пространственно-временное распределение функции $\theta_*(x, t)$, соответствующее решению (5.45):
 $a - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \delta = 0,5$; $б - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \delta = 1$;
 $в - \theta_0 = 1; \theta_1 = 0,5; a = 1; \delta = 5$

5.3.3. Пространственно-периодические неоднородные среды

Уравнению (5.31) соответствует следующее базовое уравнение с постоянными коэффициентами:

$$(\tilde{c} - \gamma k_v) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tilde{c} \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \tilde{q}_v^0 + (k_v - k) \theta; \quad (5.46)$$

$$\tilde{\lambda}, \tilde{c}, k_v, k, \tilde{q}_v^0 - \text{const}, \quad c = \tilde{c} \theta_*^2, \quad \lambda = \tilde{\lambda} \theta_*^2, \quad q_v^0 = \tilde{q}_v^0 \theta_*^2, \quad q_v^1 = k_v \theta_*^2.$$

Функция $\theta_*(x, y, z)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z^2} = \frac{k}{\tilde{\lambda}} \theta_*. \quad (5.47)$$

Решение исходного уравнения (5.31) имеет вид $T = \theta / \theta_*$. В уравнениях (5.31) и (5.46) допускается вариант $\gamma = \gamma(t)$. Воспользуемся известными (см. [94]) точными решениями уравнения (5.47) и приведем здесь полезные в практическом отношении функции θ_* , позволяющие применять для описания теплофизических свойств среды монотонные, немонотонные и периодические по одной или двум координатам зависимости.

Одномерный случай $\theta_* = \theta_*(x)$, x – декартова координата:

если $k > 0, \tilde{\lambda} > 0$, то $\theta_* = a_1 \exp(\delta_1 x) + a_2 \exp(\delta_2 x)$,
 $x \in [0, x^1] \subset [0, \infty)$, $\delta_{1,2} = \pm(k/\tilde{\lambda})^{1/2}$; $a_1, a_2 - \text{const}$;

если $k < 0$, то $\theta_* = a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x$, $\delta = (-k/\tilde{\lambda})^{1/2}$;

если $k = 0$, то $\theta_* = a_1 x + a_2$; эти зависимости применяются на отрезке $x \in [0, x^1]$, где $\theta_*(x) > 0$.

Одномерный цилиндрический случай $\theta_* = \theta_*(r)$, r – радиальная координата:

если $k < 0, \delta = (-k/\tilde{\lambda})^{1/2}$, то $\theta_* = a_1 J_0(r\delta) + a_2 N_0(r\delta)$;
 $a_1, a_2 - \text{const}$; J_0 – цилиндрическая функция 1-го рода; N_0 – функция Неймана; если $k = 0$, то $\theta_* = a_1 \ln r + a_2$. Эти решения пригодны на тех отрезках оси r , где $\theta_*(r) > 0$.

Одномерный сферический случай $\theta_* = \theta_*(r)$:

если $k < 0, \delta = (-k/\tilde{\lambda})^{1/2}$, то $\theta_* = \frac{1}{r} [a_1 \sin(\delta r) + a_2 \cos(\delta r)]$;

если $k > 0$, $\delta = (k/\tilde{\lambda})^{1/2}$, то $\theta_* = \frac{1}{r}[a_1 \text{sh}(\delta r) + a_2 \text{ch}(\delta r)]$;

если $k = 0$, то $\theta_* = a_2 - (a_1/r)$. Здесь нужно брать $\theta_*(r) > 0$ при $r \in [r_1, r_2]$, $r_1 > 0$.

Теперь рассмотрим двухмерные решения уравнения (5.47) при $k \neq 0$.

В прямоугольнике $x \in [0, x^1]$, $y \in [0, y^1]$ имеем:

если $k > 0$, $\delta = (k/\tilde{\lambda})^{1/2}$, то

$$\theta_* = (a_1 x + a_2)(b_1 \text{ch} \delta y + b_2 \text{sh} \delta y) \quad (5.48)$$

либо

$$\theta_* = (a_1 \text{ch} \delta_1 x + a_2 \text{sh} \delta_1 x)(b_1 \text{ch} \delta_2 y + b_2 \text{sh} \delta_2 y), \quad (5.49)$$

где $k/\tilde{\lambda} = \delta_1^2 + \delta_2^2$; $\theta_*(x, y) > 0$; $a_1, a_2, b_1, b_2 - \text{const}$.

В цилиндрических координатах (r, z) имеем решение, записанное с помощью функций Бесселя:

$$\theta_* = \exp(\pm \delta z)[a_1 J_0(\delta_1 r) + a_2 Y_0(\delta_1 r)],$$

$$r \in [r^0, r^1], \quad z \in [0, z^1], \quad \theta_*(r, z) > 0, \quad \delta_1 = [\delta^2 - (k/\tilde{\lambda})]^{1/2},$$

где a_1, a_2, δ – произвольные постоянные.

При $k = 0$ укажем два интересных варианта. В прямоугольных декартовых координатах имеем:

$$\theta_* = \theta_0 + \exp(\pm a_0 x)(a_1 \cos a y + a_2 \sin a y), \quad (5.50)$$

$$x \in [0, x^1], \quad y \in (-\infty, \infty),$$

где θ_0, a_0, a_1, a_2 – произвольные постоянные.

В полярных координатах (r, φ) :

$$\theta_* = \theta_0 + \left(a_1 r^m + \frac{a_2}{r^m} \right) (b_1 \cos m\varphi + b_2 \sin m\varphi), \quad (5.51)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad r \in [r^0, r^1],$$

где $\theta_0, a_1, a_2, b_1, b_2$ – произвольные постоянные. Данное решение описывает осцилляции по угловой координате φ . На рис. 5.15–5.21

представлены двумерные свойства функций, определяющих теплофизические свойства неоднородных сред. А именно: (5.48) – рис. 5.15, (5.49) – рис. 5.16, 5.17, (5.50) – рис. 5.18, 5.19, (5.51) – рис. 5.20, 5.21. Построение рис. 5.11–5.21 выполнил И. А. Концевой.

