

О. М. Остриков

**МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ
В РЕАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ
С ОСТАТОЧНЫМИ НЕКОГЕРЕНТНЫМИ
ДВОЙНИКАМИ**

**Гомель
ГГТУ им. П. О. Сухого
2019**

УДК 538.3

Остриков, О. М. Методика прогнозирования распределения полей напряжений в реальных кристаллах с остаточными некогерентными двойниками / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 278 с. : ил. – ISBN 978-985-535-430-8.

Обобщены результаты исследований, в том числе и собственных исследований автора, механического двойникования кристаллов с позиций механики деформируемого твердого тела. Показано применение методов расчета полей напряжений у остаточного деформационного двойника для прогнозирования распределения полей напряжений в кристаллах с дефектами.

Для специалистов в области механики деформируемого твердого тела, обработки материалов давлением, физики конденсированного состояния, материаловедения; инженерно-технических и научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов соответствующего профиля.

Ил. 143, список лит. – 393 назв.

Рецензенты: начальник Центра структурных исследований и трибо-механических испытаний материалов и изделий машиностроения Объединенного института машиностроения НАН Беларуси д-р физ.-мат. наук, проф. *В. А. Кукареко*; проф. каф. «Физика твердого тела» Белорусского государственного университета д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Г. Шепелевич*

*Рекомендовано к изданию Советом ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 2 от 21.10.2019 г.)*

ISBN 978-985-535-430-8

© Остриков О. М., 2019

© Оформление. Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Современное состояние исследований в области механики двойникования деформируемых твердых тел	11
1.1. Механическое двойникование анизотропных твердых тел.....	11
1.2. Теория двойникования И. М. Лифшица	17
1.3. Теория дислокаций и ее место в механике деформируемого твердого тела	28
1.4. Дислокационные модели двойникования	41
Глава 2. Метод расчета напряженно-деформированного состояния у заклинившегося двойника в рамках приближения непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах	48
2.1. Некоторые экспериментальные результаты исследования механического двойникования и его взаимодействия с другими дефектами кристаллической решетки.....	48
2.2. Метод расчета полей напряжений, смещений и деформаций у остаточного клиновидного двойника с использованием прибли- жения непрерывного распределения двойникующих дислокаций на некогерентных границах двойника.....	71
2.3. Равновесная форма двойника	82
2.4. Проверка выполнения условия равновесия твердого тела с механическим остаточным двойником в условиях плосконапря- женного и плоскодеформированного состояния.....	94
2.5. Энергетические критерии механического двойникования.....	103
Глава 3. Закономерности распределения полей напряжений у остаточного клиновидного двойника	110
3.1. Поля напряжений у находящегося вдали от поверхности кли- новидного двойника с прямолинейными границами при непрерыв- ном распределении на них двойникующих дислокаций	110
3.2. Распределение смещений у двойникового клина при непре- рывном распределении двойникующих дислокаций на двойниковых границах.....	114
3.3. Расчет на основании макроскопической дислокационной модели полей деформаций у клиновидного двойника с прямо- линейными границами	117
3.4. Поля напряжений у клиновидного двойника с криволиней- ными границами	117
3.5. Влияние плотности двойникующих дислокаций на конфигу- рацию полей напряжений у клиновидного двойника	124

3.6. Расчет в рамках макроскопической дислокационной модели полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла	128
3.7. Поля напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности твердого тела, деформируемой сосредоточенной нагрузкой	138
3.8. Расчет полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности твердого тела, деформируемой распределенной нагрузкой	145
3.9. Поля напряжений в деформируемом упругом полупространстве при наличии параллельных двойников	152
Глава 4. Метод расчета напряженно-деформированного состояния у остаточных нанодвойников	164
4.1. Метод расчета и закономерности распределения внутренних полей напряжений, смещений и деформаций у клиновидного нанодвойника на основании дислокационной модели.....	164
4.1.1. Экспериментальные результаты по обнаружению остаточных нанодвойников.....	164
4.1.2. Расчет полей внутренних напряжений у нанодвойника клиновидной формы	166
4.1.3. Расчет смещений у клиновидного нанодвойника на мезоскопическом уровне	176
4.1.4. Расчет полей деформаций в приближении дискретного распределения частичных дислокаций на границах клиновидного нанодвойника.....	181
4.1.5. Расчет напряжений и деформаций у вершины нанодвойника клиновидной формы	184
4.1.6. Методика расчета внутренних напряжений у клиновидного нанодвойника при неравном количестве двойникующих дислокаций на границах	194
4.2. Условие равновесия нанодвойника клиновидной формы	196
4.3. Дислокационная модель развивающегося нанодвойника	215
Глава 5. Применение методов расчета напряженно-деформированного состояния у остаточных клиновидных двойников для решения важных для микромеханики задач.....	226
5.1. Прогнозирование распределения полей напряжений в системе «остаточный клиновидный двойник – трещина».....	226
5.2. Прогнозирование распределения полей напряжений в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»	235
5.3. Прогнозирование распределения примеси и потоков ее миграции у остаточного клиновидного двойника.....	242
Литература.....	247

ВВЕДЕНИЕ

Изучение инициированных локализацией внутренних напряжений на неоднородностях процессов пластической деформации и разрушения деформируемых твердых тел является важной научной проблемой. Для ее решения необходима разработка специальных методов расчета смещений, деформаций и напряжений, учитывающих накопление повреждений. Этому посвящены фундаментальные труды известных ученых: Ю. Н. Работнова, С. А. Чижика, П. А. Витязя, М. А. Журавкова, Г. И. Михасева, А. В. Чигарева, Ю. В. Чигарева, В. В. Клубовича, В. П. Северденко, А. В. Степаненко, Н. К. Мышкина, Ю. М. Плескачевского, Э. И. Старовойтова, В. М. Федосюка, М. Д. Мартыненко, В. И. Владимировича, С. В. Шилько, Л. И. Миркина, А. Лява и др. [1]–[25].

В рамках механики деформируемого твердого тела при использовании гипотезы сплошности среды существенное развитие получила континуальная теория дислокаций [1], [26]–[42], в основу которой положено абстрагирование от атомного строения вещества, что позволило в рамках механики разработать дислокационный подход к моделированию разрушения материалов [22], [43]–[48]. Несмотря на достижения современной механики разрушения, недостаточное внимание уделено исследованию влияния на процесс зарождения микротрещин возникающих при силовом воздействии в твердых телах плоских дефектов, к которым, в частности, относятся двойники. Это не оправдано, так как данные дефекты способствуют энергетической выгоде процесса разрушения на таких стадиях деформирования материалов, когда их ресурс прочности еще не исчерпан [43], [49]–[57].

Решение задач механики деформируемого твердого тела в большинстве случаев не предполагает учет напряжений, которые создают дефекты кристаллической решетки [1], [58]–[92]. Такие дефекты, как границы механических двойников в анизотропных кристаллических твердых телах, создают локализацию напряжений, уровень которых иногда соизмерим с пределом прочности материала, что приводит к образованию микротрещин и последующему разрушению [49]–[57], [93]–[95]. Поэтому пренебрежение ролью механических двойников, образующихся в деформируемых сплошных средах, ведет к завышению оценки прочностных характеристик применяемых на практике материалов. Это особенно недопустимо в конструкциях, требующих высокой степени надежности при длительной эксплуатации.

Деформационным двойникам присущи следующие характеристики, обеспечивающие хрупкое разрушение: высокие скорости развития двойниковых прослоек и связанные с этим динамические эффекты; значительная концентрация напряжений на границах двойников и в их вершинах; жесткость взаимодействия с двумерными и трехмерными неоднородностями твердых тел [43]. Данные процессы в настоящее время рассматриваются лишь на эмпирическом уровне без использования методов механики деформируемого твердого тела. Поэтому, несмотря на имеющиеся обширные экспериментальные данные по исследованию двойникования [43], [49]–[55], [57], [93]–[107], остается нерешенной важная научно-практическая проблема, заключающаяся в разработке моделей деформируемых сред с учетом наличия в них остаточных механических двойников. Решение этой проблемы позволит давать более точные оценки о степени надежности используемых на практике материалов, прогнозировать области зарождения трещин, дающих начало процессу разрушения, вести поиск эффективных методов обработки двойникующихся материалов, к которым относятся практически все используемые в машиностроении и приборостроении материалы.

Создание новых моделей деформируемых сред с учетом локализации напряжений на двумерных дефектах невозможно без развития теории двойникования. Это обусловлено тем, что современные теории в большинстве случаев не дают возможности их применения в решении задач механики деформируемого твердого тела [29], [43], [108]–[111]. Поэтому другой важной научной проблемой можно считать развитие теории двойникования деформируемых твердых тел.

Известны атомная, дислокационная, дисклинационная и макроскопическая модели двойникования кристаллов [26], [29], [43], [108]–[111]. Данные модели используют такие ограничения и приближения, в область адекватности которых не входит большой класс двойников, наблюдаемых в экспериментальных работах [96]–[109]. Так, популярная в настоящее время дислокационная модель двойника использует приближение тонкого двойника [29], [109]–[111], что, с одной стороны, не позволяет рассчитывать поля напряжений внутри двойника, а с другой – не позволяет рассматривать значительно чаще встречающиеся на практике остаточные двойники, длина которых соизмерима с шириной [112]–[116]. Это еще раз указывает на то, что вопрос о разработке новых моделей, охватывающих более широкий класс двойников и дающих возможность их использования в решении задач механики деформируемого твердого тела, является актуальным.

Изучение механического двойникования в настоящее время вызвало повышенный интерес и в связи с открытием нового класса материалов – материалов с памятью формы, уникальность физико-механических свойств которых полностью определяется процессом схожим с двойникованием [117]–[134]. В работах [135]–[138] открыто новое явление – сверхпроводимость двойниковых границ. Бурно развиваются исследования нанодвойникования кристаллов и наноматериалов [139]–[146]. Это указывает на то, что исследования механического двойникования не утрачивают своей актуальности и по сей день.

Таким образом, в настоящее время назрела важная научная проблема, связанная с развитием теории двойникования и использованием ее результатов в решении задач механики деформируемого твердого тела с учетом дефектов, наблюдаемых в реальных кристаллах. Решение в данной работе проблемы расчета напряженно-деформированного состояния двойникующихся материалов позволило вписать в механику деформируемого твердого тела новый раздел «Механика двойникования», который существенно дополнил в научном и практическом направлениях широко известный [2], [22], [44]–[48], [147]–[149] раздел «Механика разрушения». Наличие нового раздела, посвященного рассмотрению с позиций механики явления механического двойникования, открывает новые возможности для широкого практического использования методов механики деформируемого твердого тела для находящихся все большее практическое применение материалов нового поколения, таких как материалы с памятью формы, нанокристаллические материалы, двойникующиеся материалы и др.

Для решения указанной проблемы в качестве цели работы ставилась разработка методов расчета напряженного состояния деформируемых и недеформируемых твердых тел с остаточными клиновидными механическими двойниками и дефектами, свойственными реальным кристаллам.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

– на основании экспериментальных данных разработать физически обоснованные дислокационные модели остаточных клиновидных микро- и нанодвойников;

– вывести условия равновесия клиновидных микро- и нанодвойников;

– не прибегая к модели тонкого двойника, разработать методы расчета полей смещений, деформаций и напряжений в деформируемых и недеформируемых твердых телах при наличии в них двойников;

– разработать методику расчета полей напряжений в деформируемом сосредоточенной или распределенной на участке поверхности нагрузкой твердом теле при наличии в нем клиновидных двойников;

– на основании сравнительного анализа результатов расчетов напряженного состояния в упругом полупространстве, деформируемом сосредоточенной или распределенной на участке поверхности нагрузкой в случаях наличия и отсутствия у поверхности двойника, показать необходимость учета вклада двойниковых границ в формировании деформационной картины;

– разработать методику расчета напряженного и деформированного состояний в особой точке – вершине клиновидного нанодвойника;

– рассчитать поля напряжений у группы параллельных остаточных клиновидных двойников;

– применить дислокационную модель для расчета полей напряжений в имеющих важное практическое значение системах «остаточный клиновидный двойник – трещина» и «нанодвойник – полная дислокация»;

– показать возможность использования методики расчета полей напряжений у остаточного клиновидного двойника для прогнозирования концентрации распределения у него примесей и потоков ее миграции.

Объектом исследования явились двойникообразующие твердые тела с наличием в них остаточных клиновидных двойников и дефектов, свойственных реальным кристаллам. Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние, сформированное остаточными механическими двойниками в деформируемом или деформированном твердом теле с полными дислокациями или трещинами и при их отсутствии.

Выбор объекта и предмета исследования обусловлен тем, что решение связанных с расчетом напряженно-деформированного состояния задач механики деформируемого твердого тела для двойникообразующихся материалов обладает большой неточностью, так как двойники являются концентраторами больших (соизмеримых с пределом текучести, а порой, и пределом прочности материала) внутренних напряжений, существенным образом искажающими деформационную картину. Отсутствие в решении современных задач механики деформируемого твердого тела учета двойникообразования для ряда применяемых на практике двойникообразующихся материалов приводит к существенно завышенной оценке их прочностных характеристик, так как высокий уровень напряжений у двойников способствует зарождению у них разрушения.

В ходе выполнения работ, вошедших в данную монографию, были получены следующие основные результаты:

- Разработан основанный на теории дислокаций метод расчета напряженно-деформированного состояния у остаточного клиновидного механического двойника, использующий приближение непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах. Метод позволил, не прибегая к приближению тонкого двойника, рассчитать важные для механики разрушения и теории пластической деформации распределения полей напряжений в зависимости от формы границ для более широкого класса не тонких остаточных двойников.

- Получен метод расчета напряженно-деформированного состояния в двойникующемся твердом теле при наличии в нем остаточного нанодвойника, использующий приближение дискретного распределения дислокаций на двойниковых границах и позволяющий учитывать роль винтовой и краевой составляющей вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации в характере распределения нормальных и сдвиговых напряжений у нанодвойника. Метод позволяет давать количественную оценку напряженного состояния у нанодвойников, характеризующих начальную стадию зарождения двойников, а также часто встречающейся в реальных кристаллах системе «нанодвойник – полная дислокация».

- Предложены основанные на учете баланса сил, действующих на двойникующие дислокации, методики расчета равновесных параметров клиновидных двойников при непрерывном и дискретном распределении двойникующих дислокаций на двойниковых границах. Методика позволяет рассчитывать равновесные параметры микро- и нанодвойников в зависимости от сил неупругой природы, действующих на двойникующие дислокации, и внешних нагрузок, приложенных к деформируемому твердому телу, что важно для прогнозирования эволюции двойников в деформируемом или деформированном кристалле.

- Установлены закономерности распределения полей напряжений, смещений и деформаций у остаточных микро- и нанодвойников, позволяющие давать численную оценку напряженно-деформированному состоянию в двойникованном материале. Полученные закономерности позволили установить, что упругие напряжения локализуются не только на двойниковых границах и у вершины двойника, но и в удаленных от двойника областях, где локализация напряжений ранее не предполагалась.

- Разработана методика расчета полей напряжений в упругом полупространстве, к поверхности которого приложена сосредоточенная или распределенная нагрузка при наличии в деформируемом твердом теле остаточных механических клиновидных двойников. Методика позволила в контактных задачах механики деформируемого твердого тела учесть напряжения, создаваемые клиновидными двойниками, и показать необходимость учета двойникования в формировании напряженно-деформированного состояния в деформируемых двойникующихся материалах, в которых согласно классическим методам расчета обусловленные двойниками напряжения не прогнозируются.

- Получена методика прогнозирования распределения упругих полей напряжений в наблюдаемых в реальных кристаллах системах «остаточный клиновидный двойник – трещина» и «нанодвойник – полная дислокация», имеющих важное практическое значение в анализе напряженно-деформированного состояния на стадиях зарождения разрушения и локализации у границ двойников пластической деформации.

Теоретические и экспериментальные исследования, обобщенные в данной монографии, выполнены автором как самостоятельно, так и в соавторстве. Автор благодарит профессора Ю. В. Василевича за обсуждение и анализ основных результатов, вошедших в монографию; А. Л. Созинова и А. А. Сорока за помощь в проведении эксперимента, обсуждение и анализ результатов по исследованию особенностей пластической деформации монокристаллов Ni_2MnGa .

ГЛАВА 1

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ ДВОЙНИКОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1.1. Механическое двойникование анизотропных твердых тел

Как отмечалось в работе [150], двойникование кристаллов было открыто О. Мюгге еще в позапрошлом веке [151]. Исследование данного явления не теряет актуальности и по сей день [152]–[155].

Механическое двойникование кристаллических твердых тел является процессом, имеющим схожесть с разрушением [153]. С точки зрения механики двумерные и трехмерные дефекты, возникающие в деформируемом твердом теле, рассматриваются как неоднородности в сплошной среде или как концентраторы напряжений [1]. Двойникование анизотропных (кристаллических) твердых тел проявляется преимущественно в случаях, когда затруднено скольжение [109].

Являясь концентраторами больших внутренних напряжений, двойниковые границы способствуют зарождению трещин [43], [49]. Наряду со скольжением, двойникование относится к основному каналу пластической деформации твердых тел [108], но, в отличие от скольжения, двойникование является более сложным, а потому и менее изученным процессом [150].

Широкое распространение получили дислокационные модели двойников [29], [108]–[110]. При этом в [109] показывается, что двойнивающая дислокация является частичной дислокацией Шокли. В механике деформируемого твердого тела теория дислокаций и дислокационных стенок является специальным разделом [1]. При этом дислокация рассматривается в приближении сплошности среды и моделируется как неоднородность этой среды [1]. Представляет большой интерес применение механистических подходов теории дислока-

ций к моделированию напряженно-деформированного состояния у механических двойников, играющих важную роль в процессах разрушения [43].

Известно большое количество работ, посвященных экспериментальному исследованию двойникования и развитию трещин у двойниковых границ [49], [53], [96]–[101], [109], [155]–[165]. К первым работам, заложившим фундамент в исследовании упругого двойникования, можно отнести изученное Р. И. Гарбером [159]–[166] двойникование кальцита и натронной селитры, ставшими модельными материалами. В работе [165] Р. И. Гарбер выделил четыре стадии развития двойника при пластической деформации:

1. Упругая деформация монокристалла.
2. Образование «упругих двойников».
3. Образование устойчивых двойниковых прослоек.
4. Утолщение двойниковых прослоек.

С позиций дислокационного подхода данные стадии не дают исчерпывающих представлений о процессе двойникования, но закладывают основы макроскопического описания двойникования.

В числе первых методов экспериментального исследования двойникования был предложенный Р. И. Гарбером метод наблюдения искажений колец Ньютона при вдавливании выпуклой линзы в поверхность двойникующегося материала [165]. В дальнейшем разрабатывались методы изучения двойникования при растяжении, сжатии, изгибе твердого тела [109]. Уникальная методика, предложенная в [112] и заключающаяся в локальном дозированном деформировании поверхности кристалла алмазным индентором, нашла широкое применение в изучении влияния на процесс двойникования различных энергетических воздействий [99], [113]–[115]. Это позволило укрепить позиции дислокационного подхода в объяснении наблюдаемых физических процессов, связанных с двойникованием деформируемых твердых тел.

Р. И. Гарбером впервые установлено [165], что упругий двойник (двойник, который исчезает при прекращении действия на кристалл внешней нагрузки) имеет форму тонкого клина. Ширина такого двойника у устья и длина увеличиваются с ростом нагрузки и уменьшаются при разгрузке. Впервые было также установлено, что при определенных условиях в кальците формируются и заклинившиеся двойники. Их устойчивость Р. И. Гарбер объяснил «влиянием внутренних частей толстой части клина, которые полностью сдвойникованы» [165]. Для образования двойников, как указал Р. И. Гарбер в [165], необходимо наличие

двойниковых зародышей, которые возникают у поверхности при действии сосредоточенной нагрузки. При этом для образования зародышей требуется больше энергии, чем для дальнейшего развития двойника.

При изучении влияния отжига на двойникование в работе [162] Р. И. Гарбером впервые было установлено, что сформировавшиеся двойниковые слои большой ширины к термическому воздействию не чувствительны даже при большом времени отжига и значительных температурах. Тонкие двойниковые прослойки исчезают при длительном отжиге.

Важным этапом в исследовании двойникования деформируемых твердых тел стало проведенное Ф. Ф. Лаврентьевым [116] исследование взаимодействия двойникования и скольжения в металлах. Это изменило представления о процессе двойникования и показало, что данное явление гораздо более сложное и связано с инициацией других сопутствующих процессов. Значительным результатом работы Ф. Ф. Лаврентьева стало рассмотрение дислокационных реакций полных и частичных двойникующих дислокаций.

Существенный вклад в обобщение результатов исследований двойникования, проведенных до 60-х гг. прошлого столетия, внесен М. В. Классен-Неклюдовой, опубликовавшей монографию [109].

В связи с широким использованием в самолетостроении в настоящее время внимание многих исследователей привлекло изучение двойникования такого технически важного материала, как TiAl [102], [103], [167]–[180]. Так, в работе [104] П. Вангом и сотрудниками с использованием методов рентгенодифрактометрии, оптической микроскопии и просвечивающей электронной микроскопии с микродифракцией исследовался сплав Ti – 46,54 ат. % Al после термической обработки. После закалки в данном сплаве обнаружены полосы двойниковой ориентации $(31\bar{4}2)[3\bar{6}35]$, внутри которых наблюдались двойниковые сегменты ориентацией $(\bar{2}201)[1\bar{1}04]$. Широкий спектр свойств сдвойникового TiAl изучен в [168]–[181].

Методом молекулярной динамики Л. Е. Карькиной в работе [105] для сплава TiAl определена ширина дефектного диполя и его зависимость от величины энергии дефекта упаковки и типа дислокации, на которой образуется диполь. С помощью просвечивающей электронной микроскопии в этой же работе в полосе скольжения обнаружены зародыши двойников. Карькиной Л. Е. совместно с А. Б. Ноткиным в работе [106] изучалось взаимодействие полных дислокаций с двойниковыми границами в сплаве TiAl. При этом, как и в [105], использо-

валась просвечивающая электронная микроскопия. В ходе исследований сплав деформировался до относительной деформации 0,1–1,0 %, температура деформирования составила 20–600 °С. Данные эксперименты позволили Л. Е. Карькиной и А. Б. Ноткину впервые для сплава TiAl определить условия прохождения единичных дислокаций через двойниковую границу. Пересечение двойников в TiAl изучалось Л. Е. Карькиной и А. Б. Ноткиным в [107], при этом было выявлено зарождение новых двойников в результате рассматриваемого пересечения.

Важное практическое значение имеет изучение роли двойникования в процессах разрушения твердых тел [51]–[53], [150], [181]–[205]. Основные результаты исследований в этом направлении обобщены В. М. Финкелем, В. А. Федоровым, А. П. Королевым в монографии [43]. В работе [51], например, при исследовании роли двойникования в процессе разрушения использовались монокристаллы кремнистого железа, которые подвергались одноосному растяжению со скоростью $\dot{\epsilon} \approx 0,5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ вдоль оси [001] в интервале температур от –50 до 100 °С. Определены области зарождения трещин у двойников. Трещины зарождались в местах пересечения двойников. Аналогично в [181] В. А. Федоровым, С. Н. Плужниковым, Т. Н. Плужниковой, С. П. Дудаковым и А. М. Кириловым изучено разрушение сдвойникованных поликристаллов кремнистого железа. В [182] В. М. Финкелем, А. М. Савельевым и А. П. Королевым получена температурная зависимость активности двойникования при растяжении монокристаллического кремнистого железа. Установлено, что имеется температурный интервал (20–200 °С) наибольшей интенсивности двойникования. В [52] В. А. Федоровым, В. А. Курановой, Ю. И. Тялиным, С. Н. Плужниковым изучалось влияние распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах на характер зарождения трещин у вершины клиновидного двойника, а в [53] В. М. Финкелем, А. П. Королевым, В. А. Федоровым, Ю. И. Тялиным изучено развитие трещины вдоль системы параллельных ей двойников. Установлено, что такая система двойников может подавлять поле трещины. Таким образом, двойникование может выступать как источником разрушения, так и каналом, подавляющим развитие трещин.

Интерес к двойникованию полупроводниковых материалов вызван широким их использованием в электронике и требованием высокой степени надежности электронной техники, так как двойникование может оказывать существенное влияние на проводимость полупроводников [206]–[208]. В [209] М. Я. Дашевским и Р. В. Кибизовым

рассмотрены различные двойниковые структуры в кремнии и дана им классификация. Изучены механизмы формирования вторичных дефектов, обусловленных когерентными двойниковыми границами. Разработаны атомные модели кристаллов с двойниковыми ламелями, что углубило понимание процесса двойникового твердых тел.

В [210] Д. И. Савицким, С. Б. Узбизским, Л. О. Василечко, А. О. Матковским, И. М. Сывороткой исследовалось двойникование монокристаллов LaGaO_3 . Монокристаллы выращивались методом Чохральского вдоль направления $[110]$. В результате с использованием рентгенодифракционных и металлографических методов были обнаружены двойники типа $\{112\}$, $\{110\}$ и $\{211\}$ в сдвоенных кристаллах с ромбоэдрической структурой. Для анализа процесса двойникового в $[210]$ использовался кристаллографический подход, который дал возможность описывать двойникование на макроскопическом уровне.

С практической точки зрения особый интерес представляет исследование двойникового высокопрочных материалов [211]–[216]. В связи с чем Туран и Новлес (*Turan and Knowles*) в [217] исследовали двойникование частиц гексагонального нитрида бора, внедренных в композиционный материал $\text{Si}_3\text{N}_4\text{--SiC}$, и установили, что двойники в $h\text{--BN}$ имели вид множественных полос в плоскостях $\{11\bar{2}2\}$.

Ли (*Lee*) и его сотрудники в работе [218] изучали атомную структуру двойниковых границ (101) и (301) в TiO_2 . Исследования проводились расчетными методами с использованием модели ионных оболочек. Результаты сравнивались с наблюдениями, выполненными с помощью высокоразрешающей электронной микроскопии. Установлено, что самой низкой энергией обладает граница (301) . Этой границе присуща зеркальная симметрия металлической и кислородной решеток.

Уровень развития современной исследовательской техники таков, что позволяет детально изучать наноразмерные объекты [25], [99], [207], [219]–[221]. Это предрешило появление нового научного направления, связанного с изучением двойникового нанокристаллов. Так, Ву (*Wu*) в работе [139] представил результаты исследований двойниковых границ в нанокристаллах никеля. Этой же проблеме посвящена работа [140] Фенга (*Feng*) и сотрудников. Исследованию двойникового нанокристаллов NiTi посвящена работа [141] Вайтца (*Waitz*) и сотрудников. Лиао (*Liao*) и другие в работе [142] методом высокоразрешающей электронной микроскопии обнаружили когерентные и некогерентные двойниковые границы в нанокристаллах алюминия. В [143] М. Ю. Гуткиным, И. А. Овидько и Н. В. Скибой

рассмотрен дислокационно-дисклинационный безбарьерный механизм образования двойников в нанокристаллических материалах. Установлено, что критические напряжения образования нанодвойника увеличиваются при уменьшении мощности дисклинационного диполя.

В последнее время наметился всплеск публикаций, посвященных такому новому физическому явлению, как нанодвойникование [145], [222]–[227].

Практический и научный интерес к двойникованию возрос при обнаружении влияния двойниковых границ на величину критической температуры сверхпроводимости. В работе [135] И. Н. Хлюстиком и М. С. Хайкиным показано, что двойникование способствует увеличению критической температуры сверхпроводимости в чистом олове. Аналогичные результаты получены в [136] Бойко и Ченом (*Boyko and Chan*) в случае сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ и в [137] Ирсой (*Jirsa*) с сотрудниками для Re-123.

Наряду со скольжением двойникование является основным каналом пластической деформации деформируемых твердых тел [108], [109]. Некогерентные двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений и могут приводить к образованию трещин [43]. Поэтому учет двойникования в прогнозе эксплуатационных характеристик применяемых на практике материалов является весьма важным. Двойникованию при комнатных температурах подвержен широкий класс материалов, нашедших широкое применение в электронике, машиностроении. Широко распространенные в машиностроении сплавы на основе железа активно двойникуются [43], [51]–[54], [181], [182], [228], [229]. В [229] С. А. Баранниковой, В. И. Даниловым и Л. Б. Зуевым сообщалось о наблюдении двойников в легированном γ -Fe, а в [230] Порезом (*Porez*) с сотрудниками обнаружены двойники в ферроэлектрической стали. В [231] В. С. Багаев, Ю. В. Клевко, В. С. Кривобок, В. П. Мартовицкий, В. В. Зайцев, С. Г. Черноок, Е. Е. Онищенко в кристаллах ZnTe обнаружили изменение спектра фотолюменесценции у границ двойников. Двойникованию, как это сообщалось В. И. Марченко в [232], подвержены даже смектики. Хербзомер (*Herbsommer*) с сотрудниками в [233] наблюдали двойникование в $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$; Кайнл (*Kienle*) и Симон (*Simon*) в [234] исследовали полисинтетическое двойникование $RbIn_3S_5$, а Аморин (*Amorin*) с сотрудниками в [235] обнаружили двойники в $SrBi_2Ta_2O_9$. В [236] Б. В. Миронов, Б. А. Максимов и М. И. Сирота представили результаты исследований двойникования $Na_5YSi_4O_{12}$. Как отмечалось в [237]

В. Ю. Тополовым, Л. Е. Балюнисом, А. В. Туриком и О. Е. Фесенко, двойникованию подвержены ромбические фазы кристаллов PbHfO_3 . В [238] Р. А. Тамазян, Ю. А. Малиновский и А. М. Ильинец обнаружили микродвойники в содалите.

Широко исследовано в настоящее время двойникование таких материалов, как висмут [239], сурьма [240], [241], цинк [242], [243], кадмий [244]. Начаты исследования двойникования в пленочных материалах [134], [245].

В настоящее время интерес к двойникованию обусловлен все большим использованием на практике материалов с памятью формы, уникальные свойства которых полностью определяются двойникованием и бездиффузионными фазовыми превращениями, проявления которых являются аналогом двойникования [101], [104]–[107], [109], [117]–[134], [144], [150], [167]–[180], [246]–[268].

1.2. Теория двойникования И. М. Лифшица

Рассмотрению двойникования кристаллов (анизотропных твердых тел) с позиций механики деформируемого твердого тела посвящено не так много работ, например: [29], [43], [108]–[111]. Поэтому представляется целесообразным более детальное рассмотрение этих работ, так как развитию этого направления посвящена данная работа.

На основании опытов Р. И. Гарбера [159]–[161], [163], [165] в работе [111] И. М. Лифшицем в числе первых была предложена макроскопическая модель двойникования кристаллов. Эта модель позволила показать целесообразность представлений о нелинейной зависимости между тензором напряжений σ_{ij} и тензором деформаций ε_{ij} (i, j принимают значения x, y или z). Рассматривался плоский случай, который соответствует, например, случаю нагрузки кристалла лезвием, приложенным по прямой пересечения плоскости двойникования с поверхностью кристалла. На рис. 1.1 ось Y является следом плоскости двойникования, а α' – угол двойникования, который в работе И. М. Лифшица [111] принимался малым, что позволило деформацию сдвига описывать обычными соотношениями теории упругости. Однако такое приближение можно считать недостатком теории И. М. Лифшица, так как, например, для кальцита $\alpha' = 19^\circ$. Такой угол нельзя считать малым.

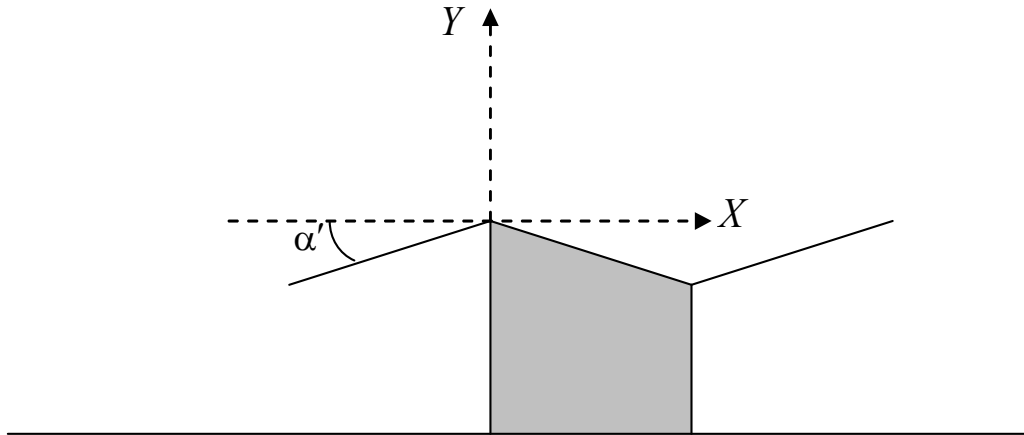


Рис. 1.1. Схема для определения угла двойникования [111]

Зависимость между тензором напряжений σ_{ij} и деформациями сжатия ϵ_{xx} и ϵ_{yy} в работе И. М. Лифшица [111] в первом приближении считалась линейной, а при выяснении зависимости между σ_{xy} и деформациями сдвига ϵ_{xy} учитывалось наличие равновесного двойникового положения при $\epsilon_{yy} = 2\alpha'$, симметричного с первоначальным относительно оси OY . Это может быть описано зависимостью, представленной на рис. 1.2.

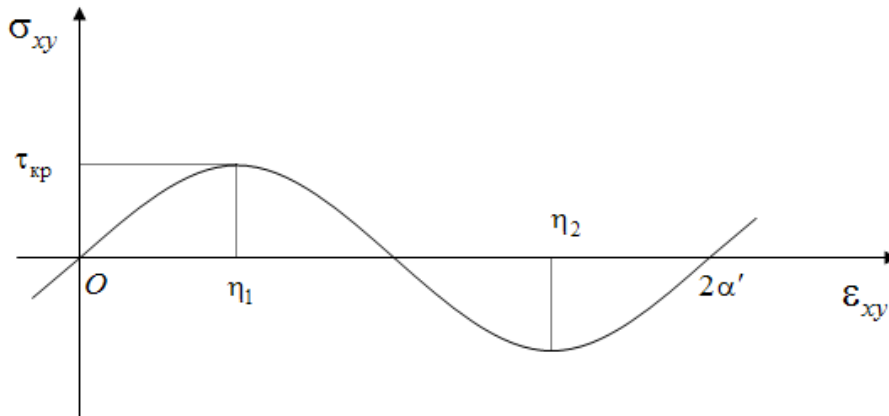


Рис. 1.2. Зависимость между скалывающими напряжениями и сдвиговыми деформациями в модели И. М. Лифшица [111]

Требование механической устойчивости относительно бесконечно малых сдвигов приводит к неравенству [111]:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \epsilon_{xy}} > 0. \quad (1.1)$$

Это означает, что состояние $\eta_1 < \varepsilon_{xy} < \eta_2$, $\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \varepsilon_{xy}} < 0 \right)$ является неустойчивым и существовать не может, приводя к тому, что область кристалла, в которой деформация ε_{xy} достигла критического значения η_1 , перейдет в двойниковое положение $\varepsilon_{xy} > \eta_2$. При этом область двойника (область 1 на рис. 1.3) будет отделена от остального кристалла (область 2 на рис. 1.3) резкой границей разрывов тензора деформаций [111]:

$$\varepsilon_{xy}^{(2)} < \eta_1, \varepsilon_{xy}^{(1)} > \eta_2 \quad (\eta_1 = \eta, \eta_2 = 2\alpha' - \eta). \quad (1.2)$$

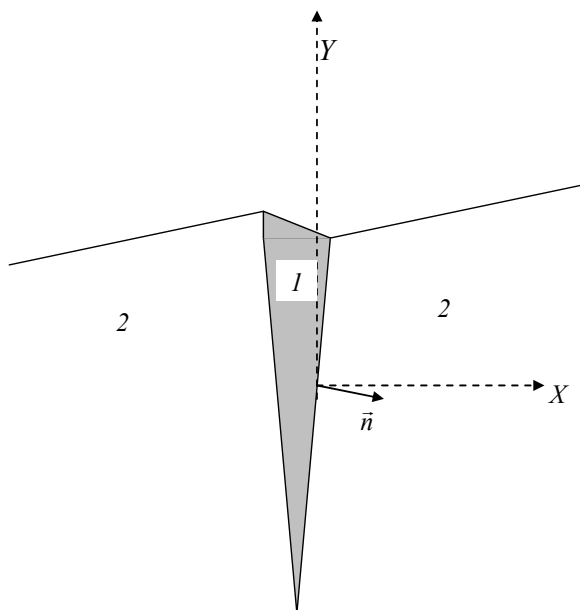


Рис. 1.3. Схематическое представление взаимного расположения сдвойникованной области 1 и остальной области кристалла 2 [111]

В работе И. М. Лифшица [111] исследовалось условие равновесия между областями 1 и 2 на рис. 1.3. Выяснялось, к какой форме двойников это условие приводит. При этом зависимость $\sigma_{xy}(\varepsilon_{xy})$ на участках $(0, \eta_1)$ и $(\eta_2, 2\alpha')$ рис. 1.2 заменялась на отрезки, что аналогично введению эффективного модуля сдвига $\mu_{эф}$ для каждого из участков устойчивости кристалла. Этот модуль может сильно отличаться от модуля сдвига μ в законе Гука для $\varepsilon_{xy} = 0$, но этого не происходит при интересующих деформациях, сравнимых с α' . На основании данных предположений в [111] для σ_{xy} в областях 1 и 2 рис. 1.3 были получены следующие соотношения:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijlm} \varepsilon_{lm} - \sigma_{ij}^0 \psi^*; \quad \psi^* = \begin{cases} 0; & \varepsilon_{12} < \eta_1 \\ 1; & \varepsilon_{12} > \eta_2 \end{cases} \quad (x = x_1, y = x_2); \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda_{ijlm} \varepsilon_{lm}^0 = (\lambda_{ij12} + \lambda_{ij21}) 2\alpha' = 4\alpha' \lambda_{ij12},$$

где λ_{ijlm} – тензор модулей упругости монокристалла, в котором модуль сдвига $2\lambda_{1212}$ имеет значение $\mu_{\text{эф}}$ вместо значения μ .

Уравнение равновесия имеет вид [1], [111]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i, \quad (1.4)$$

где F_i – объемная сила.

Подстановка (1.3) в (1.4) позволяет получить уравнения [111]:

$$\lambda_{ijlm} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} = F_i + f_i; \quad f_i = \sigma_{ij}^0 \frac{\partial \psi^*}{\partial x_j} = f_i^0 |\nabla \psi^*|,$$

$$f_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j,$$

где u_l – смещение; f_i – сосредоточенные силы интенсивности f_i^0 . Эти силы возникают на границе областей 1 и 2 из-за дополнительного слагаемого $\sigma_{ij}^0 \psi^*$ в (1.3). Вектор \vec{n} является единичным вектором нормали к поверхности двойника (рис. 1.3).

Для кубической решетки в [111] приняты следующие упрощения:

$$\lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_1, \quad \lambda_{1122} = \lambda_2, \quad 2\lambda_{1212} = \mu_{\text{эф}}, \quad \lambda_{1121} = \lambda_{2221} = 0.$$

Тогда

$$f_1^0 = \sigma_{11}^0 n_1 + \sigma_{12}^0 n_2 = f_0 n_2, \quad f_2^0 = \sigma_{21}^0 n_1 + \sigma_{22}^0 n_2 = f_0 n_1, \quad f_0 = 2\mu_{\text{эф}} \alpha'. \quad (1.5)$$

Условие механической устойчивости в работе [111] определялось из распределения деформаций ε_{ij} под влиянием сосредоточенной силы F_i , приложенной в точке, заданной вектором $\vec{\xi}$, связывающим начало декартовой системы координат с этой точкой. В плоской задаче теории упругости имеет место следующее соотношение [1], [111]:

$$\varepsilon_{xy}(\vec{r}) = F_i g_i(\vec{r}, \vec{\xi}),$$

где $g_i(\vec{r}, \vec{\xi})$ – некоторая неизвестная функция, связывающая сдвиговую деформацию ε_{xy} с силой F_i .

Исходя из данного соотношения, при известной форме границы двойника, можно записать [111]:

$$\varepsilon_{xy}(\vec{r}) = \vec{F}\vec{g}(\vec{r}, \vec{\xi}) + f_0\psi_C(\vec{r}).$$

Здесь $\psi_C(\vec{r})$ зависит от вида границы C , заданного уравнением $\vec{\xi} = \vec{\xi}(s)$, и находится из соотношения [111]:

$$f_0\psi_C(\vec{r}) = \int_C f_i^0(\vec{\xi})g_i(\vec{r}, \vec{\xi})ds,$$

где ds – дифференциал длины дуги границы C .

Учитывая (1.5) и соотношения [111]:

$$n_1 ds = -d\eta; n_2 ds = d\xi; (\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta),$$

И. М. Лифшицем было получено [111]:

$$\psi_C(\vec{r}) = \int_C \left\{ g_1(\vec{r}, \vec{\xi})d\xi - g_2(\vec{r}, \vec{\xi})d\eta \right\}.$$

В случае бесконечной плоскости [111]:

$$g_i(\vec{r}, \vec{\xi}) = \text{Re} \left\{ \frac{A_{1i}}{z_1 - \zeta_1} + \frac{A_{2i}}{z_2 - \zeta_2} \right\},$$

где

$$z_i = x + \mu_i y; \zeta_i = \xi + \mu_i \eta.$$

Здесь μ_i, A_{ji} – комплексные числа, связанные с константами упругости кристалла λ_{ijlm} . Отсюда, как следует из [111]:

$$\varepsilon_{xy}(\vec{r}) = \text{Re} \left\{ \frac{A_{1i}F_i}{z_1} + \frac{A_{2i}F_i}{z_2} + f_0 \int_C \left[\frac{A_{11}d\xi - A_{12}d\eta}{z_1 - \zeta_1} + \frac{A_{21}d\xi - A_{22}d\eta}{z_2 - \zeta_2} \right] \right\}. \quad (1.6)$$

В данном соотношении интеграл берется по контуру двойниковой области.

Согласно (1.2) условия механической устойчивости примут вид [111]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy}^{(1)} &= \vec{F}\vec{g}(\vec{r}) + f\psi_C^{(1)}(\vec{r}) < \eta_2 \text{ внутри области } 1 \text{ (рис. 1.3),} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} &= \vec{F}\vec{g}(\vec{r}) + f\psi_C^{(2)}(\vec{r}) < \eta_1 \text{ внутри области } 2 \text{ (рис. 1.3).}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Скачок $\Delta\varepsilon_{xy}$ в точке \vec{r}_C на границе двойника определяется сосредоточенной силой \vec{f} на границе и наклоном двойниковой границы, что следует из (1.5). Из (1.4) и (1.5) можно получить уравнения [111]:

$$\begin{aligned}\lambda_{11lm}\Delta\varepsilon_{lm} \cdot \vec{n}_1 + \lambda_{12lm}\Delta\varepsilon_{lm} \cdot \vec{n}_2 &= \vec{f}\vec{n}_2; \\ \lambda_{21lm}\Delta\varepsilon_{lm} \cdot \vec{n}_1 + \lambda_{22lm}\Delta\varepsilon_{lm} \cdot \vec{n}_2 &= \vec{f}\vec{n}_1.\end{aligned}$$

Еще одно соотношение в [111] И. М. Лифшицем получено из условия непрерывности тангенциальной производной вектора смещения вдоль границы:

$$n_2^2\Delta\varepsilon_{xx} + n_1^2\Delta\varepsilon_{yy} - 2n_1n_2\Delta\varepsilon_{xy} = 0. \quad (1.8)$$

С учетом (1.6) для значений λ_{ijlm} будем иметь [111]:

$$\begin{aligned}\lambda_1n_1\Delta\varepsilon_{xx} + \lambda_2n_1\Delta\varepsilon_{yy} + \mu_{\text{эф}}n_2\Delta\varepsilon_{xy} &= 2\alpha'n_2\mu_{\text{эф}}, \\ \lambda_2n_2\Delta\varepsilon_{xx} + \lambda_1n_2\Delta\varepsilon_{yy} + \mu_{\text{эф}}n_1\Delta\varepsilon_{xy} &= 2\alpha'n_1\mu_{\text{эф}}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Из (1.8), (1.9) находятся $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$ и $\Delta\varepsilon_{xy}$. Это дает [111]:

$$\Delta\varepsilon_{xy} = \frac{2\mu_{\text{эф}}\alpha'}{\mu_{\text{эф}} + n_1^2n_2^2\beta},$$

где

$$\beta = \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_1 - 2n_1^2n_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

По обе стороны границы C должны выполняться условия равновесия, которые с учетом [111]:

$$\varepsilon_{xy}^{(1)}(\vec{\xi}) = \varepsilon_{xy}^{(2)}(\vec{\xi}) + \Delta\varepsilon_{xy},$$

приводят к неравенству [111]:

$$\Delta\varepsilon_{xy} > \eta_2 - \varepsilon_{xy}^{(2)} > \eta_2 - \eta_1 = 2(\alpha' - \eta),$$

которое может быть приведено к виду [111]:

$$\frac{n_1^2 n_2^2 \beta}{(\mu_{\text{эф}} + n_1^2 n_2^2 \beta)} < \frac{\eta}{\alpha'}.$$

Из-за малости $\mu_{\text{эф}}$ данное соотношение выполняется лишь при малом $n_1^2 n_2^2$, удовлетворяющем неравенству [111]:

$$\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \ll \frac{\tau_{\text{кр}}}{2} \left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1} \right) (\alpha' - \eta), \quad \tau_{\text{кр}} = \sigma_{xy}^{(\text{кр})} = \mu_{\text{эф}} \eta, \quad (1.10)$$

где φ – угол наклона поверхности двойника к плоскости двойникова-ния ($n_1 = \cos \varphi$, $n_2 = \sin \varphi$).