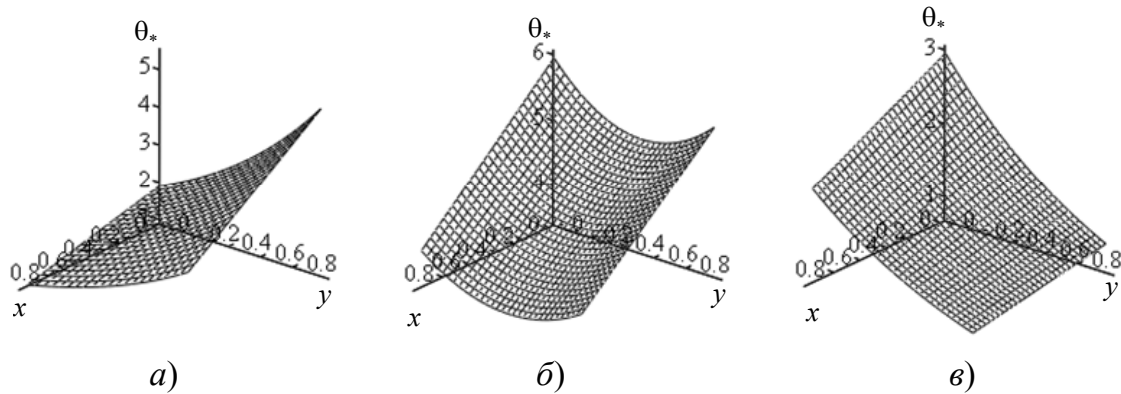


Рис. 5.15. Структура двумерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.48):

$$\begin{aligned}
 а - \delta = 1; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 2; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 1; \\
 б - \delta = 1; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 3; \quad b_1 = 2; \quad b_2 = -1; \\
 в - \delta = 1; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 3; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = -1
 \end{aligned}$$

Трёхмерное решение уравнения (5.47) при $k \neq 0$:

$$\theta_* = (a_1 \operatorname{ch} \delta_1 x + a_2 \operatorname{sh} \delta_1 x)(b_1 \operatorname{ch} \delta_2 y + b_2 \operatorname{sh} \delta_2 y)(c_1 \operatorname{ch} \delta_3 z + c_2 \operatorname{sh} \delta_3 z),$$

$$k / \tilde{\lambda} = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 > 0,$$

$$x \in [0, x^1], \quad y \in [0, y^1], \quad z \in [0, z^1], \quad \theta_* > 0,$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – произвольные постоянные.

Укажем еще несколько полезных пространственных решений уравнения (5.47) при $k = 0$.

Цилиндрические координаты (r, φ, z) :

$$1) \theta_* = \theta_0 + I_n(\delta r)[a_1 \cos(n\varphi) + a_2 \sin(n\varphi)][b_1 \cos(\delta z) + [b_2 \sin(\delta z)]],$$

$$r \in [r^0, r^1], \quad z \in (-\infty, \infty), \quad \theta_* > 0,$$

где $n \geq 0$ – целое число; $\theta_0, \delta, a_1, a_2, b_1, b_2$ – произвольные постоянные; $I_n(\delta r)$ – модифицированные функции Бесселя; данное решение описывает осцилляции по двум переменным: угловой координате φ и продольной координате z ;

$$2) \theta_* = \theta_0 + \left(a_1 r^m + \frac{a_2}{r^m} \right) (b_1 \cos(m\varphi) + b_2 \sin(m\varphi)) (c_1 + c_2 z),$$

$$r \in [r^0, r^1], \quad z \in [0, z^1], \quad \theta_* > 0,$$

где $m \geq 0$ – целое число; $\theta_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – произвольные постоянные.

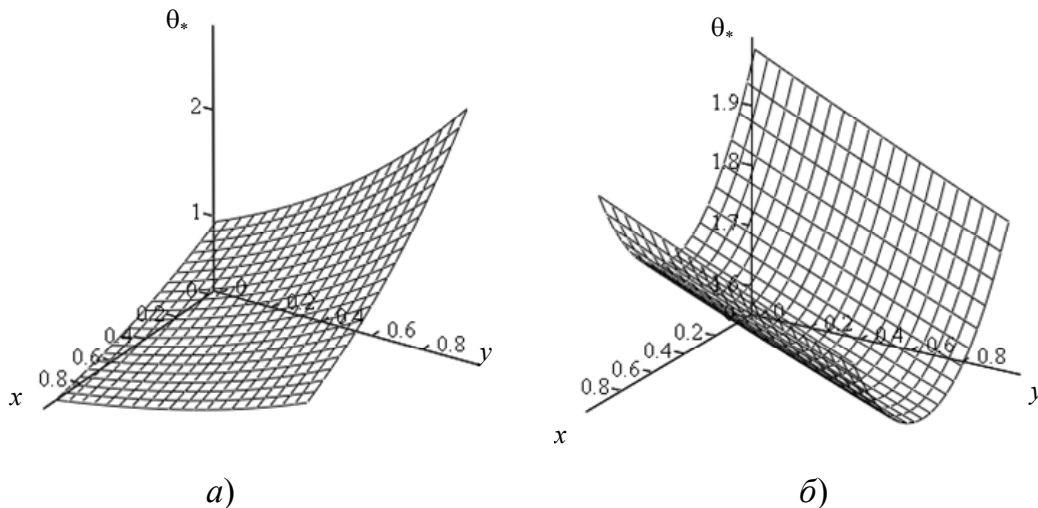


Рис. 5.16. Структура двухмерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.49):

$$a - \delta_1 = 1; \delta_2 = 1; a_1 = 1; a_2 = -1; b_1 = 1; b_2 = 1;$$

$$б - \delta_1 = 1; \delta_2 = -0,1; a_1 = 2; a_2 = -1; b_1 = 1; b_2 = 1$$

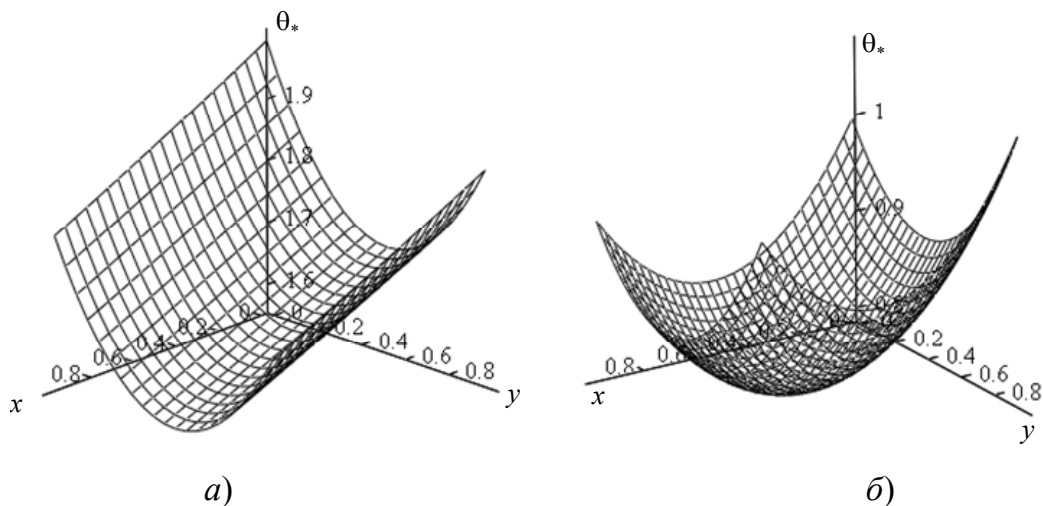


Рис. 5.17. Структура двухмерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.49):