Это позволило в работе [111] И. М. Лифшицу сделать вывод о том, что либо $\sin \varphi \ll 1$, либо $\cos \varphi \ll 1$, и границы двойника образуют малый угол с осью OY или OX . Возможность формирования малого угла между границей двойника и осью OX исключается, так как между участками границы с $n_1 \ll 1$ и I должна лежать угловая точка излома в связи с тем, что промежуточные углы наклона не удовлетворяют условию (1.10). При этом выражения $\psi_C(\vec{r})$, $\varepsilon_{xy}^{(1)}$ и $\varepsilon_{xy}^{(2)}$ обращаются в логарифмическую бесконечность во всякой угловой точке.

Для оценки интегралов $\psi_C(\vec{r})$ вблизи угловой точки в работе [111] предложено воспользоваться формулой (1.6), так как конечные размеры кристалла при этом роли не играют. Таким образом, следует оценить интеграл типа [111]:

$$I = \int_C \frac{Ad\xi + Bd\eta}{z - \zeta}; \quad z = x + i\mu y, \quad \zeta = \xi + i\mu\eta \quad (A, B - \text{постоянные})$$

вблизи угловой точки z_0 кривой C . Углы наклона касательной к кривой C и к оси OX в угловой точке равны θ_1 и θ_2 .

Тогда [111]:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{Ad\xi + Bd\eta}{z - \zeta} &= \int_C \left(A \frac{d\xi}{dz} + B \frac{d\eta}{dz} \right) d \ln(z - \zeta) \cong -\ln|z - z_0| \left(A \frac{d\xi}{dz} + B \frac{d\eta}{dz} \right) \Big|_{(2)}^{(1)} = \\ &= (A - iB/\mu) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ln|z - z_0|, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \mu \operatorname{tg} \theta_1; \operatorname{tg} \varphi_2 = \mu \operatorname{tg} \theta_2.$$

Логарифмическая особенность в данном случае исчезает, когда $\theta_1 = \theta_2$, или $\theta_1 = \theta_2 + \pi$. В этом случае интеграл не расходится только в точке возврата.

Неограниченное возрастание $\varepsilon_{xy}^{(1)}$ и $\varepsilon_{xy}^{(2)}$ в окрестности угловой точки противоречит условиям механической устойчивости (1.7), что и указывает на невозможность существования угловых точек границы и участков, где граница образует малый угол с осью OX . По этой причине в работе [111] сделан вывод, что угол при вершине двойниковой области должен быть нулевым.

Таким образом, макроскопическая теория И. М. Лифшица утверждает, что двойник должен иметь форму длинного и узкого клина. Максимально возможный угол наклона поверхности двойника к плоскости двойникования может быть найден из соотношения [111]:

$$\varphi_{\max}^2 \approx \frac{\tau_{\text{кр}}}{\lambda \alpha'}.$$

Критические напряжения $\tau_{\text{кр}} = \sigma_{xy}^{\text{кр}}$ не выражаются через модули упругости λ_{ijlm} и фигурируют в теории Лифшица в качестве независимого параметра.

Несмотря на то что полученные результаты теории Лифшица согласуются с экспериментальными данными Р. И. Гарбера [159]–[161], [163], [165], согласно которым $\tau_{\text{кр}} \approx 10$ МПа, что дает $\varphi_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-3}$, в настоящее время вопрос об энергетической предпочтительности существования тонких остаточных двойников остается открытым.

Замечательной особенностью работы И. М. Лифшица [111] является возможность расчета на основании его макроскопической теории напряжений и деформаций у тонкого двойника. При этом они представлялись в виде суммы напряжений, возникающих от внешней силы, и напряжений от дополнительных поверхностных сил двойника [111]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \left\{ \sigma_{ij} \right\}_C$$

В неограниченной среде напряжения под влиянием сосредоточенной силы \vec{f} , приложенной в точке (ξ, η) , вычисляются по формулам [111]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\operatorname{Re}\left\{\frac{D_1}{z_1 - \zeta_1} + \frac{D_2}{z_2 - \zeta_2}\right\}, \\ \sigma_{yy} &= -2\operatorname{Re}\left\{\frac{D_1\gamma_1^2}{z_1 - \zeta_1} + \frac{D_2\gamma_2^2}{z_2 - \zeta_2}\right\}, \\ \sigma_{xy} &= 2\operatorname{Re}\left\{\frac{D_1\gamma_1}{z_1 - \zeta_1} + \frac{D_2\gamma_2}{z_2 - \zeta_2}\right\}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь $D_i = A_i f_1 + B_i f_2$; $z_i = x + \frac{iy}{\gamma_i}$; $\zeta_i = \xi + \frac{i\eta}{\gamma_i}$; A_i, B_i, γ_i – постоянные, связанные с модулями упругости среды.

Величина $\{\sigma_{ij}\}$ получается интегрированием (1.11) вдоль границы двойника C [111]:

$$\{\sigma_{ij}\}_C = \int_C \sigma_{ij}(\vec{r} - \vec{\xi}) ds.$$

Согласно (1.5):

$$f_1 = f(d\xi/ds), \quad f_2 = -f(d\eta/ds).$$

В приближении тонкого двойника длиной L в неограниченной среде при учете уравнений левой и правой границ двойника, имеющих вид $x = \xi_1(y)$ и $x = \xi_2(y)$, при учете справедливого для z вне области двойника равенства типа [111]:

$$\int d\zeta/(z - \zeta) = 0.$$

В [111] для точки (x, y) вне области двойника было получено:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{Ad\xi - Bd\eta}{z - \zeta} &= (A - i\gamma B) \int \frac{d\xi}{z - \zeta} = \\ &= C^* \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{\xi_1'(\eta)}{(y - \eta) - i\gamma[x - \xi_1(\eta)]} - \frac{\xi_2'(\eta)}{(y - \eta) - i\gamma[x - \xi_2(\eta)]} \right\} d\eta;\end{aligned}$$

$$C^* = -\gamma(\gamma B + iA).$$

Считая двойник достаточно тонким, в [111] полагалось:

$$\xi_1(\eta) - \xi_2(\eta) = \varepsilon\delta(\eta), \quad \varepsilon \ll 1,$$

где $\varepsilon = \max(\xi'_1(\eta) - \xi'_2(\eta))$ – наибольший угол между границами двойника.

Тогда, как показано в [111]:

$$\delta(L/2) = \delta(-L/2) = \delta'(L/2) = \delta'(-L/2) = 0, \quad |\delta'(\eta)| \leq 1.$$

С точностью до членов второго порядка получено [111]:

$$\int_C \frac{Ad\xi - Bd\eta}{z - \zeta} = \varepsilon C^* \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\delta'(\eta)d\eta}{y - \eta - i\gamma(x - \xi(y))} + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\xi = \xi_1, \quad x - \xi_1(y) \geq 0; \quad \xi = \xi_2, \quad x - \xi_2(y) \geq 0; \quad \xi = 0, \quad y > L/2, \quad y < -L/2.$$

Отсюда, с учетом (1.11), получается [111]:

$$\{\sigma_{xx}\}_C = 2\operatorname{Re}\{C_1\varphi(v_1) + C_2\varphi(v_2)\}\varepsilon;$$

$$\{\sigma_{xy}\}_C = 2\operatorname{Re}\{iC_1\gamma_1\varphi(v_1) + iC_2\gamma_2\varphi(v_2)\}\varepsilon;$$

$$\{\sigma_{yy}\}_C = 2\operatorname{Re}\{C_1\gamma_1^2\varphi(v_1) + C_2\gamma_2^2\varphi(v_2)\}\varepsilon,$$

где

$$C_j = -\gamma_j(\gamma_j B_j + iA_j); \quad v_1 = y - i[x - \xi(y)]\gamma_1; \quad v_2 = y - i[x - \xi(y)]\gamma_2;$$

$$\varphi(v) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\delta'(\eta)d\eta}{\eta - v}.$$

Это справедливо на больших по сравнению с толщиной двойника расстояниях, $v_i = y + i\gamma_i x$. На границе двойника при $v_1 = v_2 = y$ получается [111]:

$$\varphi(y \pm i0) = \text{V.p.} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\delta'(\eta)d\eta}{y - \eta} \pm i\pi\delta'(y).$$

Отсюда значения для напряжений и деформаций на левой и правой внешней границе двойника, соответственно, можно рассчитать по формуле [111]:

$$\{\sigma_{xy}\}_C^{(2)} = \mu_{эфф} \{\varepsilon_{xy}\}_C^{(2)} = \varepsilon b^* \text{V.p.} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\delta'(\eta) d\eta}{y - \eta} \pm \varepsilon \beta^* \delta'(y),$$

где

$$b^* = \text{Im}\{C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2\}; \quad \beta^* = \text{Re}\{C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2\} \pi.$$

Для скачка $\Delta \varepsilon_{xy}$ на границе двойника согласно (1.6) получается [111]:

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^{(1)} - \varepsilon_{xy}^{(2)} = 2\alpha' + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда на внутренних границах [111]:

$$\{\varepsilon_{xy}\}_C^{(1)} = 2\alpha' + \varepsilon b^* \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\delta'(\eta) d\eta}{y - \eta} \pm \varepsilon \beta^* \delta'(y).$$

При $\delta(\eta) = 2\eta/(\eta^2 + 1)$ имеем [114]:

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\eta d\eta}{(\eta - y)(\eta^2 + 1)} = \frac{2\pi}{1 + iy} = \frac{2\pi}{1 + y^2} - \frac{2\pi y}{1 + y^2}.$$

Тогда при достаточно малом ε имеет место [111]:

$$\{\varepsilon_{xy}\}_C^{(1)} = 2\alpha' + 2\pi\varepsilon (b^* \pm \beta^* y) / (1 + y^2) > 2\alpha' - \eta;$$

$$\{\varepsilon_{xy}\}_C^{(2)} = 2\pi\varepsilon (b^* \pm \beta^* y) / (1 + y^2) < \eta.$$

Это означает, что такой двойник может существовать без внешней нагрузки [111].

1.3. Теория дислокаций и ее место в механике деформируемого твердого тела

В основе дислокационной теории двойникования лежит понятие двойнивающей дислокации [109], которая является частичной дислокацией Шокли [26]. Поэтому необходимо рассмотрение основ теории дислокаций и ее места в механике деформируемого твердого тела.

В механике деформируемого твердого тела понятие «дислокация» было введено задолго до экспериментального обнаружения этого дефекта физиками. Введение дислокационной терминологии принадлежит таким немецким и итальянским ученым, как Г. Вейнгартен, А. Сомиглиана и В. Вольтера [23]. Как указывается в [23], данный исторический факт при создании строгой теории дислокаций Дж. Бюргерсом был забыт. Однако в трудах таких механиков, как А. Ляв [24], Н. И. Мухелишвили [269], в их книгах по теории упругости были включены разделы, посвященные теории дислокаций, еще до введения понятия о дислокации в физике конденсированного состояния.

Различие в рассмотрении дислокаций в механике деформируемого твердого тела и в физике конденсированного состояния состоит в том, что в механике дислокация рассматривается в сплошной среде без учета ее атомного строения, а в физике – с позиций атомного строения вещества [41].

Используемая в механике гипотеза о сплошности среды [1] подразумевает постановку и решение задачи о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного дислокациями, в то время как в физике конденсированного состояния решение такой задачи правомерно с позиции смещений атомов из равновесного положения, обусловленного искажениями кристаллической решетки [270].

Такие механики, как В. Вольтера [1], Дж. Гиллман [271] и А. Ляв [24], решали задачи о равновесии сплошной среды, рассматривая разрезанный цилиндр. Решенные ими задачи стали востребованными после открытия дислокаций для расчета у них полей напряжений с позиций механики деформируемого твердого тела. Одно из приложений таких задач – расчет напряженно-деформированного состояния у краевой дислокации. Для этого, следуя методам механики деформируемого твердого тела, рассматривается цилиндр с незаконченным сдвигом (рис. 1.4).

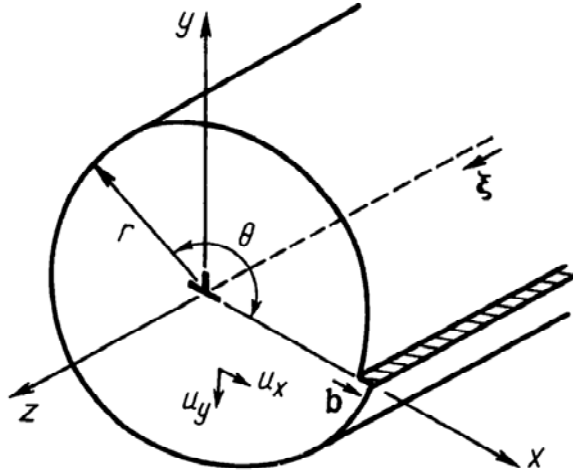


Рис. 1.4. Схематическое изображение краевой дислокации в цилиндре, данное Дж. Хиртом и И. Лоте [26]

Представленное на рис. 1.4 деформирование цилиндра, рассматриваемое в механике, соответствует скольжению при обнаруженных позднее дислокационных процессах [26]. Так как вдоль оси z градиент напряжений отсутствует, то для расчета смещений в рассматриваемом цилиндре, деформируемом так, как это показано на рис. 1.4, достаточно решить плоскую задачу теории упругости, для которой справедливо уравнение [1], [26]:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 = 0; \\ \partial u_1 / \partial x_3 = 0, \partial u_2 / \partial x_3 = 0, \partial u_3 / \partial x_3 = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

где u_i – смещения; x_i ($i = 1, 2, 3$ или x, y, z) – прямоугольные декартовы координаты.

Исходя из условий (1.12), можно получить дополнительные характеристики плоского деформированного состояния [26]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Система (1.13) получена из условия равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + f_i^V = 0,$$

или в более сжатом виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^V = 0,$$

где f_i^V – i -я компонента объемной силы, действующей на единицу объема.

Уравнения (1.13) выполняются, если [26]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}; \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}; \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{cases} \quad (1.14)$$

где ψ – функция напряжений Эйри.

Дифференцированием соотношений Коши [26]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

можно получить уравнение совместности для случая плоской деформации:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.16)$$

Подставляя в (1.16) выражения ε_{ij} из:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]; \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23}; \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{31}; \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \end{array} \right.$$

и, используя соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda} = \frac{9\mu B^*}{3B^* + \mu} = 2\mu(1 + \nu); \\ \nu = \frac{3B^* - 2\mu}{2(3B^* + \mu)} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{E - 2\mu}{2\mu}; \\ \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu}, \end{array} \right.$$

где

$$B^* = \frac{1}{K}; \quad K = \frac{3}{3\lambda + 2\mu};$$

E – модуль Юнга; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; λ – коэффициент Ламе, получим [26]:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) может быть представлено в виде [1]:

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2 \psi = 0. \quad (1.18)$$

Прямая краевая дислокация создает плоское деформированное состояние, определяемое приведенными в монографии Дж. Хирта и И. Лоте [26] условиями:

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0.$$

Для функции напряжений Эйри уравнение (1.18) в полярных координатах, как это было показано, например, в [26] Дж. Хиртом и И. Лоте, для краевой дислокации примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi = \beta_1 r^{-1} \sin \theta, \quad (1.19)$$

где β_1 – константа.

Частным решением уравнения (1.19) является [26]:

$$\psi_{\text{кр}} = \frac{\beta_1}{2} r \sin \theta \ln r. \quad (1.20)$$

Для модуля вектора Бюргерса краевой дислокации справедливо приведенное в монографии Дж. Хирта и И. Лоте [26] соотношение

$$b_{\text{кр}} = - \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_{xx}(x, \eta) - \varepsilon_{xx}(x, -\eta)] dx,$$

где $\eta \rightarrow 0$ и η положительно.

С учетом (1.18) из закона Гука получим [26]:

$$b_{\text{кр}} = - \frac{2\pi(1-\nu)\beta_1}{\mu}; \quad \beta_1 = - \frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}.$$

Тогда функция напряжений (1.20) примет вид [26]:

$$\psi_{\text{кр}} = - \frac{\mu b_{\text{кр}} y}{4\pi(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2). \quad (1.21)$$

Согласно работе [269] данная задача может быть поставлена и в смещениях \mathbf{u} с помощью двумерной δ -функции в виде:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \left[\begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t}, b \end{matrix} \right] \delta(\boldsymbol{\xi}), \quad (1.22)$$

где \mathbf{t} – вектор касательной к линии дислокации; $\boldsymbol{\xi}$ – двумерный радиус-вектор, который в заданной точке отсчитывается от линии дислокации в перпендикулярной вектору \mathbf{t} плоскости (рис. 1.4).

Для прямолинейной краевой дислокации, когда проекции ее вектора Бюргерса на оси x , y и z равны $b_x = b_{\text{кр}}$, $b_y = b_z = 0$, уравнение (1.22) примет вид [58]:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -b_{\text{кр}} \mathbf{j} \delta(r), \quad (1.23)$$

где \mathbf{j} – единичный вектор вдоль оси y .

В результате решения данного уравнения, с учетом (1.15), получим [26], [58]:

$$u_x = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right],$$

$$u_y = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{4(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right]. \quad (1.24)$$

Используя (1.21), дифференцируя (1.14), как было показано в [26], для расчета напряжений у единичной краевой дислокации будем иметь:

$$\sigma_{xx} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\mu\nu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (1.25)$$

В полярных координатах соотношения (1.25) примут вид [26]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{\sin\theta}{r};$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{\cos\theta}{r};$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -\frac{\mu\nu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)} \frac{\sin\theta}{r};$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0,$$

где r и θ – полярные координаты (рис. 1.4).

Аналогично, исходя из условий [26]:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2),$$

можно получить уравнение [1], [26], [158]:

$$\nabla^2 u_3 = 0. \quad (1.26)$$

Тогда для решения задачи о равновесии цилиндра со сдвигом, представленным на рис. 1.5, приведенным Дж. Хиртом и И. Лоте в [26], аналогом винтовой дислокации в однородной изотропной среде, учитывая, что $b_x = b_y = 0$, $b_z = b_B$ (b_B – модуль вектора Бюргерса винтовой дислокации), будем иметь [1], [26]:

$$u_z = \frac{b_B}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1.27)$$

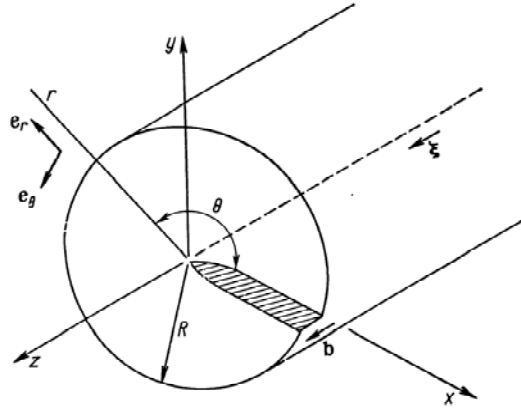


Рис. 1.5. Схематическое изображение винтовой дислокации в цилиндре, данное Дж. Хиртом и И. Лоте [26]

Поля напряжений в этом случае рассчитываются по формулам [1], [26]:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0. \quad (1.28)$$

В полярных координатах компоненты тензора напряжений, обусловленных винтовой дислокацией, выглядят следующим образом [26]:

$$\sigma_{z\theta} = \frac{\mu b_B}{2\pi r};$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следующим шагом в развитии механики деформируемого твердого тела стало создание континуальной теории пластичности и дислокаций. Основы этой теории были заложены в трудах таких механиков, как А. М. Косевич [29], В. И. Владимиров [42], [272], А. Н. Орлов [273], Дж. Эшелби [274], Э. Кренер [275]. При этом решалась задача, которая в случае ненагруженного твердого тела с дислокациями, следуя подходам работы [276], может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \tilde{S}_{ij} - S_{ij}^r = 0, \quad \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} < \frac{2}{3} Y_S^2,$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}, \quad p = -K\varepsilon_{kk}^{(e)}, \quad S_{ij} = 2\mu e_{ij}^{(e)}, \quad K = \lambda + \frac{2\mu}{3},$$

$$e_{ij}^{(e)} = \varepsilon_{ij}^{(e)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^{(e)}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}),$$

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij} + S'_{ij}, \quad S'_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{1}{3}\sigma'_{kk}\delta_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = -C'\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\alpha_{li}}{\partial x_k}, \quad \alpha_{ji} = \varepsilon_{jsp}\frac{\partial\beta_{pi}}{\partial x_s}, \quad (1.29)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений; β_{ij} – тензор пластической дисторсии; S_{ij} – тензор девиатора напряжений; \tilde{S}_{ij} – девиатор полных напряжений; S'_{ij} – тензор сил трения покоя; Y_S – предел текучести материала; e_{ij} – тензор девиатора деформаций; α_{ji} – тензор плотности дислокаций; ε_{ijk} – абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивиты; δ_{ij} – символ Кронекера; p – давление; K – модуль объемного сжатия; индекс (e) обозначает упругие деформации; индекс p обозначает пластические деформации; σ'_{ij} – вихревые самоуравновешенные силы, определяемые по формуле

$$\sigma'_{ij} = -C'\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\alpha_{li}}{\partial x_k} = -C'\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsp}\frac{\partial^2\beta_{pi}}{\partial x_k\partial x_s},$$

где C' – константа.

Граничные условия для рассматриваемой задачи ненагруженно-го упругого полупространства имеют вид [276]:

$$f_i = \sigma_{ij}n_j, \quad \varepsilon_{kjl}n_j\alpha_{li} = 0, \quad (1.30)$$

где f_i – поверхностная сила; n_j – компоненты вектора нормали к поверхности.

Условия (1.29) получены исходя из равенства нулю поверхностных интегралов в условии экстремальности $\delta S = 0$, где S – действие, для которого справедливо $S = \int L_\Sigma dt$ [277]. Здесь L_Σ – лагранжиан, который состоит из двух частей [277]:

$$L_\Sigma = L_e(D_4u_i, D_ju_i) + L_d(J_{ij}, \alpha_{ij}), \quad (1.31)$$

где

$$J_{ij} = -\left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{4j}}{\partial x_i}\right)$$

поток дислокаций.

Лагранжиан L_Σ инвариантен при преобразованиях [277]:

$$u'_i = u_i + h_i(x_j, t).$$

Здесь $h_i(x_j, t)$ – калибровочная функция.

При $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \ll 1$ $L_e(D_4 u_i, D_j u_i)$ находится из лагранжиана [277]:

$$L_e = \int dV \left[\frac{1}{2} \rho_{\text{ср}} \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right],$$

где $\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$. При этом используется замена [277]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \rightarrow D_4 u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \beta_{4i}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow D_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \beta_{ji}.$$

Здесь $\beta_{4i}(x_k, t)$, $\beta_{ji}(x_k, t)$ – калибровочные поля, связанные с лагранжианом [277]:

$$L_d = \frac{1}{2} \int (B' J_{ji} J_{ji} - C' \alpha_{ij} \alpha_{ij}) dV, \quad (1.32)$$

где B' – новая константа.

Тензора J_{ji} и α_{ij} , входящие в (1.32), удовлетворяют соотношениям [277]:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \alpha_{ij} n_i dS &= \int_{S_0} \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \beta_{lj}}{\partial x_k} n_i dS_0 = \oint \beta_{lj} dx_l = B_j^\Sigma; \\ - \int_{\partial S_0} J_{ij} dx_i &= \oint \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t} dx_i = \frac{\partial B_j^\Sigma}{\partial t}, \end{aligned}$$

где B_j^Σ – сумма векторов Бюргера всех дислокаций; ∂S_0 – контур, ограничивающий площадку S_0 , которую пересекают линии дислокаций.

Подставляя лагранжиан (1.31) в уравнение Эйлера–Лагранжа [277]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial q_{i,j}} \right) - \left(\frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial q_i} \right) = 0,$$

где переменные $q_i = \{u_i, \beta_{4i}, \beta_{ij}\}$ определяются из уравнения $\delta S_0 = 0$, получим [277]:

$$\begin{aligned} B' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \beta_{ji}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{4i}}{\partial x_j} \right) &= \rho_{\text{cp}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \beta_{4i} \right), \\ B' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \beta_{ji}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{4i}}{\partial x_j} \right) &= -C' \varepsilon_{jkl} \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_k} + \sigma_{ij}, \\ \rho_{\text{cp}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \beta_{4i} \right) &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Для σ_{ij} , входящих в (1.33), справедливы формулы (1.29).

Тензор плотности дислокаций может быть определен по формуле [278]:

$$\alpha_{ij} = \sum_q \tau_i^q b_j^q f^q, \quad (1.34)$$

где τ^q – единичный вектор, направленный по касательной к дислокационной линии; b^q – вектор Бюргерса; f^q – функция распределения дислокаций; q обозначает сорт дислокаций и суммирование ведется по всем их сортам.

Формула (1.34) позволяет перейти к определяемой экспериментально плотности дислокаций [278]:

$$\rho_{\text{д}} = \sum_{ijl} \left(\tau_i^q b_j^q \right)^{-1} \alpha_{ij}. \quad (1.35)$$

Сопоставляя (1.34) и (1.35), получим:

$$\rho_{\text{д}} = \sum_q f^q.$$

Частным случаем задачи (1.29) является вариант плоскодеформированного состояния, для которого (1.29) примет вид [279]:

$$\begin{aligned}
\alpha_{zx} &= \frac{\partial \beta_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \beta_{xx}}{\partial y}, \quad \alpha_{zy} = \frac{\partial \beta_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \beta_{xy}}{\partial y}, \\
\beta_{xx} + \beta_{yy} &= 0, \quad \varepsilon_{xy}^p = \frac{1}{2}(\beta_{xy} + \beta_{yx}), \quad \varepsilon_{xx}^p = \beta_{xx}, \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \\
\sigma_{xx} &= -p + S_{xx}, \quad \sigma_{yy} = -p + S_{yy}, \quad \sigma_{xy} = S_{xy}, \\
p &= K \left(\frac{\rho_{cp}}{\rho_0} - 1 \right), \quad \frac{\rho_{cp}}{\rho_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \\
S_{ij} &= 2\mu e_{ij}^{(e)}, \quad e_{ij} = e_{ij}^{(e)} + e_{ij}^p, \quad e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p, \\
e_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad e_{yy} = \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy}, \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\
\tilde{\sigma}_{xx} &= \sigma_{xx} + \sigma'_{xx}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} + \sigma'_{yy}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} + \sigma'_{xy}, \quad \tilde{\sigma}_{yx} = \sigma_{yx} + \sigma'_{yx}, \\
\sigma'_{xx} &= -C' \frac{\partial \alpha_{zx}}{\partial y}, \quad \sigma'_{yy} = C' \frac{\partial \alpha_{zy}}{\partial x}, \quad \sigma'_{xy} = C' \frac{\partial \alpha_{zx}}{\partial x}, \quad \sigma'_{yx} = -C' \frac{\partial \alpha_{zy}}{\partial y}, \quad (1.36)
\end{aligned}$$

где ρ_{cp}^0 – плотность недеформированной среды.

Граничные условия (1.30) в этом случае примут вид [279]:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yx} n_x = 0, \quad \alpha_{zx} = \alpha_{zy} = 0.$$

Как было показано в [279], систему уравнений для нахождения β_{ij} , e_{ij}^p можно представить в виде:

$$\frac{\partial \beta_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \beta_{xx}}{\partial y} = \alpha_{zx}, \quad \frac{\partial \beta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{xy}}{\partial y} = -\alpha_{zy}, \quad e_{ij}^p = \beta_{ij}. \quad (1.37)$$

Отсюда после дифференцирования левой и правой частей двух первых уравнений в (1.37), с учетом того, что $\beta_{xx} = -\beta_{yy}$, получим [279]:

$$\frac{\partial^2 \beta_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta_{xx}}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial \alpha_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{zx}}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 \beta_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial \alpha_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{zy}}{\partial y}. \quad (1.38)$$

Заметим, что уравнения равновесия из (1.36) могут быть представлены в виде уравнений Навье [279]:

$$\Delta u_x + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{u} = 2 \left(\frac{\partial \beta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{xy}}{\partial y} \right);$$

$$\Delta u_y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{u} = 2 \left(\frac{\partial \beta_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \beta_{xx}}{\partial y} \right),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

После открытия и экспериментального обнаружения дислокаций в твердых телах [26] возникла необходимость в использовании накопленного к тому времени опыта механики деформируемого твердого тела применительно к проблемам физики твердого тела. С этой целью Бюргерсом было предложено использование соотношения [26]:

$$\vec{b} = \oint_C \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} dl, \quad (1.39)$$

где \vec{b} – вектор Бюргерса; C – контур интегрирования; dl – элемент контура интегрирования.

Формула (1.39) для модуля вектора Бюргерса, кратного межатомному расстоянию, стала связующим звеном между механикой деформируемого твердого тела и физикой конденсированного состояния. С левой стороны равенства (1.39) находится параметр, используемый в механике для задания величины смещения, но в данном случае он уже связан со структурой твердого тела, как это принято в физике конденсированного состояния. С правой стороны соотноше-

ния (1.39) находится интеграл от частной производной от усредненной по объему величины \bar{u} . Такое усреднение возможно только в рамках гипотезы сплошности среды, являющейся основой механики деформируемого твердого тела [20].

Дальнейшее развитие теория дислокаций получила в направлении учета анизотропии твердого тела и ее влияния на напряженно-деформированное состояние, обусловленное дислокациями [26].

1.4. Дислокационные модели двойникования

В дислокационной теории упругого двойника, представленной в работах [108]–[110] А. М. Косевичем, В. С. Бойко, М. В. Классен-Неклюдовой, Л. А. Пастуром, как и в модели И. М. Лифшица [111], используется приближение тонкого двойника. При этом двойник считается плоским, а ось Y совпадает с направлением двойникования, наклоненным под углом θ к поверхности кристалла (рис. 1.6). Такой двойник образован скоплением прямолинейных дислокаций, параллельных оси Z . В [108] А. М. Косевичем и В. С. Бойко предполагается, что источник прямолинейных двойникующих дислокаций находится у поверхности кристалла в точке $y = a_0$. Этот источник под действием сосредоточенной нагрузки способен генерировать двойникующие дислокации.

Толщина двойника $h(y)$ в некоторой точке y с плотностью двойникующих дислокаций $\rho(y)$ связана соотношением [108]:

$$h(y) = a \int_y^L \rho(\xi) d\xi,$$

где a – межатомное расстояние в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования.

Функция $\rho(y)$ должна удовлетворять условию [108]:

$$\int_{a_0}^L \rho(y) dy = \frac{\delta}{b} = \frac{h}{a} = N,$$

где N – полное число двойникующих дислокаций одного знака; δ – полный сдвиг по линии двойникования на поверхности тела; b – модуль вектора Бюргерса.

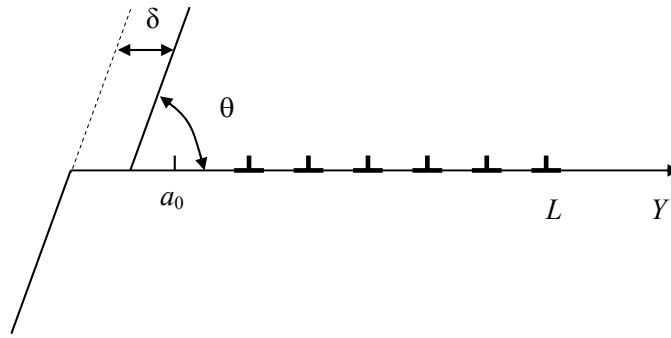


Рис. 1.6. Дислокационная модель тонкого двойника [108]

Упругая сила, действующая на единицу длины дислокации со стороны внешнего поля и других дислокаций двойника, определяется по формуле [108]:

$$f^{\text{упр}}(y) = b\sigma^e(y) + b \text{V.p.} \int_{a_0}^L \sigma^0(y, \xi) \rho(\xi) d\xi,$$

где $\sigma^e(y)$ – напряжения, созданные внешними нагрузками; $\sigma^0(y, \xi)$ – напряжения, созданные в точке y на линии двойникования отдельной дислокацией, расположенной в точке ξ этой же линии.

Для случая неограниченного однородного кристалла в [108] А. М. Косевичем и В. С. Бойко получено следующее соотношение:

$$\sigma^0(y, \xi) = \frac{B_k}{y - \xi},$$

где B_k для краевой и винтовой дислокаций, соответственно, имеет вид:

$$B_{\text{кр}} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}, \quad B_{\text{в}} = \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi}.$$

Для ограниченной среды [108]:

$$\sigma^0(y, \xi) = B_k \left[\frac{1}{y - \xi} + K(y, \xi) \right],$$

где $K(y, \xi)$ – функция двух переменных.

Условие равновесия дислокации в точке y в [108] А. М. Косевичем и В. С. Бойко приводится в виде:

$$f^{\text{упр}}(y) + f^{\text{неупр}}(y) = 0, \quad f^{\text{неупр}}(y) = b_k S(y), \quad (1.40)$$

где $S(y)$ – напряжения на линии двойникования, эквивалентные наличию сил неупругого происхождения, определяющих пластическую деформацию.

Соотношение (1.40) в [108] А. М. Косевичем и В. С. Бойко также представлено в виде:

$$\text{V.p.} \int_{a_0}^L \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - y} - \int_{a_0}^L K(y, \xi) \rho(\xi) d\xi = \frac{1}{B_k} [\sigma^e(y) + S(y)] \equiv \omega(y).$$

Если $S(y)$ известна, то данное уравнение позволяет находить функцию $\rho(y)$ при заданной функции $\omega(y)$, которая удовлетворяет специальному условию ортогональности [108]:

$$\int_{a_0}^L \omega(y) \rho_0(y) dy = 0,$$

где $\rho_0(y)$ – решение следующего уравнения [108]:

$$\int_{a_0}^L K(\xi, y) \rho_0(y) dy = 0.$$

Для определения напряжений у тонкого двойника, представленного на рис. 1.6, в работе [133] А. М. Косевичем и Л. А. Пастуром было предложено использовать выражение вида:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_{a_0}^L \sigma_{ij}^0(x, y, y_0) \rho(y_0) dy_0.$$

Здесь σ_{ij}^0 определяются из формул [110]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0(x, y, y_0) = & -B_{\text{кр}} \frac{x \left[x^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} + B_{\text{кр}} \frac{x \left[x^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} + \\ & + 4B_{\text{кр}} \frac{xy_0 \left[x^2 (3y + 2y_0) - (y + y_0)^2 (y - 2y_0) \right]}{\left[x^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\ \sigma_{yy}^0(x, y, y_0) = & -B_{\text{кр}} \frac{x \left[x^2 + 3(y - y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y - y_0)^2 \right]} + B_{\text{кр}} \frac{x \left[x^2 + 3(y - y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4B_{\text{кр}} \frac{xyy_0 \left[x^2 - 3(y + y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{xy}^0(x, y, y_0) &= -B_{\text{кр}} \frac{(y - y_0) \left[x^2 - (y - y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + B_{\text{кр}} \frac{(y - y_0) \left[x^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[x^2 + (y - y_0)^2 \right]} - \\
& -2B_{\text{кр}}y_0 \frac{x^4 - 6x^2y(y + y_0) + (y - y_0)(y + y_0)^3}{\left[x^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{xz}^0(x, y, y_0) &= B_{\text{в}} \left[\frac{y - y_0}{x^2 + (y - y_0)^2} - \frac{y + y_0}{x^2 + (y + y_0)^2} \right], \\
\sigma_{yz}^0(x, y, y_0) &= -B_{\text{в}} \left[\frac{x}{x^2 + (y - y_0)^2} - \frac{x}{x^2 + (y + y_0)^2} \right]. \quad (1.41)
\end{aligned}$$

Сила притяжения дислокации к поверхности равна [110]:

$$F_s = -\frac{B_{\text{кр}}b_{\text{кр}} + B_{\text{в}}b_{\text{в}}}{2y}.$$

Тогда, как было показано в [110] А. М. Косевичем и Л. А. Пастуром, условие равновесия тонкого двойника, находящегося у поверхности кристалла, может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
& b_{\text{кр}}\sigma_{xy}(0, y) + b_{\text{в}}\sigma_{xz}(0, y) - \frac{B_{\text{кр}}b_{\text{кр}} + B_{\text{в}}b_{\text{в}}}{2y} + S(y) + \\
& + b_{\text{кр}}\sigma_{xy}^e(0, y) + b_{\text{в}}\sigma_{xz}^e(0, y) = 0. \quad (1.42)
\end{aligned}$$

В интегральной форме в [110] выражение (1.42) представлено следующим образом:

$$\text{V.p.} \int_{a_0}^L \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - y} + \int_{a_0}^L \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi + y} + M^* \int_{a_0}^L \frac{\rho(\xi)(y - \xi) d\xi}{(\xi + y)^3} = f(y), \quad (1.43)$$

где

$$f(y) = \frac{b_{\text{кр}} \sigma_{xy}^e(0, y) + b_{\text{в}} \sigma_{xz}^e(0, y) + S(y)}{B_{\text{кр}} b_{\text{кр}} + B_{\text{в}} b_{\text{в}}} - \frac{1}{2y},$$

$$M^* = \frac{B_{\text{кр}} b_{\text{кр}}}{B_{\text{кр}} b_{\text{кр}} + B_{\text{в}} b_{\text{в}}}.$$

Из (1.43) получается уравнение Фредгольма второго рода [110]:

$$\rho(y) - \int_{a_0}^L N^*(y, \xi) \rho(\xi) d\xi = F(y), \quad (1.44)$$

где

$$N^*(y, \xi) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(y-a_0)(L-y)}} \text{V.p.} \int_{a_0}^L \left[\frac{1}{\eta + \xi} + M^* \frac{(\eta - \xi)\xi}{(\eta - \xi)^3} \right] \frac{\sqrt{(\eta - a_0)(L - y)}}{\eta - y} d\eta;$$

$$F(y) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(y-a_0)(L-y)}} \left\{ C_0 - \text{V.p.} \int_{a_0}^L \frac{\sqrt{(\xi - a_0)(L - \xi)}}{\xi - y} f(\xi) d\xi \right\}.$$

Здесь C_0 – постоянная, выбором которой определяется поведение решения (1.44) на концах интервала (a_0, L) [110].

Таким образом, существующие модели двойникования кристаллов обладают рядом ограничений, которые не позволяют полностью охватить все классы двойников, не подходящие под определение тонкого двойника. Также проблематично использовать существующие модели двойникования для описания начальных стадий двойникования.

В работе [43] В. М. Финкелем, В. А. Федоровым и А. П. Королевым предложена дислокационная модель двойника, в которой двойниковая граница представляется в виде ступенчатого скопления краевых (либо винтовых) дислокаций. Для расчета напряжений у двойника при этом использовались соотношения [43]:

$$\sigma_{xx} = -B_{\text{кр}} \sum_{k=1}^{2N-1} (y_k - y) \frac{3(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2}{\left[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{yy} = B_{\text{кр}} \sum_{k=1}^{2N-1} (y_k - y) \frac{(x_k - x)^2 - (y_k - y)^2}{\left[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{xy} = B_{\text{кр}} \sum_{k=1}^{2N-1} (x_k - x) \frac{(x_k - x)^2 - (y_k - y)^2}{\left[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 \right]^2}, \quad (1.45)$$

где x_k и y_k – координаты k -й двойнивающей дислокации.

Недостатком соотношений (1.45) является то, что они малоэкономичны в плане компьютерных расчетов, так как требуют значительного времени для задания координат каждой дислокации, что особенно неудобно при большом количестве дислокаций.

Кроме рассмотренных моделей широкое распространение получили и атомные модели двойников [109], [280], [281]. Однако с точки зрения использования в механике деформируемого твердого тела эти модели интереса не представляют, так как выходят за рамки приближения сплошности среды.

Существуют также и дисклинационные модели двойников [146], но рассмотрение таких моделей выходит за рамки задач данной работы.

Таким образом, можно заключить, что механическому двойникованию подвержен широкий класс используемых в технике материалов. Практически все материалы, используемые в машиностроении, приборостроении и электронике, двойниваются. Двойникование оказывает существенное влияние на физико-механические свойства материалов. Оно является как резервом пластичности [150], так и источником зарождения разрушения [43]. В настоящее время экспериментально убедительно показано, что трещины зарождаются как у вершин клиновидных двойников [52], так и у их границ [50]. При этом для прогнозирования зарождения разрушения важно знать распределение полей внутренних напряжений, обусловленных двойником.

В настоящее время в научной литературе представлен обширный материал по результатам исследования двойникования анизотропных твердых тел. При этом существующие модели двойников можно охарактеризовать как не позволяющие описывать все классы двойников, наблюдаемых при деформировании твердых тел. Отсутствуют имеющие важное практическое значение примеры решения задач механики деформируемого твердого тела с учетом напряжений, локализованных на двойниковых границах. Все это указывает на на-

личие важной научной проблемы, заключающейся в необходимости математического описания, анализа обширных экспериментальных данных, а также развития теории двойникования и применения этой теории для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Макроскопическая теория И. М. Лифшица и существующая дислокационная теория двойникования оперируют приближением тонкого двойника. Это приближение позволяет рассматривать весьма ограниченный класс двойников, у которых длина намного больше ширины устья. На практике у концентраторов напряжений значительно чаще наблюдаются двойники, ширина которых лишь на порядок меньше их длины. Поэтому требует решения проблема разработки таких моделей, которые позволяли бы рассматривать напряженное состояние внутри двойников на таком масштабном уровне, когда распределение двойникующих дислокаций на двойниковых границах можно считать непрерывным. Это особенно важно для рассмотрения состояния у двойниковых границ и границ родственных [109] им мартенситных игл, играющих большую роль в задании свойств адаптивных материалов [282]–[294], относящихся в настоящее время к классу новых материалов и находящих все более широкое практическое применение.

ГЛАВА 2

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ЗАКЛИНИВШЕГОСЯ ДВОЙНИКА В РАМКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВОЙНИКУЮЩИХ ДИСЛОКАЦИЙ НА ДВОЙНИКОВЫХ ГРАНИЦАХ

2.1. Некоторые экспериментальные результаты исследования механического двойникования и его взаимодействия с другими дефектами кристаллической решетки

Рассмотрим результаты, полученные методом индентирования поверхности монокристалла. Метод локального дозированного деформирования поверхности твердых тел инденторами различной формы нашел широкое применение для исследования скольжения [219], [295]–[297] и двойникования [298], [299] монокристаллов, неомогенной пластической деформации и разрушения аморфных материалов [300]–[302]. Этот метод обладает такими существенными достоинствами, как: 1) большая информативность, позволяющая всесторонне изучать двойникование, скольжение и разрушение твердых тел; 2) отсутствие необходимости в большом количестве образцов; 3) наличие возможности дозированно, с высокой степенью точности, локально воздействовать на конденсированную среду. В настоящее время интерес к данному методу возрос из-за бурного развития производства исследовательских приборов, в основу принципа действия которых положено индентирование, в том числе наноиндентирование [303]. Технический уровень и качество таких приборов достаточно высоки и позволяют получать экспериментальные результаты с высокой степенью точности.

Несмотря на наметившийся в настоящее время всплеск в количестве публикаций, посвященных исследованию магнитных монокристаллов с памятью формы типа Ni_2MnGa [304]–[306], данный материал можно отнести к классу ультрасовременных, имеющих большие перспективы в плане практического использования в технических системах нового поколения. Актуальность исследований данных монокристаллов обусловлена тем, что эти материалы обладают уникальными физическими, физико-механическими свойствами, которые изучены все еще не достаточно полно. Особенно малое количество исследований посвящено изучению пластической деформации этих материалов и выявлению механизмов взаимодействия двойникования и скольжения с границами раздела фаз «мартенсит–аустенит». Метод локального деформирования поверхности твердых тел для решения данных задач, связанных с изучением механизмов взаимодействия двойникования и скольжения в монокристаллах, подверженных бездиффузионным фазовым превращениям, можно считать перспективным.

Монокристаллы Ni_2MnGa получали методом направленной кристаллизации расплава (вертикальным методом Бриджмена). Призматические образцы вырезали электроискровым методом вдоль заданных кристаллографических направлений. Поверхности призм подвергались полировке.

Локальное деформирование поверхностей $\{100\}$, $\{110\}$ и $\{111\}$ аустенитной фазы и поверхностей $\{100\}$, $\{110\}$ мартенситной фазы проводилось при комнатной температуре нормально к поверхности коническим алмазным индентором Роквелла при нагрузке на него 150 Н. Угол при вершине конуса индентора равен 120° . Велся анализ деформационной картины, наблюдаемой в области локального деформирования поверхности (результаты получены совместно с А. Л. Созиновым и А. А. Сорока в «Adaptamat Ltd.» (Финляндия, Хельсинки) [307]).

На рис. 2.1 представлена типичная деформационная картина у отпечатка индентора конической формы на поверхности типа $\{100\}$ монокристалла Ni_2MnGa , находящегося в аустенитной фазе. На рис. 2.1, *a* показан частично восстановленный отпечаток, а на рис. 2.1, *b* представлена ситуация, когда восстановление отпечатка уже завершено. Упругое восстановление отпечатка происходит в результате релаксации напряжений, в местах вспучивания материала в четырех областях (на рис. 2.1, *a* эти области отмечены черными стрелками) у границ отпечатка индентора в направлениях $\langle 100 \rangle$. Взаимное расположение областей вспучивания и отпечатка показано на рис. 2.1, *в*. Очевидно, что такая картина сформировалась в результате анизотропного пластического течения в процессе вдавливания индентора.

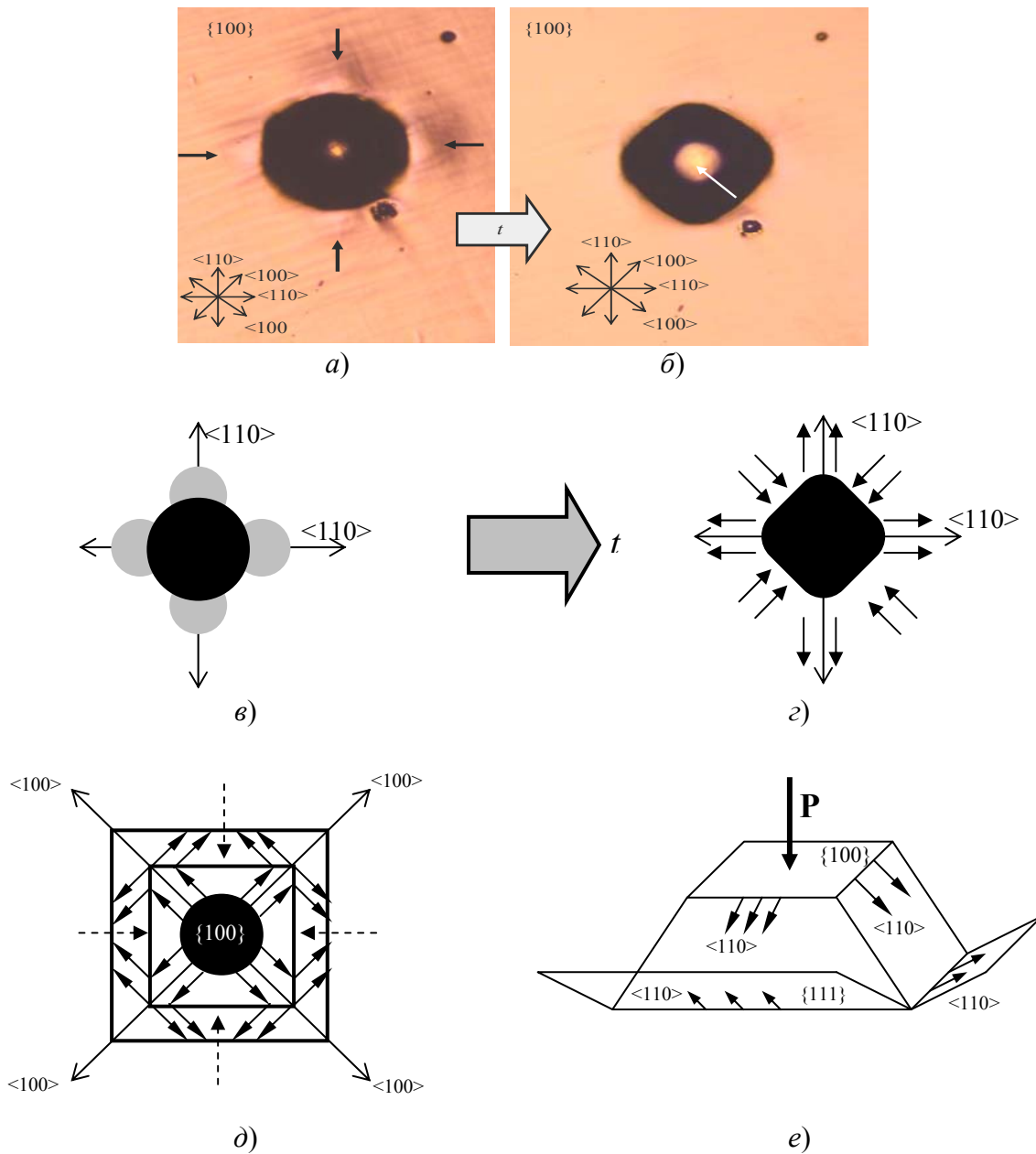


Рис. 2.1. Вид деформационной картины у отпечатка индентора конической формы на поверхности типа $\{100\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa : *a* – отпечаток частично восстановленный (стрелками показаны области вспучивания материала); *б* – максимально восстановленный отпечаток (белая стрелка – интенсивное восстановление центра отпечатка); *в* – схематическое изображение расположения областей вспучивания (фрагменты серых кругов) у отпечатка конического индентора (черный круг); *г* – схема восстановления отпечатка (стрелками показаны направления упругого восстановления отпечатка); *д* – схематическое изображение линий тока (сплошные стрелки) для пластического течения при вдавливании индентора (пунктирными стрелками показаны области образования вспучиваний материала); *е* – пространственное изображение системы скольжения у индентора; *t* – время

Это течение может быть следствием как дислокационных процессов у индентора, так и в результате бездислокационного диффузионного течения материала. Направления упругого восстановления прилегающих к отпечатку индентора областей показаны на рис. 2.1, *г*. Наблюдаемое вспучивание материала существенно уменьшается в результате упругого восстановления отпечатка (рис. 2.1, *б*). При этом форма отпечатка из округлой становится близкой к квадратной форме. Иллюстрация этого процесса показана на рис. 2.1, *г* и объясняется анизотропией упругого восстановления вспучиваний, связанного с кубической структурой аустенитной фазы монокристалла Ni_2MnGa .

Схематическое изображение пластического течения у индентора представлено на рис. 2.1, *д*. Данная схема предполагает, что в аустенитной фазе монокристалла Ni_2MnGa , как и у большинства металлических монокристаллов с кубической структурой, имеется система скольжения $\{111\}\langle 110\rangle$. Пространственное изображение реализации скольжения у индентора показано на рис. 2.1, *е*. Области вспучивания показаны на рис. 2.1, *д* пунктирными стрелками.

Следует отметить, что в монокристалле Ni_2MnGa интенсивному восстановлению подвержен и центр отпечатка. Об этом свидетельствует наличие светлого пятна в центре отпечатка (рис. 2.1, *а, б*), фигурирующего на общем темном фоне отпечатка. Схематическое изображение данного процесса представлено на рис. 2.2, согласно которому восстановление центра отпечатка связано с упругими процессами в области, деформированной острием индентора.

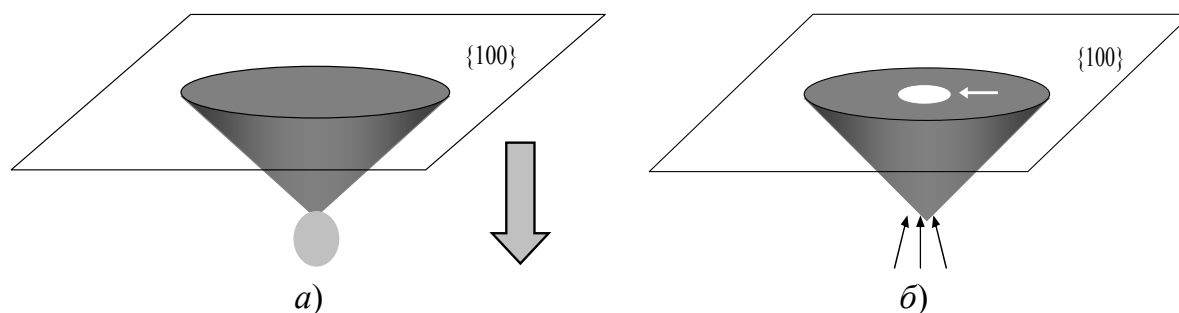


Рис. 2.2. Пространственная схема, поясняющая процесс восстановления центра отпечатка:

а – невосстановленный отпечаток (серый круг – область пластического течения); *б* – восстановление отпечатка (белая стрелка показывает область, отмеченную белой стрелкой на рис. 2.1)

Деформационная картина у отпечатка индентора на поверхности $\{110\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa несколько иная, чем в предыдущем случае деформирования поверхности $\{100\}$. Несмотря

на то что областей вспучивания деформированного материала по-прежнему остается четыре, релаксация напряжений в этих областях несколько иная (рис. 2.3).

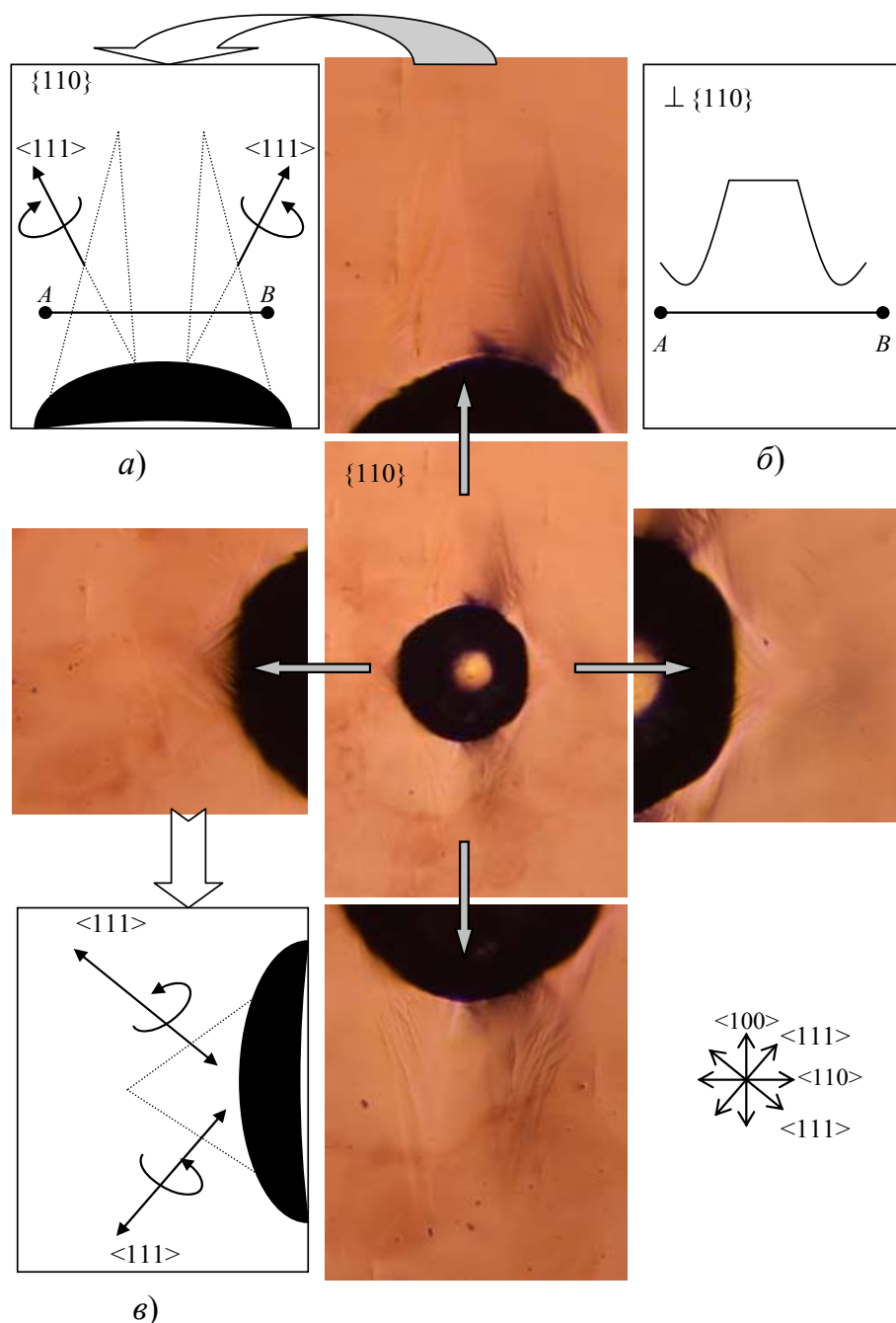


Рис. 2.3. Деформационная картина у отпечатка индентора конической формы на поверхности типа $\{110\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa : *a* – схематическое изображение типичной деформационной картины на поверхности $\{110\}$ у отпечатка в направлении $\langle 100 \rangle$; *б* – рельеф поверхности вдоль отрезка AB в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка; *в* – схематическое изображение типичной деформационной картины у отпечатка в направлении $\langle 110 \rangle$

Вид областей аккомодации в этом случае зависит от направления, а именно в направлении типа $\langle 100 \rangle$ вспучивание более интенсивно. Этого не наблюдалось при деформировании поверхности $\{100\}$. В области аккомодации напряжений в направлении $\langle 100 \rangle$ можно выделить возвышенное плато (рис. 2.3, *а, б*) и впадины по его краям. Схематическое изображение расположения этих областей представлено на рис. 2.3, *а*. Вид рельефа вдоль отрезка *AB* (рис. 2.3, *а*) в плоскости, перпендикулярной плоскости $\{110\}$, схематически показан на рис. 2.3, *б*. Во впадинах наблюдаются идущие от плато полосы. Имеются полосы и на другой стороне впадины. Можно предположить, что данные полосы являются проявлением ротационных сдвигов вокруг направления, близкого к направлению $\langle 111 \rangle$ (рис. 2.3, *а*).

Полосы аккомодации в направлении $\langle 110 \rangle$ имеют вид треугольника. Можно предполагать, что данный рельеф создан локальными ротациями вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений типа $\langle 111 \rangle$ (рис. 2.3, *в*).

Как и при деформировании поверхности $\{100\}$ коническим индентором, в рассматриваемом случае индентирования поверхности $\{110\}$ наблюдается интенсивное восстановление центра отпечатка индентора.

В случае локального дозированного деформирования поверхности $\{111\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa областей вспучивания у отпечатка индентора образуется три (рис. 2.4), а не четыре, как в предыдущих случаях деформирования поверхностей $\{100\}$ и $\{110\}$. При этом области вспучивания образуются на пересечении направлений $\langle 110 \rangle$ (рис. 2.4, *а*). Аккомодация вспучиваний образует плато, как и в случае деформирования поверхности $\{110\}$, но при этом у краев плато после углублений образуются и две симметричные области вспучивания (рис. 2.4, *б, в*). Микрорельеф, образующийся на склонах вспучиваний и имеющий вид почти параллельных штрихов, является следствием ротационных сдвигов вокруг направлений $\langle 110 \rangle$ (рис. 2.4, *б*).

В отличие от аустенитной фазы реакция на деформирование индентором поверхности $\{100\}$ мартенситной фазы монокристалла Ni_2MnGa осуществляется не только скольжением, но и двойникованием. На поверхности (100) следы двойникования ориентированы вдоль направлений $[010]$ и $[100]$ (рис. 2.5). Но чаще встречается картина, когда двойникование у отпечатка конического индентора наблюдается вдоль только одного из указанных направлений.

Отличительной особенностью протекания пластической деформации при данных условиях деформирования монокристалла Ni_2MnGa является то, что двойникование протекает путем формирования групп параллельных двойников линзовидной формы (рис. 2.5, *а, в*).

Наряду с двойникованием, при деформировании поверхности (100) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa у отпечатка индентора наблюдаются и полосы аккомодации, как и в случае мартенситного монокристалла (рис. 2.5, *б*). Деформационную картину при этом схематически можно представить так, как это показано на рис. 2.5, *г*.

На рис. 2.6 представлена типичная деформационная картина, наблюдаемая на плоскости типа $\{110\}$ мартенситного монокристалла Ni_2MnGa , деформированной коническим индентором нормально к поверхности. Отчетливо видна система клиновидных и линзовидных полисинтетических механических остаточных двойников, ориентированных друг по отношению к другу под углами α и β , очерчивая вокруг отпечатка фигуру в виде ромба. Увеличенное изображение данных двойников показано на рис. 2.6, *а–в, д*. При заданной нагрузке 150 Н у отпечатка индентора образуются трещины в четырех направлениях, перпендикулярных направлениям развития клиновидных двойников. Трещины не являются прямолинейными (рис. 2.6, *а, в, д и е*), что говорит о сложном характере взаимодействия в мартенситной фазе монокристалла Ni_2MnGa двойникования, скольжения и разрушения, оказывающем влияние на форму трещин. На рис. 2.6, *а* трещина состоит из разорванных фрагментов. На рис. 2.6, *в* трещина выступила в качестве стопора для полисинтетического двойника, создав вместе с ним напряжения, достаточные для зарождения новых двойников, по другую сторону от данного полисинтетического двойника.

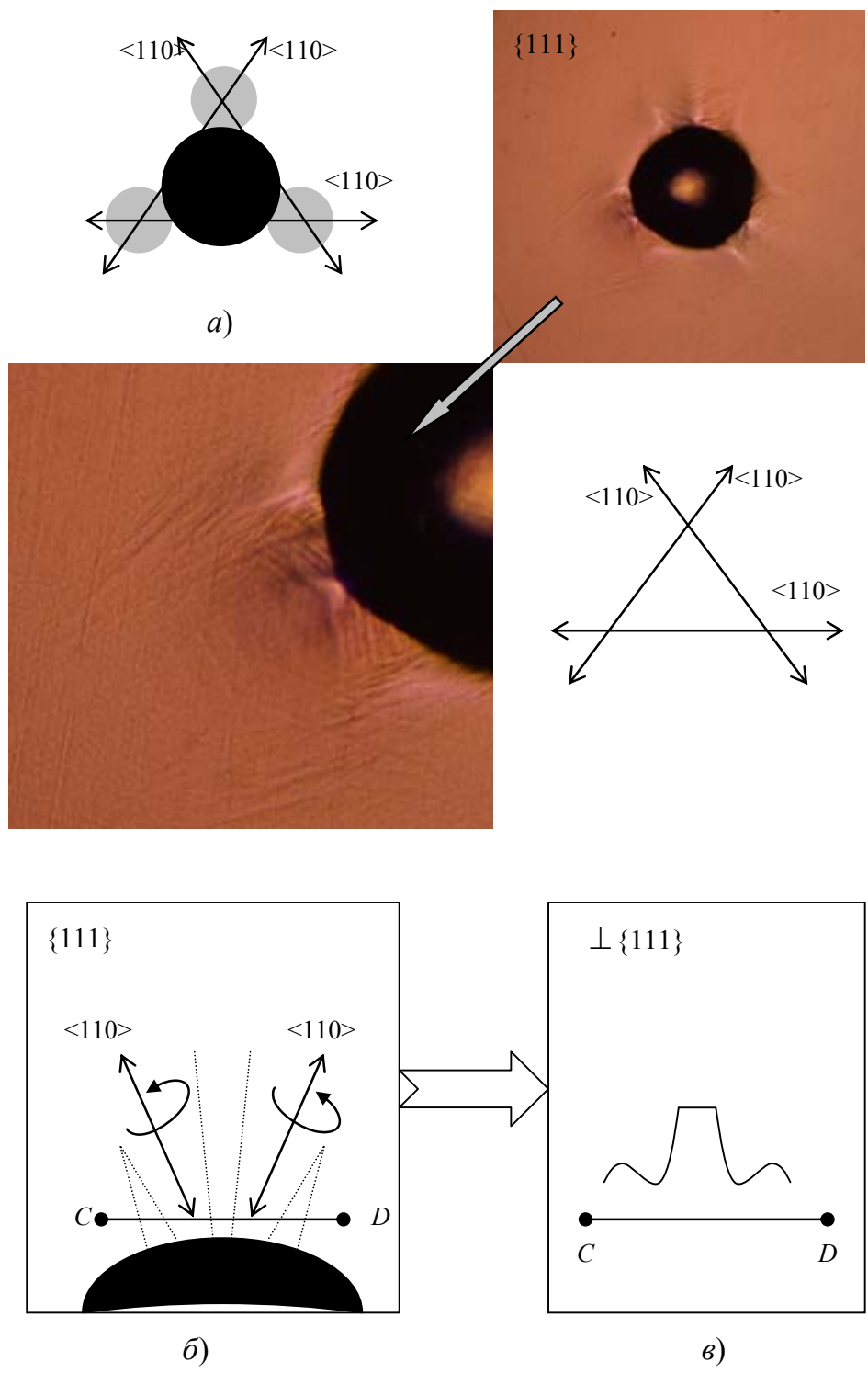


Рис. 2.4. Деформационная картина у отпечатка индентора конической формы на поверхности типа $\{111\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa : *a* – схематическое изображение областей вспучивания (фрагменты серых кругов) у отпечатка индентора (черный круг); *б* – схематическое изображение картины вспучивания у отпечатка индентора на поверхности $\{111\}$; *в* – рельеф поверхности вдоль отрезка *CD* в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка

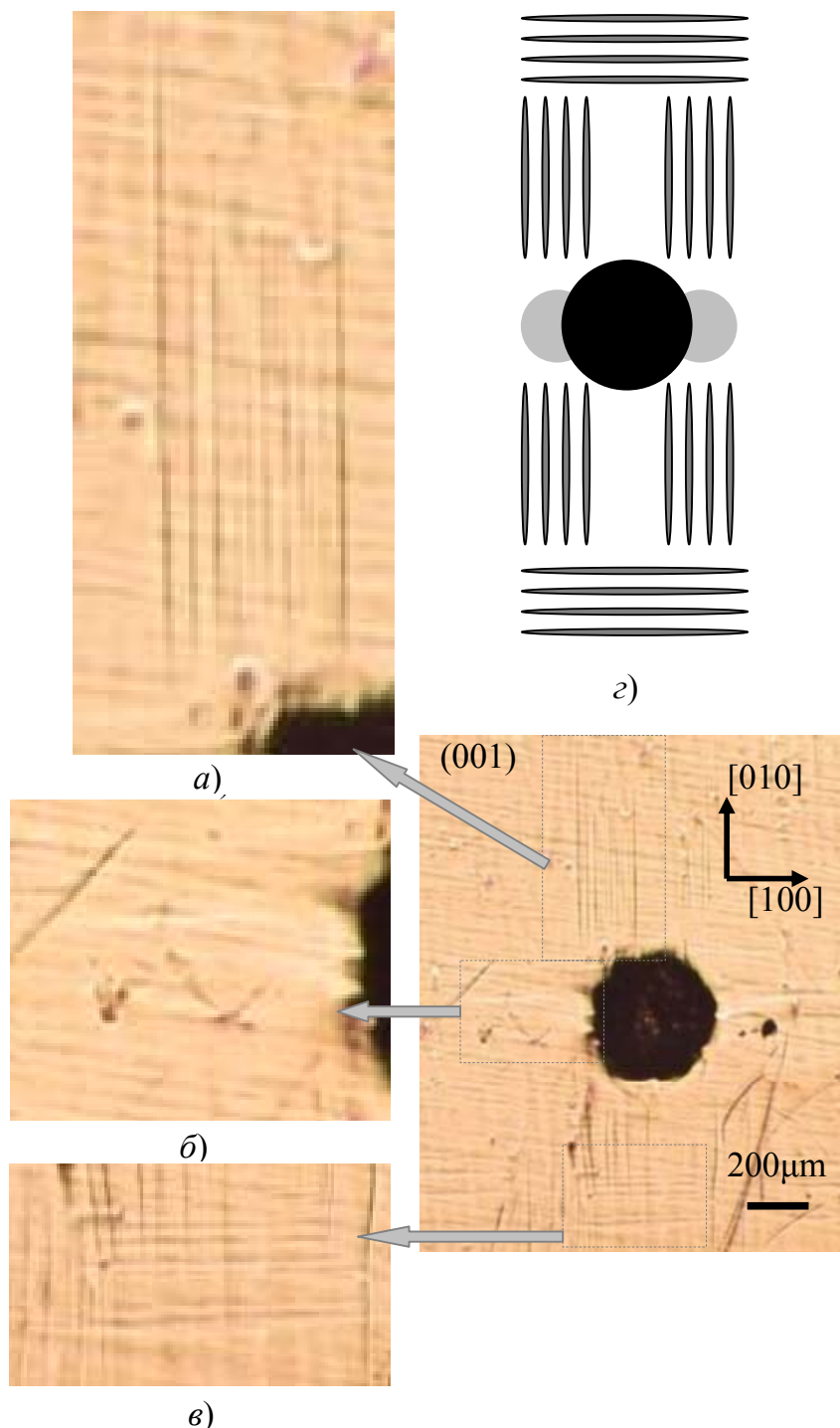


Рис. 2.5. Деформационная картина у отпечатка конического индентора на поверхности (100) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa : *а* – полисинтетический двойник, состоящий из системы линзовидных механических двойников; *б* – область пластической аккомодации; *в* – перпендикулярные друг другу пересекающиеся линзовидные двойники; *г* – схематическое изображение деформационной картины у отпечатка индентора на поверхности (100) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa

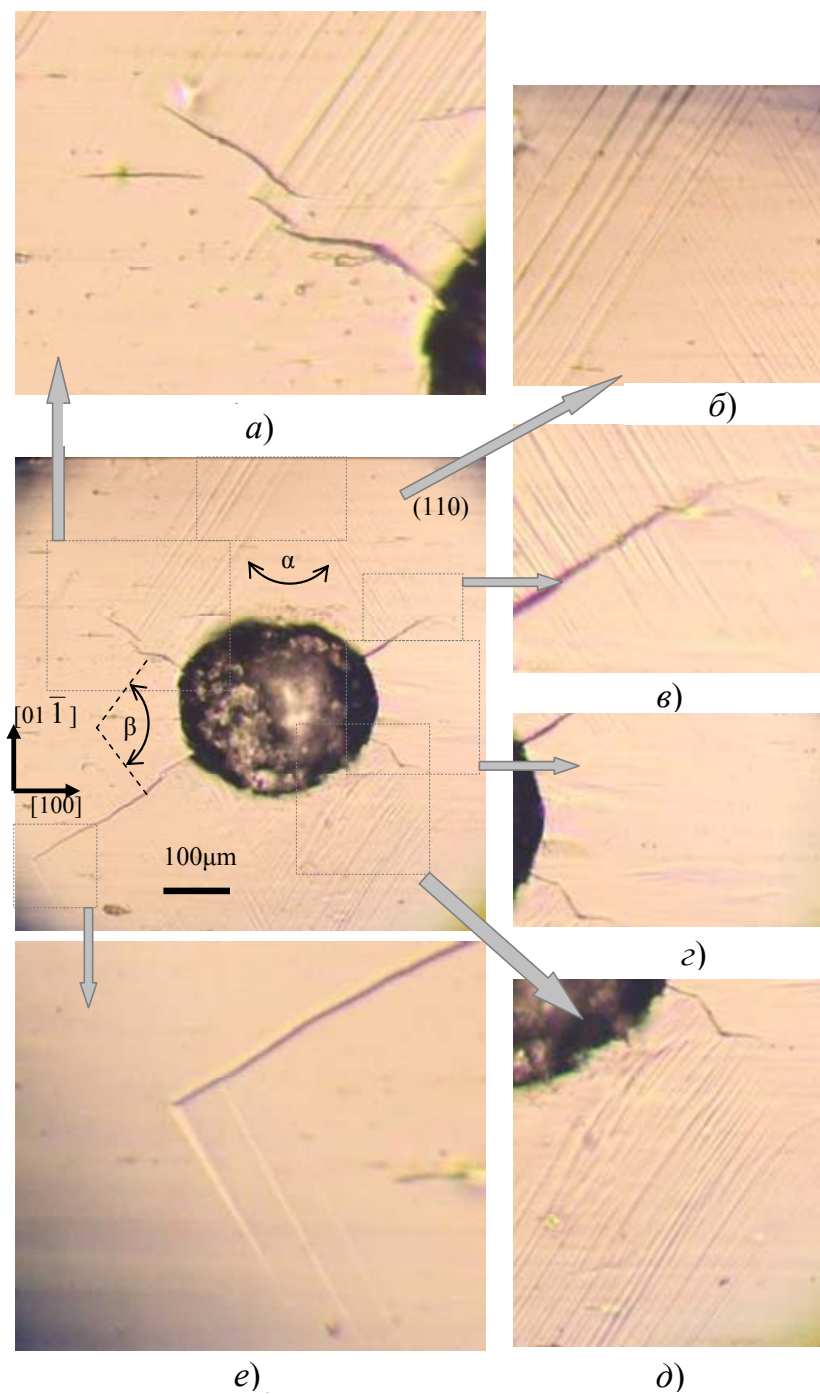


Рис. 2.6. Вид деформационной картины на поверхности (110) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa , деформированной коническим индентором при нагрузке 15 кг:
a – увеличенное изображение взаимодействующей с двойниками трещины с разрывами; *б* – пересечение двойников; *в* – взаимодействие двойникового и разрушения; *г* – область пластической аккомодации; *д* – искривление трещины системой двойников; *е* – образование клиновидных двойников у вершины трещины

В направлении $[100]$ у отпечатка индентора на поверхности (110) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa образуется рельеф, схожий с рельефом в таком же направлении данного монокристалла, но находящимся в аустенитной фазе.

Интересен случай, показанный на рис. 2.6, *e*. В данном случае вершина трещины стала источником зарождения клиновидного двойника, что указывает на локализацию напряжений у вершины трещины и на активные дислокационные процессы в этой области, приведшие к генерации двойникоующих дислокаций.

На рис. 2.6, *z* показаны области пластического течения, которые могут быть идентифицированы как ротационные сдвиги или имеющие большую ширину (соизмеримую с длиной) двойники с криволинейными границами.

Схематически деформационная картина, образующаяся у отпечатка конического индентора на поверхности (110) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa , показана на рис. 2.7. Как и в случае поверхности (100) мартенсита (рис. 2.5, *z*), имеются две области вспучивания, но система параллельных двойников образует ромбовидную конфигурацию.

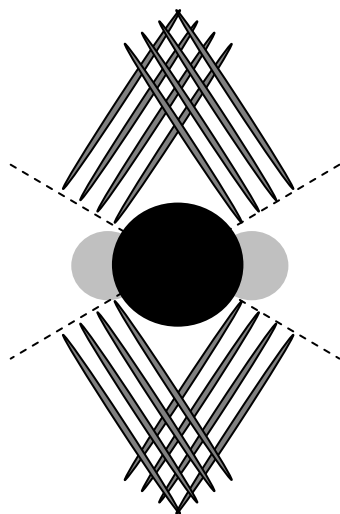


Рис. 2.7. Схематическое изображение деформационной картины у отпечатка индентора на поверхности (110) мартенситного монокристалла Ni_2MnGa

В качестве особенности реакции на внешнее деформирование поверхности индентором, свойственной монокристаллу Ni_2MnGa , как в аустенитной, так и мартенситной фазе, можно отметить наличие периодически встречающихся вдали от отпечатка индентора микроскопических бугорков (рис. 2.8), которые, как правило, образуются вдали

от отпечатка индентора и могут быть как единичными (рис. 2.8, а), так и коллективными, образуя упорядоченные системы (рис. 2.8, б).

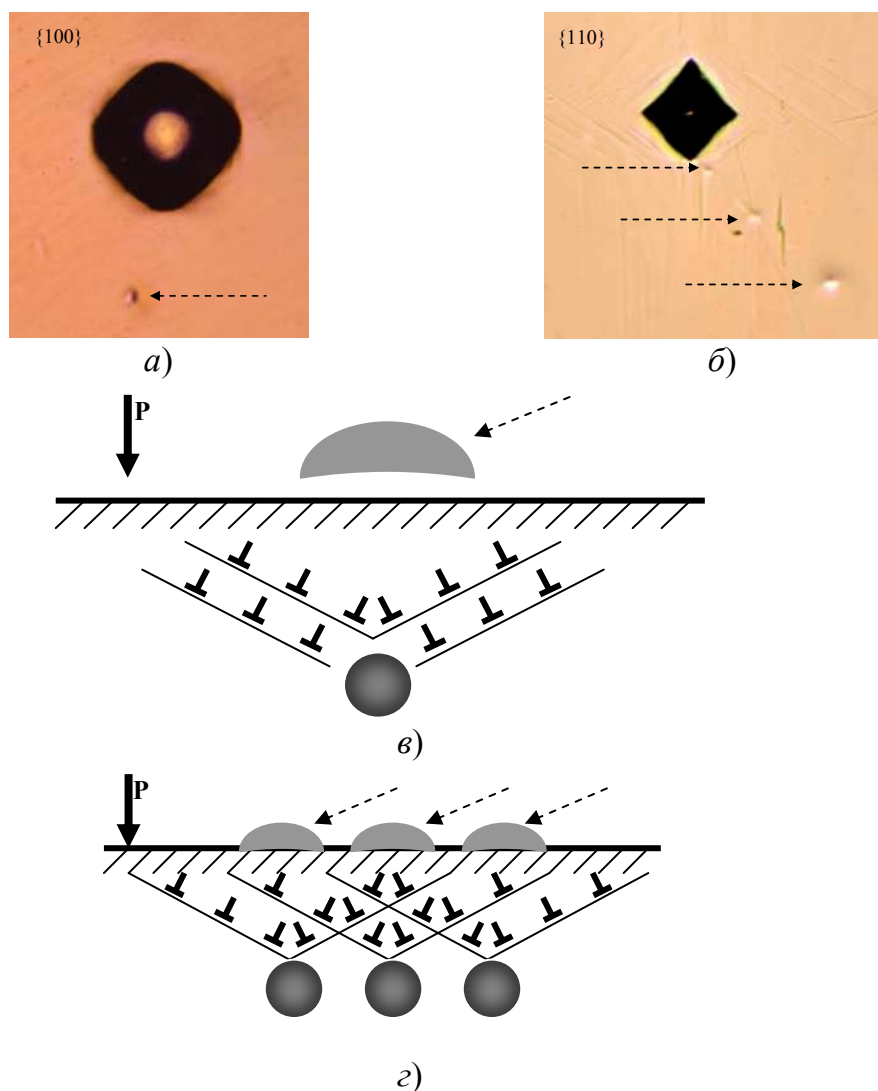


Рис. 2.8. Образование микробугорков вдали от отпечатка индентора:
 а – единственный микробугорок вдали от отпечатка конического индентора на поверхности $\{100\}$ аустенитного монокристалла Ni_2MnGa ;
 б – система микроскопических бугорков, образованная вдоль одного направления вдали от отпечатка пирамиды Вickers на поверхности $\{110\}$ мартенситного монокристалла Ni_2MnGa ;
 в – схематическое изображение единичного микробугорка вдали от отпечатка индентора (круг – стопор); г – схема образования группы микроскопических бугорков

Схематическое изображение процесса образования единичного микроскопического бугорка показано на рисунке 2.8, в. В представленной схеме предполагается, что причиной образования таких бугорков

является наличие в некотором удалении от поверхности стопора, препятствующего движению генерированных внедряемым индентором дислокаций вдоль плоскости скольжения. Это приводит к генерации под действием напряжений от скопившихся у стопора вторичных дислокаций, имеющих другую плоскость скольжения по сравнению с первичным скольжением. В качестве стопора могут выступать микровключения другой фазы, либо пластически деформированные зоны, а также микротрещины. Данные стопоры могут формироваться в процессе деформирования поверхности индентором и являться первичными каналами пластической деформации по сравнению с дислокационными процессами, приведшими к образованию бугорков, которые в данном случае вторичны.

Наличие нескольких стопоров может приводить к образованию групп микробугорков, что схематически показано на рис. 2.8, *г*.

Как видно из полученных результатов, пластическая деформация при локальном дозированном деформировании поверхности коническим индентором в аустенитнитном и мартенситном монокристаллах Ni_2MnGa протекает по-разному. При данном способе деформирования механическому двойникованию подвержена мартенситная фаза Ni_2MnGa , в то время как в аустенитной фазе двойникование практически отсутствует. Это дает основание рекомендовать эксплуатировать монокристаллы Ni_2MnGa в аустенитном состоянии, особенно в условиях наличия внешних локальных пластически деформируемых воздействий, так как двойникование способно активировать разрушение. Благодаря способности исследуемого материала к упругому восстановлению областей локального деформирования, последствия такого деформирования монокристалла частично или полностью могут быть устранены самопроизвольно по истечении времени восстановления. Это также указывает на преимущества аустенитной фазы, так как устранение остаточных двойников, возникших при локальном деформировании в мартенситной фазе, достаточно сложно. Как показали проведенные в данной работе эксперименты, возможно частичное (на 1–3 %) устранение остаточных механических двойников путем перемещения их через границы раздела «мартенсит–аустенит».

При деформировании твердых тел в благоприятных для двойникования условиях двойники, как правило, образуются группами, особенно в случае сложнонапряженного состояния [308], часто возникающего в процессе эксплуатации изделий из двойникующихся материалов.

Поля напряжений, созданные границами соседних двойников, могут существенно повлиять на характер развития двойника и его форму. Поэтому при разработке технологии двойникующихся материалов, таких как, например, материалы с памятью формы [309], важное значение имеет учет взаимодействия друг с другом групп двойников. Этому вопросу уже уделено достаточно большое внимание, например, в таких работах, как [107], [310], [311]. Однако имеется и ряд новых экспериментальных данных [308], которые рассмотрим ниже.

В [308] объектом исследования выступили остаточные двойники в монокристаллах висмута. Для исследования монокристаллы висмута были выбраны потому, что они являются хорошим модельным материалом для изучения механического двойникования. В них двойникование проявляется при комнатной температуре при достаточно низких скоростях нагружения для возможности использования метода индентирования, реализуемого с помощью прибора ПМТ-3. Двойникование активировалось методом индентирования поверхности (111) монокристаллов висмута алмазной пирамидой Виккерса. Возникающий при этом на поверхности (111) вокруг отпечатка индентора рельеф, образованный двойниками в результате поворота кристаллической решетки, изучался с помощью растровой электронной микроскопии.

При последовательном нанесении на поверхности (111) двух отпечатков индентора на небольшом расстоянии друг от друга часто возникала ситуация, когда один из двойников, образующийся у отпечатка индентора, сливался со статическим остаточным двойником, находящимся у ранее оставленного отпечатка (рис. 2.9). Длина слившихся таким образом двойников может значительно отличаться. При таком типе слияния двойников в монокристалле висмута со стороны плоскости (111) каналы Розе [43] не наблюдаются (рис. 2.9). Однако это не означает, что данные каналы не могут образовываться внутри монокристалла висмута вдали от поверхности при встречном движении двойников со стороны противоположных граней кристалла.

Не обнаруживается и следов разрушения в области слияния вершин двойников, которое присуще двойникованию монокристаллов кремнистого железа [43]. Это указывает на высокую подвижность полных базисных и пирамидальных дислокаций [116] в монокристаллах висмута, благодаря чему силы отталкивания дислокаций достаточны, чтобы не допустить их сближения на расстояние равное межатомному, при котором начинается процесс зарождения дислокационной трещины. При этом полные дислокации в висмуте активно участвуют в процессе релак-

сации напряжений у сближающихся вершин клиновидных двойников, делая энергетически невыгодным процесс зарождения трещин.

Согласно дислокационной модели линзовидного двойника [312] процесс слияния клиновидных двойников, находящихся в одной плоскости и развивающихся навстречу друг другу, можно объяснить исходя из рассмотрения процесса трансформации линзовидного двойника в двойник клиновидной формы (рис. 2.10). В результате такой трансформации у устья двойника образуется стенка двойникующих дислокаций, имеющих противоположный знак по отношению к знаку двойникующих дислокаций у вершины двойника (рис. 2.10). Разный знак имеют и дислокации клиновидных двойников, вершины которых ориентированы навстречу друг другу. При слиянии таких двойников двойникующие дислокации противоположного знака аннигилируют, формируя когерентную границу. В результате между отпечатками индентора образуется двойниковая прослойка с почти параллельными границами (рис. 2.9).

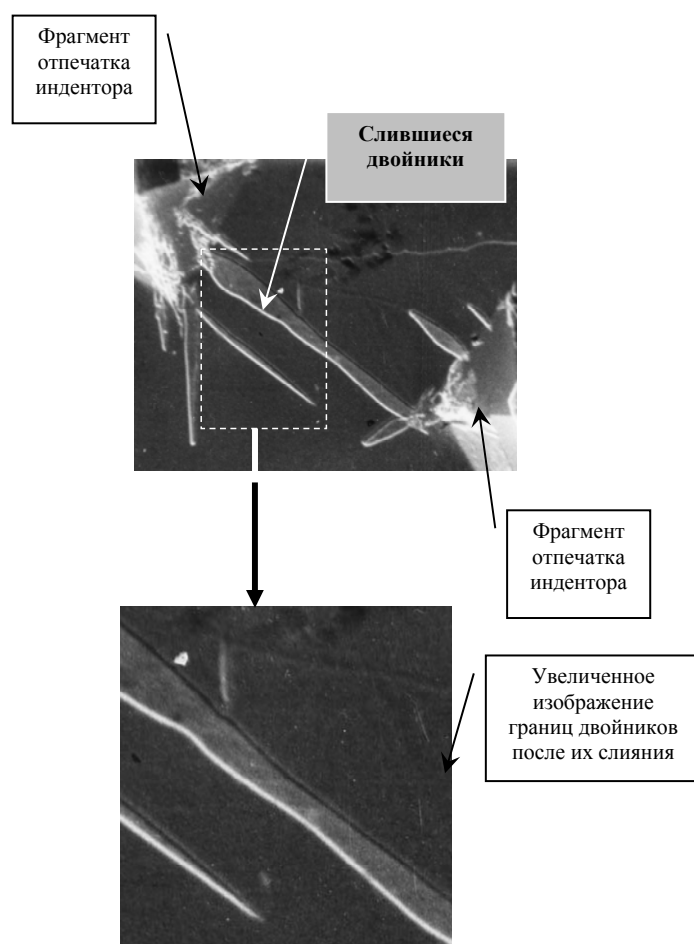


Рис. 2.9. Слияние двойников, находящихся в одной плоскости двойникования и развивавшихся в противоположных направлениях навстречу друг другу ($\times 10000$)

Слияние двойников, принадлежащих одной плоскости, при встречном направлении развития может осуществляться и в случае, когда вершина динамического двойника останавливается у вершины статического двойника. При этом релаксация напряжений у вершин двойников приводит к их подрастанию. Процесс подрастания остаточных двойников менее скоростной, чем процесс образования двойников под действием сосредоточенной нагрузки. Поэтому источники энергии у этих процессов разные и в процессе слияния рассматриваемых двойников в случае их подрастания можно выделить следующие этапы: 1) образование остаточного двойника у первого отпечатка индентора; 2) образование остаточного двойника в плоскости первого двойника у второго отпечатка индентора (вершина этого двойника находится вблизи вершины первого двойника); 3) слияние двойников в результате сил притяжения двойникующих дислокаций противоположного знака каждого двойника; 4) формирование равновесной формы двойниковой прослойки со слабо некогерентными границами, образовавшейся в результате слияния двойников. Таким образом, очевидно, что у первых двух этапов двойникования источник энергии связан с энергией деформирования индентором, а у третьего – с силами междислокационного взаимодействия. Третий этап наиболее активен в моменты времени, близкие к остановке двойника из-за того, что двойникующие дислокации еще не потеряли свою подвижность и еще не сформировалась равновесная форма двойника, «заблокированная» полными дислокациями.

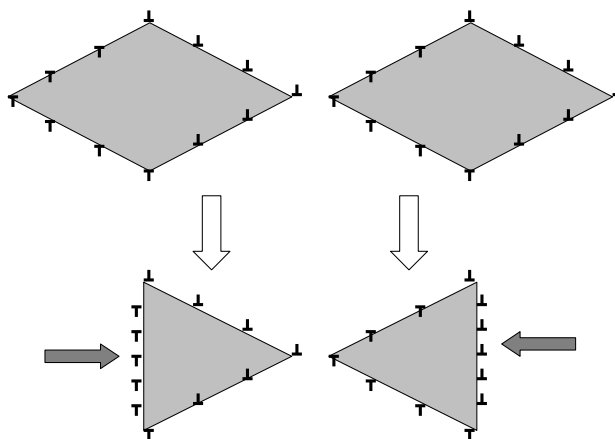


Рис. 2.10. Трансформация линзовидных двойников в двойники клиновидной формы, ориентированные навстречу друг другу перед процессом слияния (линзовидный двойник представлен в виде ромба в рамках линейного приближения; направление трансформации отмечено темными стрелками)

Когда энергии деформирования достаточно, чтобы вершина динамического двойника достигла вершины статического двойника, в этапах слияния двойников отсутствует подрастание двойников. Вместо этого наблюдается расширение статического двойника.

Слияние без образования границы раздела свойственно и двойникам, находящимся в параллельных плоскостях и развивающимся в одном направлении (рис. 2.11). Однако это наблюдается не всегда. Имеются случаи, когда между двойниками, развивающимися в одном направлении, образуется граница раздела (рис. 2.12). Это происходит, когда двойники находятся не в параллельных, а в ориентированных под углом друг к другу плоскостях. Схематически это представлено на рис. 2.13. Очевидно, что граница раздела между двойниками образуется тогда, когда векторы Бюргерса двойникующих дислокаций не параллельны друг другу. Это подтверждается и наличием границы раздела между двойниками, развивающимися в непараллельных направлениях и непараллельных плоскостях (рис. 2.14).

Таким образом, обнаружен новый тип границ раздела, которые по природе их происхождения можно назвать двойными двойниковыми границами. Как это было установлено, такие границы бывают двух типов: 1) двойные границы раздела между двойниками, развивающимися в одном направлении; 2) двойные границы раздела между двойниками различных кристаллографических направлений.

Следует отметить, что отсутствие границы раздела между слившимися встречными двойниками на рис. 2.9 указывает на то, что данные двойники находятся в одной плоскости. В случае, когда встречные двойники находятся в ориентированных под углом друг к другу плоскостях, можно ожидать зарождение разрушения или образование каналов Розе.