$$a - \delta_1 = -0,1; \delta_2 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1; b_1 = 2; b_2 = -1;$$

$$б - \delta_1 = 1; \delta_2 = -1; a_1 = 2; a_2 = -1; b_1 = 0,5; b_2 = 0,2$$

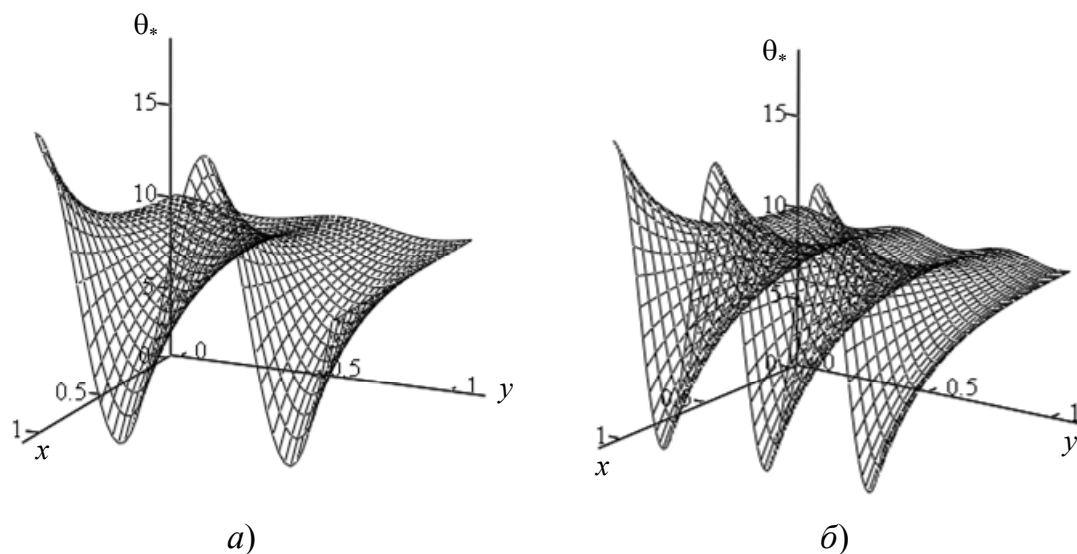


Рис. 5.18. Структура двумерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.50):
 а – $\theta_0 = 10$; $a_0 = 3$; $a_1 = 0,3$; $a = 10$;
 б – $\theta_0 = 10$; $a_0 = 3$; $a_1 = 0,3$; $a = 15$

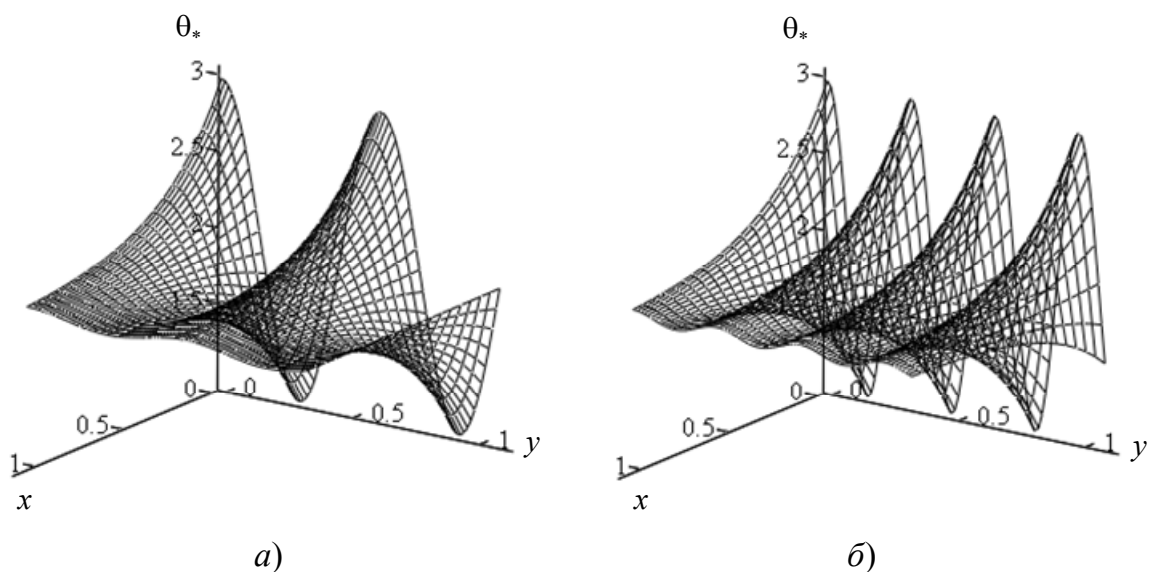


Рис. 5.19. Структура двумерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.50):
 а – $\theta_0 = 2$; $a_0 = -3$; $a_1 = 1$; $a = 10$;
 б – $\theta_0 = 2$; $a_0 = -3$; $a_1 = 1$; $a = 19$

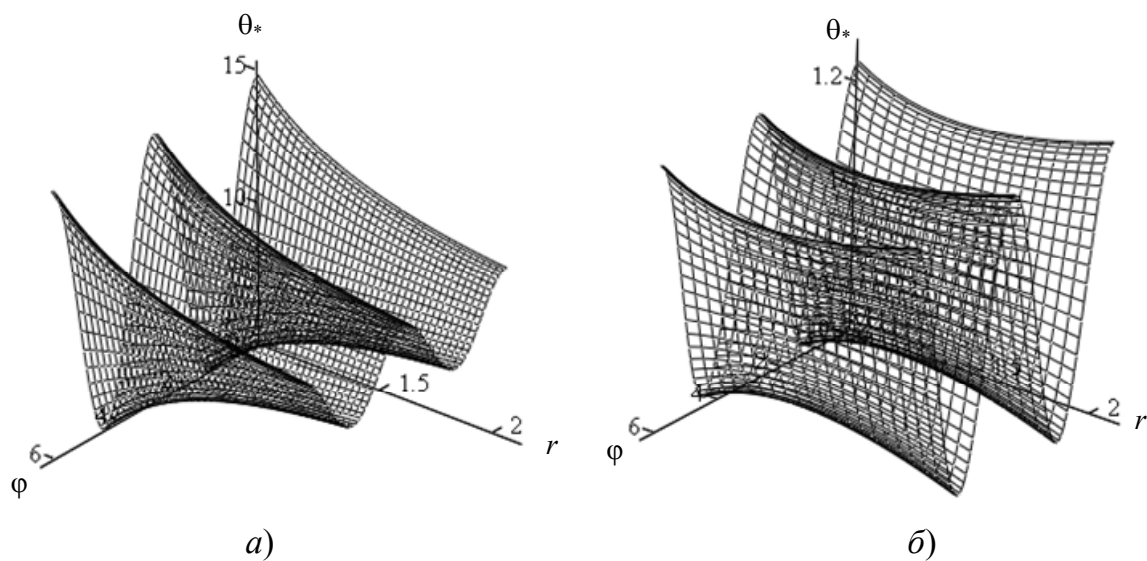


Рис. 5.20. Структура двумерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.51):