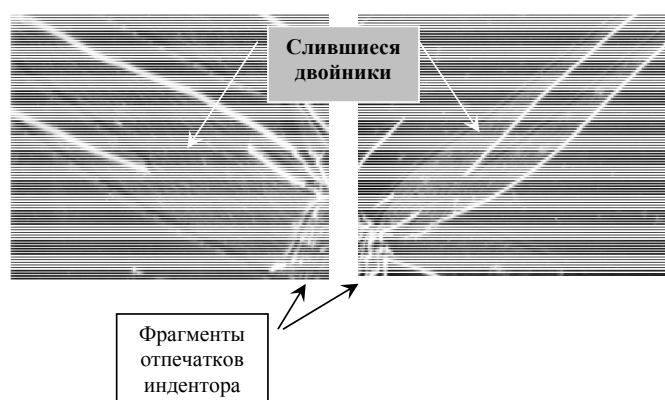


Рис. 2.11. Слияние двойников, находящихся в параллельных плоскостях и развивавшихся в одном направлении ($\times 25000$)

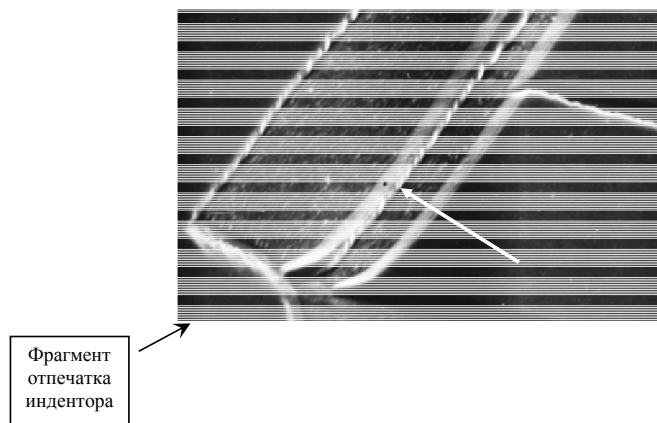


Рис. 2.12. Образование границы раздела (отмечена стрелкой) между двойниками, развивавшимися в одном направлении, но в непараллельных плоскостях ($\times 50000$)

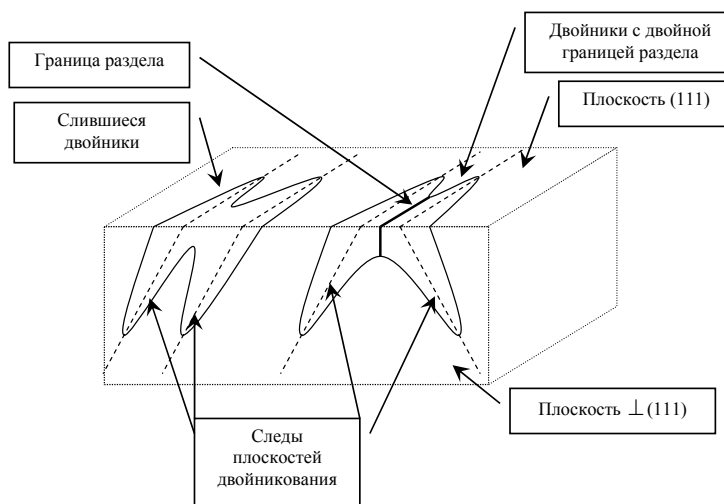


Рис. 2.13. Схематическое изображение формирования двойников под поверхностью (111) в случае слияния двойников, развивавшихся в одном направлении, и в случае образования между ними границы раздела

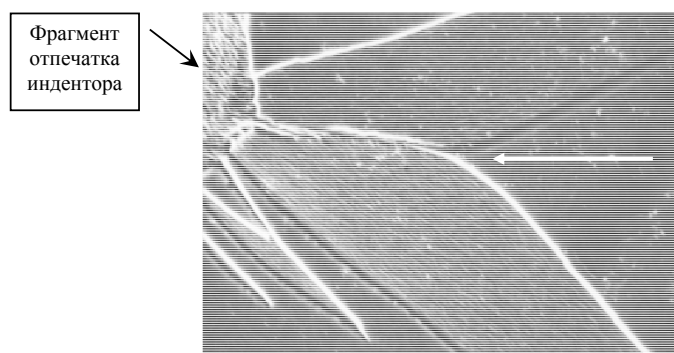


Рис. 2.14. Образование границы раздела (отмечена стрелкой) между двойниками, развивавшимися в непараллельных направлениях и плоскостях ($\times 50000$)

Двойники, показанные на рис. 2.11, имеют сходство с ветвящимися двойниками. Однако если из вершин двойников на их основания опустить перпендикуляры, то в случае двойников на рис. 2.11 эти перпендикуляры будут практически параллельны, а в случае ветвления – под достаточно большим углом, близким по величине с углом между непараллельными плоскостями двойникования. Это связано с тем, что двойники на рис. 2.11 находятся в параллельных плоскостях двойникования, а ветвящиеся двойники – в непараллельных плоскостях двойникования.

На рис. 2.15 показана граница раздела между дочерним и материнским двойником в случае ветвления двойников. Это также двойные двойниковые границы с такой же структурой, как и граница на рис. 2.14. Поэтому процесс ветвления двойников сопровождается образованием границы раздела между устьем дочернего двойника и границей материнского двойника. После образования такой границы в случае, когда процесс двойникования еще не завершился, материнская прослойка может ее огибать.

На рис. 2.15 также представлено слияние двух двойников, развивавшихся в одном направлении в параллельных плоскостях. Вершины однонаправленных слившихся двойников такого типа не всегда четко очерчены, как на рис. 2.15. Встречаются ситуации, когда вершина одного двойника поглощается соседним двойником, и о процессе слияния двух двойников свидетельствует лишь выпуклая форма одной из границ объединенного двойника. Если один из сливающихся двойников по своим геометрическим размерам существенно меньше другого, то о поглощении малого двойника большим может свидетельствовать уширение устья последнего.

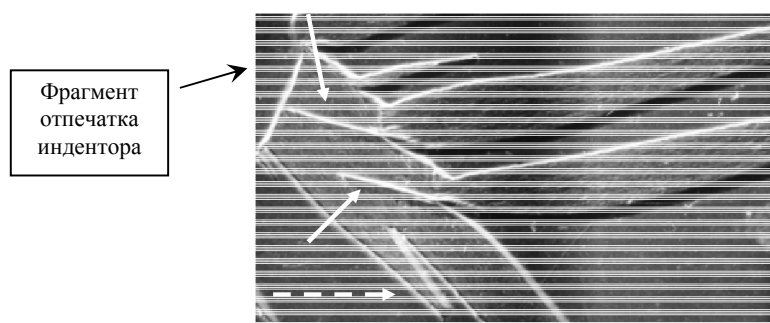


Рис. 2.15. Границы раздела между материнским и дочерним ветвящимися двойниками (отмечены сплошными стрелками) и слияние материнского двойника с двойником в параллельной плоскости и направлении двойникования (отмечен пунктирной стрелкой) ($\times 25000$)

На рис. 2.16 показан процесс взаимодействия вершины клиновидного двойника, образовавшегося у отпечатка индентора, с когерентной границей остаточной двойниковой прослойки, полученной в монокристалле висмута методом чистого изгиба. В месте контакта данных двойников четко выраженная граница раздела отсутствует. При этом когерентная граница двойниковой прослойки искривляется, создавая некогерентный участок. Причем искривление границы имеет форму, указывающую на то, что двойникующие дислокации прослойки смещаются в сторону клиновидного двойника, что обнаруживает наличие сил притяжения двойникующих дислокаций остаточной двойниковой прослойки и клиновидного двойника. Одна из границ клиновидного двойника выпуклая. Это указывает на высокую степень некогерентности данной границы, локализирующей высокий уровень напряжений. На рис. 2.16 видно, что релаксация этих напряжений произошла в результате образования тонкой двойниковой прослойки, направленной в сторону когерентного двойника.

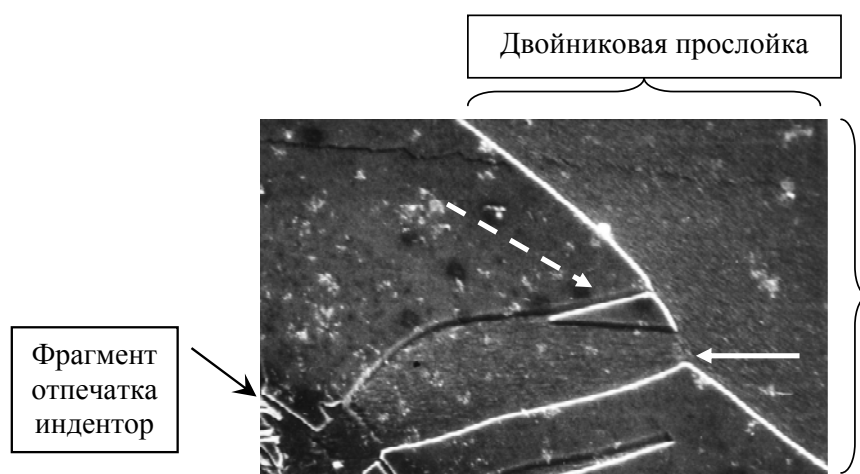


Рис. 2.16. Слияние некогерентного клиновидного двойника с когерентной двойниковой прослойкой (место слияния отмечено сплошной стрелкой) и образование тонкой двойниковой прослойки на некогерентной двойниковой границе (отмечено пунктирной стрелкой) ($\times 50000$)

На рис. 2.17 показаны слившиеся и не слившиеся двойники, развивавшиеся в одном направлении. Не слившийся двойник, вероятно, находится в плоскости двойникования, ориентированной под углом к плоскости слившихся двойников. Об этом, в частности, косвенно свидетельствует образовавшаяся дефектная область аккомодации в виде периодических неоднородностей, имеющих вид системы каналов Розе, рассмотренной в [43] в случае кремнистого железа.

Двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений. Это приводит к тому, что двойникование является инициатором зарождения разрушения [43]. С другой стороны, двойниковые границы являются препятствиями для развития трещин, и с точки зрения поиска методов торможения разрушения изучение взаимодействия трещин с двойниками представляется актуальным.

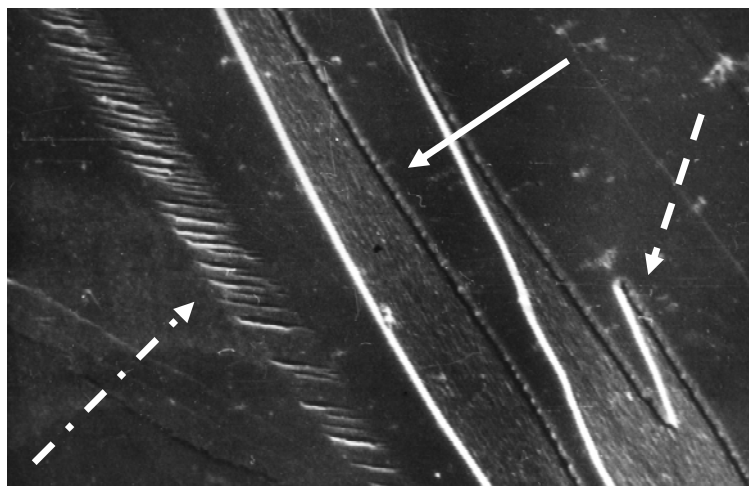


Рис. 2.17. Объединившиеся двойники одного направления (отмечены пунктирной стрелкой), не слившийся двойник (отмечен сплошной стрелкой) и периодическая микроструктура (отмечена штрихпунктирной линией) в виде группы каналов Розе ($\times 25000$)

На рис. 2.18 стрелкой отмечен результат взаимодействия трещины с двойником после локального раздвойникования. В области взаимодействия наблюдается излом трещины. Это указывает на наличие энергетических затрат для трещины на преодоление такого препятствия, как двойниковая прослойка. Как видно из рисунка, величина излома трещины после раздвойникования превышает ширину трещины в области ее взаимодействия с двойником.

При высоком уровне внешних напряжений, инициировавших раздвойникование, в области излома трещины наблюдается зарождение вторичного разрушения в направлении, перпендикулярном направлению развития трещины. На рис. 2.18 это проявляется в том, что ширина излома трещины почти в два раза превышает ширину двух частей трещины в области ее излома.

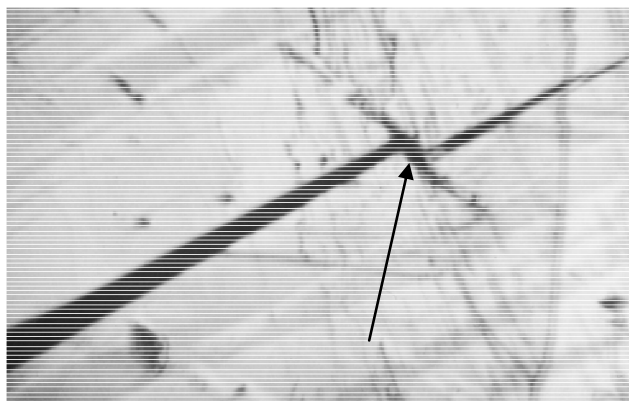


Рис. 2.18. Излом трещины в монокристалле висмута ($\times 100$)

Вся многогранность форм проявления механического двойникования при различных условиях деформирования двойникующегося материала в настоящее время еще не изучена. Имеются результаты экспериментальных исследований по изучению особенностей формообразования двойников, их ветвления, зарождения вдали от концентратора напряжений и т. д.

На рис. 2.19 представлен вид на поверхности (111) монокристалла висмута пересечения групп параллельных двойников двух различных направлений двойникования. Картина пересечения двойников имеет вид сплетения.

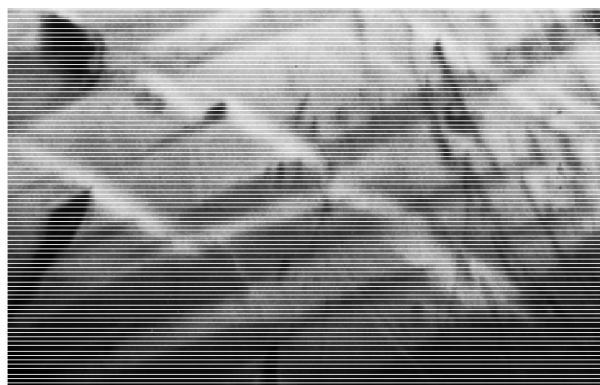


Рис. 2.19. Ансамбль сплетенных двойников в монокристалле висмута ($\times 100$). Вид на поверхности (111)

Отличительной особенностью взаимодействия двойников друг с другом в этом случае является то, что после пересечения динамического двойника со статическим двойником другого кристаллографического направления ширина развивавшегося двойника уменьшается порой более чем в два раза. При этом тело статического двойника искривляется в результате ротационного сдвига.

Наблюдалось и полное торможение статическим двойником динамического двойника. Участки отдельных двойников приобретали серповидную форму. После прохождения динамическим двойником статического двойника первый разделялся на два параллельных двойника одного кристаллографического направления. При этом ширина таких двойников, как правило, значительно меньше, чем ширина динамического двойника до столкновения со статическим двойником. Имело место и разделение вершины динамического двойника на две еще до пересечения статического двойника.

Дефекты кристаллической решетки оказывают существенное влияние на процесс механического двойникования. Существенные особенности формы двойников наблюдаются при их взаимодействии с пластически деформированными областями, полосами сдвига или включениями.

На рис. 2.20 представлена область монокристалла висмута на его поверхности (111) с несколькими микроразмерными дефектами.

На рис. 2.20 стрелкой 1 показан двойник с появившейся у его вершины ветви в виде микродвойника другого кристаллографического направления (ветвление кончика двойника). Данный двойник направлен к области вероятной концентрации напряжений у включения.

Стрелкой 2 отмечен случай, когда включение разделяет двойник на две части. Следует отметить, что под включением данный двойник может быть цельным с областью раздвойникования, вызванным напряжениями включения. Выше включения расположился двойник, имеющий ширину, приблизительно равную линейному размеру включения. Данный двойник претерпел искривление в результате огибания данного включения.

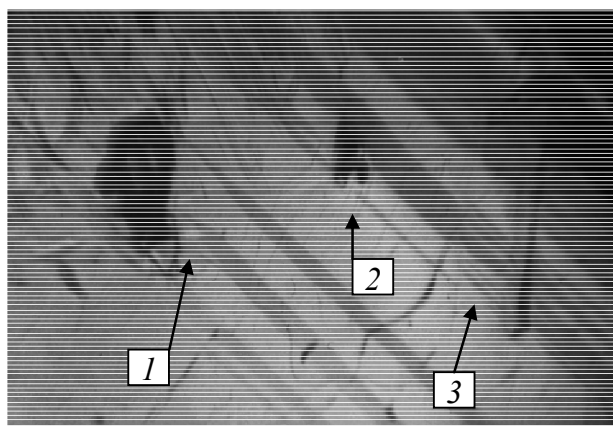


Рис. 2.20. Взаимодействие механических двойников с препятствиями в монокристаллах висмута ($\times 100$)

Стрелкой 3 на рисунке отмечена сдвойникованная область между двумя полосами сдвига. В этой области наблюдается группа параллельных двойников разной ширины. Вероятно, причиной появления данных двойников стал рассмотренный выше двойник относительно большой ширины, разделившийся после взаимодействия с полосами сдвига на группу двойников меньшей ширины.

2.2. Метод расчета полей напряжений, смещений и деформаций у остаточного клиновидного двойника с использованием приближения непрерывного распределения двойникующих дислокаций на некогерентных границах двойника

Постановку задачи о твердом теле с остаточным механическим двойником можно выполнить таким же образом, как и в случае задачи о твердом теле с дислокациями, описанной соотношениями (1.29). В случае задачи о двойниковании тензор плотности дислокаций α_{ij} необходимо связывать с плотностью двойникующих дислокаций с использованием соотношения (1.35).

Решение рассматриваемой задачи упрощается при наличии методов расчета внутренних напряжений, созданных двойниковыми границами. В случае микродвойников, длина которых значительно превышает расстояние между двойникующими дислокациями, необходимо использование приближения непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах. Для этого рассмотрим остаточный механический клиновидный двойник, находящийся вдали от поверхности ненагруженного двойникующегося материала. Возможность зарождения двойника вдали от поверхности в настоящее время является общеизвестной [313]. Такие двойники обычно зарождаются у концентратора напряжений [29], который пусть в нашем случае находится в точке O (рис. 2.21). Часто такими концентраторами напряжений выступают границы зерен или других двойников [144]–[146], [152]. В нашей задаче не будем учитывать напряжения, которые создает данный концентратор напряжений, и рассмотрим только те напряжения, которые создают представленные на рис. 2.21 границы двойника. Для существования в твердом теле уже сформированного остаточного двойника во внешней нагрузке нет необходимости, так как исчезновению такого двойника препятствуют силы взаимодействия двойникую-

щих дислокаций s , например, сидячими дислокациями или дислокациями леса [150], поля напряжений которых в данной модели также рассматривать не будем, задавшись целью рассмотрения только напряжений, обусловленных двойниковыми границами.

Примем за ξ текущую координату точки на границе двойника. Тогда в общем случае в плоскости XOY форма границ клиновидного двойника описывается функциями $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ (рис. 2.21) [314]. Так как двойникующие дислокации являются частичными дислокациями Шокли [109], то их вектор Бюргера можно разложить на две составляющие: винтовую b_v и краевую $b_{кр}$. Ориентация винтовой и краевой составляющих вектора Бюргера двойникующих дислокаций показана на рис. 2.21. Пусть дислокации на данных границах параллельны друг другу и оси OZ , перпендикулярной плоскости рис. 2.21, а плоскость двойникования совпадает с плоскостью XOZ . Согласно теории границ зерен и двойников [23], [26], [28], [29], [145], [146], [152], [315] такая модель двойника пригодна для расчета напряжений в плоскости сечения зерен, а следовательно, и двойников, когда они вдоль оси OZ имеют конечную длину. Также рассматриваемая модель справедлива и для расчета полей напряжений в объеме твердого тела, когда двойник бесконечен в направлении оси OZ , но сечение двойника плоскостью, параллельной плоскости XOY , постоянно при трансляции этого сечения вдоль оси OZ . Согласно классификации, принятой в [29], такие двойники называются плоскими. Существуют также тонкие плоские двойники, которые, как правило, являются упругими [29], [108].

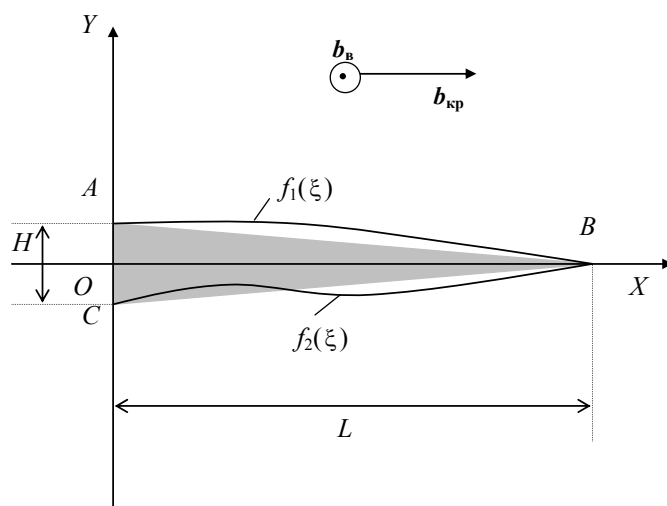


Рис. 2.21. Схематическое изображение остаточного механического клиновидного двойника и направления компонент вектора Бюргера двойникующих дислокаций

Очевидным является тот факт, что недеформируемое твердое тело с двойником будет находиться в равновесии, так как составляющие двойник дислокации создают равновесное поле напряжений [23], [26]. Суперпозиция равновесных упругих полей напряжений также создает равновесное поле. В работе [316] приведены доказательства этого факта.

Не прибегая к модели тонкого плоского упругого двойника, напряжения, создаваемые представленным схематически на рис. 2.21 клиновидным двойником, при условии неподвижности двойниковых границ, могут быть определены из формулы [314]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(2)}(x, y), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= \int_{L_{AB}} \rho_1 \sigma_{ij}^{(1,0)} ds, \\ \sigma_{ij}^{(2)} &= \int_{L_{CB}} \rho_2 \sigma_{ij}^{(2,0)} ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$ – напряжения, создаваемые каждой из границ клиновидного двойника и определяемые с помощью криволинейного интеграла вдоль профилей двойниковых границ L_{AB} и L_{CB} соответственно; ρ_1 и ρ_2 – плотности двойникующих дислокаций на первой и второй двойниковых границах соответственно; $\sigma_{ij}^{(1,0)}$ и $\sigma_{ij}^{(2,0)}$ – напряжения, создаваемые на двойниковых границах отдельными дислокациями.

Криволинейные интегралы (2.2) сводятся к определенным интегралам типа [314], [317]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) d\xi, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь L – проекция длины двойника на ось OX (рис. 2.21).

Выражения (2.3) в совокупности с (2.2) полностью определяют напряжения, создаваемые клиновидным двойником с формами границ в плоскости сечения двойника, описываемых функциями $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ на таком масштабном уровне, когда распределение двойникующих дислокаций на двойниковых границах можно считать непрерывным с плотностями $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$.

Напряжения, создаваемые единичной двойнивающей дислокацией, находящейся на одной или другой двойниковой границе соответственно, при условии нахождения двойника вдали от поверхности, могут быть определены из соотношений [314]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi)) \left[3(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2}, \\
\sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi)) \left[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2}, \\
\sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi) \left[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}, \\
\sigma_{zx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}, \\
\sigma_{zy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}; \tag{2.4} \\
\sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi)) \left[3(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2}, \\
\sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi)) \left[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[(x-x_0)^2 - (y-f_2(x_0))^2 \right]}{\left[(x-x_0)^2 + (y-f_2(x_0))^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}, \\
\sigma_{zx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}, \\
\sigma_{zy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Здесь принималась во внимание представленная на рис. 2.21 ориентировка винтовой и краевой составляющих вектора Бюргерса; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона. Соотношения (2.4) и (2.5) получены с помощью формул для расчета напряжений у единичной краевой, либо винтовой дислокации [26], [27].

Важным вопросом, возникающим при рассмотрении теорий упругого и остаточного двойникования, является вопрос о правомерности использования теории упругости в теории двойникования, так как механическое двойникование проявляется на стадии пластической деформации твердых тел, выходящей за рамки линейной зависимости напряжений от деформаций [318].

Следует отметить, что для зарождения механического двойника необходима концентрация напряжений [29]. В случае, например, сосредоточенной нагрузки необходимая для зарождения двойника область пластической деформации может иметь размер пренебрежимо малый по сравнению с размером сформировавшегося двойника. При этом после зарождения двойника в локальной области пластической деформации дальнейшее его развитие происходит за пределами этой области и движение двойникующих дислокаций происходит в поле упругих напряжений [150].

После снятия нагрузки в случае упругого двойникования раздвойникование происходит под действием полей упругих напряжений двойникующих дислокаций и сил притяжения дислокаций к поверхности. В случае остаточного двойника пластическая деформация локализуется на двойниковых границах в узкой области (шириной в два-три

межатомных расстояния). В остальной области имеют место поля упругих напряжений, которые, как и в случае трещин, правомерно рассчитывать на основании линейной теории упругости [43], [58], [314].

Таким образом, несмотря на то что для зарождения механических двойников необходимы напряжения превышающие предел упругости, развитие двойников и существование остаточных двойников может происходить в недеформированной области кристалла или в области полей упругих напряжений. Границы двойников локализуют пластическую деформацию в узких тонких полосах, создавая при этом поле далекодействующих упругих полей напряжений. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае образования трещин [45]–[48]. Но в этом случае для зарождения трещин необходимы напряжения, превышающие предел прочности материала, т. е. более высокие, чем в случае двойникования. А сами трещины создают напряжения, описываемые в рамках линейной теории упругости [48].

Рассмотрим случай, когда $\rho_1 = \rho_2 \approx \rho = \text{const}$. Очевидно, что это допущение правомерно для линейного приближения плотности двойникующих дислокаций.

Следует отметить, что плотность двойникующих дислокаций – наиважнейшая физическая величина, определяющая процесс механического двойникования кристаллов [29], [319], [320]. Для глубокого понимания явления двойникования без знания сущности данной характеристики рассматриваемого фундаментального явления, протекающего в деформируемых твердых телах при повороте их кристаллической решетки, не обойтись. Существующие теории двойникования в качестве основных задач ставят нахождение равновесной плотности двойникующих дислокаций на двойниковых границах [29], [108].

Общеизвестно [29], что величина плотности двойникующих дислокаций может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это связано с тем, что дислокации, как и заряды, бывают разного знака [23], [26], [30], [33], [270], [321].

Примем также допущение, касающееся формы границ двойника. Пусть границы двойника будут прямолинейными и двойник будет иметь форму треугольника ABC (рис. 2.21) с шириной u устья (длина отрезка AC) равной H . В рассматриваемом случае функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ можно задать формулами:

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right); \quad (2.6)$$

$$f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right). \quad (2.7)$$

При этом (2.3) примут вид [314]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) &= \rho \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2L}\right)^2} \int_0^L \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(x, y) &= \rho \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2L}\right)^2} \int_0^L \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Увеличенное изображение остаточного механического клиновидного неплоского и нетонкого двойника правильной формы, контур следов границ которого на секущей плоскости можно описать функциями (2.6) и (2.7), представлено на рис. 2.22. Такие двойники, как правило, возникают в малодефектной области твердого тела.



Рис. 2.22. Типичный вид клиновидных двойников формы треугольника (растровая электронная микроскопия с использованием NANOLAB-7)

В соотношениях (2.6) и (2.7) для удобства расчетов использовалось приближение формы двойника близкой к форме равнобедренного треугольника. В более общем же случае можно принять:

$$H = H_1 + H_2,$$

где H_1 и H_2 – отрезки, на которые разбивается отрезок на оси OY длиной H (рис. 2.21), высотой, опущенной из вершины двойника на его устье AC .

В этом случае формулы (2.6) и (2.7) примут вид:

$$f_1(\xi) = H_1 \left(1 - \frac{\xi}{L} \right);$$

$$f_2(\xi) = -H_2 \left(1 - \frac{\xi}{L} \right).$$

Поля смещений, аналогично (2.1), могут быть определены из соотношения [322]:

$$u_i(x, y) = u_i^{(1)}(x, y) + u_i^{(2)}(x, y),$$

где i принимает значения x , y или z ; $u_i^{(1)}(x, y)$ и $u_i^{(2)}(x, y)$ – смещения, создаваемые первой и второй двойниковыми границами соответственно, которые определяются из полученных совместно с Ю. В. Василевичем соотношений [322]:

$$u_i^{(1)}(x, y) = \int_0^L \rho_1(\xi) u_i^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) \sqrt{1 + \left(\frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right)^2} d\xi,$$

$$u_i^{(2)}(x, y) = \int_0^L \rho_2(\xi) u_i^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) \sqrt{1 + \left(\frac{df_2(\xi)}{d\xi} \right)^2} d\xi.$$

Учитывая

$$u_x^d(x, y) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right],$$

$$u_y^d(x, y) = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{4(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right],$$

$$u_z^d(x, y) = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (2.9)$$

функции $u_i^{(1,0)}(x, y, \xi)$ и $u_i^{(2,0)}(x, y, \xi)$ можно определить следующим образом [322]:

$$u_x^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{2(1 - \nu) \left((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right)} \right];$$

$$u_y^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln \left((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2}{4(1 - \nu) \left((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right)} \right];$$

$$u_z^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi};$$

$$u_x^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{2(1 - \nu) \left((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right)} \right];$$

$$u_y^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln \left((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2}{4(1 - \nu) \left((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right)} \right];$$

$$u_z^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi}.$$

Для компонент тензора деформации справедливо следующее соотношение [323]:

$$\varepsilon_{ij}(x, y) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(x, y) + \varepsilon_{ij}^{(2)}(x, y),$$

где $\varepsilon_{ij}^{(1)}(x, y)$ и $\varepsilon_{ij}^{(2)}(x, y)$ – деформации, которые создают первая и вторая границы двойника соответственно. Данные деформации в соответствии с рис. 2.21 могут быть найдены из формул [323]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{(1)} &= \int_{L_{AB}} \rho_1 \varepsilon_{ij}^{(1,0)} ds, \\ \varepsilon_{ij}^{(2)} &= \int_{L_{CB}} \rho_2 \varepsilon_{ij}^{(2,0)} ds.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(1,0)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(2,0)}$ – компоненты тензора деформаций, создаваемых дислокациями на одной и другой границах клиновидного двойника.

Криволинейные интегралы (2.10), как и в случае (2.2), преобразуются в определенные интегралы типа [323]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{(1)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \varepsilon_{ij}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) d\xi; \\ \varepsilon_{ij}^{(2)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \varepsilon_{ij}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) d\xi.\end{aligned}$$

Используя (1.15) и (2.9), нетрудно показать, что для компонент $\varepsilon_{ij}^{(1,0)}(x, y)$ и $\varepsilon_{ij}^{(2,0)}(x, y)$ справедливы следующие соотношения [323]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{b_{кр}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\nu} \frac{(x-\xi)^2 (y-f_1(\xi))}{((x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2)^2} \right); \\ \varepsilon_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{b_{кр}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(y-f_1(\xi))((x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2)}{((x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2)^2} \right); \\ \varepsilon_{zz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= 0,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{b_{kp}}{2\pi} \left(\frac{1}{4(1-\nu)} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{(x-\xi)((x-\xi)^2 - 3(y-f_1(\xi))^2)}{((x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2)^2} \right)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = -\frac{b_b}{4\pi} \frac{y-f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2};$$

$$\varepsilon_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{b_b}{4\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2};$$

$$\varepsilon_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{b_{kp}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{(x-\xi)^2 (y-f_2(\xi))}{((x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2)^2} \right);$$

$$\varepsilon_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = -\frac{b_{kp}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(y-f_2(\xi))((x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2)}{((x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2)^2} \right);$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left(\frac{1}{4(1-\nu)} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{(x-\xi)((x-\xi)^2 - 3(y-f_2(\xi))^2)}{((x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2)^2} \right); \\
\varepsilon_{xz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{b_{\text{в}}}{4\pi} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}; \\
\varepsilon_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{b_{\text{в}}}{4\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

2.3. Равновесная форма двойника

Как отмечалось в параграфе 1.4, двойникующая дислокация имеет краевую и винтовую составляющую. Встречаются двойники, у которых отсутствует одна из этих составляющих [43], [51]. В работе [51] такие двойники были названы краевыми и винтовыми. Задачу о равновесной форме двойника, находящегося вдали от поверхности, удобно разбить на две задачи о равновесных формах краевого и винтового двойника, а далее рассмотреть суперпозицию полученных совместно с Ю. В. Василевичем решений [324], [325].

Первоначально рассмотрим краевой двойник (рис. 2.23). Общеизвестно [321], что вдали от поверхности механические двойники могут как образовываться, так и иметь форму, аналогичную их форме, наблюдаемой на поверхности кристалла. Поэтому, как это было экспериментально показано в [313], вдали от поверхности двойниковые границы могут быть как прямолинейными, так и криволинейными.

В равновесии двойника на его границах должны выполняться условия [324]:

$$\vec{F}_1 + \vec{S}_1 + \vec{F}_1^e = 0; \tag{2.12}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{S}_2 + \vec{F}_2^e = 0, \tag{2.13}$$

где \vec{F}_1 – сила, действующая в точке на границе 1 со стороны поля напряжений двойникующих дислокаций на границах 1 и 2 двойника; \vec{S}_1 – сила внутреннего трения, действующая на двойникующие дислокации на границе 1 двойника; \vec{F}_1^e – результирующая внешних сил, действующая на двойникующие дислокации на границе 1 двойника; \vec{F}_2 – сила, действующая в точке на границе 2 со стороны поля напряжений двойникующих дислокаций на границах 1 и 2 двойника; \vec{S}_2 – сила внутреннего трения, действующая на двойникующие дислокации на границе 2 двойника; \vec{F}_2^e – результирующая внешних сил, действующая на двойникующие дислокации на границе 2 двойника.

В процессе двойникования движение двойникующих дислокаций вдоль оси OY отсутствует. Поэтому ограничимся рассмотрением проекций сил только на ось OX :

$$F_{1x} + S_{1x} + F_{1x}^e = 0; \quad (2.14)$$

$$F_{2x} + S_{2x} + F_{2x}^e = 0, \quad (2.15)$$

где

$$F_{1x} = F_{11x} + F_{21x}; \quad (2.16)$$

$$F_{2x} = F_{22x} + F_{12x}. \quad (2.17)$$

Здесь F_{11x} – проекция на ось OX силы, действующей на двойникующие дислокации на границе 1 со стороны поля напряжений, созданного этой же границей; F_{21x} – проекция на ось OX силы, действующей на двойникующие дислокации на границе 1 со стороны поля напряжений, созданного двойникующими дислокациями границы 2; F_{22x} – компонента силы, действующей на двойникующие дислокации на границе 2 со стороны поля напряжений, созданного этой же границей; F_{12x} – компонента силы, действующей на двойникующие дислокации на границе 2 со стороны поля напряжений, созданного двойникующими дислокациями границы 1.

Для сил взаимодействия двойникующих дислокаций краевого двойника между собой справедливо соотношение [23]:

$$F_x = b_{кр} \sigma_{xy}, \quad (2.18)$$

где $b_{кр}$ – модуль краевой составляющей вектора Бюргера двойни-
кующей дислокации; σ_{xy} – сдвиговая компонента тензора напряже-
ний, обусловленных двойникующими дислокациями.

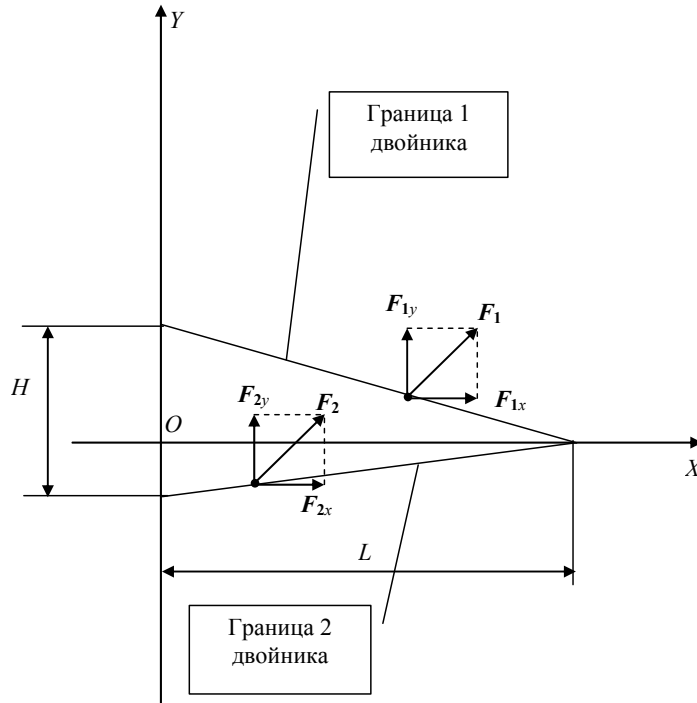


Рис. 2.23. Схематическое изображение сил, действующих на границах клиновидного двойника, находящегося вдали от поверхности твердого тела

Формулу (2.18) будем использовать для определения компонент сил F_{11x} , F_{21x} , F_{22x} и F_{12x} из соотношений (2.16) и (2.17). При этом компоненты сдвиговых напряжений в (2.18) для каждой из границ двойника рассчитываются по формулам (2.3), которые примут вид:

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) d\xi;$$

$$\sigma_{xy}^{(2)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) d\xi$$

с учетом (2.4) и (2.5). Тогда

$$F_{11x} = b_{кр} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.19)$$

$$F_{21x} = b_{\text{кр}} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.20)$$

$$F_{22x} = b_{\text{кр}} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.21)$$

$$F_{12x} = b_{\text{кр}} \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta. \quad (2.22)$$

Здесь ζ – параметр интегрирования, как и параметр ξ . Компоненты тензора сдвиговых напряжений в (2.19) и (2.20) расписываются соотношениями:

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - (f_1(\zeta) - f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + (f_1(\zeta) - f_1(\xi))^2 \right]^2}; \quad (2.23)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - (f_1(\zeta) - f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + (f_1(\zeta) - f_2(\xi))^2 \right]^2}; \quad (2.24)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - (f_2(\zeta) - f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + (f_2(\zeta) - f_2(\xi))^2 \right]^2}; \quad (2.25)$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - (f_2(\zeta) - f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + (f_2(\zeta) - f_1(\xi))^2 \right]^2}. \quad (2.26)$$

Далее не будем принимать во внимание напряжения концентратора напряжений, находящегося у устья двойника, моделируя ситуацию, имеющую место в кристалле, например, после снятия нагрузки. Так как известно [48], что у имеющих вдали от поверхности включений после снятия нагрузки уровень напряжений существенно уменьшается. Таким образом, для упрощения задачи рассмотрим влияние на равновесную форму границ краевого клиновидного двойника только напряжений двойникоующих дислокаций двойниковых границ. Примем равными нулю и силы внутреннего трения, т. е.

$$\vec{F}_1^e = 0, \vec{S}_1 = 0; \quad (2.27)$$

$$\vec{F}_2^e = 0, \vec{S}_2 = 0. \quad (2.28)$$

Тогда (2.14) и (2.15) с учетом (2.16) и (2.17), (2.27) и (2.28) примут вид:

$$F_{11x} + F_{21x} = 0; \quad (2.29)$$

$$F_{22x} + F_{12x} = 0. \quad (2.30)$$

Такое допущение позволит проверить достоверность расчета, так как появляется возможность для его сравнения с общеизвестными результатами по поведению групп дислокаций в бездефектном кристалле и результатами, полученными для упругих двойников [23], [26]–[29], [108]–[111].

Подставляя в (2.29) и (2.30) формулы (2.19)–(2.22), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta + \\ & + \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta = 0; \quad (2.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta + \\ & + \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta = 0. \quad (2.32) \end{aligned}$$

При необходимости данные уравнения дополняются соотношениями:

$$c_1(\xi) = \frac{1}{a} \frac{df_1(\xi)}{d\xi}; \quad (2.33)$$

$$c_2(\xi) = \frac{1}{a} \frac{df_2(\xi)}{d\xi}. \quad (2.34)$$

Здесь a – межплоскостное расстояние в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования.

Соотношения (2.33) и (2.34) означают, что система (2.31) и (2.32) из двух уравнений имеет не четыре ($f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$), а две неизвестные функции – $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$. Представим эти функции в виде многочленов:

$$f_1(\xi) = a_0\xi^0 + a_1\xi^1 + \dots + a_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + a_n\xi^n; \quad (2.35)$$

$$f_1(\zeta) = a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + \dots + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + a_n\zeta^n; \quad (2.36)$$

$$f_2(\xi) = b_0\xi^0 + b_1\xi^1 + \dots + b_{m-1}\xi^{m-1} + \dots + b_m\xi^m; \quad (2.37)$$

$$f_2(\zeta) = b_0\zeta^0 + b_1\zeta^1 + \dots + b_{m-1}\zeta^{m-1} + \dots + b_m\zeta^m; \quad (2.38)$$

где a_i и b_j – константы ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$).

В данной работе рассмотрим случай, когда $n = 1$ и $m = 1$. Тогда (2.35)–(2.38) примут вид:

$$f_1(\xi) = a_0 + a_1\xi, \quad f_1(\zeta) = a_0 + a_1\zeta; \quad (2.39)$$

$$f_2(\xi) = b_0 + b_1\xi, \quad f_2(\zeta) = b_0 + b_1\zeta. \quad (2.40)$$

Это случай прямолинейных границ клиновидного двойника. Тогда очевидно, что

$$f_1'(\xi) = a_0, \quad f_2'(\xi) = b_0, \quad c_1(\xi) = \frac{a_0}{c}, \quad c_2(\xi) = \frac{b_0}{c}. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.39) и (2.40) в (2.23)–(2.26), получим:

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{1-a_1^2}{(1+a_1^2)^2} \frac{1}{\zeta-\xi}; \quad (2.42)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{1-b_1^2}{(1+b_1^2)^2} \frac{1}{\zeta-\xi}; \quad (2.43)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]^2}; \quad (2.44)$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]^2}. \quad (2.45)$$

Подстановка (2.41)–(2.45) в (2.31) и (2.32) дает:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{c} \frac{1-a_1^2}{(1+a_1^2)^2} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta-\xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{b_0 \sqrt{1+b_0^2}}{c} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0; \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_0 \sqrt{1+b_0^2}}{c} \frac{1-b_1^2}{(1+b_1^2)^2} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta-\xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{c} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Данные уравнения могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta-\xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{b_0 \sqrt{1+b_0^2}}{a_0 \sqrt{1+a_0^2}} \frac{(1+a_1^2)^2}{1-a_1^2} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0; \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta-\xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{b_0 \sqrt{1+b_0^2}} \frac{(1+b_1^2)^2}{1-b_1^2} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + ((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Вычитая (2.49) из (2.48), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{b_0\sqrt{1+b_0^2}}{a_0\sqrt{1+a_0^2}} \frac{(1+a_1^2)^2}{1-a_1^2} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - \left((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi) \right)^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + \left((a_0-b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi) \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta - \\ & - \frac{a_0\sqrt{1+a_0^2}}{b_0\sqrt{1+b_0^2}} \frac{(1+b_1^2)^2}{1-b_1^2} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta-\xi) \left[(\zeta-\xi)^2 - \left((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi) \right)^2 \right]}{\left[(\zeta-\xi)^2 + \left((b_0-a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi) \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Решение данного уравнения, например, с использованием метода интегрирования рациональных функций [326], [327] весьма громоздко. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи. Примем:

$$a_0 = \frac{H}{2}, \quad a_1 = -\frac{H}{2L}, \quad b_0 = -\frac{H}{2}, \quad b_1 = \frac{H}{2L}. \quad (2.51)$$

Тогда (2.39) и (2.40) можно переписать в виде:

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right), \quad f_1(\zeta) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\zeta}{L} \right); \quad (2.52)$$

$$f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right), \quad f_2(\zeta) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{\zeta}{L} \right). \quad (2.53)$$

Уравнения (2.48) и (2.49) с учетом (2.52) и (2.53) примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{H}{2} \sqrt{1 + \frac{H^2}{4} \left(1 - \frac{H^2}{4L^2} \right)}}{\left(1 + \frac{H^2}{4L^2} \right)^2} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta - \xi} d\xi d\zeta - \\ & - \frac{H}{2} \sqrt{1 + \frac{H^2}{4}} \int_0^L \int_0^L \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) + 1 \right)^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) + 1 \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0; \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{H \sqrt{1 + \frac{H^2}{4} \left(1 - \frac{H^2}{4L^2}\right)}}{\left(1 + \frac{H^2}{4L^2}\right)^2} \iint_{00}^{LL} \frac{1}{\zeta - \xi} d\xi d\zeta + \\
& + \frac{H}{2} \sqrt{1 + \frac{H^2}{4}} \iint_{00}^{LL} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) - 1 \right)^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) - 1 \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0, \quad (2.55)
\end{aligned}$$

а уравнение (2.50):

$$\begin{aligned}
& \iint_{00}^{LL} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) - 1 \right)^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) - 1 \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta - \\
& - \iint_{00}^{LL} \frac{(\zeta - \xi) \left[(\zeta - \xi)^2 - H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) + 1 \right)^2 \right]}{\left[(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(\frac{1}{2L} (\zeta + \xi) + 1 \right)^2 \right]^2} d\xi d\zeta = 0. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Аналогично [325] для винтового двойника [51] будем иметь систему уравнений, как и (2.12)–(2.17). Примем условия (2.27)–(2.30). Однако в этом случае согласно [23] проекции сил (2.16) и (2.17) могут быть найдены с использованием соотношения

$$F_x = b_B \sigma_{yz}, \quad (2.57)$$

где b_B – модуль винтовой составляющей вектора Бюргерса двойнивающей дислокации; σ_{yz} – сдвиговая компонента тензора напряжений, созданных дислокациями границ двойника. В рамках теории упругости справедливо соотношение

$$\sigma_{yz}(x, y) = \sigma_{yz}^{(1)}(x, y) + \sigma_{yz}^{(2)}(x, y), \quad (2.58)$$

где $\sigma_{yz}^{(1)}(x, y)$ и $\sigma_{yz}^{(2)}(x, y)$ – напряжения, обусловленные границами 1 и 2 двойника соответственно.