$$a - \theta_0 = 10; a_1 = 0,1; a_2 = 10; b_1 = 0,5; m = 2;$$

$$б - \theta_0 = 1; a_1 = 0,1; a_2 = 0,4; b_1 = 0,5; m = 2$$

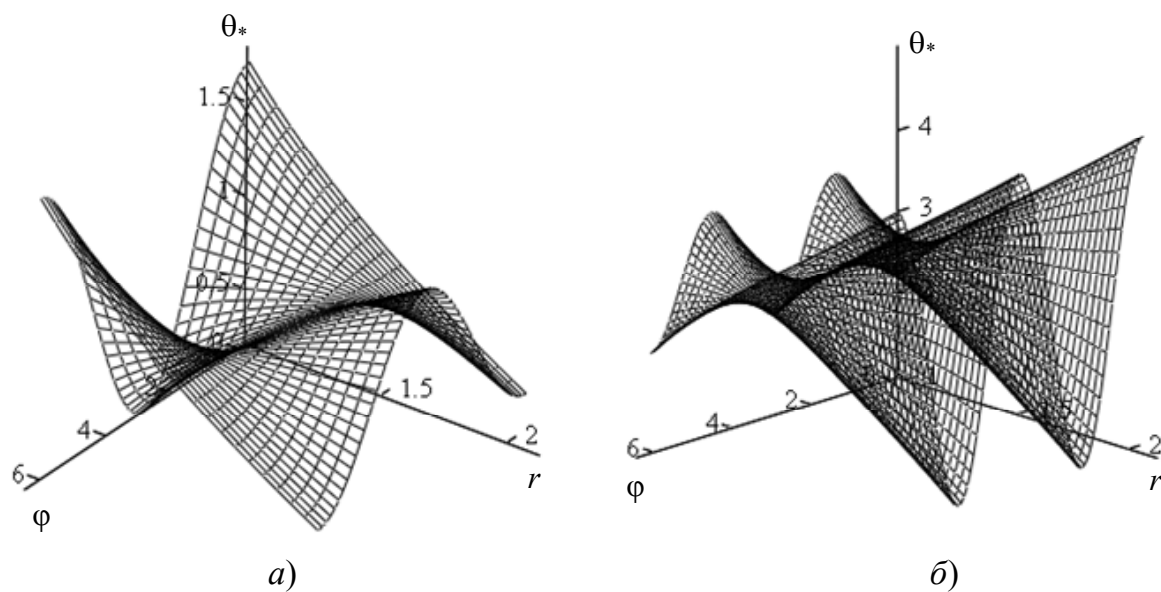


Рис. 5.21. Структура двумерной неоднородности среды, определяемая функцией (5.51):

$$a - \theta_0 = 1; a_1 = -1; a_2 = 2,5; b_1 = 0,5; m = 1;$$

$$б - \theta_0 = 3; a_1 = 1; a_2 = -2,5; b_1 = 0,5; m = 2$$

В сферических координатах (r, τ, φ) можно воспользоваться решениями, построенными в [97], [98] для уравнения Лапласа при $\partial\theta_*/\partial r = 0$:

$$1) \theta_* = \theta_0 + b \left\{ B_0(\tau) + \sum_{n=1}^N B_n(\tau) [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] \right\};$$

$$B_0(\tau) = \ln \left[a_0^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^{N+1} \right], \quad B_n(\tau) = c_n^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^n + \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^{-n},$$

где τ – широтный угол; $N + 1$ – любое целое число; $\theta_0, b, a_0, a_n, b_n, c_n$ – произвольные постоянные;

$$2) \theta_* = \theta_0 + 2b \ln \left[a_1 \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^n + a_2 \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^{-n} + a_3 \cos(n\varphi) \right],$$

где θ_0, b, a_1, a_2, n – произвольные постоянные; $a_3^2 = 4a_1a_2$.

В сферическом слое конечной толщины имеем решение:

$$\theta_* = \theta_0 + \left(a_1 r^n + \frac{a_2}{r^{n+1}} \right) [b_1 \cos(m\varphi) + b_2 \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos \tau), \quad r \in [r^0, r^1],$$

где $m \geq 0, n \geq 0$ – целые числа; $P_n^m(\cos \tau)$ – присоединенные функции Лежандра; $\theta_0, a_1, a_2, b_1, b_2$ – произвольные постоянные.

Отметим, что при аналитическом описании свойств неоднородных сред вариант $k = 0$ [см. (5.47)] удобен тем, что θ_* содержит произвольную аддитивную постоянную θ_0 . Это позволяет выполнить ограничение $\theta_* > 0$ в любой конечной области.

5.3.4. Двухкомпонентная система

Рассмотрим двухкомпонентную сплошную среду с тепловой релаксацией и объемным энерговыделением (поглощением). Температуры T_1 и T_2 взаимодействующих друг с другом компонентов определяются системой уравнений [см. (5.31)]:

$$c_1 \gamma_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + (c_1 - \gamma_1 q_v^1) \frac{\partial T_1}{\partial t} - \gamma_1 q_v^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + q_v^0 + q_v^1 T_1 + q_v^{(2)} T_2;$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \gamma_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} + (c_2 - \gamma_2 R_v^{(2)}) \frac{\partial T_2}{\partial t} - \gamma_2 R_v^1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) + R_v^0 + R_v^1 T_1 + R_v^{(2)} T_2.
\end{aligned}$$

Базовая система уравнений с постоянными коэффициентами для функций θ_1 и θ_2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_1 \gamma_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + (\tilde{c}_1 - \gamma_1 k_v) \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \gamma_1 k_v^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \\
& = \tilde{\lambda}_1 \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \right) + (k_v - k) \theta_1 + k_v^{(2)} \theta_2 + \tilde{q}_v^0; \\
& \tilde{c}_2 \gamma_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + (\tilde{c}_2 - \gamma_2 r_v) \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \gamma_2 r_v^1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \\
& = \tilde{\lambda}_2 \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} \right) + (r_v - r^*) \theta_2 + r_v^1 \theta_1 + \tilde{R}_v^0.
\end{aligned}$$

Связь между коэффициентами уравнений исходной и базовой систем:

$$\begin{aligned}
c_i &= \tilde{c}_i \theta_*^2, \quad \lambda_i = \tilde{\lambda}_i \theta_*^2, \quad i = 1, 2; \\
q_v^0 &= \tilde{q}_v^0 \theta_*^2, \quad R_v^0 = \tilde{R}_v^0 \theta_*^2, \quad q_v^1 = k_v \theta_*^2, \quad R_v^{(2)} = r_v \theta_*^2, \\
q_v^{(2)} &= k_v^{(2)} \theta_*^2, \quad R_v^{(1)} = r_v^{(1)} \theta_*^2, \\
k / \tilde{\lambda}_1 &= r^* / \tilde{\lambda}_2 = k_*.
\end{aligned}$$

Функция θ_* есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z^2} = k_* \theta_*, \quad (5.52)$$

где k_* – свободный параметр. Решение исходной системы имеет вид:

$$T_1 = \theta_1 / \theta_*, \quad T_2 = \theta_2 / \theta_*.$$

Уравнение (5.52) совпадает с (5.47), и для него пригодны все решения, указанные в предыдущем пункте.

Таким образом, краевую задачу для уравнения теплопереноса в неоднородной среде (искомая функция T) можно, пользуясь способом Г. А. Домбровского, преобразовать в краевую задачу для базового уравнения с постоянными коэффициентами (искомая функция θ): $T = \theta/\theta_*$. Преобразование уравнений имеет простой вид в рамках связи $\lambda/c \equiv \text{const}$. Классы неоднородных сред, допускающие такую возможность, устанавливаются на основе известных точных решений уравнения, определяющего функцию θ_* .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной монографии изложены результаты теоретического исследования неравновесных тепловых структур, которые формируются в среде при воздействии на нее поверхностного либо объемного источника энергии. Значительное внимание уделено таким факторам влияния как нелинейные теплофизические свойства материала, нелинейная зависимость источника энергии от температуры, неоднородность и локально-неравновесные свойства среды. Основные положения развитой теории состоят в следующем:

1. При нестационарном тепловом воздействии на образец материала существование гистерезисной петли в плоскости «тепловой поток – градиент температуры» обуславливают два фактора: немонотонность по времени функции $q_0(t)$ поверхностного источника; зависимость коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ от температуры. Если хотя бы один из этих факторов отсутствует, петля гистерезиса вырождается в линию.

2. Для двухслойной пластины тепловое взаимодействие металлов существенным образом зависит от знаков производных $d\lambda/dT$ в каждом слое. Асимметричные свойства теплового потока в зоне контакта и на правой границе двухслойного образца детерминированы нелинейными теплофизическими свойствами $\lambda(T)$ и $\lambda(T)/c(T)$ металлов. Отношение толщин слоев h_2/h_1 принципиальным образом влияет на асимметрию процесса. Производство энтропии и динамический тепловой гистерезис в зоне контакта наиболее чувствительно реагируют на перестановку слоев металлов и на изменение начальной температуры образца.

3. Контактный теплообмен на границе двух металлических слоев при термоциклическом воздействии обладает асимметричными свойствами двух типов: асимметрия-1, возникающая при перестановке слоев; асимметрия-2, появляющаяся при изменении очередности «нагрев – охлаждение». Формирование теплового состояния контакта происходит в течение первого периода термоциклирования; последующие периодические воздействия не дают существенных количественных и качественных изменений в поведении параметров асимметрии.

4. Построена тепловая модель периодической кристаллизации, основанная на волновом уравнении теплопереноса с двумя источниками

энергии, экспоненциально зависящими от температуры. В задаче о периодической кристаллизации («пленка – подложка», «расплав металла – изложница») эти источники являются конкурирующими. В задаче о взрывной кристаллизации с учетом «горячих» зародышевых центров они одного знака. Аналитическое описание обеих задач выполнено с помощью метода обобщенного разделения переменных и построения конечно-модовых галеркинских приближений. Изучены амплитуда и период колебаний скорости фазовой границы; построены пространственно-периодические структуры одномерного и двухмерного тепловых полей; получен шахматный порядок расположения цепочек изотерм, заключающих в себе замкнутые изотермы – «кошачьи глаза».

5. Установлено, что генерация периодических структур может происходить под действием положительного, отрицательного или знакопеременного объемного источника энергии, не обязательно обладающего гистерезисной (неоднозначной) связью $q_v = q_v(T)$: в этом случае имеем монотонную (линейную) либо немонотонную (синусоидальную) зависимость q_v от температуры.

6. В среде, обладающей локально-неравновесными свойствами, формирование пространственно-периодических тепловых структур происходит под влиянием конкуренции между температурными областями с тепловыделением и теплоотдачей. В системе «среда – знакопеременный источник энергии» образуются три основных типа периодических структур: полосы, ячейки, решетки. Их динамические свойства существенно зависят от степени нестационарности процесса и от режима затухания (апериодический, периодический). Эволюция периодических структур сопровождается не только многовариантностью переходов от одного типа периодичности к другому, но и разнообразием комбинаций основных типов.

7. Рассмотрены теплофизические аспекты проблемы формирования периодических структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок. Изучены морфологические свойства полосчатых и кольцевых структур: «круги на воде», эффект «домино». Обнаружены условия, при которых на одной из линий семейства полос достигается максимум производства энтропии. Основные факторы влияния: скоростной режим процесса (локальные числа Маха) и величина параметра неравновесности. Линии неподвижности и линии остановки «горячей» изотермы образуют полосчатые и/или «чешуйчатые» структуры, что качественно соответствует результатам экспериментальных наблюдений.

8. Пульсирующий расширяющийся либо сужающийся «кошачий глаз» обладает следующим свойством: в холодной/горячей области

температура в центре «глаза» ниже/выше, чем снаружи. Разрушение двумерных периодических тепловых полей сопровождается биением изотерм. Основным фактором, который задерживает процесс разрушения, является высокая частота колебаний по координате начального возмущения температуры.

9. Предложен феноменологический способ оценки времени тепловой релаксации при взрывной кристаллизации аморфной пленки, напыленной на подложку.

10. Бистабильность тепловых систем характеризуется (в рамках параболической модели теплопереноса) источником энергии $q_0(T)$, который зависит от температуры по синусоидальному типу. Поэтому волновой теплоперенос в системах с таким объемным источником можно изучать, применяя уравнение синус-Гордона. Анализ двух простых точных решений позволил обнаружить существенные различия между реономным и склерономным (обычным) уравнениями синус-Гордона. Взаимодействие нелинейного по температуре источника типа синус-Гордона и нестационарного периодического по времени источника энергии существенным образом зависит от отношения «собственной» и возбуждающей частот колебаний. Установлено, что фазовые траектории располагаются на цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой может иметь нетривиальную геометрическую форму. Детально изучена трехмерная конфигурация фазовых траекторий для целой, дробной, рациональной, иррациональной и трансцендентной величин частотного параметра системы.