Напряжения (2.58) рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) d\xi; \quad (2.59)$$

$$\sigma_{yz}^{(2)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) d\xi, \quad (2.60)$$

где

$$\sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}; \quad (2.61)$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}. \quad (2.62)$$

С учетом (2.59)–(2.62) в (2.16) и (2.17) по аналогии с (2.19)–(2.22) можно принять:

$$F_{11x} = b_B \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.63)$$

$$F_{21x} = b_B \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.64)$$

$$F_{22x} = b_B \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta; \quad (2.65)$$

$$F_{12x} = b_B \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta, \quad (2.66)$$

где

$$\sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + (f_1(\zeta) - f_1(\xi))^2}; \quad (2.67)$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + (f_1(\zeta) - f_2(\xi))^2}; \quad (2.68)$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + (f_2(\zeta) - f_2(\xi))^2}; \quad (2.69)$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + (f_2(\zeta) - f_1(\xi))^2}. \quad (2.70)$$

Подставим (2.63)–(2.66) в (2.16) и (2.17). В результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta + \\ & + \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta = 0; \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) d\xi d\zeta + \\ & + \int_0^L \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Решение данных уравнений будем искать в виде полиномов (2.35)–(2.38) с учетом (2.33), (2.34), (2.39)–(2.41) и получающихся из них соотношений:

$$f_1(\zeta) - f_1(\xi) = a_1(\zeta - \xi), \quad f_1(\zeta) - f_2(\xi) = (a_0 - b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi); \quad (2.73)$$

$$f_2(\zeta) - f_2(\xi) = b_1(\zeta - \xi), \quad f_2(\zeta) - f_1(\xi) = (b_0 - a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi). \quad (2.74)$$

При этом выражения (2.67)–(2.70) преобразовываются в соотношения:

$$\sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi(1+a_1^2)} \frac{1}{\zeta - \xi}; \quad (2.75)$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_1(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((a_0 - b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2}; \quad (2.76)$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_2(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi(1+b_1^2)} \frac{1}{\zeta - \xi}; \quad (2.77)$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)}(\zeta, f_2(\zeta), \xi, f_1(\xi)) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((b_0 - a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2}, \quad (2.78)$$

а соотношения (2.71) и (2.72) – в выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{c(1+a_1^2)} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta - \xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{b_0 \sqrt{1+b_0^2}}{c} \int_0^L \int_0^L \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((a_0 - b_0) + (a_1\zeta - b_1\xi))^2} d\xi d\zeta = 0; \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} & \frac{b_0 \sqrt{1+b_0^2}}{c(1+b_1^2)} \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\zeta - \xi} d\xi d\zeta + \\ & + \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{c} \int_0^L \int_0^L \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((b_0 - a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2} d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Из (2.79) и (2.80) после несложных преобразований получим условие равновесия рассматриваемого винтового двойника в твердом теле после снятия нагрузок и при допущении равенства нулю силы трения для двойникующих дислокаций:

$$\begin{aligned} & + \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}}{c} \int_0^L \int_0^L \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((b_0 - a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2} d\xi d\zeta = 0. \\ & - \frac{a_0 \sqrt{1+a_0^2}(1+b_1^2)}{b_0 \sqrt{1+b_0^2}} \int_0^L \int_0^L \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + ((b_0 - a_0) + (b_1\zeta - a_1\xi))^2} d\xi d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Учитывая (2.51)–(2.53), из (2.81) получим:

$$\iint_{00}^{LL} \left(\frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(1 - \frac{\zeta + \xi}{2L}\right)^2} - \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + H^2 \left(\frac{\zeta + \xi}{2L} - 1\right)^2} \right) d\xi d\zeta = 0. \quad (2.82)$$

Условия (2.56) и (2.82) одновременно выполняются при $L = 0$ [328]. Это соответствует выстраиванию двойникующих дислокаций в стенку. Такой результат соответствует общеизвестному результату [23], [26]–[29], [108]–[111] и указывает на достоверность приведенной методики расчета и на то, что остаточный клиновидный двойник без отличных от нуля сил \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{F}_1^e или \vec{F}_2^e существовать не может. Однако при условиях:

$$\vec{F}_1^e \neq 0, \vec{S}_1 \neq 0; \quad (2.83)$$

$$\vec{F}_2^e \neq 0, \vec{S}_2 \neq 0 \quad (2.84)$$

поставленная задача точно решена быть не может.

2.4. Проверка выполнения условия равновесия твердого тела с механическим остаточным двойником в условиях плосконапряженного и плоскодеформированного состояния

Для плоского деформированного состояния твердого тела при отсутствии объемных сил справедливы условия [48]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Напряжения клиновидного двойника в рамках теории упругости могут быть определены из (2.1)–(2.5). Подставляя (2.1) в (2.85), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)})}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial(\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(2)})}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2.86)$$

Подстановка (2.3) в (2.86) дает:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi = 0; \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi = 0. \end{array} \right. \quad (2.87)$$

По правилу дифференцирования определенного интеграла по параметру [327] из (2.87) получим:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi = 0; \\
& \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi = 0.
\end{aligned} \right. \tag{2.88}$$

Или в более компактной форме:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi = 0; \\
& \int_0^L \sqrt{1+(f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1+(f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi = 0.
\end{aligned} \right. \tag{2.89}$$

Здесь частные производные от компонент тензора напряжений находятся из соотношений:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(1,0)}}{\partial x} = -\frac{\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)(y-f_1(\xi))}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^2} - \frac{2(x-\xi)(y-f_1(\xi)) \left[3(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^3} \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(2,0)}}{\partial x} = -\frac{\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)(y-f_2(\xi))}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^2} - \frac{2(x-\xi)(y-f_2(\xi)) \left[3(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^3} \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^2} - \frac{4(x-\xi)^2 \left[(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^3} \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^2} - \frac{4(x-\xi)^2 \left[(x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^3} \right],$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4(x-\xi)^2 \left[(x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^3}, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}}{\partial y} &= - \frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)(y-f_1(\xi))}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^2} + \right. \\
& \left. + \frac{2(x-\xi) \left[(y-f_1(\xi))(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^2} \right], \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}}{\partial y} &= - \frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)(y-f_2(\xi))}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^2} + \right. \\
& \left. + \frac{2(x-\xi)(y-f_2(\xi)) \left[(x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^3} \right], \\
\frac{\partial \sigma_{yy}^{(1,0)}}{\partial y} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)^2 - 3(y-f_1(\xi))^2}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^2} - \right. \\
& \left. - \frac{4(y-f_1(\xi))^2 \left[(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2 \right]}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2 \right]^3} \right], \\
\frac{\partial \sigma_{yy}^{(2,0)}}{\partial y} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)^2 - 3(y-f_2(\xi))^2}{\left[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2 \right]^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{4(y - f_2(\xi))^2 \left[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2 \right]}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^3} \right]. \quad (2.90)$$

Имеющие место в (2.89) суммы частных производных находятся по формулам:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{4\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2} - \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2} \right] = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{4\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2} - \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2} \right] = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{2\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2} - \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2 \right]^2} \right] = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{2\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2} - \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2}{\left[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2 \right]^2} \right] = 0. \quad (2.91) \end{aligned}$$

Подставляя (2.91) в (2.89), получаем тождество $0 + 0 \equiv 0$. Это указывает на то, что внутренние напряжения, создаваемые двойником, самоуравновешены.

Полученный результат (результат получен совместно с Ю. В. Василевичем [316]) можно объяснить на основании принципа суперпозиции и приближения теории упругости, использованного в приведенных выше расчетах. Каждая двойникообразная дислокация создает уравновешенное в твердом теле поле напряжений. Суперпозиция таких напряжений от всех дислокаций двойника также даст равновесное поле напряжений, что и доказано полученным результатом расчетов.

При наличии внешних сил f_i (i принимает значение x или y) условие (2.85) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0. \end{cases} \quad (2.92)$$

Из (2.85), (2.90)–(2.92) следует, что при нахождении деформируемого твердого тела с двойником в равновесии силы f_i также будут самоуравновешенными.

Для плоского напряженного состояния при отсутствии внешних сил справедливо условие равновесия [48]:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad (2.93)$$

где 1, 2 и 3 принимают значения x , y или z .

Тогда (2.93) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (2.94)$$

Учитывая (2.1), (2.94) можно записать в виде:

$$\frac{\partial (\sigma_{xz}^{(1)} + \sigma_{xz}^{(2)})}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{yz}^{(1)} + \sigma_{yz}^{(2)})}{\partial y} = 0. \quad (2.95)$$

Подставляя (2.3) в (2.95), получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{xz}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{xz}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi = 0. \quad (2.96)
\end{aligned}$$

По правилу дифференцирования определенного интеграла по параметру [327] из (2.96) получим:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{xz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \frac{\partial \sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} d\xi = 0. \quad (2.97)
\end{aligned}$$

В более компактной форме (2.97) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} \right] d\xi + \\
& + \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} \right] d\xi = 0. \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Подставляя в (2.98) следующие соотношения:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(1,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_B}{\pi} \frac{(x, y, \xi)(y - f_1(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}; \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(2,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_B}{\pi} \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}; \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}^{(1,0)}}{\partial y} = -\frac{\mu b_B}{\pi} \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}; \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}^{(2,0)}}{\partial y} = -\frac{\mu b_B}{\pi} \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}, \quad (2.102)$$

и учитывая

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{\mu b_B}{\pi} \left[\frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2} - \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2} \right] = 0; \quad (2.103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(2,0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{\mu b_B}{\pi} \left[\frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2} - \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2} \right] = 0, \quad (2.104) \end{aligned}$$

получим тождество $0 + 0 \equiv 0$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, показано (результат получен совместно с Ю. В. Василевичем [316]) выполнение условия равновесия деформируемого и недеформируемого твердого тела с остаточным клиновидным двойником и в случае плоскодеформированного состояния. Полученный результат объясняется в рамках теории упругости и принципа суперпозиции и связан с тем, что каждая двойникообразующая дислокация двойника создает равновесное поле напряжений. Для обеспечения равновесия твердого

тела с двойником внутренние напряжения, обусловленные внешними силами, должны быть самоуравновешивающимися.

2.5. Энергетические критерии механического двойникования

По многочисленным данным [29], [43], [108], [109], двойникование и разрушение представляют собой схожие физические явления. Это дало основание в работах [29], [108] использовать математический аппарат механики разрушения для развития теории двойникования. Воспользуемся этим же подходом и применим математический аппарат теории разрушения Гриффитса (A. A. Griffith) [329], [330] и Ирвина (G. R. Irwin) [331] с учетом анализа, проведенного в [9], [10], для решения задачи о нахождении критериев механического двойникования.

Рассмотрим механический двойник длиной L , находящийся у поверхности деформируемого твердого тела (рис. 2.24). Примем приближение однородной и изотропной среды, в которой рассматривается развитие двойника. Пусть деформирование среды находится в рамках закона Гука. Деформирование твердого тела осуществляется в условиях уже существующего в нем двойника.

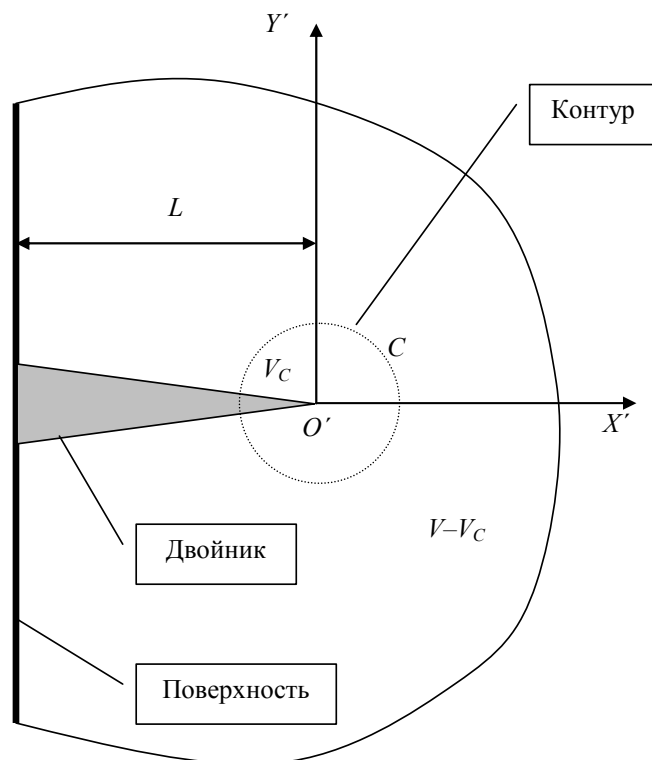


Рис. 2.24. Схематическое изображение механического клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

Декартову систему координат $X'O'Y'$ свяжем с движущейся вершиной двойника (рис. 2.24). Тогда полная энергия системы «деформируемое твердое тело – двойник» может быть найдена из соотношения

$$W_D = W_{\text{ext}} - W_{\text{int}}, \quad (2.105)$$

где W_D – полная диссипация энергии в рассматриваемой системе; W_{ext} – мощность приложенных сил; W_{int} – скорость изменения энергии, обусловленной внутренними силами. Согласно [48]:

$$W_{\text{ext}} = \int_{(\partial V)_T} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds; \quad (2.106)$$

$$W_{\text{int}} = \int_V \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} dx dy = \frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\varepsilon}) dx dy, \quad (2.107)$$

где $(\partial V)_T$ – изменение объема деформируемого твердого тела под действием внешних сил T ; \vec{u} – вектор смещения; $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений; \vec{n} – единичный вектор; V – область деформируемого твердого тела с двойником; $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций; s, x, y – параметры интегрирования.

Подставляя (2.106) и (2.107) в (2.105), получим:

$$W_D = \int_{(\partial V)_T} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds - \frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\varepsilon}) dx dy. \quad (2.108)$$

Скорость изменения работы обусловленными двойникованием внутренними силами может быть определена из соотношения [48]:

$$\frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \frac{d}{dt} \int_{V_c} W(\hat{\varepsilon}) dx dy + \frac{d}{dt} \int_{V-V_c} W(\hat{\varepsilon}) dx dy. \quad (2.109)$$

Здесь V_c – область, охваченная контуром C (рис. 2.24).

Переход к системе координат, связанной с движущейся вершиной двойника, даст [48]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \int_{V_c} \hat{\sigma} : \left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \right)_{x', y'} dx' dy'. \quad (2.110)$$

Как показано в [48]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V-V_c} W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \int_{V-V_c} \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} dx dy - \int_C W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) ds, \quad (2.111)$$

где \vec{e}_1 – единичный вектор, направленный в сторону перемещения вершины двойника.

После преобразования

$$\int_{V-V_c} \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} dx dy = \int_{\partial(V-V_c)} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\partial V} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds - \int_C \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds, \quad (2.112)$$

где $\vec{n}(C) = -\vec{n}(\partial(V - V_C))$, (2.105) можно записать в виде:

$$W_D = \int_C (W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) + \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n})) ds - \int_{V_c} \hat{\sigma} : \left(\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \right)_{x', y'} dx' dy'. \quad (2.113)$$

При $C \rightarrow 0$ получаем [48]:

$$W_D = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C (W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) + \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n})) ds = G \dot{L}, \quad (2.114)$$

где

$$G = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C \left(W(\hat{\varepsilon})(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \cdot \hat{\sigma}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) ds. \quad (2.115)$$

При этом величина интеграла

$$J = \int_C \left(W(\hat{\varepsilon})(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) ds, \quad (2.116)$$

от выбора C не зависит.

Следует отметить, что G представляет собой скорость высвобождения упругой энергии и часто представляется в виде [48], [329], [330]:

$$G = \frac{\partial U}{\partial L}, \quad (2.117)$$

где U – потенциальная энергия деформируемого нагрузкой твердого тела.

Учитывая, что $G = W_D / \dot{L}$, по аналогии с [48], [329], [330] для двойникования из (2.115) можно получить критерий двойникования:

$$G_{tw} = \frac{1}{E} \left((K_I^{tw})^2 + (K_{II}^{tw})^2 \right) + \frac{1}{2\mu} (K_{III}^{tw})^2, \quad (2.118)$$

где E – модуль Юнга; K_I^{tw} , K_{II}^{tw} , K_{III}^{tw} – критерии интенсивности напряжений, зависящие от схемы нагружения твердого тела с двойником, определяемые по формулам:

$$K_I^{tw} = \alpha \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi L}, \quad K_{II}^{tw} = \alpha \sigma_{xy}^{\infty} \sqrt{\pi L}, \quad K_{III}^{tw} = \alpha \sigma_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi L}. \quad (2.119)$$

Здесь σ_{yy}^{∞} , σ_{xy}^{∞} , σ_{yz}^{∞} – компоненты тензора внешних напряжений в случае одноосного растяжения, поперечного и продольного сдвига, соответственно; как было показано в [319], для нетонкого двойника $\alpha = 2$, для тонкого – $\alpha = 1$.

Через энергию образования поверхности раздела «двойник – материнский кристалл» W_S критическое условие подрастания двойника по аналогии с [48], [329], [330] можно выразить следующим образом:

$$\partial U + \partial W_S = 0, \quad (2.120)$$

или

$$\frac{\partial(U + W_S)}{\partial L} = 0. \quad (2.121)$$

Здесь

$$U = 2\alpha\gamma L, \quad (2.122)$$

где γ – энергия образования единичной площадки на границе раздела «двойник – материнский кристалл».

В соответствии с гипотезой Гриффитса [329], [330] уравнение энергетического баланса из (2.121) с учетом (2.122) можно записать в виде:

$$\frac{\partial W_S}{\partial L} = -2\alpha L. \quad (2.123)$$

Очевидно, что при

$$\frac{\partial^2(U + W_S)}{\partial L^2} < 0 \quad (2.124)$$

наблюдается неустойчивый рост двойника, а при выполнении условия

$$\frac{\partial^2(U + W_s)}{\partial L^2} > 0$$

имеет место устойчивый рост двойника.

Согласно подходу Ирвина [48], [331], для каждого способа деформирования твердого тела с двойником существует свой критический коэффициент интенсивности напряжений, при превышении которого начинается рост двойника. При этом в соответствии с подходом Ирвина для двойникования можно записать:

$$G_{tw} = -\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\beta}{E} \left((K_I^{tw})^2 + (K_{II}^{tw})^2 \right) + \frac{1+\nu}{E} (K_{III}^{tw})^2, \quad (2.126)$$

где $\beta = 1$ или $\beta = 1 - \nu^2$ – при плоском напряженном или деформированном состоянии соответственно.

Как видно из критериев двойникования (2.118) и (2.126), важной задачей для их определения является расчет критериев интенсивности напряжений для различных схем нагружения твердого тела с двойником. При этом не всегда получается простое решение, как в случае формул (2.119). Если на двойниковые границы нетонкого двойника действует нормальная нагрузка $T_1(x)$, а краевая составляющая вектора Бюргерса двойникующей дислокации направлена вдоль оси $O'X'$ (рис. 2.24), внутренние напряжения у двойника могут быть определены по формулам [48]:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(x)}{x-t} dt, \quad \sigma_{yy} = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(x)}{x-t} dt, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (2.127)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$; $\rho_{дв}(x)$ – плотность двойникующих дислокаций на двойниковых границах. В случае нетонкого двойника можно записать:

$$\rho_{дв}(x) = \rho_{дв1}(x) + \rho_{дв2}(x). \quad (2.128)$$

Здесь $\rho_{дв1}(x)$, $\rho_{дв2}(x)$ – плотность двойникующих дислокаций на 1 и 2 двойниковой границах соответственно.

В первом приближении для нетонкого двойника, сформированного в малодефектной области кристалла, можно принять $\rho_{дв1}(x) \approx \rho_{дв2}(x)$. Тогда из (2.128) следует, что $\rho_{дв}(x) \approx 2\rho_{дв1}(x)$.

В случае одноосного растяжения твердого тела с двойником по аналогии с [48] граничное условие может быть задано в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода:

$$-\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{\text{дв}}(t)}{t-x} dt = T_1(x). \quad (2.129)$$

Из этого уравнения с учетом условия

$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho_{\text{дв}}(t) dt = 0, \quad (2.130)$$

можно определить $\rho_{\text{дв}}(x)$ по формуле [48]:

$$\rho_{\text{дв}}(x) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_1(t) dt. \quad (2.131)$$

В рассматриваемом случае коэффициент интенсивности напряжений находится по формуле [48]:

$$K_I^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_1(t) dt. \quad (2.132)$$

Если двойник находится в твердом теле в поле напряжений поперечного сдвига, то на его границы будет действовать касательная нагрузка $T_2(x)$. Тогда по аналогии с [48] для плотности двойникующих дислокаций справедливо сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{\text{дв}}(t)}{t-x} dt = \frac{2\pi(1-\nu)}{\mu} T_2(x). \quad (2.133)$$

Отсюда

$$\rho_{\text{дв}}(x_0) = -\frac{2(1-\nu)}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_2(t) dt. \quad (2.134)$$

Формула для определения коэффициента интенсивности напряжений в этом случае примет вид [48]:

$$K_{II}^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_2(t) dt. \quad (2.135)$$

В случае антиплоского сдвига на двойниковые границы действует нагрузка $T_3(x)$. В этом случае справедливо уравнение [48]:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(t)}{t-x} dt = \frac{2\pi}{\mu} T_3(x), \quad (2.136)$$

которое имеет решение

$$\rho_{дв}(x_0) = -\frac{2}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_3(t) dt. \quad (2.137)$$

Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае определяется по формуле [48]:

$$K_{III}^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_3(t) dt. \quad (2.138)$$

Таким образом, показана возможность использования для критериев двойникового разрушения критериев разрушения. Это обусловлено аналогичностью процессов двойникового и разрушения.

ГЛАВА 3

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ У ОСТАТОЧНОГО КЛИНОВИДНОГО ДВОЙНИКА

3.1. Поля напряжений у находящегося вдали от поверхности клиновидного двойника с прямолинейными границами при непрерывном распределении на них двойникующих дислокаций

Результаты расчетов полей напряжений по формулам (2.1) и (2.3) при заданной постоянной плотности двойникующих дислокаций представлены на рис. 3.1–3.5, на которых четко прослеживаются двойниковые границы, являющиеся концентраторами напряжений. Это указывает на правомерность используемого в модели подхода. В отличие от существующих в настоящее время дислокационных моделей, использующих приближение тонкого двойника, в нашем случае возможны детальное рассмотрение области внутри клиновидного двойника и расчет в ней напряженного состояния (рис. 3.6) [314].

На рис. 3.1–3.6 представлены расчеты безразмерных величин:

$$\eta_{ij}(x, y) = \frac{L}{A_{ij}^*} \sigma_{ij}(x, y), \quad (3.1)$$

$$\text{где } A_{xx}^* = A_{yy}^* = A_{xy}^* = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}, \quad A_{zz}^* = \frac{\mu\nu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}, \quad A_{xz}^* = A_{yz}^* = \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi}.$$

Это выполнено для удобства расчетов по аналогии с общепринятыми подходами [23], [29], так как в рамках фундаментальных наук, к которым относится данная работа, привязка к конкретным материалам менее актуальна, чем в прикладных технических науках. В данном случае представляют интерес общие закономерности распределения полей напряжений у клиновидного двойника.

Очевидно, что в общем случае плотность двойнивающих дислокаций на двойниковых границах не является постоянной, но для упрощения расчетов она может быть принята таковой, так как часто отклонение от принятого допущения незначительно, или на отдельных участках границ отсутствует вообще.

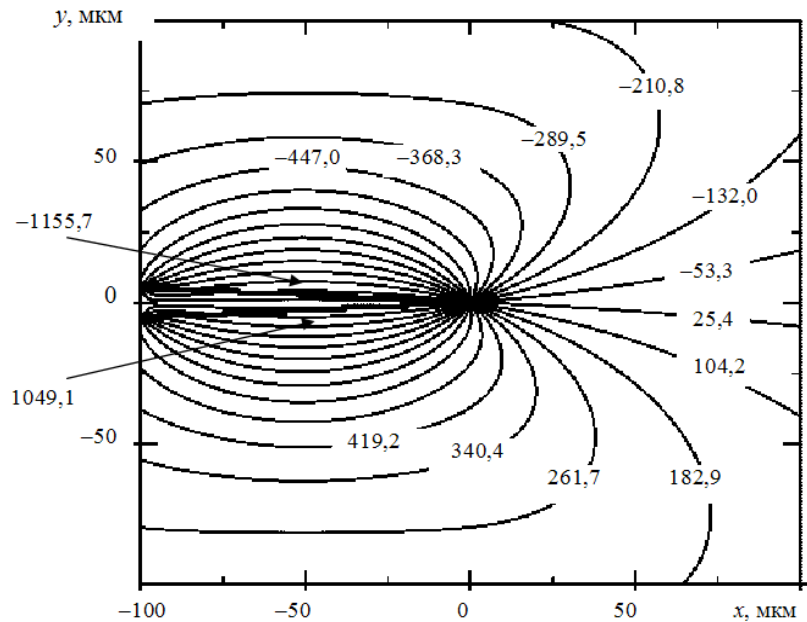


Рис. 3.1. Распределение $\eta_{xx}(x, y)$ у клиновидного двойника, полученное на основании макроскопической дислокационной модели

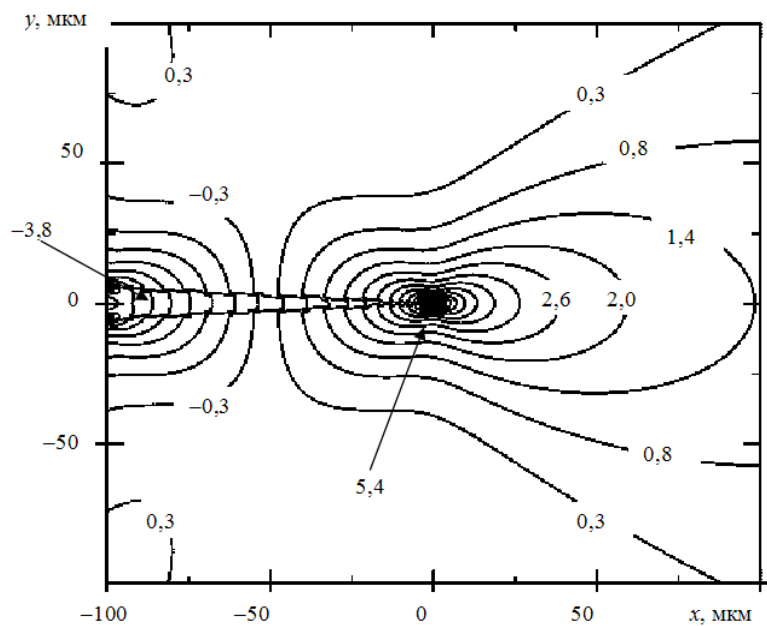


Рис. 3.2. Распределение $\eta_{xy}(x, y)$ у клиновидного двойника, полученное на основании макроскопической дислокационной модели

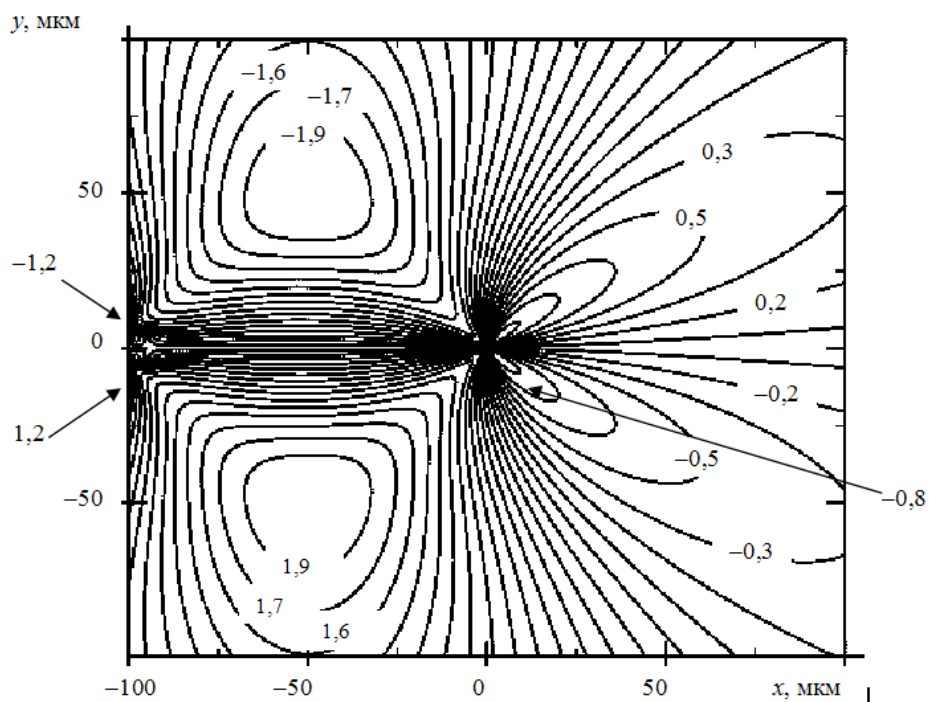


Рис. 3.3. Распределение $\eta_{yy}(x, y)$ у клиновидного двойника, полученное на основании макроскопической дислокационной модели

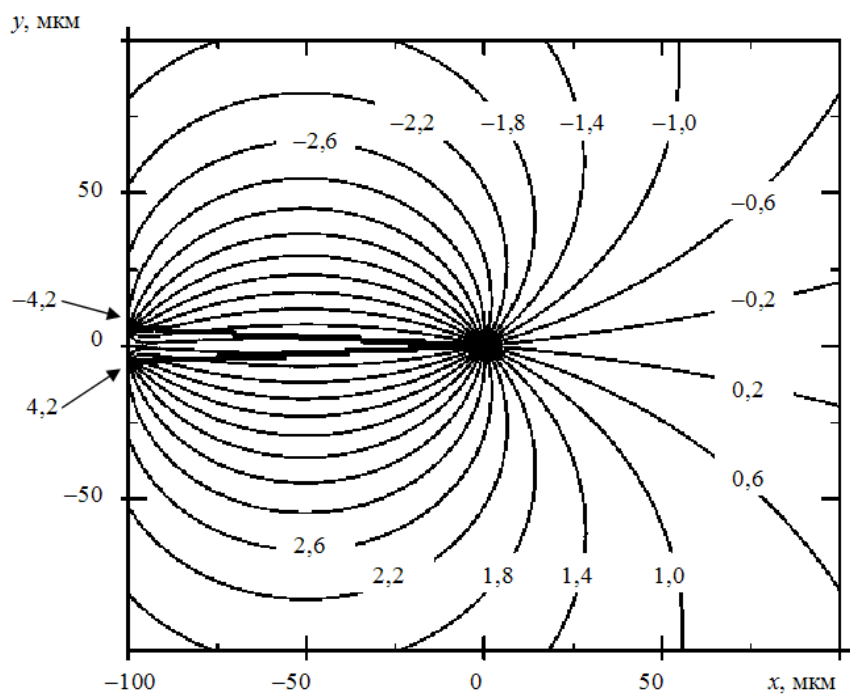


Рис. 3.4. Распределения $\eta_{yy}(x, y)$ и $\eta_{zx}(x, y)$ у клиновидного двойника, полученное на основании макроскопической дислокационной модели

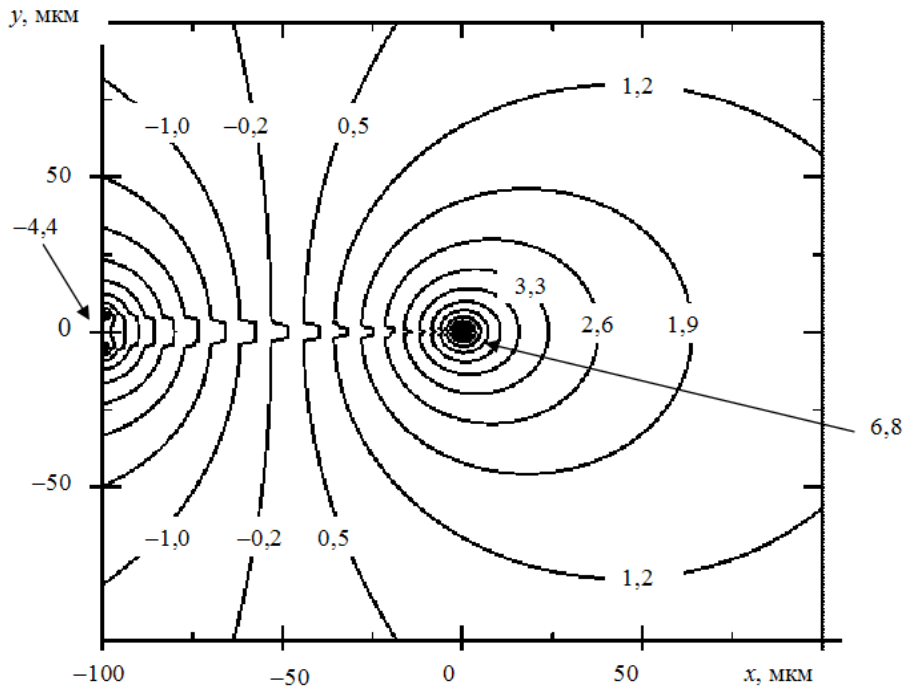


Рис. 3.5. Распределение $\eta_{zy}(x, y)$ у клиновидного двойника, полученное на основании макроскопической дислокационной модели

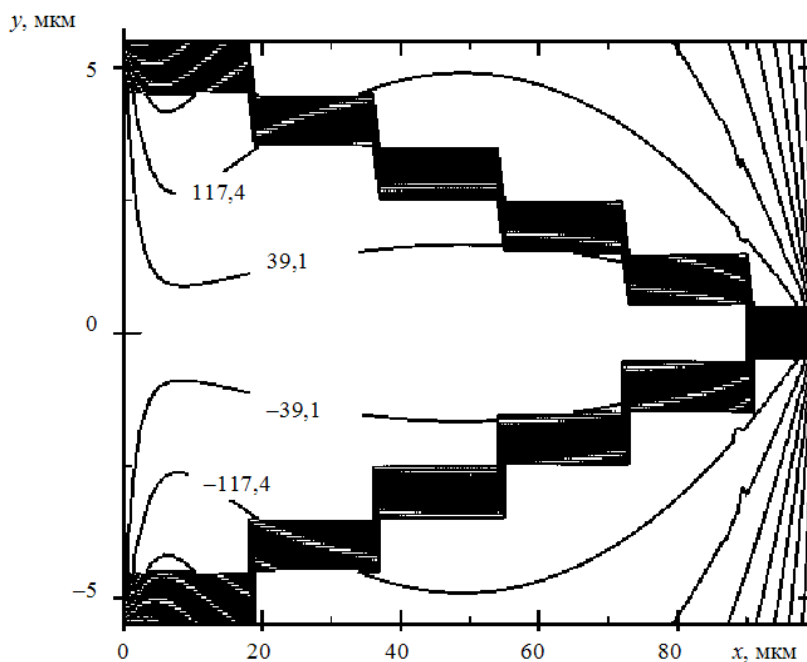


Рис. 3.6. Распределение $\eta_{xx}(x, y)$ внутри клиновидного двойника

Нормальные напряжения σ_{xx} знакопеременны по отношению к направлению развития двойника, совпадающему с направлением оси OX . В положительном направлении оси OY данные напряжения отрицатель-

ны, а в отрицательном направлении оси OY – положительны (рис. 3.1). Таким образом, у одной из границ клиновидного двойника напряжения σ_{xx} – сжимающие, а у другой – растягивающие. Максимальные значения σ_{xx} принимают на границах двойника, причем в большей степени в средней их части, чем у вершины двойника.

Сдвиговые напряжения σ_{xy} знакопеременны по отношению к оси, параллельной оси OY и проходящей через середину двойника (точку $L/2$ на оси OX). У вершины двойника данные напряжения положительны, а у устья – отрицательны (рис. 3.2). В средней части двойника напряжения σ_{xy} минимальны.

Распределение нормальных напряжений σ_{yy} представлено на рис. 3.3. Они положительны в первой и третьей четверти плоскости XOY и отрицательны – во второй и четвертой (рис. 3.3).

Напряжения σ_{zz} и σ_{zx} имеют одинаковую конфигурацию (рис. 3.4) и отличаются лишь по величине. Данные напряжения отрицательны в первой и второй четвертях плоскости XOY и положительны – в третьей и четвертой. Это приводит к концентрации напряжений у границ двойника. В данном случае знак напряжений у границ двойника различен.

Напряжения σ_{zy} (рис. 3.5) меняют знак, как и напряжения σ_{xy} .

В качестве примера, демонстрирующего возможности разрабатываемой модели в исследовании напряжений внутри двойника, рассмотрим распределение $\eta_{xx}(x, y)$ внутри клиновидного двойника с линейными границами. Данное распределение представлено на рис. 3.6. Видно, что напряжения внутри клиновидного распределены неравномерно, однако они симметричны относительно оси OX [314].

3.2. Распределение смещений у двойникового клина при непрерывном распределении двойникоующих дислокаций на двойниковых границах

Результаты расчетов полей смещений показаны на рис. 3.7–3.9. Принималось $H = 11$ мкм; $L = 100$ мкм (отношение ширины и длины двойника имеет порядок 10^{-1} , как во многих экспериментах [112]–[115], [332]); $\rho_1 = \rho_2 = 10^5$; $\nu = 0,33$. Расчетные формулы приведены выше. Для удобства и общности расчетов рассчитывалась безразмерная величина:

$$\chi_i(x, y) = \frac{u_i(x, y)}{B_i^*}, \quad (3.2)$$

где $B_x^* = B_y^* = \frac{b_{кр}}{2\pi}$, $B_z^* = \frac{b_B}{2\pi}$, $B_z^* = \frac{b_B}{2\pi}$.

Конфигурация распределения смещений u_x и u_z (рис. 3.7 и 3.9) имеет схожий вид. Отличие заключается в значениях изолиний в одних и тех же областях относительно клиновидного двойника. Следует отметить, что данные смещения знакопеременны относительно оси OX (рис. 3.7 и 3.9), а также относительно оси, параллельной оси OY , и проходящей у устья двойника.

Смещения u_y отрицательны и имеют большое свое численное значение также в удалении от вершины двойника (рис. 3.8) (в обсуждении результатов участвовал Ю. В. Василевич [322]).

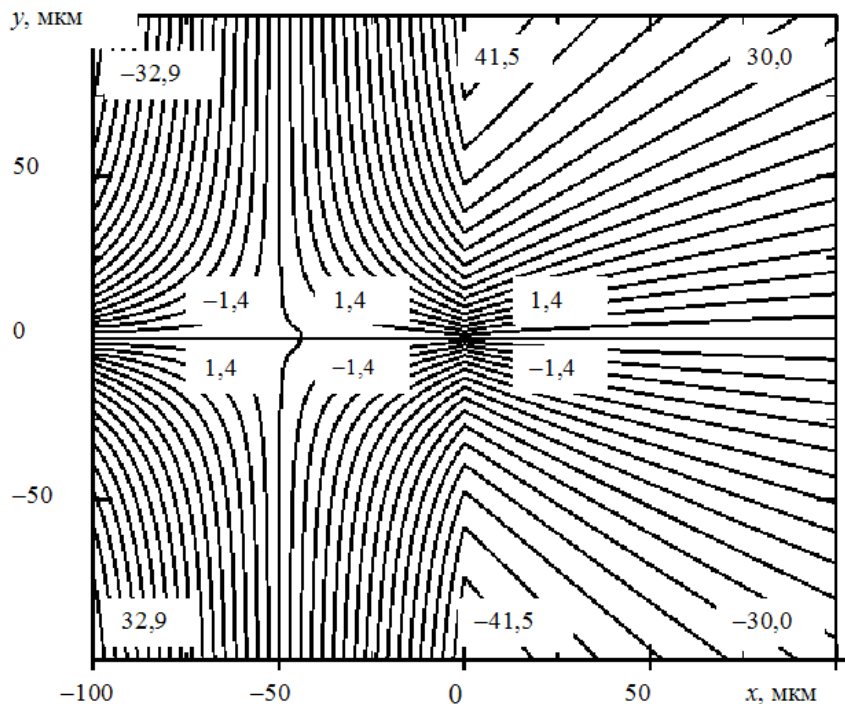


Рис. 3.7. Распределение $\chi_x(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение $u_x(x, y)$)

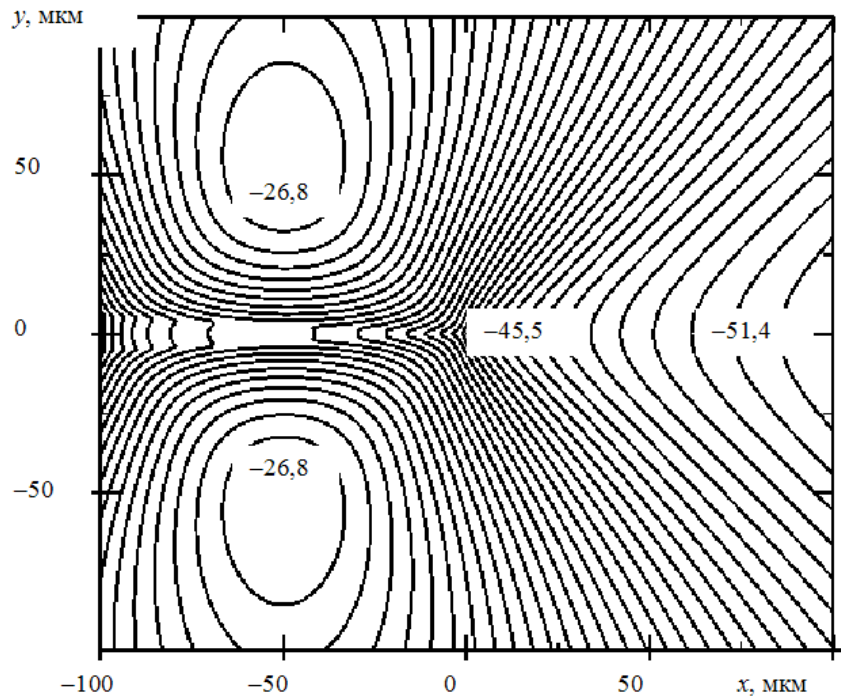


Рис. 3.8. Распределение $\chi_y(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение $u_y(x, y)$)

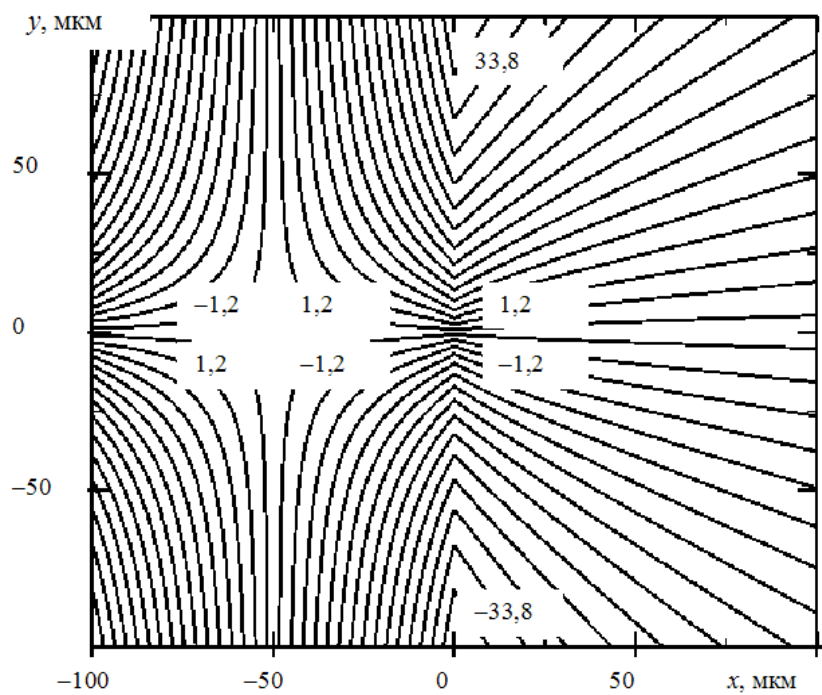


Рис. 3.9. Распределение $\chi_z(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение $u_z(x, y)$)

3.3. Расчет на основании макроскопической дислокационной модели полей деформаций у клиновидного двойника с прямолинейными границами

Результаты расчетов деформаций (2.10) представлены на рис. 3.10–3.14. Принималось: $\nu = 0,29$; $L = 100$ мкм; $H = 11$ мкм. Плотность дислокаций, как и раньше, бралась постоянной [323].

Как видно из рис. 3.10–3.14, деформации локализуются на двойниковых границах. Деформации ε_{xx} отрицательны в первой и третьей четвертях плоскости XOY и положительны – во второй и четвертой четвертях этой плоскости. Деформации же ε_{yy} в первой и четвертой четвертях меняют знак на противоположный. Данные деформации, как и деформации ε_{xz} , имеют разный знак у разных границ двойника. Деформации ε_{xy} , как и ε_{yz} , положительны у вершины двойника и отрицательны – у его устья.

Представленные на рис. 3.10–3.14 соответствуют критерию $|\varepsilon_{ij}| < 1$ линейной теории упругости [1], [20], [24], когда возможно использование принципа суперпозиции полей напряжений. Области, в которых не выполняется это условие, бесконечно малы по сравнению с выбранными размерами расчетной области [318].

3.4. Поля напряжений у клиновидного двойника с криволинейными границами

Разработанная модель в расчетах напряженного и деформированного состояния позволяет учитывать особенности формы двойниковых границ и плотности распределения на них двойникующих дислокаций. Экспериментальному исследованию двойников, зародившихся вдали от поверхности кристалла без образования на этой поверхности ступеньки, посвящена работа [313]. В ней показано, что форма границ остаточного двойника внутри кристалла аналогична форме двойниковых границ, наблюдаемых на поверхности.