11. В классе двойных волн получено новое точное решение уравнений переноса, содержащее две произвольные функции одного аргумента. Установлено, что в локально-неравновесной системе «среда – сток энергии» могут возникать неустойчивые процессы, имеющие своим математическим аналогом квазичаплыгинские уравнения газодинамики для среды с аномальной сжимаемостью. Дан вывод уравнений теплового маятника с двумя и тремя степенями свободы.

12. Получен класс аналитических решений, который дает возможность изучить влияние нелинейных, реономных и неоднородных свойств среды, обладающей «тепловой памятью», на формирование пространственно-временной структуры температурного поля в системе «среда – объемный источник энергии».

13. При воздействии объемного источника энергии на материал с «тепловой памятью» температурное поле при определенных условиях проявляет неклассические закономерности. Обнаружены ано-

мальные свойства взаимосвязи «градиент температуры – тепловой поток». В двумерном плоском случае наблюдается перемежаемость областей с классическими и неклассическими свойствами вектора градиента температуры. Найдено пороговое значение скорости изменения времени тепловой релаксации: при переходе через этот порог происходит инверсия знака объемного источника энергии. Важно, что этот тип инверсии существует при переходе системы в состояние с более высокой степенью неравновесности. Даны примеры численных расчетов, демонстрирующие начальные и промежуточные состояния системы «материал – источник энергии» в зависимости от пространственной формы возмущающего теплового сигнала.

14. Обнаружены новые возможности эффективного численного и аналитического решения задачи о теплопереносе в неоднородных средах. Алгоритм основан на преобразовании исходного уравнения теплопереноса (гиперболический, параболический, эллиптический типы) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. В пространствах одного, двух и трех измерений представлены широкие классы периодических неоднородных сред, записанные в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Дан пример двухкомпонентной системы.

Изложенные в книге материалы исследования динамики неравновесных тепловых состояний вещества фиксируют определенный итог работы авторов по этой важной проблеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков, А. В. Тепломассообмен : справочник / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1978. – 480 с.
2. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
3. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
4. Глазунов, Ю. Т. Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений / Ю. Т. Глазунов // Инженер.-физ. журн. – 1981. – Т. 40. – № 1. – С. 134–138.
5. Яворский, Н. И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией / Н. И. Яворский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1986. – № 3. – С. 3–10.
6. Никитенко, Н. И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах / Н. И. Никитенко // Инж.-физ. журн. – 2000. – Т. 73. – № 4. – С. 851–859.
7. Шульман, З. П. Пограничный слой неньютоновских жидкостей / З. П. Шульман, Б. М. Берковский. – Минск : Наука и техника, 1966. – 240 с.
8. Колесников, П. М. Методы теории переноса в нелинейных средах / П. М. Колесников. – Минск : Наука и техника, 1981. – 336 с.
9. Маслов, В. П. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур / В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. – М. : Наука, 1987. – 352 с.
10. Шабловский, О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – 382 с.
11. Дородницын, А. А. Об одном методе решений уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Журн. ПМТФ. – 1960. – № 3. – С. 111–118.
12. Белоцерковский, О. М. Исследование нестационарных течений газа со сложной внутренней структурой методами интегральных соотношений / О.М. Белоцерковский, В. Г. Грудницкий // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1980. – Т. 20. – № 6. – С. 1400–1415.

13. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. – 352 с.

14. Мустафаев, Р. А. Решение обобщенным методом интегральных соотношений одной нестационарной задачи фильтрации с подвижной границей / Р. А. Мустафаев // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 2. – С. 282–287.

15. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М. : Высш. шк., 2005. – 430 с.

16. Технологические лазеры : справочник : в 2 т. / под общ. ред. Г. А. Абельситова. – М. : Машиностроение, 1991. – Т. 1 : Расчет, проектирование и эксплуатация.

17. Шабловский, О. Н. Численное решение нелинейных задач нестационарного нагрева материалов / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения : сб. науч. тр. / Ин-т математики НАН Украины ; редкол.: А. М. Самойленко [и др.]. – Киев, 1998. – С. 234–237.

18. Шабловский, О. Н. Импульсный нагрев металла в широком интервале температур / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Машиностроение : сб. науч. тр. / под ред. И. П. Филонова. – Минск : УП «Технопринт». – 2002. – Вып. 18. – С. 516–520.

19. Шабловский, О. Н. Нестационарные свойства поверхностного нагрева металлов / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Запорож. гос. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 148–152.

20. Кроль, Д. Г. Нестационарные тепловые процессы при поверхностном нагреве двухслойных пластин / Д. Г. Кроль // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2002. – № 3–4. – С. 146–150.

21. Шабловский, О. Н. Динамические свойства контактного теплообмена в двухслойной металлической пластине / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 9–14.

22. Шабловский, О. Н. Асимметричные свойства тепловых процессов при поверхностном нагреве двухслойной металлической пластины / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Прикладная физика. – 2005. – № 1. – С. 31–38.

23. Шабловский, О. Н. Нелинейные тепловые процессы при импульсном нагреве двухслойной металлической пластины / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2005. – № 2. – С. 56–62.

24. Шабловский, О. Н. Асимметричные свойства термоциклического воздействия на двухслойную пластину / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках : тр. XV Шк.-семинара молодых ученых под рук. акад. РАН А. И. Леонтьева, Калуга, 23–27 мая 2005 г. : в 2 т. / Нац. ком. РАН по тепло- и массообмену, МЭИ ; редкол.: А. И. Леонтьев [и др.]. – М. : Изд-во МЭИ, 2005. – Т. 2. – С. 375–379.

25. Кроль, Д. Г. Исследование основных параметров влияния на асимметрию теплопереноса в двухслойной металлической пластине / Д. Г. Кроль // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2005. – № 3. – С. 40–46.

26. Кроль, Д. Г. Нелинейная асимметрия контактного теплообмена в двухслойной системе / Д. Г. Кроль // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундам. науки. – 2007. – № 3. – С. 113–118.

27. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. – М. : Наука, 1983. – 272 с.

28. Шабловский, О. Н. О тепловом гистерезисе в нелинейных средах / О. Н. Шабловский // ИФЖ. – 1990. – Т. 59, № 1. – С. 149–155.

29. Зиновьев, В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах / В. Е. Зиновьев. – М. : Metallurgy, 1989. – 384 с.

30. Gogol, W. Eksperymentaln badania efektu asymetrii przewodzenia w ukladach dwuskładnikowych / W. Gogol // Archiwum termodynamiki. – 1984. – Vol. 5, № 3–4. – P. 289–311.

31. Попов, В. М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений / В. М. Попов. – М. : Энергия, 1971. – 216 с.