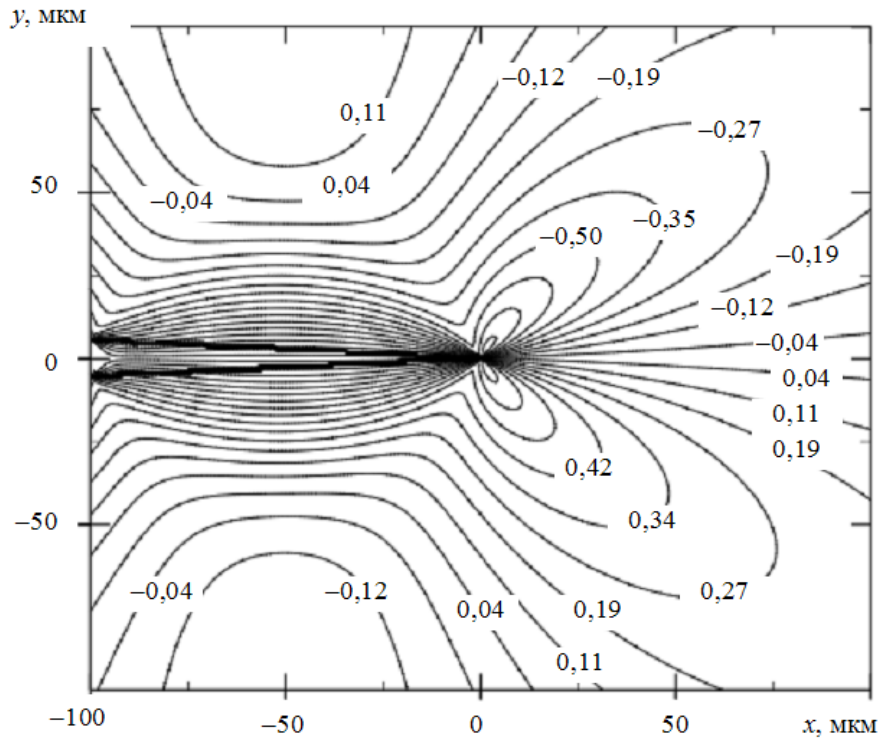


Рис. 3.10. Распределение деформации $\epsilon_{yx}(x, y)$

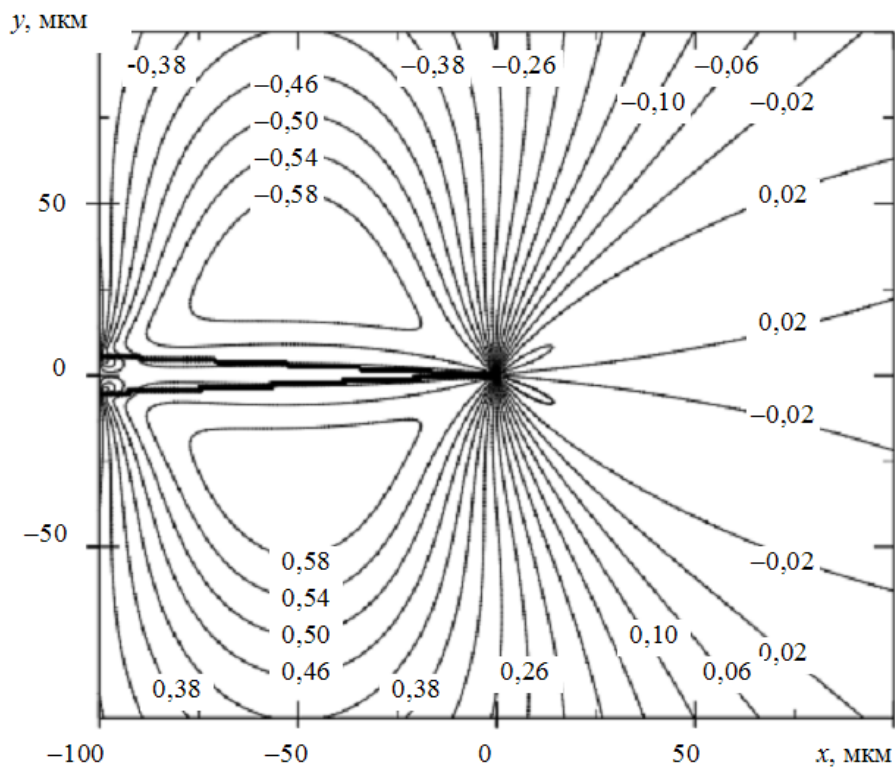


Рис. 3.11. Распределение деформации $\epsilon_{yy}(x, y)$

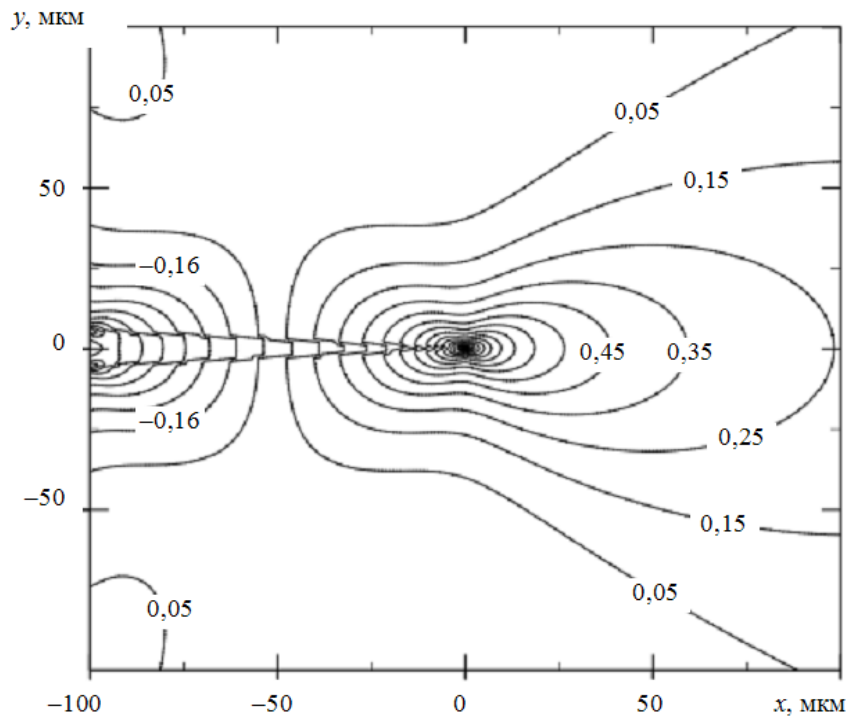


Рис. 3.12. Распределение деформации $\epsilon_{xy}(x, y)$

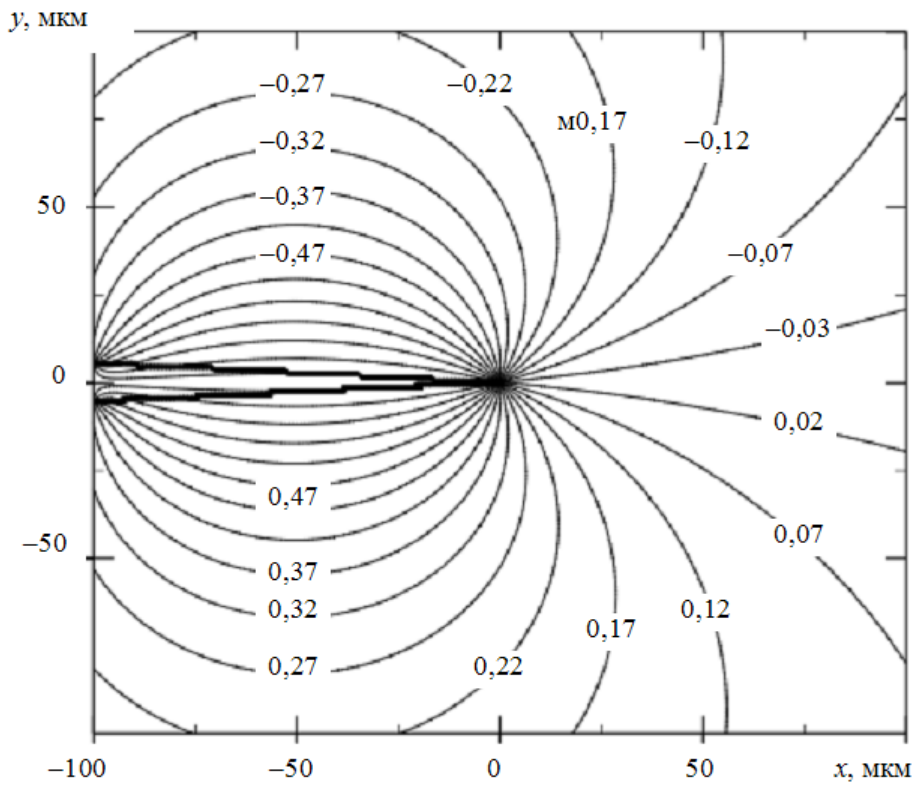


Рис. 3.13. Распределение деформации $\epsilon_{xz}(x, y)$

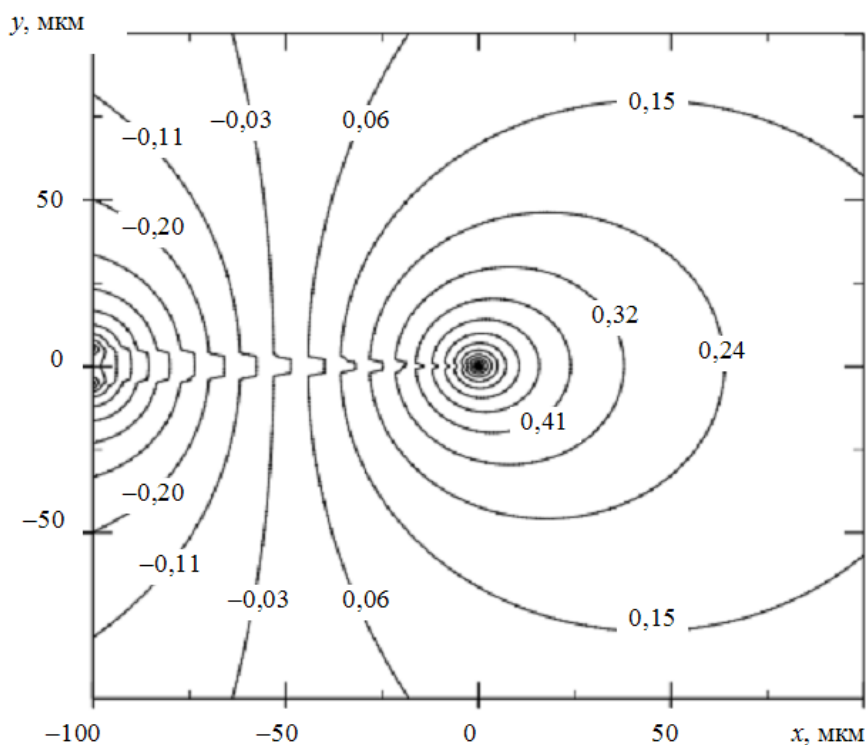


Рис. 3.14. Распределение деформации $\varepsilon_{yz}(x, y)$

Форма двойников, возникающих у концентратора напряжений, во многом определяется дефектностью структуры кристаллической решетки и дислокационными процессами, происходящими на двойниковых границах и в прилегающих к ним областях [333]. По этой причине микродвойники могут выступать анализаторами дефектности деформируемого двойникующегося материала. Изучение формы двойников представляется перспективным и целесообразным в плане разработки метода исследования дефектности приповерхностных слоев двойникующихся кристаллов с использованием в качестве анализаторов двойниковых прослоек [295], [333]–[339].

Все разнообразие форм границ двойников можно разделить на четыре группы: 1) прямолинейная граница; 2) выпуклая граница; 3) вогнутая граница; 4) граница, сочетающая выпуклые и вогнутые участки [333].

Двойники первой группы изображены на рис. 2.22. Двойник с выпуклой границей показан на рис. 3.15, с вогнутой границей – на рис. 3.16, а двойник с границей, сочетающей выпуклые и вогнутые участки, – на рис. 3.17.



Рис. 3.15. Двойник с выпуклой границей



Рис. 3.16. Двойник с вогнутой границей

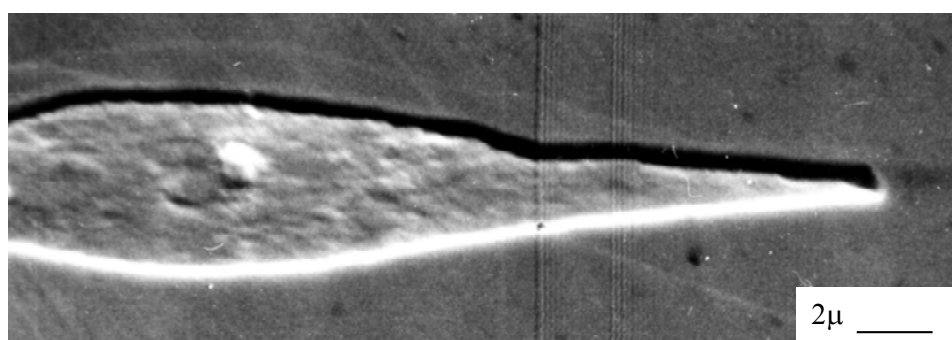


Рис. 3.17. Двойник с границей, сочетающей выпуклые и вогнутые участки

Наличие в выражениях (2.3) функций $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$, где x_0 – текущая координата точки на границе двойника, позволяет учесть в модели практически любую форму двойниковых границ. Рассматривать все

возможные варианты форм границ двойников нецелесообразно, так как они могут быть определены совокупностью прямолинейных, вогнутых и выпуклых участков. Вариант прямолинейных границ выше уже был рассмотрен. В этом случае форма границ двойника описывается функциями (2.6) и (2.7). На рис. 3.18 представлен вариант расчета конфигурации сдвиговых напряжений η_{xy} у двойника с прямолинейными границами при $H = 31$ мкм. Это удобно для ведения дальнейшего сравнительного анализа со случаями криволинейных границ, так как в отличие от ранее рассмотренного варианта при $H = 11$ мкм, в данном случае расстояние между двойниковыми границами у устья достаточное для наглядного представления результатов [333].

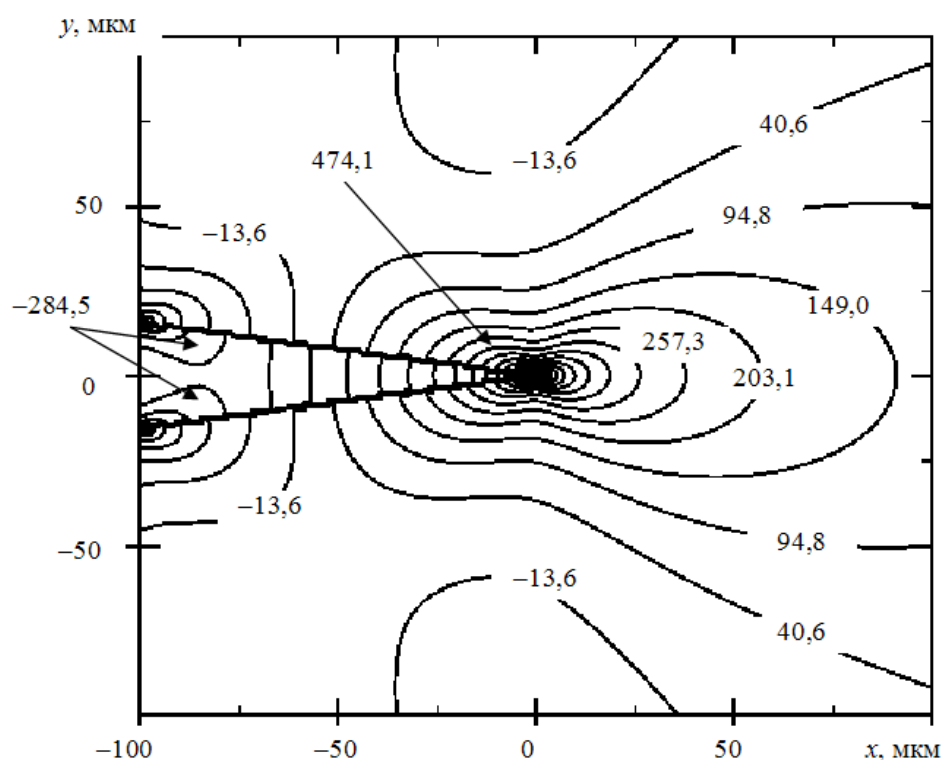


Рис. 3.18. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с прямолинейными границами при $H = 31$ мкм

Без ущерба общности полученных результатов примем границу, описываемую функцией $f_2(x_0)$, прямолинейной. Тогда для случая выпуклой границы, приведенного на рис. 3.15, можно принять [333]:

$$f_1(x_0) = \frac{H}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{L}\right)^2}. \quad (3.3)$$

Данная функция описывает параболу, ветви которой ориентированы вдоль оси OX в противоположном ее направлении. Взяв только часть ветви параболы, находящуюся в первой четверти плоскости XOY , получим результат, представленный на рис. 3.19. На данном рисунке четко прослеживается выгнутость одной из границ двойника. Из-за этого утратилась симметрия сдвиговых полей напряжений относительно оси OX .

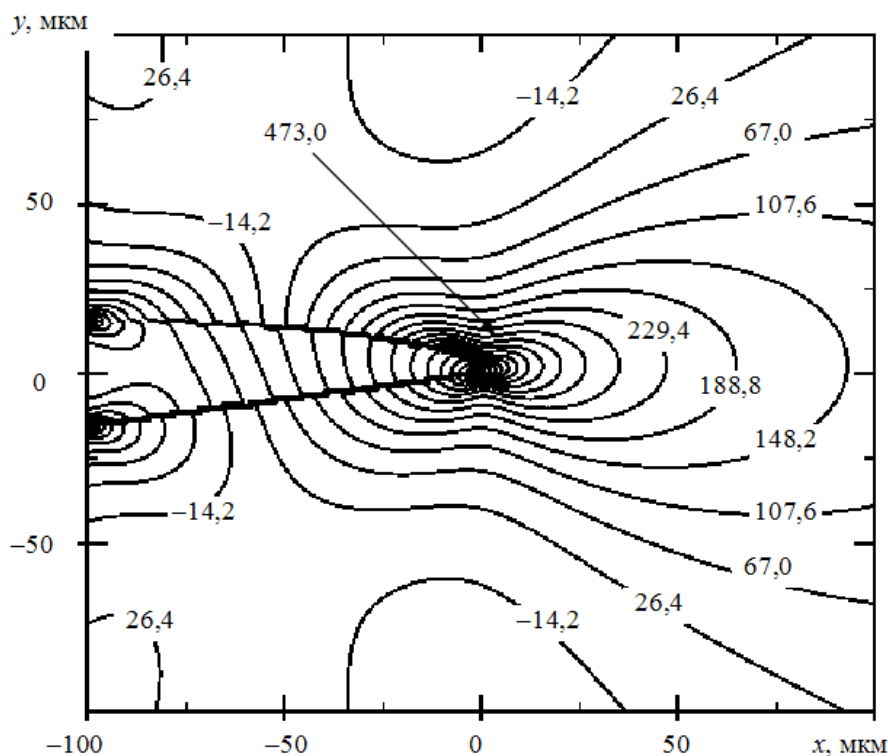


Рис. 3.19. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с выпуклой границей

Аналогично для вогнутой границы (рис. 3.16) примем [333]:

$$f_1(x_0) = \frac{H}{2} \left(\frac{x_0^2}{L^2} - \frac{2x_0}{L} + 1 \right). \quad (3.4)$$

В этом случае ветви параболы находятся в области положительных значений оси OY , а вершина параболы – в вершине двойника.

Результаты расчета для данного случая показаны на рис. 3.20.

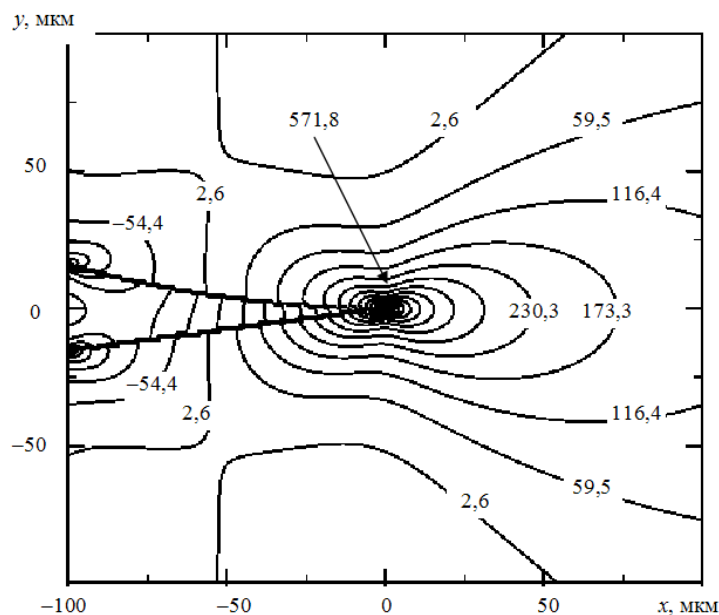


Рис. 3.20. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с вогнутой границей

3.5. Влияние плотности двойникующих дислокаций на конфигурацию полей напряжений у клиновидного двойника

Не будем ставить задачу о рассмотрении всех вариантов распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах и всех вариантов форм этих границ. Данная задача весьма объемна. Поэтому целесообразно ограничиться задачами, интересными с точки зрения физического анализа накопленного в настоящее время экспериментального материала по изучению клиновидных двойников.

В первую очередь, необходимо рассмотрение двойников с прямолинейными границами. Такие двойники имеют вид вытянутых равнобедренных треугольников и характеризуют промежуточные стадии развития двойников в малодефектной области кристалла [340]. Поэтому увеличение плотности двойникующих дислокаций на определенных участках границ таких двойников может рассматриваться как стадия, предшествующая искривлению границы двойника. Это связано с тем, что увеличение ширины двойника увеличивает степень некогерентности двойниковой границы и, как следствие, ведет к увеличению плотности двойникующих дислокаций в выпуклых участках двойниковых границ. И наоборот, уменьшение ширины двойника в случае, например, вогнутой двойниковой границы приводит к уменьшению плотности двойникующих дислокаций на такой границе,

или ее участке. Поэтому, моделируя уменьшение, или увеличение плотности двойникующих дислокаций на прямолинейной двойниковой границе, на основании модели, разработанной в [333], можно рассматривать напряженное состояние у клиновидного двойника на стадии, предшествовавшей искривлению его границы.

Порядок величины плотности дислокаций оценивался по экспериментальным данным [340]. При этом использовалось расчетное соотношение:

$$\rho = \frac{H}{2aL}. \quad (3.5)$$

Примем $H = 31$ мкм; $L = 100$ мкм; $a = 0,31$ нм. Тогда получим: $\rho = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$.

Случай сдвиговых напряжений, когда на двух двойниковых границах одинаковая плотность двойникующих дислокаций и форма границ описывается функциями (2.6) и (2.7), представлен на рис. 3.21. Наблюдается симметрия в распределении полей сдвиговых напряжений относительно оси OX . У вершины двойника напряжения σ_{xy} положительны, а у устья – отрицательны. В средней части двойника сдвиговые напряжения близки к нулю.

В случае, когда на одной из границ плотность двойникующих дислокаций выше, чем на другой, наблюдается потеря симметрии в распределении рассматриваемых сдвиговых полей напряжений (рис. 3.22) [340]. Эта ситуация предшествует искривлению двойниковой границы, которая становится выпуклой, и ее профиль может быть описан функцией (3.3). Результаты расчетов сдвиговых напряжений в случае выпуклой границы при избыточной плотности двойникующих дислокаций представлены на рис. 3.23. На выпуклой границе при интенсивных деформациях кристалла часто возникают новые двойники, и наблюдается явление ветвления двойников [300], [341].

Потеря симметрии в распределении напряжений σ_{xy} наблюдается и в случае уменьшения плотности двойникующих дислокаций на двойниковой границе (рис. 3.24). Данная ситуация предшествует формированию вогнутой двойниковой границы, профиль которой может быть описан функцией (3.4). Расчеты сдвиговых напряжений у клиновидного двойника с вогнутой двойниковой границей при меньшей плотности двойникующих дислокаций на ней, по сравнению с другой границей, представлены на рис. 3.25 [333].

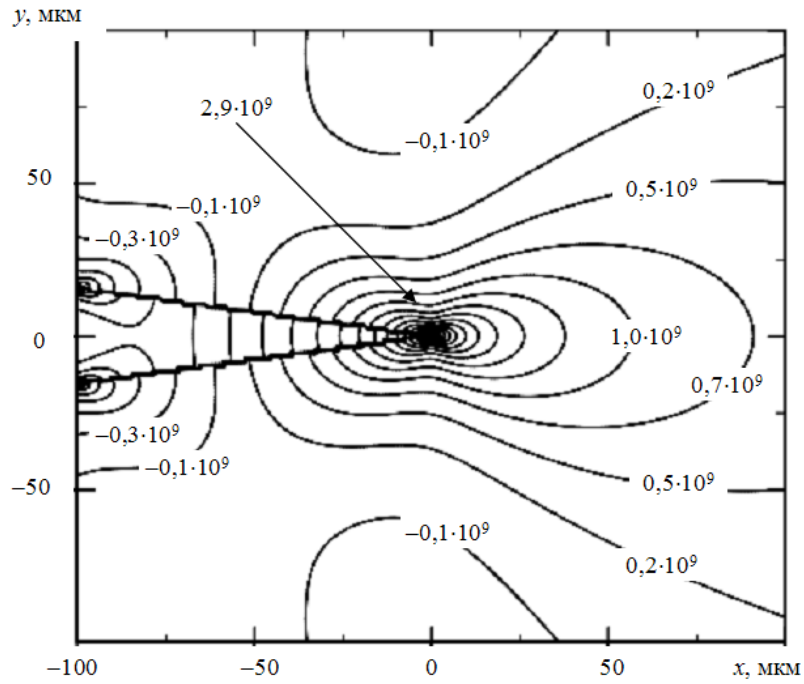


Рис. 3.21. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с прямолинейными границами при $\rho_1 = \rho_2 = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$

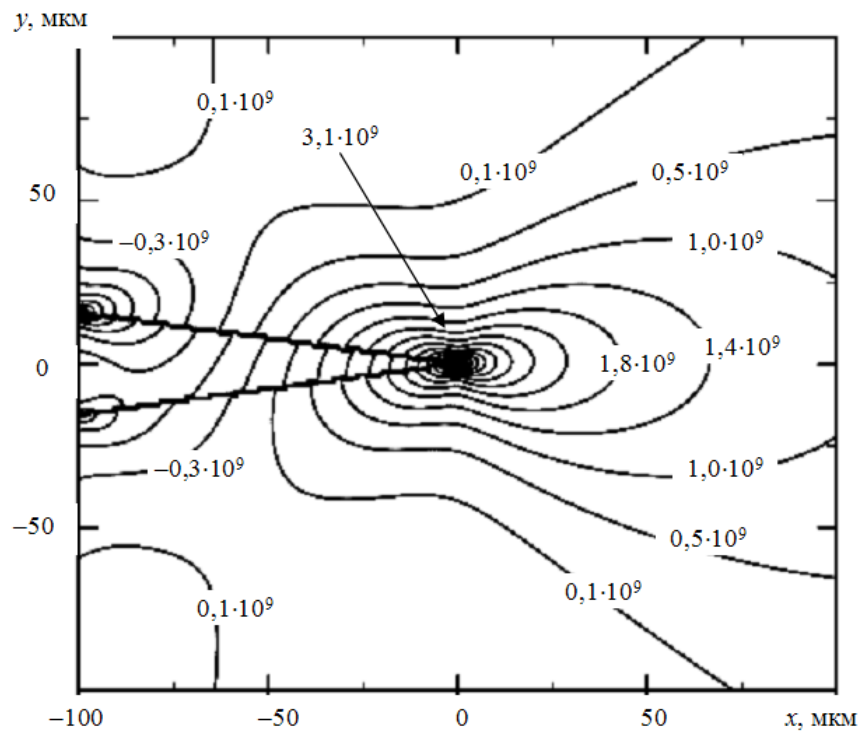


Рис. 3.22. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с прямолинейными границами при $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$, $\rho_2 = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$

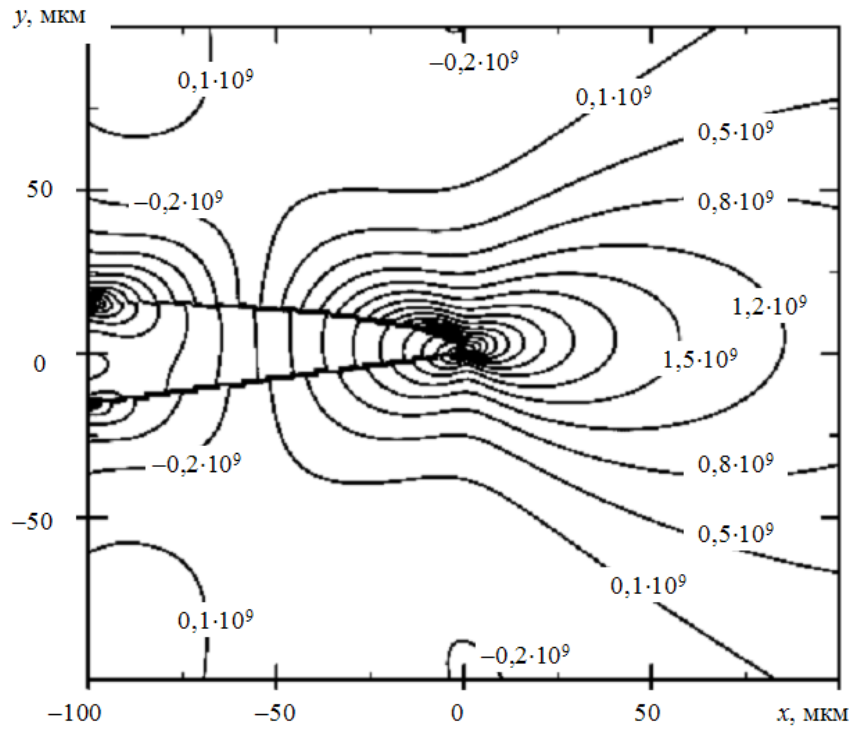


Рис. 3.23. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с выпуклой границей при $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$, $\rho_2 = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$

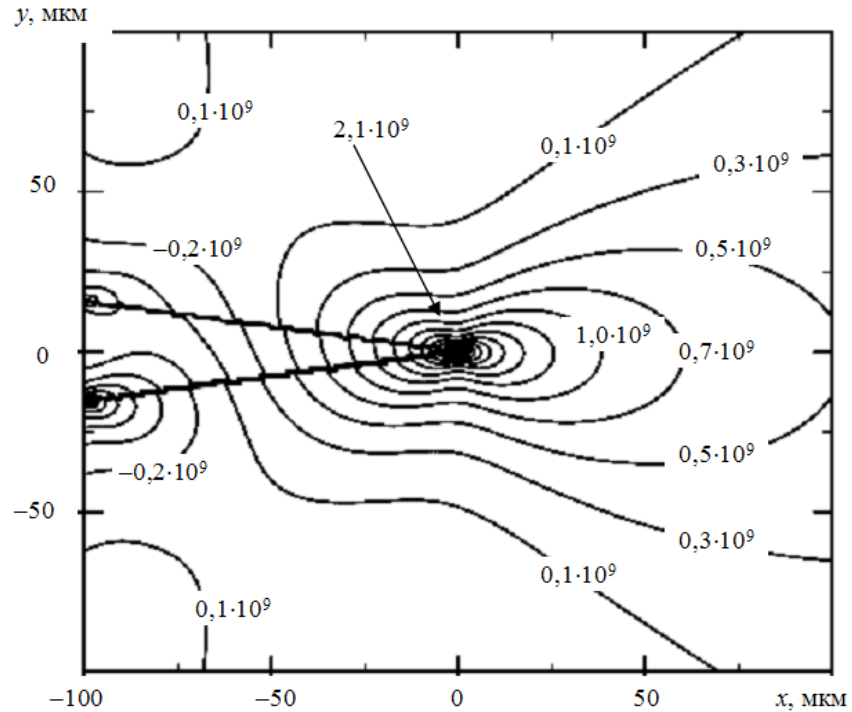


Рис. 3.24. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с прямолинейными границами при $\rho_1 = 0,25 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$, $\rho_2 = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$

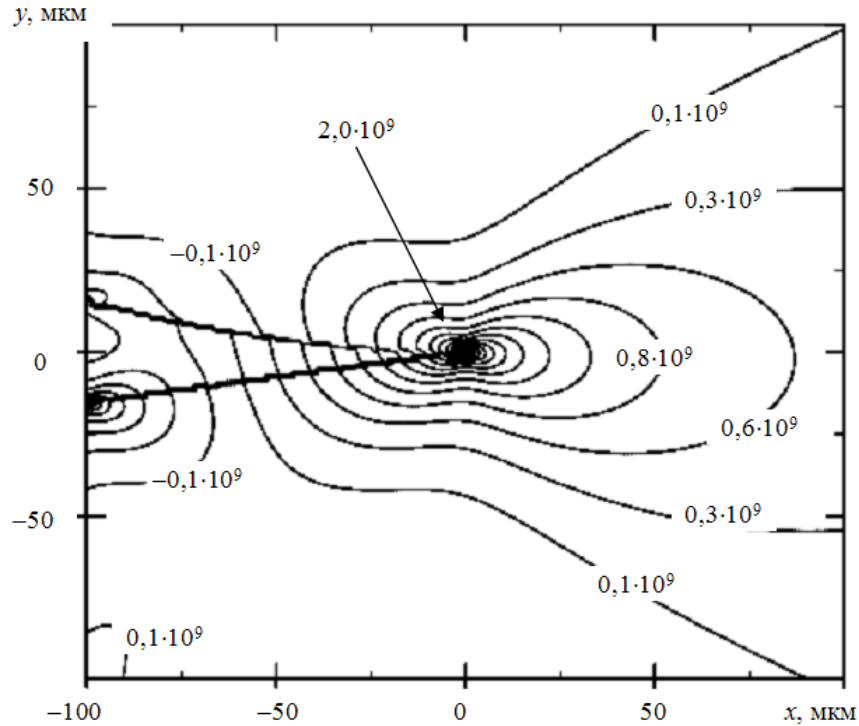


Рис. 3.25. Распределение сдвиговых напряжений η_{xy} у клиновидного двойника с вогнутой границей при $\rho_1 = 0,25 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$, $\rho_2 = 0,5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$

3.6. Расчет в рамках макроскопической дислокационной модели полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

На рис. 3.26 схематически представлен клиновидный двойник, находящийся у поверхности кристалла, след которой совпадает с осью OX . Ось OY направим в направлении развития двойника, тогда соотношения (2.3) примут вид [342]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(y_0))^2} \rho_1(y_0) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, y_0) dy_0, \\ \sigma_{ij}^{(2)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(y_0))^2} \rho_2(y_0) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, y_0) dy_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

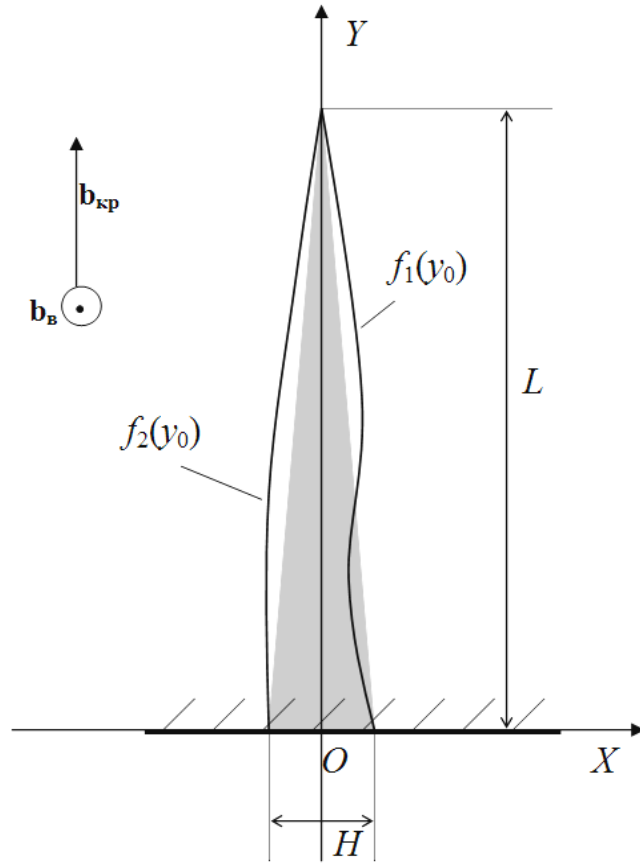


Рис. 3.26. Двойник длиной L и шириной у устья H , находящийся у поверхности кристалла

В случае двойника, находящегося у поверхности кристалла, из (1.41) можно получить [342]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1,0)} = & -B_{\text{кр}} \frac{(x - f_1(y_0)) \left[(x - f_1(y_0))^2 - (y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + \\ & + B_{\text{кр}} \frac{(x - f_1(y_0)) \left[(x - f_1(y_0))^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} + \\ & + 4B_{\text{кр}} \frac{(x - f_1(y_0)) y_0 \left[(x - f_1(y_0))^2 (3y + 2y_0) - (y + y_0)^2 (y - 2y_0) \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}^{(1,0)} &= -B_{\text{kp}} \frac{(x - f_1(y_0)) \left[(x - f_1(y_0))^2 + 3(y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + \\
&+ B_{\text{kp}} \frac{(x - f_1(y_0)) \left[(x - f_1(y_0))^2 + 3(y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} - \\
&- 4B_{\text{kp}} \frac{(x - f_1(y_0)) y y_0 \left[(x - f_1(y_0))^2 - 3(y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{xy}^{(1,0)} &= -B_{\text{kp}} \frac{(y - y_0) \left[(x - f_1(y_0))^2 - (y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + \\
&+ B_{\text{kp}} \frac{(y + y_0) \left[(x - f_1(y_0))^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} - \\
&- 2B_{\text{kp}} y_0 \frac{(x - f_1(y_0))^4 - 6(x - f_1(y_0))^2 y (y + y_0) + (y - y_0)(y + y_0)^3}{\left[(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{xz}^{(1,0)} &= B_{\text{B}} \left[\frac{y - y_0}{(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2} - \frac{y + y_0}{(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2} \right], \\
\sigma_{yz}^{(1,0)} &= -B_{\text{B}} \left[\frac{x - f_1(y_0)}{(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2} - \frac{x - f_1(y_0)}{(x - f_1(y_0))^2 + (y + y_0)^2} \right]; \quad (3.7) \\
\sigma_{xx}^{(2,0)} &= -B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) \left[(x - f_2(y_0))^2 - (y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) \left[(x - f_2(y_0))^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} + \\
& + 4B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) y_0 \left[(x - f_2(y_0))^2 (3y + 2y_0) - (y + y_0)^2 (y - 2y_0) \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{yy}^{(2,0)} = & -B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) \left[(x - f_2(y_0))^2 + 3(y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + \\
& + B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) \left[(x - f_2(y_0))^2 + 3(y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} - \\
& - 4B_{\text{kp}} \frac{(x - f_2(y_0)) y y_0 \left[(x - f_2(y_0))^2 - 3(y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3}, \\
\sigma_{xy}^{(2,0)} = & -B_{\text{kp}} \frac{(y - y_0) \left[(x - f_2(y_0))^2 - (y - y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right]^2} + \\
& + B_{\text{kp}} \frac{(y + y_0) \left[(x - f_2(y_0))^2 - (y + y_0)^2 \right]}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^2} - \\
& - 2B_{\text{kp}} y_0 \frac{(x - f_2(y_0))^4 - 6(x - f_2(y_0))^2 y (y + y_0) + (y - y_0)(y + y_0)^3}{\left[(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2 \right]^3},
\end{aligned}$$

$$\sigma_{xz}^{(2,0)} = B_B \left[\frac{y - y_0}{(x - f_2(y_0))^2 + (y - y_0)^2} - \frac{y + y_0}{(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2} \right],$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)} = -B_B \left[\frac{x - f_2(y_0)}{(x - f_2(y_0))^2 + (y - y_0)^2} - \frac{x - f_2(y_0)}{(x - f_2(y_0))^2 + (y + y_0)^2} \right]. \quad (3.8)$$

Учет упоминаемой в [29] А. М. Косевичем ступеньки величиной δ , оставляемой на поверхности кристалла или внутренней границе (например, межзеренной) раздела двойником в результате поворота кристаллической решетки, без труда может быть осуществлен интегрированием в одном из интегралов (2.3) не от нуля, а от δ , как, например, в соотношении

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y) = \int_{\delta}^L \sqrt{1 + (f_1'(x_0))^2} \rho_1(x_0) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, x_0) dx_0.$$

Однако в таких задачах общепринято [29], [108]–[110] пренебрежение величиной этой ступеньки ввиду малого ее вклада в напряженно-деформированное состояние, обусловленное двойником, рассматриваемое на таком принятом в механике деформируемого твердого тела масштабном уровне, когда атомной структурой материала пренебрегают. При этом принятое в работах [29], [108]–[110] пренебрежение величиной ступеньки не означает отрицание собственного двойникованию поворота кристаллической решетки, а является оправданным допущением модели [343].

Общеизвестно, что двойникование и скольжение являются основными каналами пластической деформации твердых тел [29], [108]. В настоящее время четко установлено, что при определенных условиях деформирования механическому двойникованию подвержены практически все используемые в технике материалы [29], [108], [186]. Однако при этом часто возникает вопрос об ориентации вектора Бюргера двойнивающей дислокации по отношению к поверхности в случаях, когда плоскость двойникования перпендикулярна поверхности, а двойниковая граница расположена к ней не под прямым углом.

На рис. 3.27 схематически показано распределение дислокаций на двойниковых границах, полосе скольжения и дислокационной стенке, расположенных не под прямым углом к поверхности. При этом плоскость двойникования перпендикулярна поверхности. Пусть

цепочка дислокаций и дислокационная стенка состоят из краевых дислокаций, а винтовая составляющая двойникующих дислокаций в показанной на рисунке плоскости сечения двойника (плоскости, перпендикулярной поверхности) параллельна поверхности. Тогда векторы Бюргера цепочки дислокаций $\mathbf{b}_ц$ и дислокационной стенки $\mathbf{b}_ст$ будут ориентированы соответственно под углами α и β к поверхности (рис. 3.27).

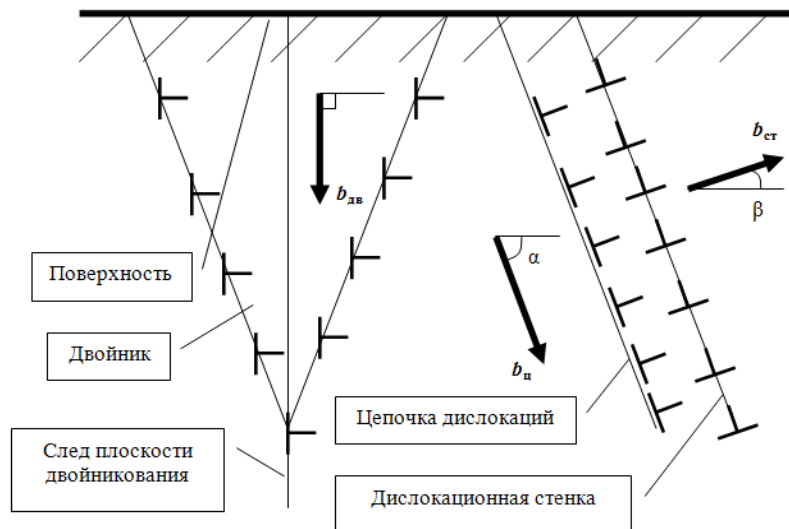


Рис. 3.27. Схематическое изображение некогерентного остаточного двойника, цепочки дислокаций, дислокационной стенки и ориентации векторов Бюргера дислокаций по отношению к поверхности

В случае наклонной по отношению к поверхности двойниковой границы краевая составляющая вектора Бюргера $\mathbf{b}_дв$ перпендикулярна поверхности кристалла, так как двойниковая граница образована не цепочкой дислокаций и не дислокационной стенкой, а дислокационной лестницей, в которой каждая дислокация движется в одной плоскости, перпендикулярной поверхности, когда плоскость двойникования перпендикулярна этой же поверхности [344].

В рассматриваемом на рис. 3.16 случае линия двойникующей дислокации параллельна оси OZ , перпендикулярной плоскости рисунка, а плоскость скольжения двойникующей дислокации принята перпендикулярной поверхности кристалла. Поэтому краевая составляющая вектора Бюргера $\mathbf{b}_кр$ нетонкого двойника на рис. 3.16 вблизи поверхности кристалла является ортогональной к свободной поверхности кристалла.

На рис. 3.28–3.32 представлены результаты расчетов полей напряжений у клиновидного двойника с прямолинейными границами, находящимся у поверхности кристалла. Принималось $H = 31$ мкм; $L = 100$ мкм.

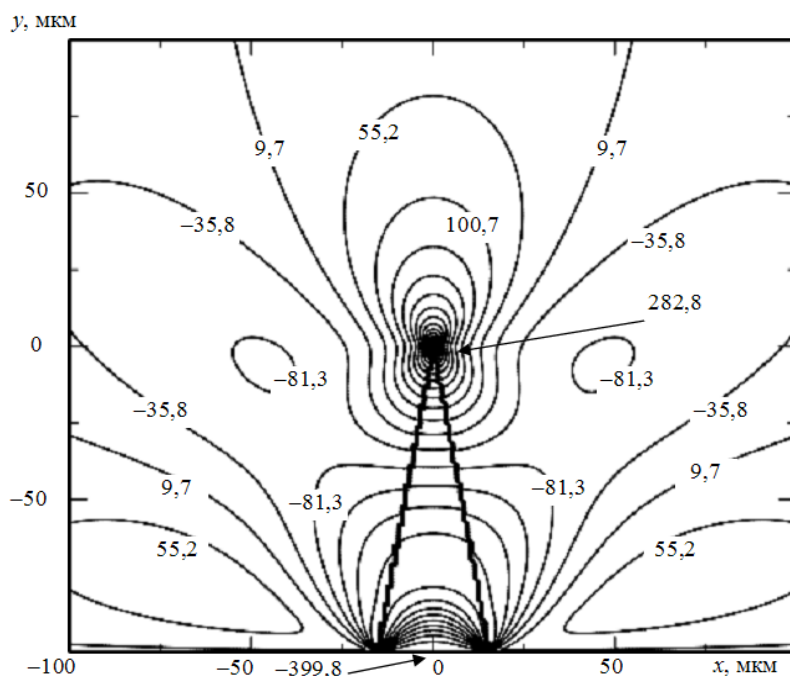


Рис. 3.28. Распределение η_{xy} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

Из рис. 3.28–3.32 видно, что напряжения локализуются преимущественно на границах двойника и у его вершины. Наблюдается симметрия в конфигурации полей напряжений относительно направления развития двойника. На поверхности кристалла у устья двойника напряжения отличны от нуля.

Сдвиговые напряжения σ_{xy} положительны у вершины и у устья двойника, а отрицательны – у границ двойника и внутри его (рис. 3.28). Нормальные напряжения σ_{xx} локализуются не только на границах двойника, но и вдали от него в области половины длины двойника на расстоянии от него около 25 мкм (рис. 3.29). У вершины двойника наблюдается чередование областей сжатия и растяжения [342]. Напряжения σ_{yy} у одной из границ двойника положительны, а у другой – отрицательны (рис. 3.30). Такая же ситуация наблюдается и в случае скалывающих напряжений σ_{yz} (рис. 3.32). Напряжения σ_{xz} положительны у вершины двойника и отрицательны – его устья (рис. 3.31).

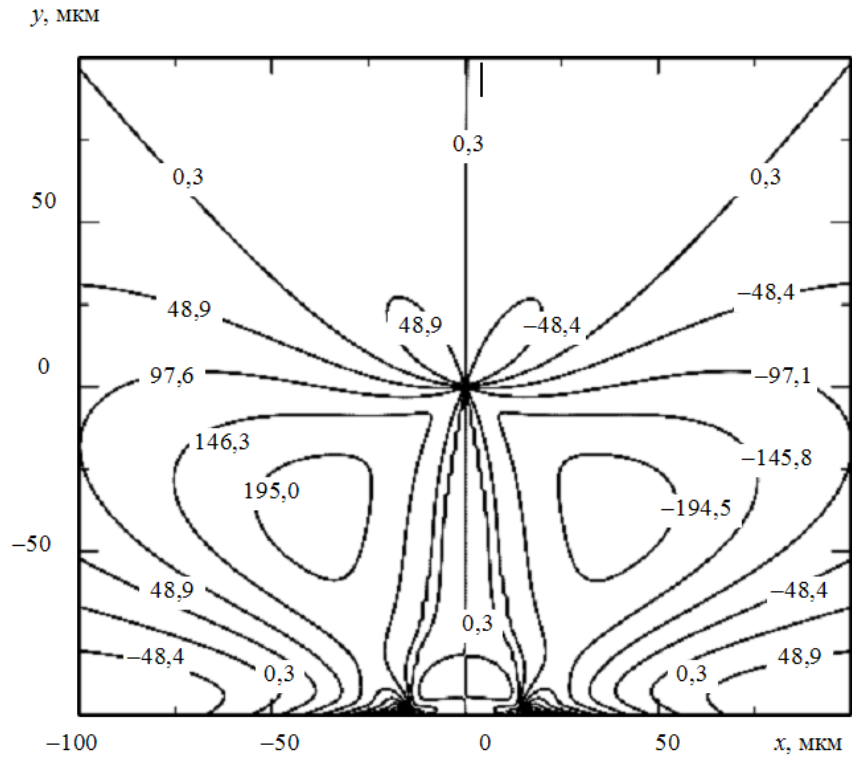


Рис. 3.29. Распределение η_{xx} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

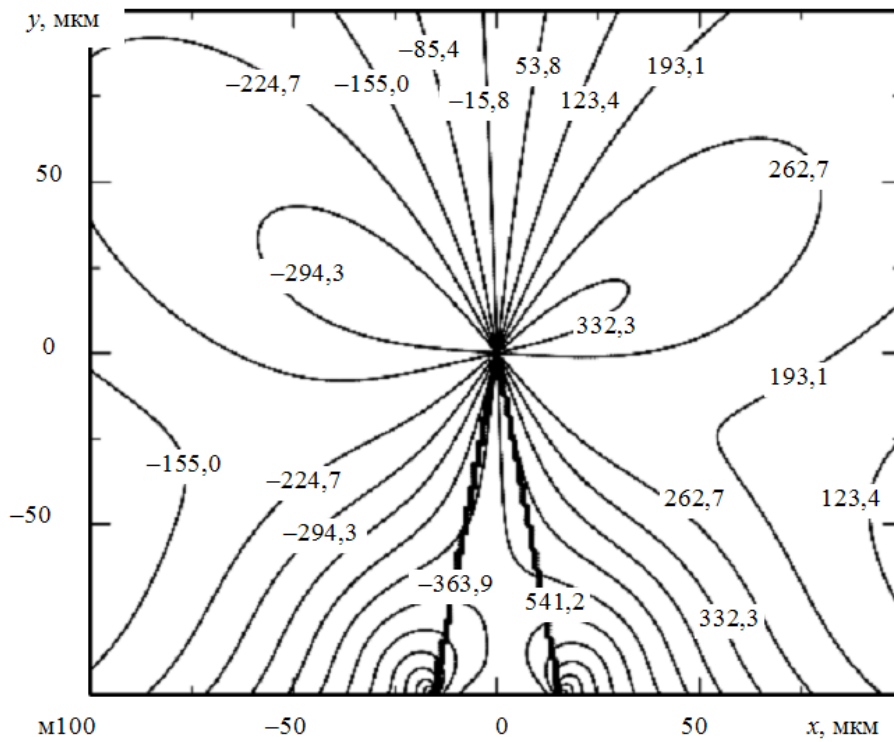


Рис. 3.30. Распределение η_{yy} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

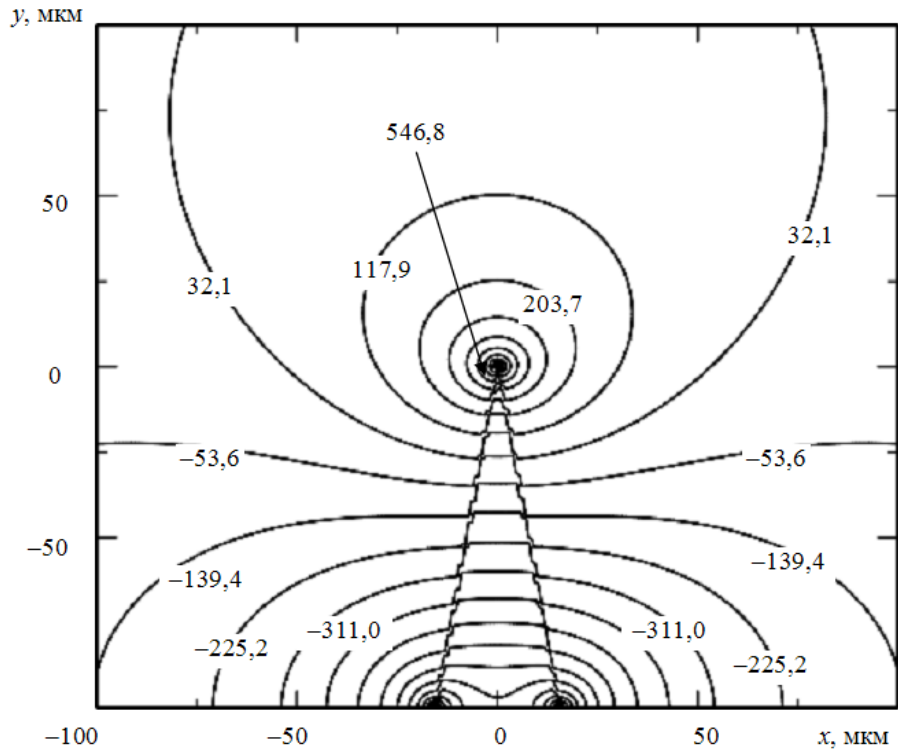


Рис. 3.31. Распределение η_{xz} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

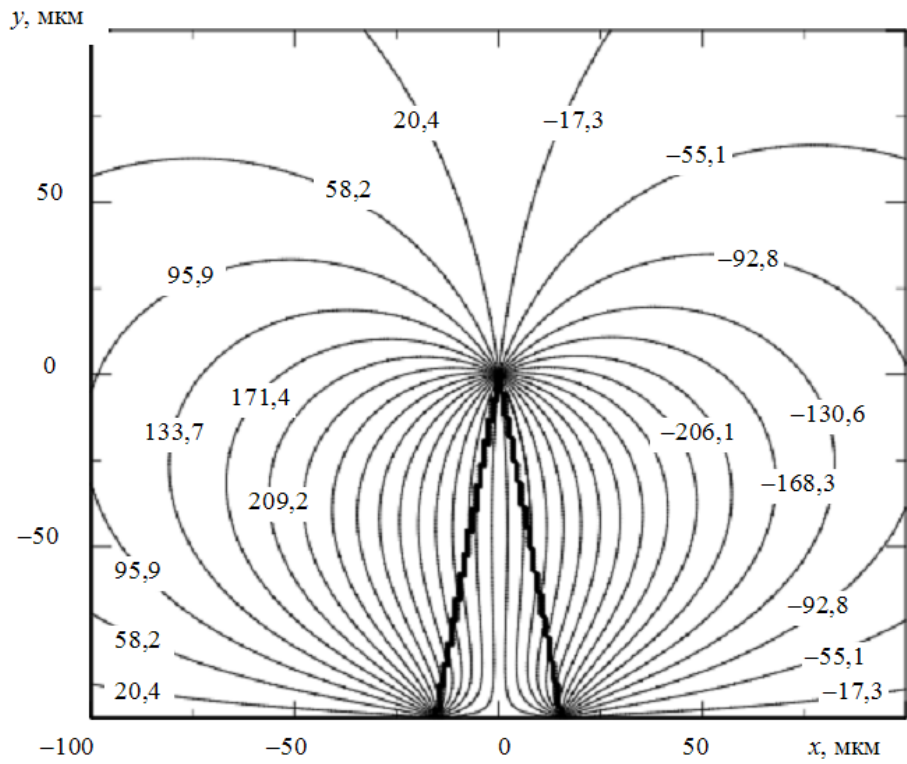


Рис. 3.32. Распределение η_{yz} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

Проведенные в данной работе расчеты показали, что увеличение плотности двойникующих дислокаций на одной из границ двойника приводит к потере симметрии в конфигурации полей напряжений у клиновидного двойника. Растет локализация напряжений у границы с большей плотностью двойникующих дислокаций.

Интересен учет формы границ клиновидного двойника в конфигурации полей напряжений. Результаты расчетов представлены на рис. 3.33 и 3.34 на примере скалывающих напряжений σ_{xy} .

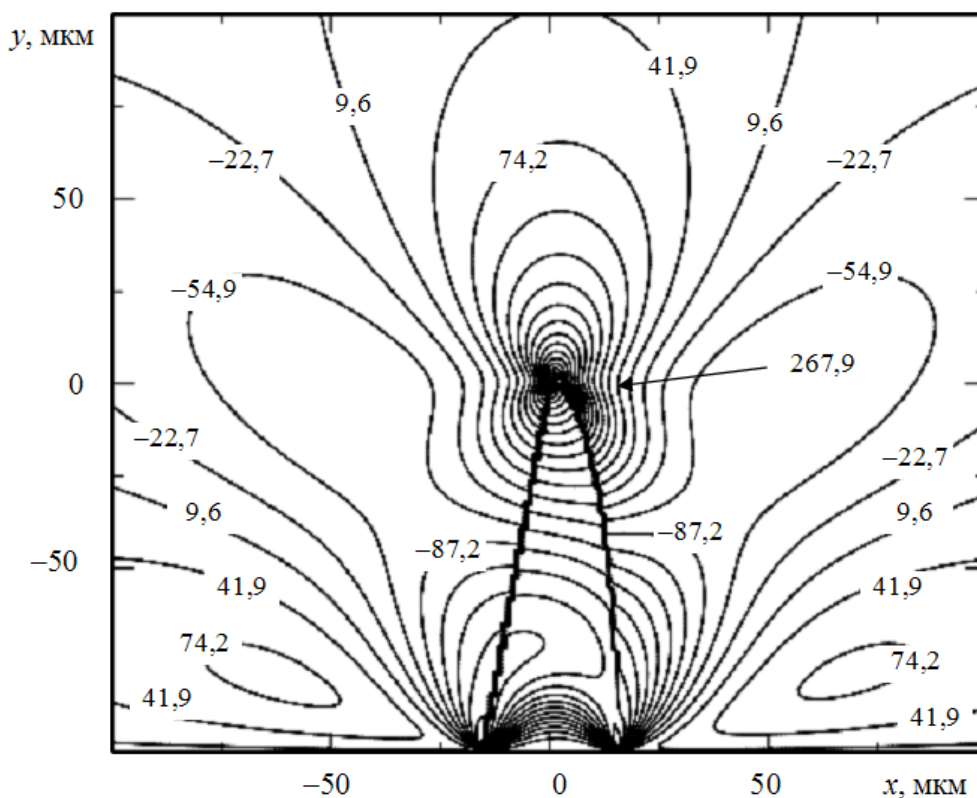


Рис. 3.33. Результаты расчета η_{xy} у клиновидного двойника у поверхности с выпуклой границей

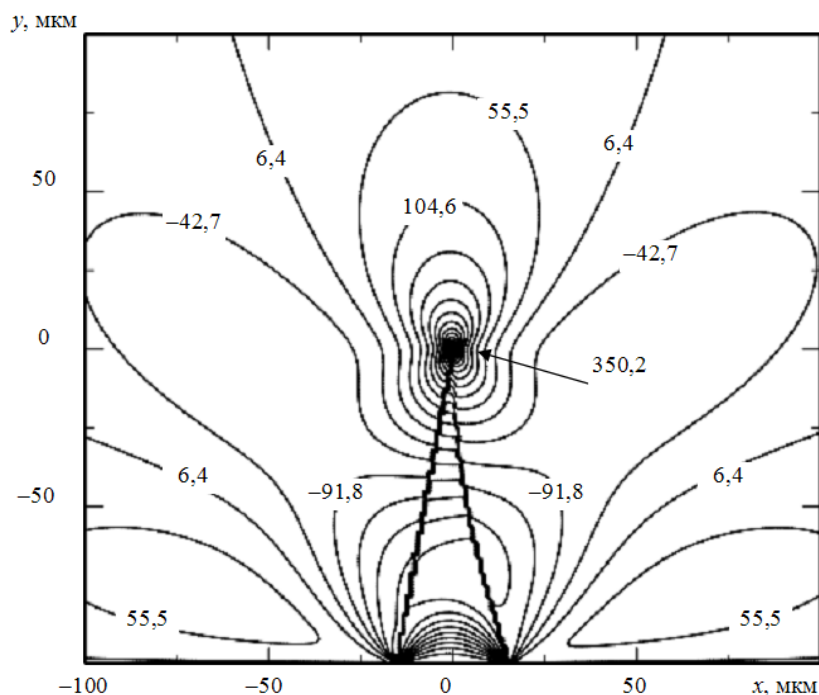


Рис. 3.34. Результаты расчета η_{xy} у клиновидного двойника у поверхности с вогнутой границей

3.7. Поля напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности твердого тела, деформируемой сосредоточенной нагрузкой

Интересно также рассмотрение напряженного состояния у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной или распределенной нагрузкой [345]. При этом важно изучить вклад двойникования в напряженное состояние деформируемого материала.

На рис. 3.35 схематически представлен клиновидный двойник длиной L и шириной у устья H с формами границ, описываемыми функциями $f_1(y_0)$ и $f_2(y_0)$. Направим ось OX вдоль поверхности кристалла, а ось OY – перпендикулярно ей, вдоль направления развития двойника (рис. 3.35). Пусть в условиях наличия в твердом теле остаточного некогерентного двойника поверхность упругого полупространства деформируется в точке O вдоль оси OY внешней нормальной сосредоточенной нагрузкой P , перпендикулярной поверхности.

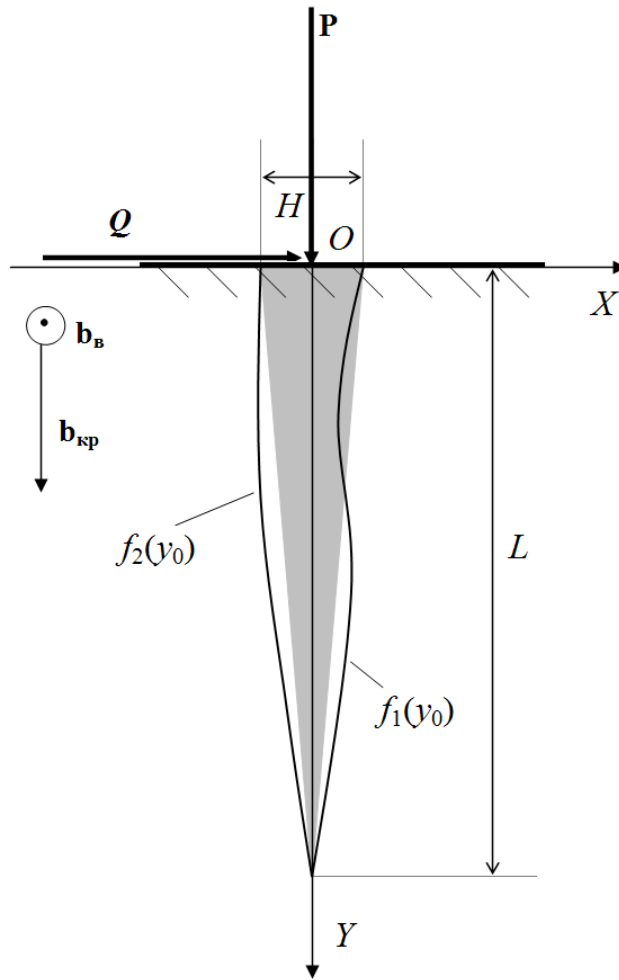


Рис. 3.35. Схематическое изображение клиновидного двойника у поверхности упругого полупространства и действующей на нее сосредоточенной нагрузки

Пусть в точке O также действует внешняя сдвиговая сосредоточенная нагрузка Q . Тогда в упругом полупространстве будут действовать внутренние напряжения, которые могут быть определены по формулам:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 (Px + Qy)}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{y^2 (Px + Qy)}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{xy(Px + Qy)}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad (3.9)$$

которые в квазистатическом приближении и в статическом случае являются суперпозицией соответствующих компонент тензора напряжений [59]:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

и

$$\sigma_{xx} = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2Q}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2Q}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

При решении контактных задач механики сдвойникованных материалов при расчете полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, возникает вопрос о правомерности использования в дислокационной модели двойника прямолинейных дислокаций бесконечной длины. Это обусловлено тем, что на практике длина двойников, как правило, конечна [346].

Действительно в трехмерной модели двойника использование прямолинейных бесконечных дислокаций, например, параллельных оси OZ в реальности ограничивается описанием клиновидных двойников бесконечной вдоль оси OZ длины, и такие двойники образуются в кри-

сталле, поверхность которого деформируется нагрузкой, распределенной вдоль данной оси (рис. 3.36). Однако в двумерной (плоской) модели двойника такой подход может быть использован и для двойников конечной длины по аналогии с задачей о деформировании поверхности кристалла сосредоточенной нагрузкой [59]. При этом в трехмерной задаче нагрузка распределена вдоль оси OZ , а в плоской – действует в точке пересечения секущей плоскости с осью OZ [59].

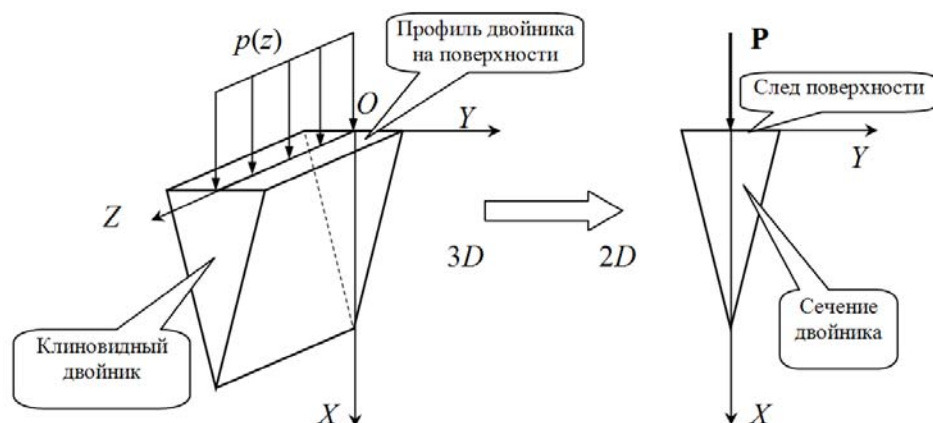


Рис. 3.36. Пространственная и плоская модели клиновидного двойника в деформируемом сосредоточенной нагрузкой твердом теле

Также и в случае плоской задачи о клиновидном двойнике конечной длины (конечных границ зерен [26]) широко используются двойникообразные дислокации бесконечной длины [26]–[30].

Результаты расчета сдвиговых напряжений, создаваемых сосредоточенной нагрузкой в упругом полупространстве, представлены на рис. 3.37 и 3.38. При этом сингулярность в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ [10], как и в приведенных выше расчетах, в которых имеются точки с неопределенностью, устранялась путем исключения расчетов в этих точках.

Представленные на рис. 3.37 и 3.38 результаты общеизвестны [9], [59]. Однако они приведены для демонстрации достоверности используемых в работе методов расчета и показывают, что данные методы дают правильные результаты.

Напряженное состояние у клиновидного, находящегося у поверхности, двойника может быть рассчитано из соотношений, аналогичных (3.6)–(3.8).

Ограничимся рассмотрением только случая прямолинейных двойниковых границ.

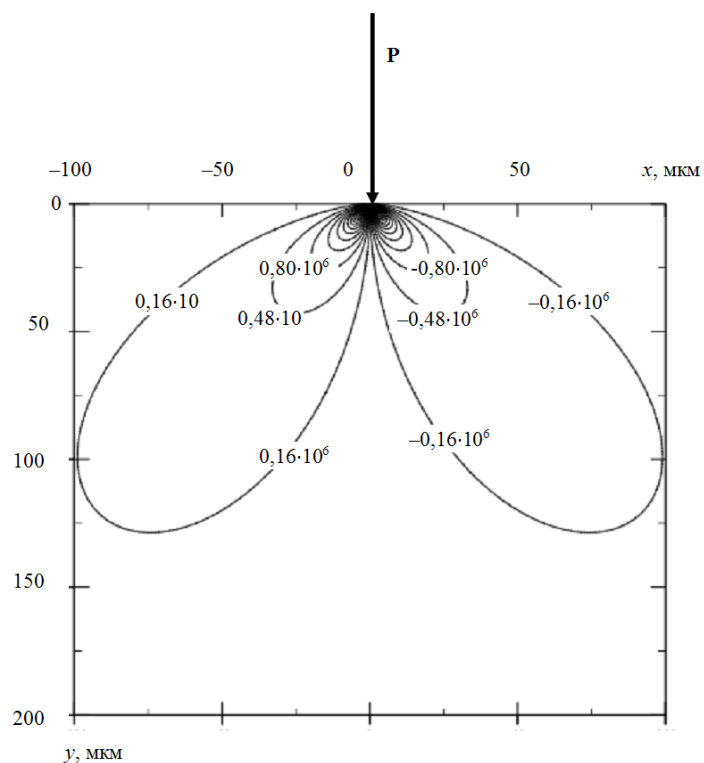


Рис. 3.37. Распределение напряжений σ_{xy} в упругом изотропном полупространстве при действии на поверхности в точке O сосредоточенной нормальной силы P величиной 100 Н

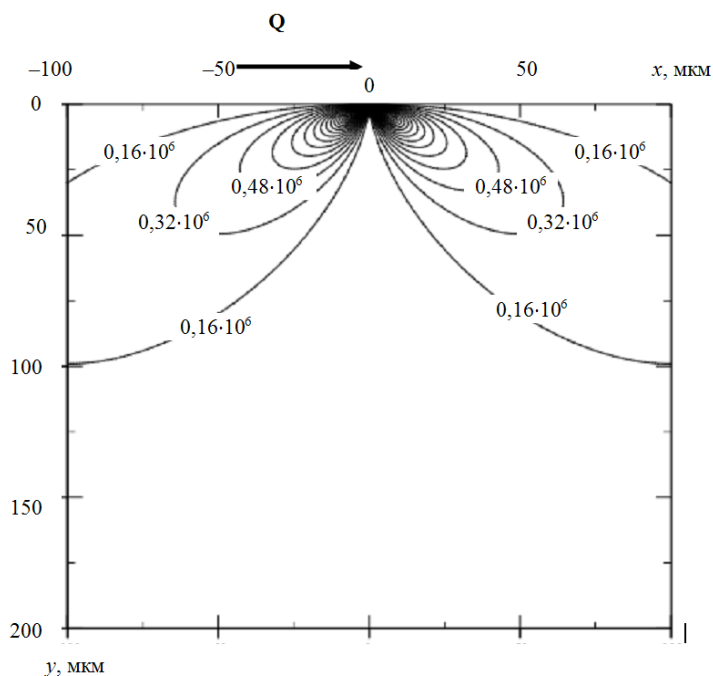


Рис. 3.38. Распределение напряжений σ_{xy} в упругом изотропном полупространстве при действии на поверхности в точке O сосредоточенной касательной силы Q величиной 100 Н

На рис. 3.39–3.41 представлены результаты расчетов на примере распределения величины сдвиговой компоненты σ_{xy} тензора напряжений. Принималось $H = 31$ мкм; $L = 100$ мкм; $b_{кр} = 0,124$ нм; $a = 0,248$ нм [347]. Тогда, используя соотношение для расчета линейной плотности двойникоующих дислокаций на двойниковых границах (3.5), получим: $\rho = 0,625 \cdot 10^9$ м⁻¹. Примем этот параметр постоянным.

На рис. 3.39 показано распределение сдвиговых напряжений у клиновидного двойника при отсутствии внешних напряжений. Интересны два предельных случая, когда $Q \neq 0, P = 0$ и $Q = 0, P \neq 0$ [345]. На рис. 3.40 показан случай распределения сдвиговых напряжений при $P = 100$ Н, $Q = 0$, а на рис. 3.41 – вариант, когда $P = 0, Q = 100$ Н. Видно, что при $Q = 0$ повышается уровень сдвиговых напряжений у одной из двойниковых границ (рис. 3.40). При $P = 0$ напряжения σ_{xy} не перераспределяются, но растет их общий уровень (рис. 3.41).

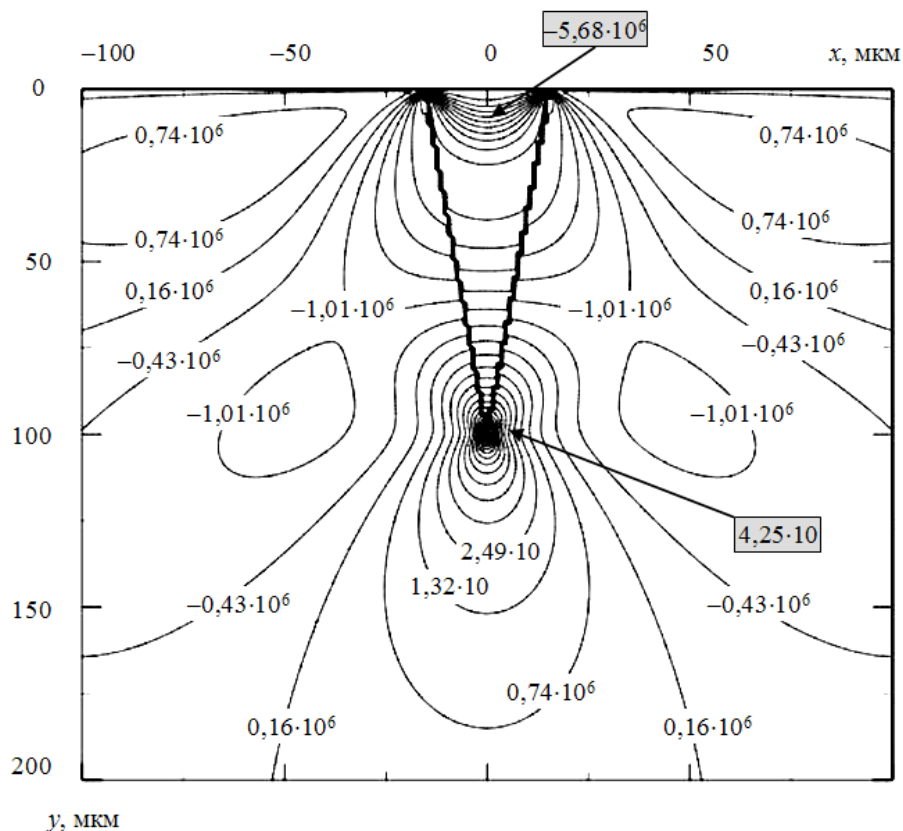


Рис. 3.39. Распределение напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при отсутствии внешних напряжений

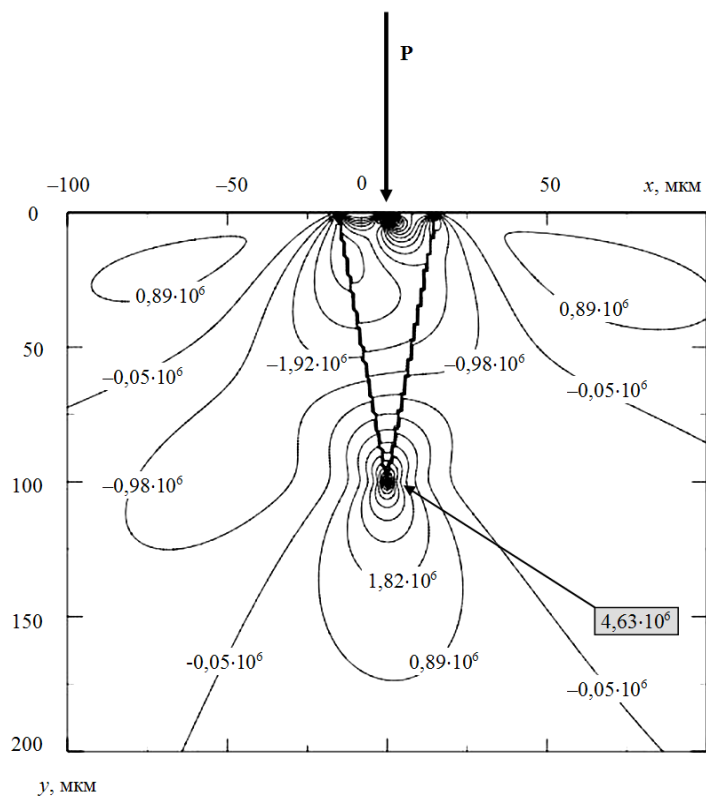


Рис. 3.40. Распределение напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при действующей в точке O сосредоточенной нормальной силе P

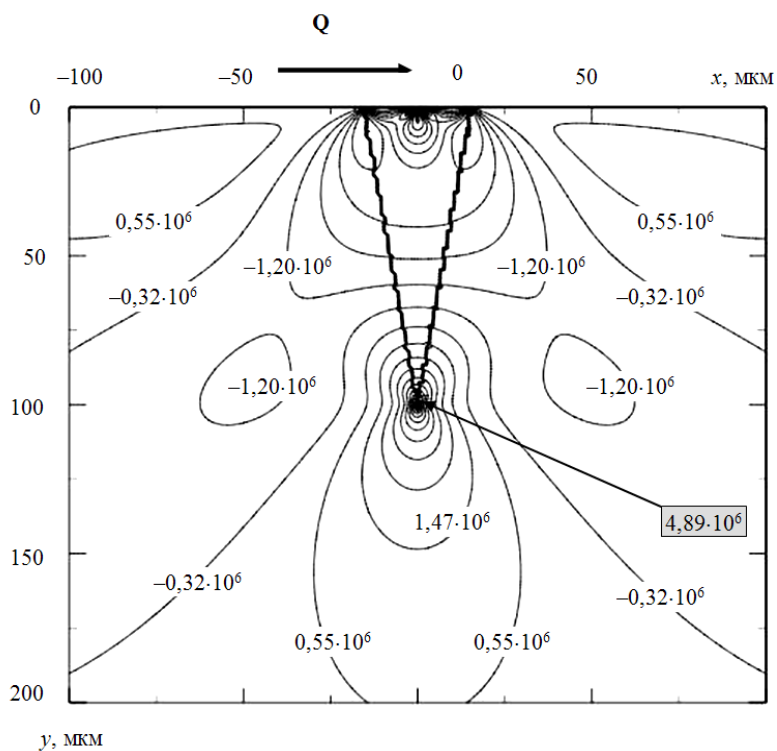


Рис. 3.41. Распределение напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при действующей в точке O сосредоточенной касательной силе Q

Из сравнения результатов, представленных на рис. 3.39–3.41, видно, что наличие двойника в области действия сосредоточенной нагрузки приводит к существенному изменению конфигурации полей напряжений в деформируемом полупространстве. Эти изменения напряжений в решении задач механики деформируемого твердого тела не учитываются, что приводит к существенным ошибкам в случае прогнозирования эксплуатационных характеристик двойникующихся материалов. В случае области у вершины клиновидного двойника абсолютная ошибка может достигать величины 10^6 раз.

Интересна ситуация, когда внешняя сила действует не в точке O , а в другой точке – на оси OX . В этом случае в соотношения (3.9) необходимо привести к виду [59]:

$$\sigma_{xx}^e = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(x-c)^2 (Py + Q(x-c))}{((x-c)^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\sigma_{yy}^e = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{y^2 (Py + Q(x-c))}{((x-c)^2 + y^2)^2} \right),$$

$$\sigma_{xy}^e = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(x-c)y (Py + Q(x-c))}{((x-c)^2 + y^2)^2} \right).$$

Здесь c – расстояние от точки O до точки действия сосредоточенной силы.

В данном случае интересна ситуация, если $c = H/2$ (или $c = -H/2$), т. е. когда внешняя сосредоточенная нагрузка действует на двойниковой границе. Тогда увеличивается локализация напряжений у границы, на которую действует нагрузка (рис. 3.42). Это приводит к интенсификации на данной границе процесса генерации двойникующих дислокаций, что, в свою очередь, ведет к искривлению двойниковой границы, делая ее выпуклой [345].

3.8. Расчет полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности твердого тела, деформируемой распределенной нагрузкой

В случае распределенных внешних усилий поля напряжений в нагруженном вдоль прямой упругом полупространстве при произ-

вольном распределении нормальных $p(x)$ и касательных усилий $q(x)$ в случае, схематически представленном на рис. 3.43, определяются по формулам [59]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^e(x, y) &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2}, \\ \sigma_{yy}^e(x, y) &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2} - \frac{2y^2}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2}, \\ \sigma_{xy}^e(x, y) &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2} - \frac{2y}{\pi} \int_{-a_2}^{a_1} \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + y^2]^2},\end{aligned}\quad (3.10)$$

где a_1 и a_2 определяют размер полосы, к которой приложена нагрузка (рис. 3.43); s – параметр интегрирования.

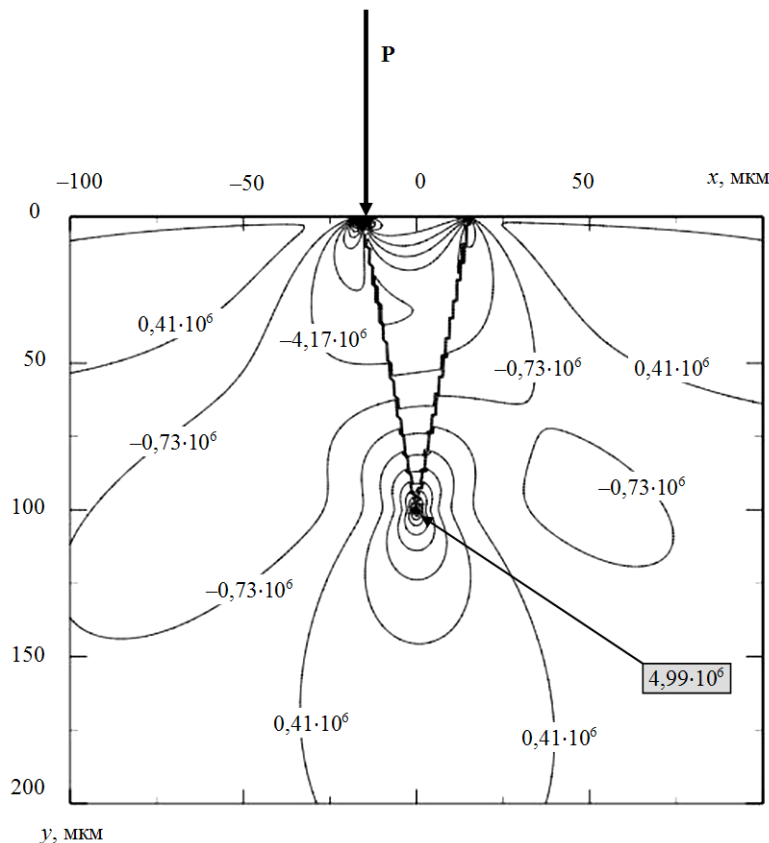


Рис. 3.42. Поля напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника, находящегося у поверхности упругого полупространства, при действии нормальной силы на границе двойника

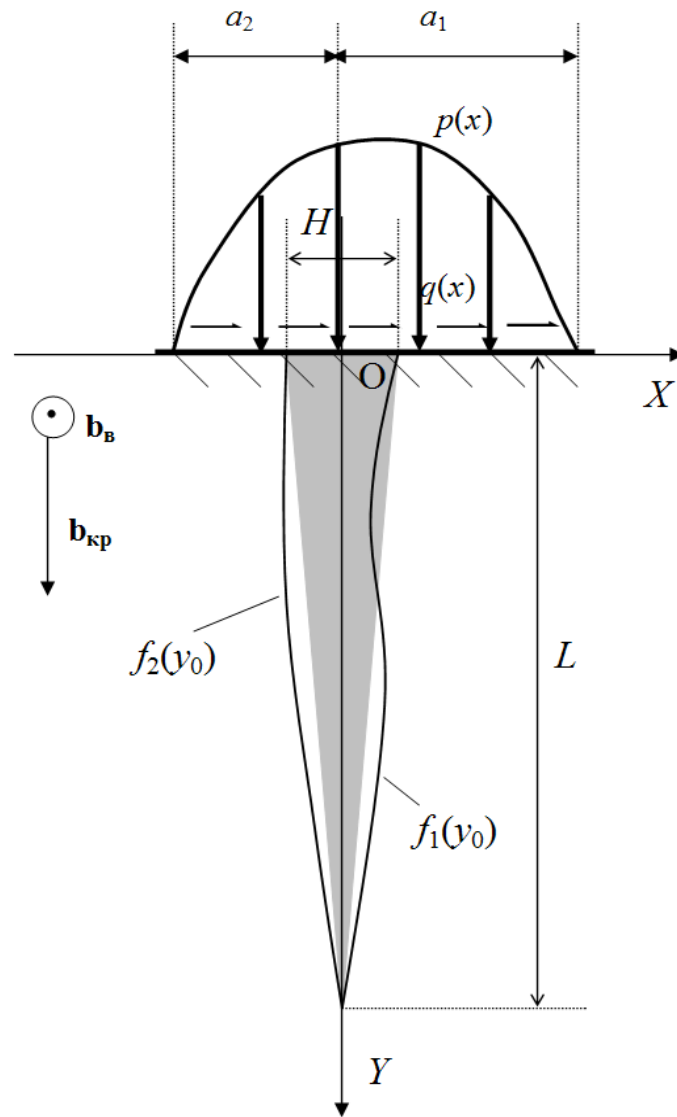


Рис. 3.43. Схематическое изображение клиновидного двойника, расположенного у поверхности кристалла, при действующей на нее распределенной нагрузке

Результаты расчета на основании формулы (3.10) распределения сдвиговых напряжений σ_{xy}^e представлены на рис. 3.44 и 3.45 [348]. При этом с помощью используемых в данной работе методов получен известный результат [59], что подтверждает достоверность методов расчета.

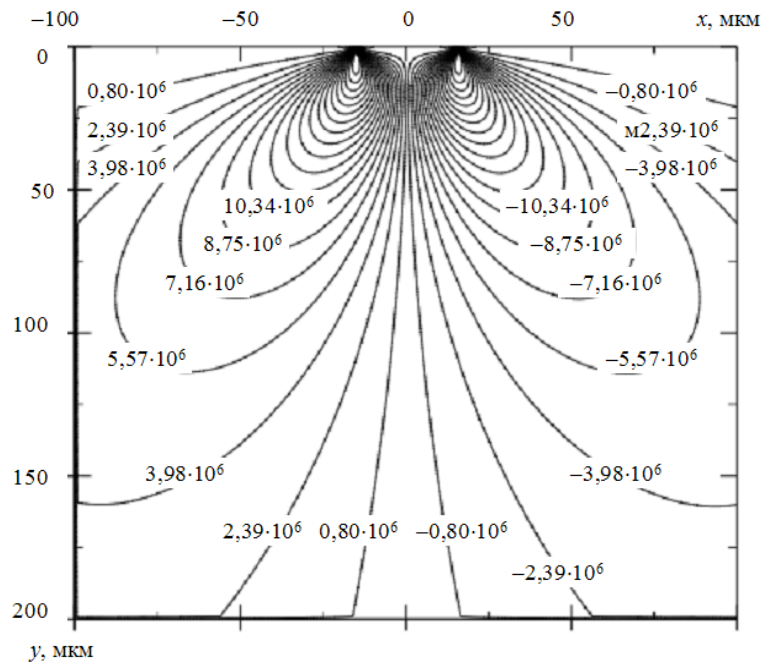


Рис. 3.44. Распределение напряжений σ_{xy} в упругом изотропном полупространстве при действии на поверхности, равномерно распределенной на линейном участке нагрузки $p(s)$ величиной 100 Н/м

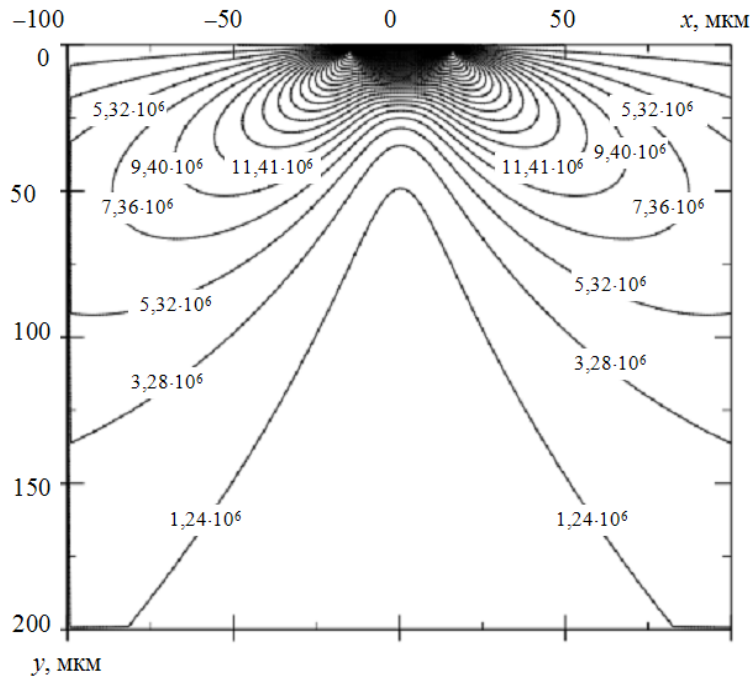


Рис. 3.45. Распределение напряжений σ_{xx} в упругом изотропном полупространстве при действии на поверхности, равномерно распределенной на линейном участке нагрузки $q(s)$ величиной 100 Н/м

Результаты расчетов для случая двойника с прямолинейными границами представлены на рис. 3.46–3.49. Принималось $H = 31$ мкм; $L = 100$ мкм; $b_{кр} = 0,124$ нм; для железа: $a = 0,248$ нм [347]. Ограничимся рассмотрением распределения только сдвиговых напряжений σ_{xy} , которые играют важную роль в процессах междислокационного взаимодействия.

При отсутствии внешних напряжений скальвающие напряжения σ_{xy} локализуются на двойниковых границах и у вершины двойника, а также в области, несколько удаленной от средней части двойника (рис. 3.39). Высокий уровень данные напряжения имеют и у поверхности кристалла, и внутри двойника [349]. Напряжения у клиновидного двойника, находящегося у поверхности, знакопеременны. Они положительны у вершины и у устья двойника и отрицательны – в остальных областях (рис. 3.39).

В плане изучения влияния внешних распределенных на поверхности напряжений на напряженное состояние у двойника интересны случаи, когда область действия внешних напряжений равна ширине двойника у устья или значительно ее превосходит. Для физического анализа удобно рассмотрение вариантов, когда $p(s) = \text{const} \neq 0$, $q(s) = 0$ и $p(s) = 0$; $q(s) = \text{const} \neq 0$ [348].

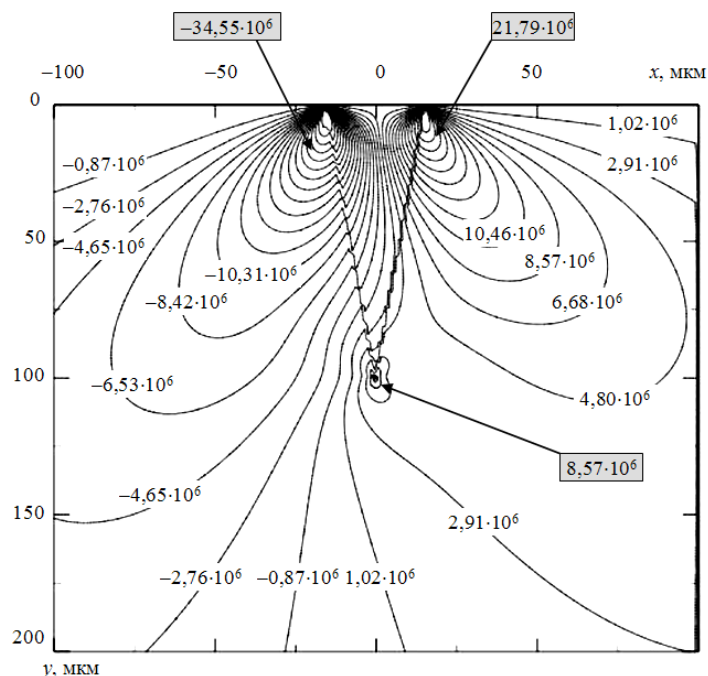


Рис. 3.46. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при $p(s) = 100$ Н/м; $q(s) = 0$ и $a_1 = a_2 = H/2$

На рис. 3.46 показано распределение напряжений σ_{xy} в случае, когда $p(s) = 100$ Н/м; $q(s) = 0$ при $a_1 = a_2 = H/2$. Тогда нормальная распределенная нагрузка $p(s)$ перестает действовать на двойниковых границах. Это приводит к тому, что в данных областях существенно возрастают внутренние напряжения. Происходит перераспределение напряжений таким образом, что у одной из границ двойника они положительны, а у другой – отрицательны (рис. 3.46). Это, в свою очередь, способствует активизации процесса генерации двойникоующих дислокаций на одной из границ и подавлению этого процесса у другой.