32. Shablovsky, O. N. A Thermal Model of Periodic Crystallization / O. N. Shablovsky // Crystallography Reports. – 2005. – Vol. 50, № 1. – P. 62–67.

33. Шабловский, О. Н. К вопросу о генерации периодических температурных полей объемными источниками энергии / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 73–81.

34. Шабловский, О. Н. Формирование и эволюция неравновесных периодических тепловых структур / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Тр. Четвертой Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 23–27 окт. 2006 г. : в 8 т. / Нац. ком. РАН по тепло- и массообмену, МЭИ. – М. : Изд-во МЭИ, 2006. – Т. 7. – С. 362–365.

35. Шабловский, О. Н. Локально-неравновесные периодические тепловые поля в системе «среда – источник энергии» / О. Н. Шаблов-

ский, Д. Г. Кроль // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундам. науки. – 2008. – № 9. – С. 134–140.

36. Шабловский, О. Н. Динамика периодических тепловых структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // ФиПС-08 «Прикладная синергетика в нанотехнологиях» : тр. пятого междунар. междисциплин. семинара, Москва, 17–20 нояб. 2008 г. / Ин-т металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН ; редкол.: Ю. В. Цветкова [и др.]. – М., 2008. – С. 284–288.

37. Шабловский, О. Н. Формирование лепестковых конфигураций при взрывной кристаллизации аморфных пленок / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 27–33.

38. Шабловский, О. Н. Формирование периодических тепловых структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Тепловые процессы в технике. – 2009. – № 5. – С. 178–182.

39. Шабловский, О. Н. Генерирование и разрушение неравновесных периодических тепловых полей / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Моделирование неравновесных систем : материалы XII Всерос. семинара, Красноярск, 9–11 окт. 2009 г. / ИВМ СО РАН ; редкол.: В. В. Слабко [и др.]. – Красноярск, 2009. – С. 195–199.

40. Шабловский, О. Н. Феноменологическая оценка времени тепловой релаксации при взрывной кристаллизации аморфных пленок германия / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Тепловые процессы в технике. – 2010. – № 5. – С. 203–208.

41. Шабловский, О. Н. Полосчатые структуры и производство энтропии при взрывной кристаллизации аморфных пленок / О. Н. Шабловский // Тр. Пятой Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 25–29 окт. 2010 г. : в 8 т. / Нац. ком. РАН по тепло- и массообмену, МЭИ. – М. : Изд-во МЭИ, 2010. – Т. 7. – С. 187–190.

42. Александров, Л. Н. Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых пленок / Л. Н. Александров. – Новосибирск : Наука, 1985. – 224 с.

43. Шкловский, В. А. Взрывная кристаллизация аморфных веществ / В. А. Шкловский, В. М. Кузьменко // УФН. – 1989. – Т. 157, вып. 2. – С. 311–338.

44. Grigoropoulos, C. Explosive crystallization in the presence of melting / C. Grigoropoulos [et. al.] // Physical Review B. – 2006. – Vol. 73. – P. 184125-1–184125-15.

45. Коверда, В. П. Движение кристаллизационной волны в аморфной среде с зародышевыми кристаллами / В. П. Коверда // Журн. техн. физики. – 1994. – Т. 64, вып. 3. – С. 62–72.

46. Bostanjoglo, O. Time-Resolved TEM of Pulsed Crystallization of Amorphous Si and Ge Films / O. Bostanjoglo // Phys. Stat. Sol. – 1982. – Vol. 70. – P. 473–481.

47. Дендритная кристаллизация аморфных пленок железа / В. Г. Мягков [и др.] // Изв. РАН. Сер. физическая. – 1995. – Т. 59, № 2. – С. 152–156.

48. Kikuchi, M. Shock Crystallization on the Basis of a Domino-Model / M. Kikuchi, A. Matsuda, T. Kurosu // Solid State Communs. – 1974. – Vol. 14. – P. 731–735.

49. Эльдарханов, А. С. Процессы кристаллизации в поле упругих волн / А. С. Эльдарханов. – М. : Металлургия, 1996. – 256 с.

50. Астапчик, С. А. Формирование периодических структур при направленной кристаллизации, лазерной обработке и осаждении / С. А. Астапчик, Н. А. Береза. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 239 с.

51. Капцов, О. В. Некоторые классы плоских вихревых течений идеальной жидкости / О. В. Капцов // Журн. ПМТФ. – 1989. – № 1. – С. 109–117.

52. Коверда, В. П. «Горячие» центры кристаллизации в аморфных слоях / В. П. Коверда, В. П. Скрипов // Кристаллизация. – 1983. – Т. 28, вып. 1. – С. 185–187.

53. Спонтанная кристаллизация ультрадисперсных порошков аморфного германия / Н. М. Богданов [и др.] // ДАН СССР. – 1987. – Т. 293, № 3. – С. 595–598.

54. Шабловский, О. Н. Тепловая градиентная катастрофа и рост двухмерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский // Прикладная физика. – 2007. – № 3. – С. 29–37.

55. Шабловский, О. Н. Кинематические свойства поверхности роста кристалла / О. Н. Шабловский // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2008. – № 11. – С. 106–112.

56. Маломед, Б. А. Высшие бифуркации в распределенных кинетических системах с аperiodической неустойчивостью / Б. А. Маломед, М. И. Трибельский // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 6. – С. 1363–1368.

57. Брюно, А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. – М. : Наука, 1979. – 252 с.

58. Шабловский, О. Н. Нелинейное взаимодействие конкурирующих объемных источников энергии с локально-неравновесной

средой / О. Н. Шабловский // Тр. Четвертой Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 23–27 окт. 2006 г. : в 8 т. / Нац. ком. РАН по тепло- и массообмену, МЭИ. – М. : Изд-во МЭИ, 2006. – Т. 7. – С. 355–358.

59. Характер несовершенств профилированных монокристаллов сапфира / Г. А. Сатункин [и др.] // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1976. – Т. 40, № 7. – С. 1492–1498.

60. Гледзер, Е. Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. – М. : Наука, 1981. – 368 с.

61. Лихоперский, В. И. Биение периодических колебаний при разрушении вихревых слоев / В. И. Лихоперский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – № 2. – С. 160–162.

62. Теплопроводность твердых тел : справочник / под ред. А. С. Охотина. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.

63. Физические величины : справочник / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

64. Карлов, Н. В. Лазерная термохимия / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, Б. С. Лукьянчук. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 295 с.

65. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем / В. А. Альтов [и др.] ; под ред. В. В. Сычева. – М. : Изд-во МЭИ, 2008. – 464 с.

66. Гидродинамика и теплообмен в сверхпроводниковых устройствах / З. Л. Миропольский [и др.] ; под ред. З. Л. Миропольского. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

67. Гуревич, А. В. Локализованные волны в неоднородных средах / А. В. Гуревич, Р. Г. Минц // УФН. – 1984. – Т. 142, вып. 1. – С. 61–98.

68. Сигов, А. С. Об асимптотической эволюции начального температурного профиля в системах с двумя устойчивыми положениями равновесия / А. С. Сигов, В. Р. Чечеткин // ДАН СССР. – 1985. – Т. 285, № 2. – С. 360–365.

69. Сигов, А. С. Об устойчивости тепловых бистабильных систем с фазовыми превращениями / А. С. Сигов, В. Р. Чечеткин // Теплофизика высоких температур. – 1989. – Т. 27, № 1. – С. 109–115.

70. Петровский, С. В. Локализация нелинейной волны переключения в активной бистабильной среде с уединенной неоднородностью / С. В. Петровский // Журн. техн. физики. – 1997. – Т. 67, № 8. – С. 14–20.

71. Шабловский, О. Н. Реономное уравнение синус-Гордона и возбуждение колебаний в системе «среда – источник энергии» / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Моделирование неравновесных систем : материалы XIII Всерос. семинара, Красноярск, 15–17 окт. 2010 г. / ИВМ СО РАН ; редкол.: В. В. Слабко [и др.]. – Красноярск, 2010. – С. 230–235.

72. Шабловский, О. Н. Волновой теплоперенос и когерентные колебания в среде с нелинейным знакопеременным источником энергии / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Моделирование неравновесных систем : материалы XIV Всерос. семинара, Красноярск, 7–9 окт. 2011 г. / ИВМ СО РАН ; редкол.: В. В. Слабко [и др.]. – Красноярск, 2011. – С. 202–208.

73. Шабловский, О. Н. Знакопеременный источник энергии и генерация пространственно-временных колебаний температуры в материале с «тепловой памятью» / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2012. – № 2. – С. 11–17.

74. Шабловский, О. Н. Пилообразные колебания и двумерные когерентные структуры в среде с источником синус-Гордона / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Моделирование неравновесных систем : материалы XV Всерос. семинара, Красноярск, 5–7 окт. 2012 г. / ИВМ СО РАН ; редкол.: В. В. Слабко [и др.]. – Красноярск, 2012. – С. 225–230.

75. Шабловский, О. Н. Гистерезис и энтропия при возбуждении колебаний в среде с источником синус-Гордона / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Вестн. Север. (Арктич.) федер. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 103–110.

76. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.

77. Лэм, Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. – М. : Мир, 1983. – 294 с.

78. Гурбатов, С. Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике / С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев. – М. : Физматлит, 2008. – 496 с.

79. Шабловский, О. Н. К вопросу о колебаниях в теплофизической системе «среда – объемный источник энергии» / О. Н. Шабловский // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2004. – № 3. – С. 27–32.

80. Шабловский, О. Н. Тепловой предвестник боковой ветви дендрита на клиновидной фазовой границе кристаллизации / О. Н. Шаблов-

ский // Рост монокристаллов и тепломассоперенос : сб. тр. 6-й Международ. конф., Обнинск, 25–30 сент. 2005 г. : в 4 т. / Обнинск : ГНЦ РФ – ФЭИ, 2005. – Т. 4. – С. 897–907.

81. Шабловский, О. Н. Двойные волны и квазигазовые неустойчивости в теории релаксационного теплопереноса / О. Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем : ежегод. сб. науч. тр. – М. : Янус-К, 2006. – Вып. 9. – С. 80–84.

82. Шабловский, О. Н. «Отрицательная теплоемкость» в простой тепловой волне / О. Н. Шабловский // Тр. Четвертой Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 23–27 окт. 2006 г. : в 8 т. / Нац. ком. РАН по тепло- и массообмену, МЭИ. – М. : Изд-во МЭИ, 2006. – Т. 7. – С. 359–361.

83. Шабловский, О. Н. Инверсия знака объемного источника энергии в локально-неравновесной среде энергии / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Моделирование неравновесных систем : материалы XI Всерос. семинара, Красноярск, 26–28 сент. 2008 г. / ИВМ СО РАН ; редкол.: В. В. Слабко [и др.]. – Красноярск, 2008. – С. 212–213.

84. Шабловский, О. Н. Неклассические закономерности воздействия объемного источника энергии на материал с «тепловой памятью» / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Материалы, технологии, инструменты. – 2008. – Т. 13, № 3. – С. 22–26.

85. Шабловский, О. Н. Преобразование и решение уравнений теплопереноса в неоднородных средах / О. Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем : ежегод. сб. науч. тр. – Вып. 11. – М. : Янус-К, 2008. – С. 102–105.

86. Шабловский, О. Н. Тепловые колебания и волны в локально-неравновесной среде с нелинейным источником энергии / О. Н. Шабловский, М. Г. Сальникова // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2011. – № 4. – С. 3–10.

87. Митропольский, Ю. А. Асимптотические решения многомерного нелинейного волнового уравнения / Ю. А. Митропольский, М. В. Шульга // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 1. – С. 30–33.

88. Рыжов, О. С. Некоторые вырожденные околосвуковые течения / О. С. Рыжов // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 2. – С. 260–264.

89. Жданов, С. К. Квазигазовые неустойчивые среды / С. К. Жданов, Б. А. Трубников. – М. : Наука, 1991. – 176 с.

90. Гребенников, Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М. : Наука, 1979. – 432 с.
91. Бабицкий, В. И. Колебания в сильно нелинейных системах / В. И. Бабицкий, В. Л. Крупенин. – М. : Наука, 1985. – 320 с.
92. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1969. – 380 с.
93. Колесников, П. М. Энергоперенос в неоднородных средах (математическая теория) / П. М. Колесников. – Минск : Наука и техника, 1974. – 304 с.
94. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массо-переноса / А. Д. Полянин [и др.]. – М. : Факториал, 1998. – 368 с.
95. Домбровский, Г. А. К вопросу об эффективном интегрировании линейных уравнений с частными производными второго порядка / Г. А. Домбровский // Дифференциал. уравнения. – 1975. – Т. XI. – № 1. – С. 180–182.
96. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.
97. Аристов, С. Н. Точное решение задачи о точечном источнике / С. Н. Аристов // Докл. РАН. – 1995. – Т. 343. – № 1. – С. 50–52.
98. Аристов, С. Н. Трехмерные конические течения в вязкой несжимаемой жидкости / С. Н. Аристов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 6. – С. 144–148.

Научное издание

Шабловский Олег Никифорович
Кроль Дмитрий Григорьевич

НЕРАВНОВЕСНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

Монография

При оформлении обложки использовалась
репродукция с этюда В. Вазарели

Редакторы: *Н. Г. Мансурова, Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *М. В. Кравцова*

Подписано в печать 21.03.13.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 11,88.
Тираж 100 экз. Заказ № /7.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр
Учреждения образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48