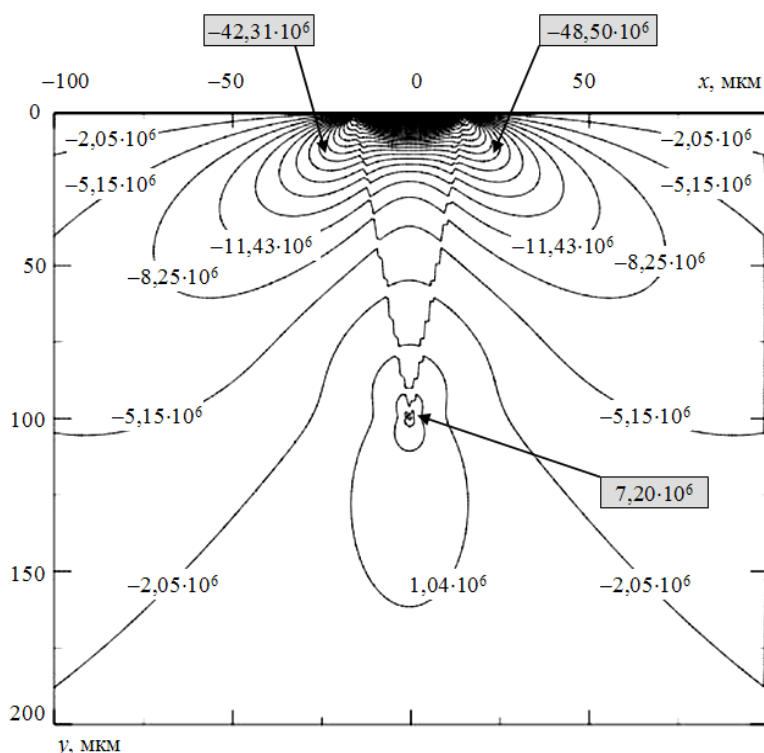


Рис. 3.47. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при $p(s) = 0$; $q(s) = 100$ Н/м и $a_1 = a_2 = H/2$

Действие только тангенциальной внешней нагрузки (величиной $q(s) = 100$ Н/м при $p(s) = 0$ и $a_1 = a_2 = H/2$) у устья двойника также способствует увеличению уровня напряжений, но они имеют один знак по обе стороны двойника (рис. 3.47) и меняют его только у вершины двойника [348].

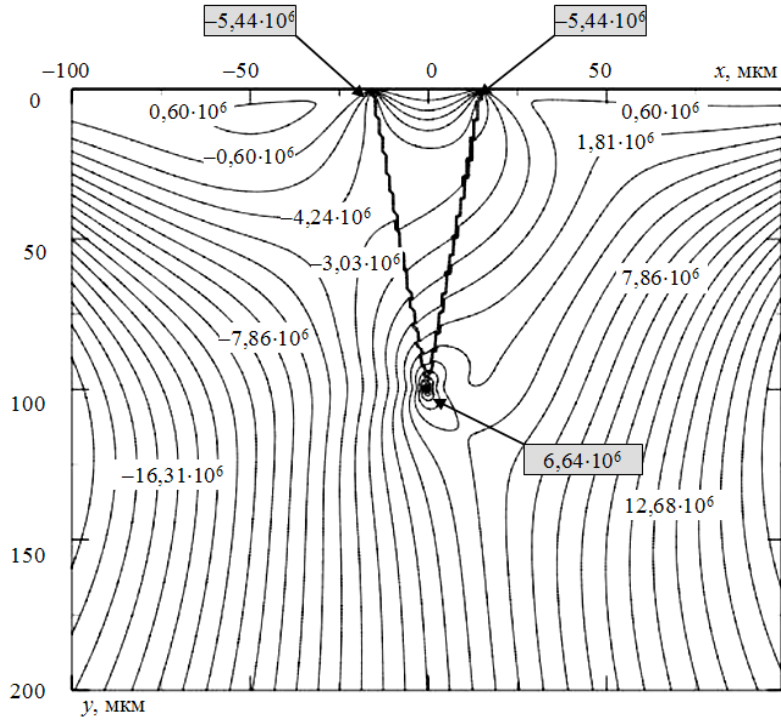


Рис. 3.48. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при $p(s) = 100$ Н/м; $q(s) = 0$ и $a_1 = a_2 = 5$ Н

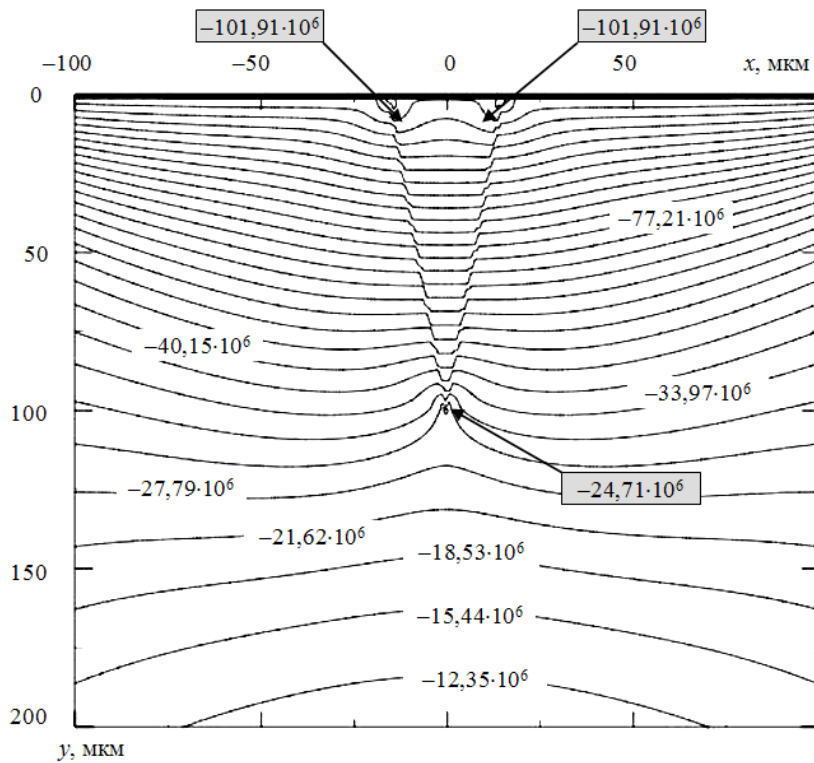


Рис. 3.49. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} у клиновидного двойника при $p(s) = 0$; $q(s) = 100$ Н/м и $a_1 = a_2 = 5$ Н

При $a_1 = a_2 = 5H$ величина напряжений σ_{xy} при $p(s) = 100$ Н/м и $q(s) = 0$ (рис. 3.48) уменьшается по сравнению с предыдущим случаем, а при $q(s) = 100$ Н/м и $p(s) = 0$ – возрастает (рис. 3.49), причем так, что у вершины двойника напряжения имеют одинаковый знак, как и в других областях у двойника.

3.9. Поля напряжений в деформируемом упругом полупространстве при наличии параллельных двойников

При деформировании двойникующихся материалов двойники в них, как правило, формируются группами [109]. Такому типу двойникования подвержены материалы при их деформировании сжатием, растяжением или кручением [109], т. е. таким видам деформаций, которые часто встречаются при эксплуатации двойникующихся материалов.

Представляет интерес решение задачи о расчете полей напряжений у параллельных двойников, находящихся вдали от поверхности. Это актуально для случая крупнозернистых поликристаллических материалов, когда при деформировании система параллельных двойников зарождается на границах зерен. При этом, как и ранее, отвлечемся от напряжений границ зерен и рассмотрим только те напряжения и эффекты, которые связаны исключительно с двойникованием.

Для расчета полей напряжений $\sigma_{ij}(x, y)$ у единичного клиновидного двойника с произвольной формой границ в данной работе были предложены соотношения (2.1)–(2.5), которые могут быть положены в основу макроскопической дислокационной модели параллельных двойников в следующей модификации [350]:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^M \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(x_0))^2} \rho_1(x_0) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y - nD_0, x_0) dx_0,$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x, y) = \sum_{n=0}^M \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(x_0))^2} \rho_2(x_0) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y - nD_0, y_0) dx_0. \quad (3.11)$$

Здесь D_0 – расстояние между двойниками; M связано с числом двойников в системе параллельных двойников. Так как суммирование ведется от нуля, то рассчитываемое количество двойников будет на единицу больше, чем M .

Для использования (2.4), (2.5) в (3.11) необходимо произвести замену $y \rightarrow y - nD_0$. Это позволяет осуществить операцию трансляции двойника вдоль оси y M раз.

На рис. 3.50 схематически представлена система параллельных двойников, для которых справедливы соотношения (3.11). Равновесная форма таких остаточных двойников обеспечивается силами внутреннего трения. Экспериментальное подтверждение существования таких двойников клиновидной формы, являющейся производной от линзовидной формы, представлено, например, в работах [43], [53], [109], [313]. Пусть направления краевой и винтовой составляющих вектора Бюргерса двойникующих дислокаций по отношению к параллельным двойникам будут такими, как это показано на рис. 3.50.

В случае прямолинейных границ двойников и при $\rho(x_0) = \rho_2(x_0) = \text{const} = \rho$ для скалывающих напряжений σ_{xy} получим результат, представленный на рис. 3.51. Принималось: $L = 100$ мкм; $H = 21$ мкм; $D_0 = 31$ мкм; $M = 5$.

Из рис. 3.51 видно, что напряжения локализуются на границах параллельных двойников и у их вершин. У вершин двойников напряжения меняют знак на противоположный. С удалением от вершин двойников в сторону их роста также имеется область локализации положительных сдвиговых напряжений [350].

Аналогичным образом можно рассчитать поля напряжений у параллельных двойников с различной формой границ. Это осуществимо путем задания функций $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$. Плотность же двойникующих дислокаций на двойниковых границах задается функциями $\rho_1(x_0)$ и $\rho_2(x_0)$.

Интересен случай, когда параллельные двойники находятся у поверхности кристалла [349]. Такие двойники схематически представлены на рис. 3.52. След поверхности кристалла на рис. 3.52 совпадает с осью OX . Пусть все двойники параллельны оси OY , и их длина, ширина и расстояние между ними одинаковы. Это не противоречит общности полученных результатов и математических выкладок, так как легко можно перейти к рассмотрению любой группы параллельных двойников [351], [352]. Для получения расчетных соотношений в данном случае в (3.11) необходимо сделать подстановку (3.7) и (3.8).

Результаты расчетов для полисинтетического двойника с прямолинейными границами его двойников и равномерном распределении двойникующих дислокаций представлены на рис. 3.53 на примере

сдвиговой компоненты σ_{xy} . Принималось: $L = 100$ мкм; $H = 21$ мкм; $D_0 = 31$ мкм; $M = 5$.

Из рис. 3.53 видно, что сдвиговые напряжения локализованы на двойниковых границах и у вершин параллельных двойников. Внутри системы двойников наблюдаются области равных напряжений. У двойников напряжения отрицательны, а при удалении от вершин двойников в направлении их развития – положительны [349].

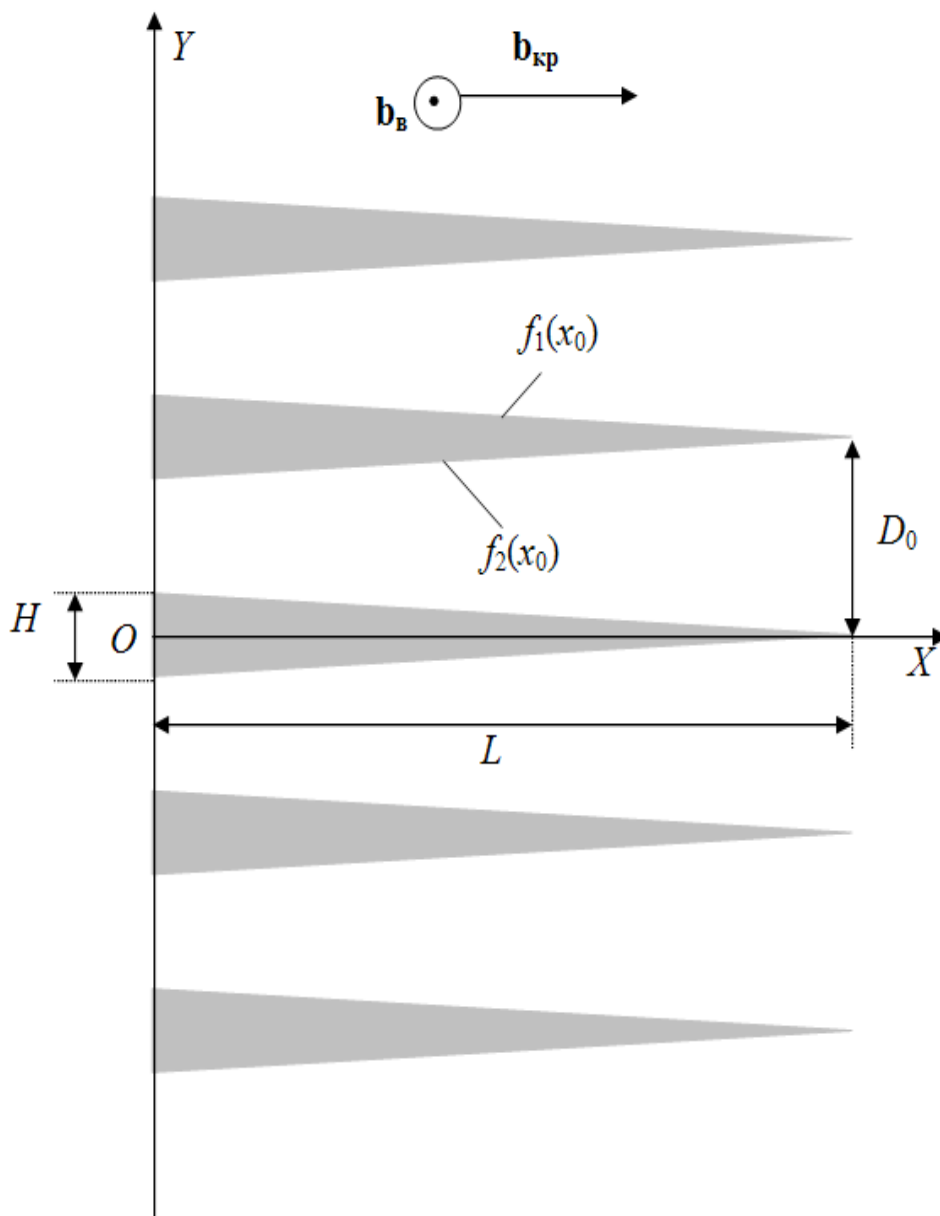


Рис. 3.50. Схематическое изображение системы параллельных двойников, находящихся вдали от поверхности кристалла

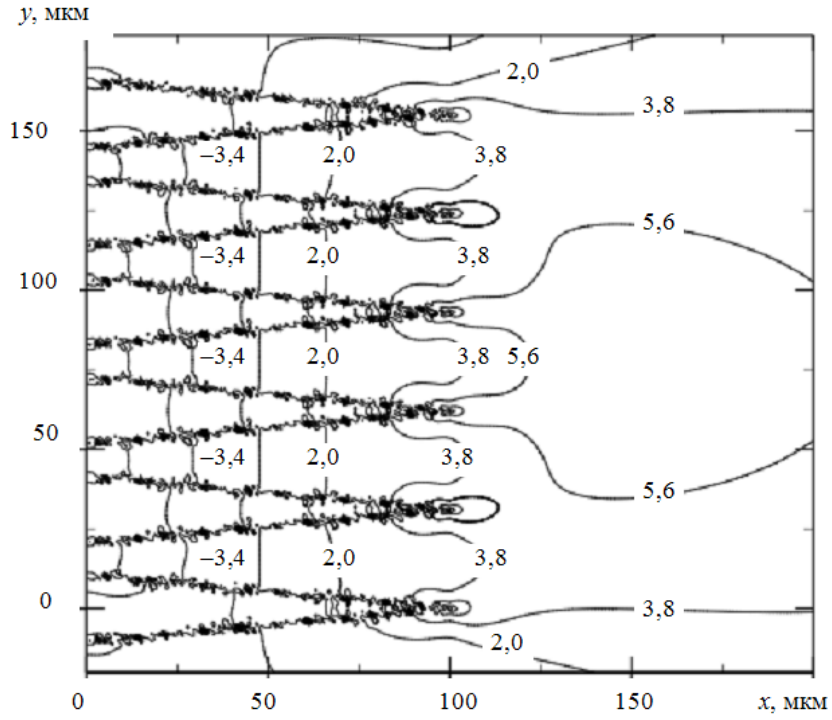


Рис. 3.51. Конфигурация полей сдвиговых напряжений η_{xy} у параллельных двойников, находящихся вдали от поверхности кристалла

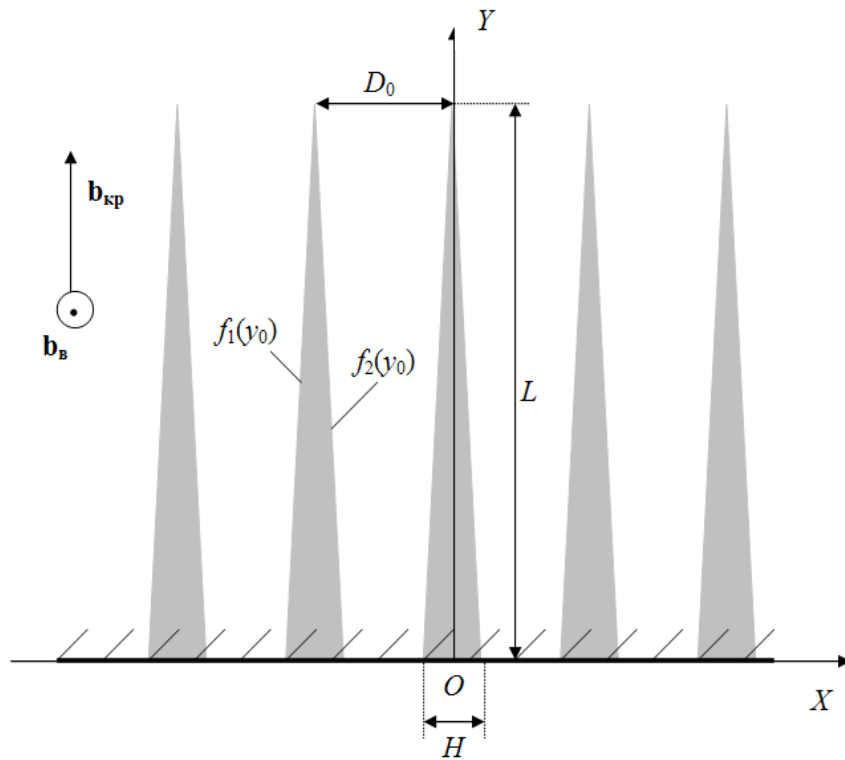


Рис. 3.52. Схематическое изображение системы параллельных двойников, находящихся у поверхности кристалла

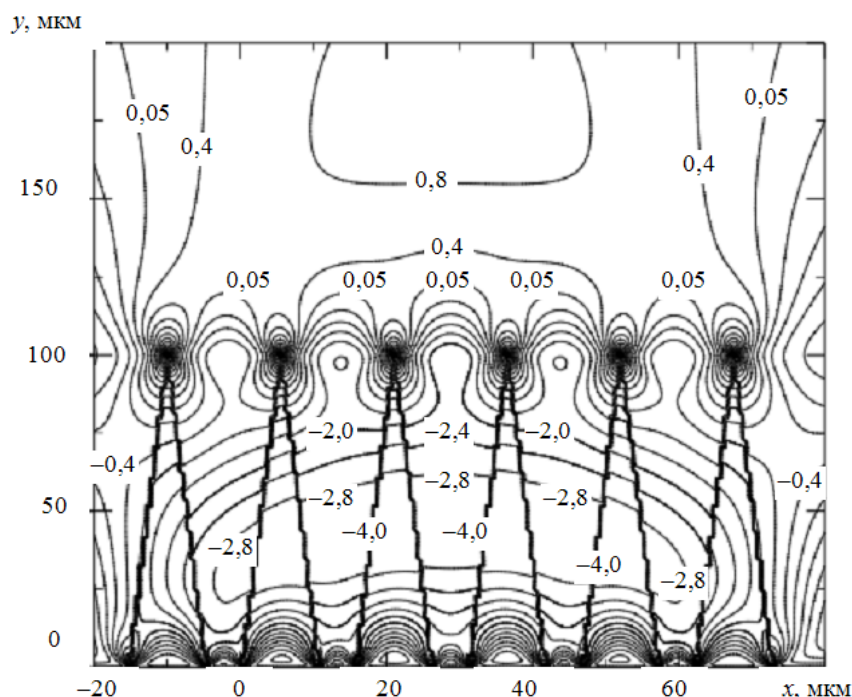


Рис. 3.53. Результаты расчетов приведенной величины η_{xy} для случая прямолинейных границ двойников с равномерной плотностью двойникующих дислокаций

В ходе решения задачи по расчету полей напряжений в деформируемом упругом полупространстве при наличии у его поверхности системы параллельных двойников введем следующие ограничения на количество вариантов рассмотрения результатов расчетов: 1) плотность двойникующих дислокаций на двойниковых границах одинакова и постоянна, т. е. $\rho_1(y_0) = \rho_2(y_0) = \rho$; 2) границы двойников прямолинейны.

Ограничимся также количеством вариантов распределения внешних напряжений. При этом рассмотрим представляющие практический интерес случаи: 1) сосредоточенная нагрузка действует в некоторой точке в области системы параллельных двойников; 2) распределенные нагрузки действуют на участке, размер которого равен ширине двойника у устья; 4) распределенные нагрузки действуют на участке длиной, равной ширине системы параллельных двойников [348].

Схематическое изображение параллельных двойников, находящихся у поверхности деформируемого упругого полупространства, представлено на рис. 3.54 [353].

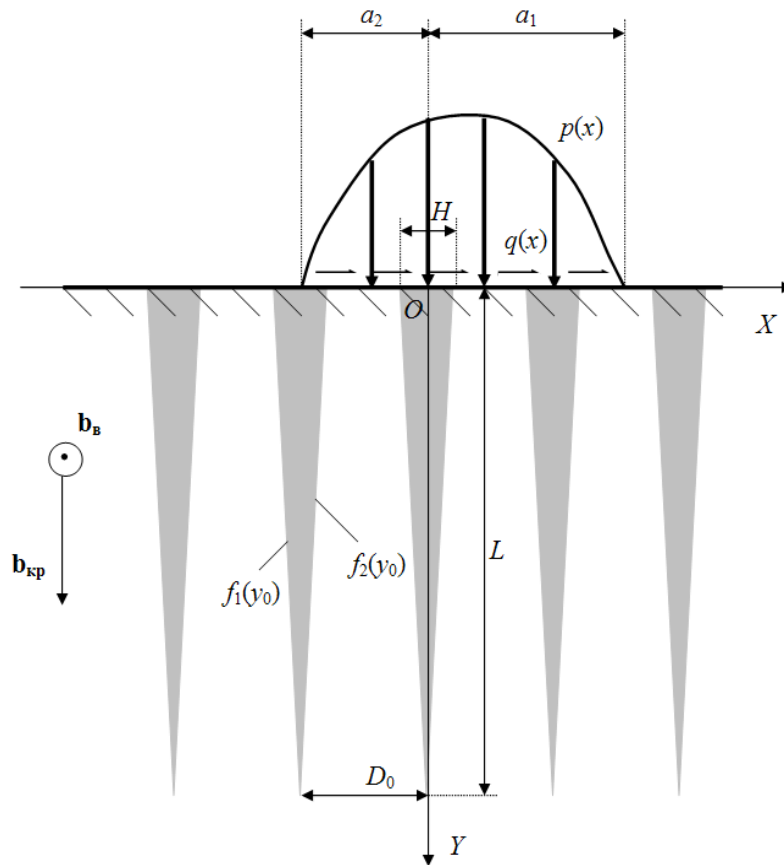


Рис. 3.54. Схематическое изображение системы параллельных двойников, находящихся у поверхности упругого полупространства, деформируемой распределенной нагрузкой

На рис. 3.55 представлен результат расчета распределения у параллельных двойников сдвиговых напряжений σ_{xy} при отсутствии внешних напряжений в случае следующих расчетных параметров: $L = 100$ мкм; $H = 21$ мкм; $D_0 = 31$ мкм; $M = 5$; $b_v = b_{кр} = 0,124$ нм; $\mu = 81$ ГПа; $\nu = 0,29$ [347]. Видно, что напряжения локализованы на границах двойников и у их вершин. В области, занятой двойниками, напряжения отрицательны, а в областях, удаленных от вершин двойников в сторону их роста, напряжения положительны. При этом имеется область максимальных значений положительных напряжений, которая удалена от вершин двойников (рис. 3.55).

При изучении влияния сосредоточенной нагрузки на напряженное состояние у систем параллельных двойников целесообразно рассмотрение двух предельных случаев: $P \neq 0, Q = 0$ и $P = 0, Q \neq 0$. Общий случай, когда $P \neq 0, Q \neq 0$ является суперпозицией двух предыдущих.

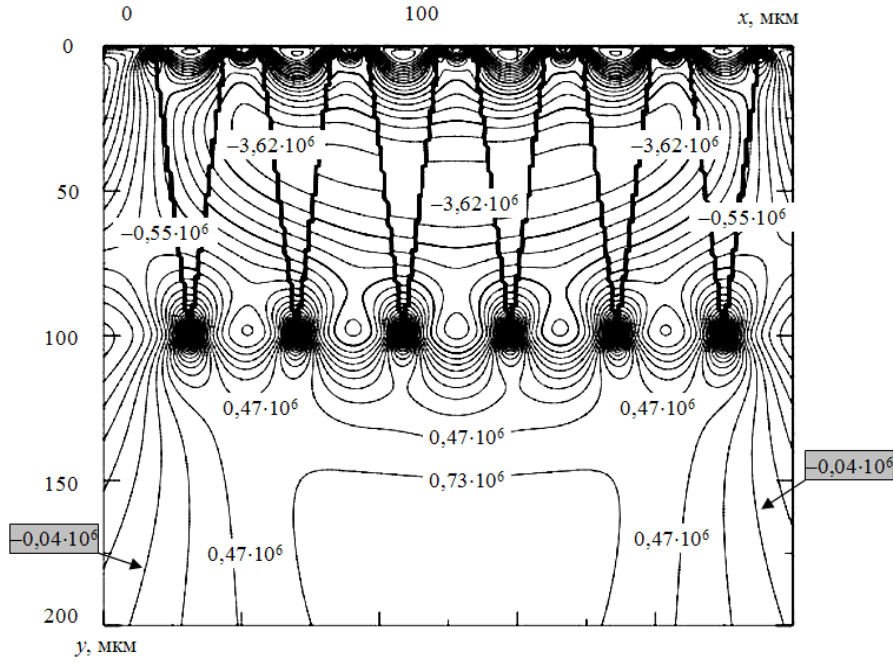


Рис. 3.55. Распределение напряжений σ_{xy} , Па, у параллельных двойников, находящихся у поверхности при отсутствии внешних напряжений

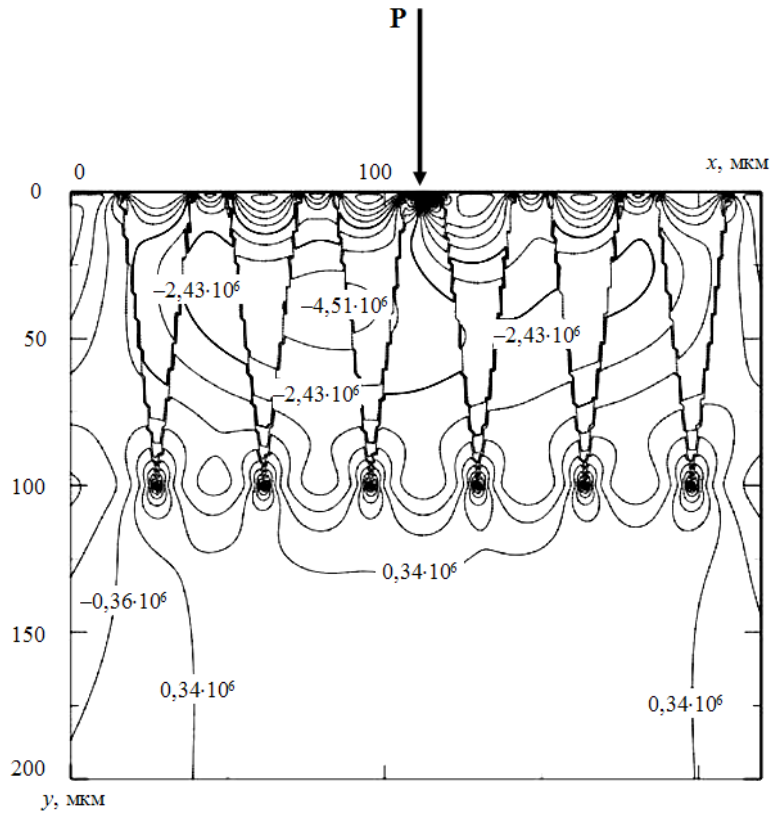


Рис. 3.56. Распределение напряжений σ_{xy} , Па, у параллельных двойников, находящихся у поверхности при действующей нормальной сосредоточенной нагрузке $P = 100 \text{ Н}$ ($Q = 0$)

На рис. 3.56 представлены результаты расчетов распределения сдвиговых напряжений у параллельных двойников при действии в средней их части нормальной нагрузки $P = 100$ Н (при $Q = 0$). Это привело к изменению уровня напряжений у системы параллельных двойников, но не к изменению их знака. Наблюдается локализация напряжений в области действия сосредоточенной нагрузки. Аналогичная ситуация наблюдается и при $P = 0, Q = 100$ Н (рис. 3.57).

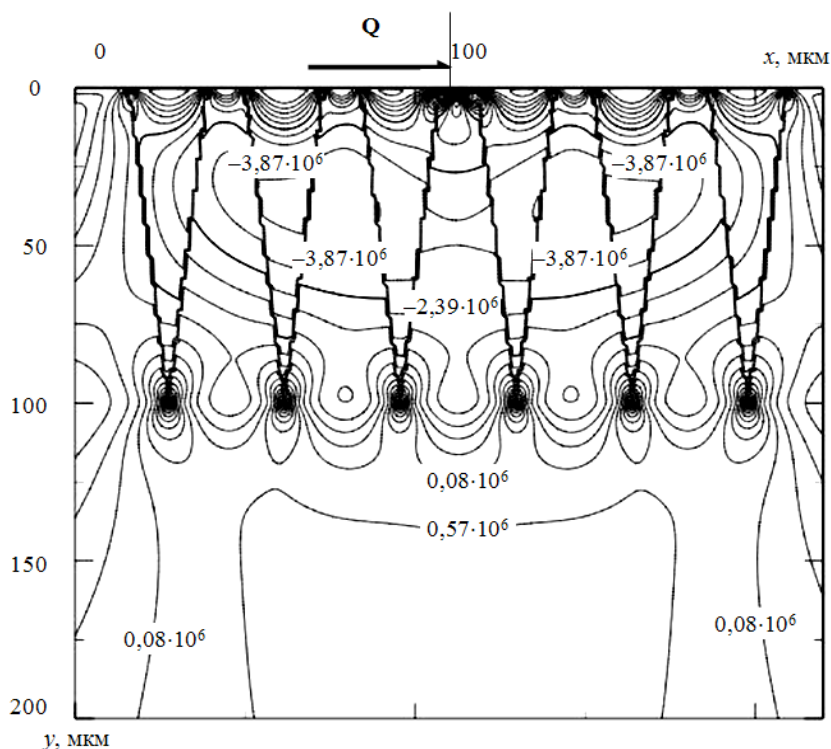


Рис. 3.57. Распределение напряжений σ_{xy} , Па, у параллельных двойников, находящихся у поверхности при действующей сдвиговой сосредоточенной нагрузке $Q = 100$ Н ($P = 0$)

Иная ситуация наблюдается при действии на линейном участке поверхности распределенной нормальной нагрузки (рис. 3.58). При распределении нормальной нагрузки на участке, равном ширине двойника у устья при $p(s) = 100$ Н/м, $q(s) = 0$ сдвиговые напряжения положительны у двойников, находящихся с правой стороны, и отрицательны у двойников с левой стороны.

В случае касательных усилий, распределенных на участке, равном ширине двойника, при $p(s) = 0, q(s) = 100$ Н/м область положительных напряжений удаляется от вершин двойников (рис. 3.59).

При увеличении области распределения внешней нагрузки до размеров ширины системы параллельных двойников в случае $p(s) = 100 \text{ Н/м}$, $q(s) = 0$ (рис. 3.60) исчезает область локализации напряжений у вершин двойников, однако внутри системы параллельных двойников имеются области положительных и отрицательных напряжений. При $p(s) = 0$, $q(s) = 100 \text{ Н/м}$ в рассматриваемой области при таком распределении касательных усилий напряжения только отрицательны (рис. 3.61).

Результаты, представленные на рис. 3.55 и 3.56, говорят о том, что из-за перераспределения напряжений у системы параллельных двойников под действием внешних напряжений дислокационная активность повышается не только в области действия внешней нагрузки, но и вдали от нее.

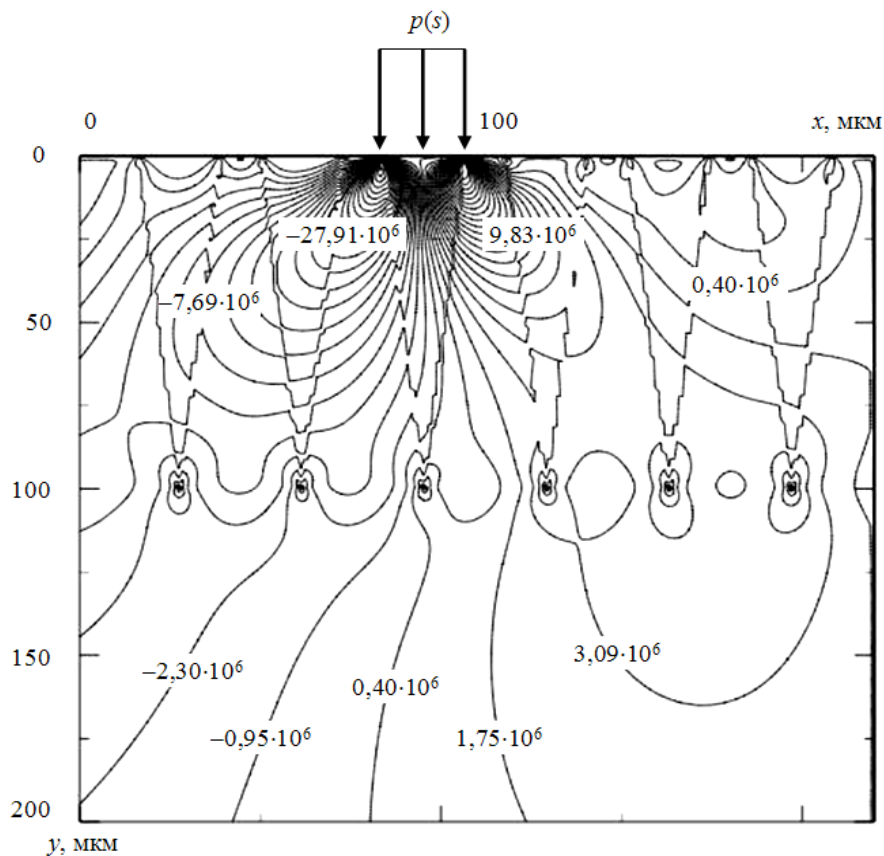


Рис. 3.58. Распределение напряжений σ_{xy} , Па, у параллельных двойников, находящихся у поверхности при наличии на ней распределенной нормальной нагрузки $p(s) = 100 \text{ Н/м}$ ($q(s) = 0$), действующей на полосу, длина которой равна ширине двойника у устья

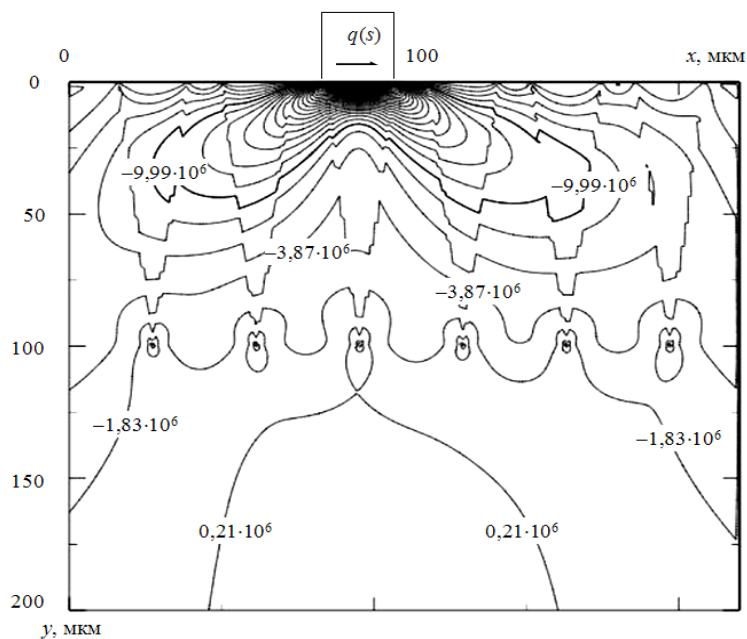


Рис. 3.59. Распределение напряжений σ_{xy} у параллельных двойников, находящихся у поверхности при наличии на ней распределенной сдвиговой нагрузки $q(s) = 100$ Н/м ($p(s) = 0$), действующей на полосу, длина которой равна ширине двойника у устья

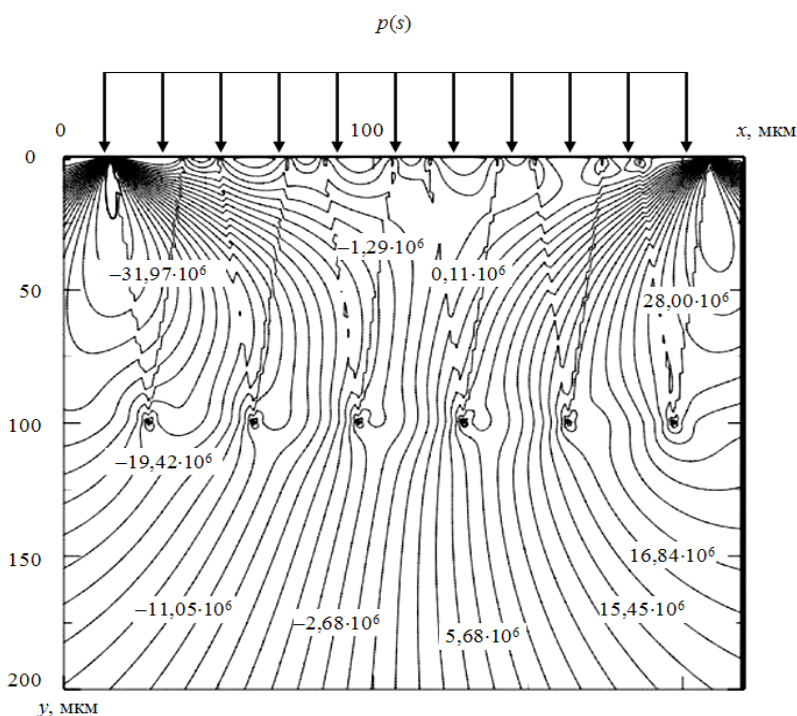


Рис. 3.60. Распределение напряжений σ_{xy} у параллельных двойников, находящихся у поверхности при наличии на ней распределенной нормальной нагрузки $p(s) = 100$ Н/м ($q(s) = 0$), действующей на полосу, длина которой равна ширине системы параллельных двойников

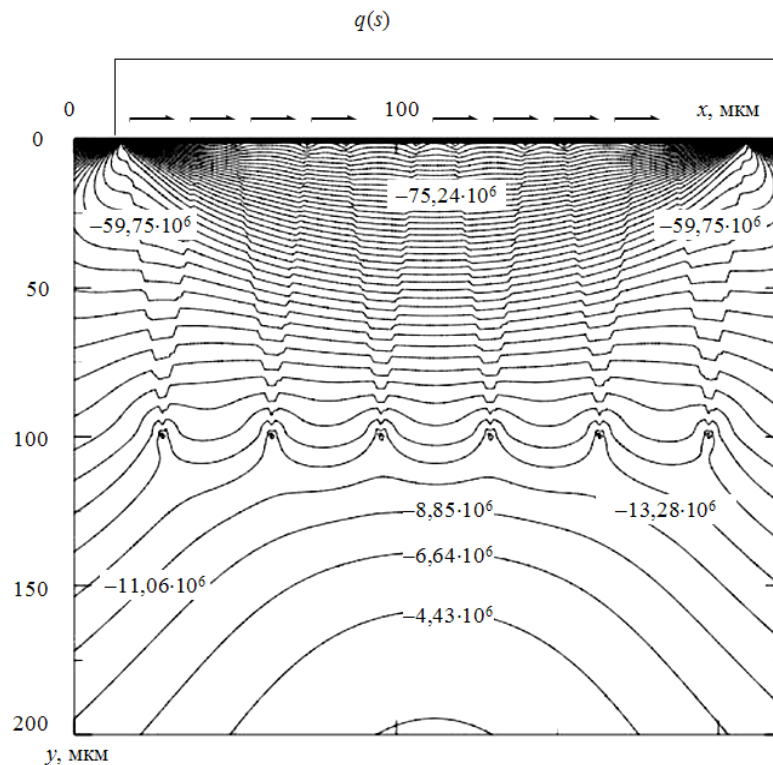


Рис. 3.61. Распределение напряжений σ_{xy} у параллельных двойников, находящихся у поверхности при наличии на ней распределенной сдвиговой нагрузки $q(s) = 100$ Н/м ($p(s) = 0$), действующей на полосе, длина которой равна ширине системы параллельных двойников

Следует отметить, что двойниковые границы в твердых телах являются дефектами, которые можно представить в виде поверхностей толщиной в два-три межатомных расстояния. Данные дефекты являются концентраторами больших внутренних напряжений. Эти напряжения дальнедействующие и эффект воздействия на другие дефекты в конденсированной среде от наличия в ней двойниковой границы распространяется на значительные по сравнению с шириной границы расстояния [150].

Поля напряжений, обусловленные некогерентными двойниковыми границами, преимущественно рассчитываются с использованием дислокационной теории двойникового [43], [108], [110], [150]. Потенциал поля напряжений единичной дислокации таков, что на линии дислокации напряжения принимают бесконечное значение. Соответственно и двойниующие дислокации на границе двойника создают поле напряжений, математически описываемое потенциалом, принимающим на границе бесконечно большую величину. В реальности на экспери-

менте этого не наблюдается. Однако это не является ошибкой математического моделирования.

Аналогичная ситуация наблюдается и при описании, например, гравитационного взаимодействия небесных тел, или взаимодействия зарядов, когда также используется потенциал поля, стремящийся к бесконечности при стремлении к нулю расстояния между телами или зарядами. При этом взаимодействие тел или зарядов рассматривается на достаточно большом расстоянии между ними. Таким образом, и поле напряжений двойниковых границ в работах [43], [108], [110], [150] рассматривается на расстояниях, превышающих размер ядра двойнивающей дислокации. Ввиду того, что расчет напряжений ведется в рамках гипотезы сплошности среды, когда межатомное расстояние считается бесконечно малым, бесконечно малой является и ширина области двойниковой границы, в которой наблюдаются стремящиеся к бесконечности значения напряжений. Этой областью в рамках гипотезы сплошности среды правомерно пренебречь, что и сделано в работах [43], [108], [110], [150], а также в данной работе.

На языке механики деформируемого твердого тела область, в которой не рассматриваются напряжения у двойниковых границ, может быть определена из условия $|\varepsilon_{ij}| < 1$ [354].

ГЛАВА 4

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ОСТАТОЧНЫХ НАНОДВОЙНИКОВ

4.1. Метод расчета и закономерности распределения внутренних полей напряжений, смещений и деформаций у клиновидного нанодвойника на основании дислокационной модели

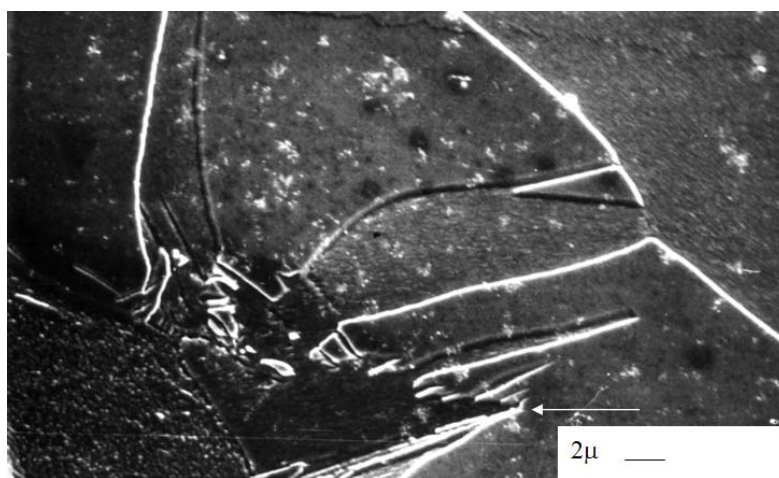
4.1.1. Экспериментальные результаты по обнаружению остаточных нанодвойников

Существующая в настоящее время дислокационная модель тонкого упругого двойника, представленная А. М. Косевичем и В. С. Бойко в работе [108], справедлива для ограниченного класса клиновидных двойников, для которых выполняется соотношение $H/L < 10^{-4}-10^{-3}$, где H – ширина клиновидного двойника у устья. На практике приходится иметь дело с двойниками, для которых $H/L > 10^{-2}-10^{-1}$ [340]. При наличии обширных экспериментальных данных [43], [49], [50], [96]–[101], [108]–[111], [156]–[158] теория таких двойников в настоящее время слабо развита. Особый интерес представляет математическое моделирование начальных стадий двойникования, которые во многом определяют дальнейшее развитие двойников, длина которых на этой стадии имеет порядок десятков или сотен нанометров [355]–[367].

Двойники длиной порядка десятков–сотен нанометров можно отнести к нанодвойникам [139]–[146]. В числе первых работ, посвященных данному новому явлению, относится работа [364] по экспериментальному исследованию нанодвойникования локально деформированных монокристаллов висмута. Интерес [139]–[146], [355]–[367] к исследованию таких двойников связан с тем, что они характеризуют начальную стадию развития двойникования. Вопросы, связанные с механизмами зарождения двойников, в настоящее время являются

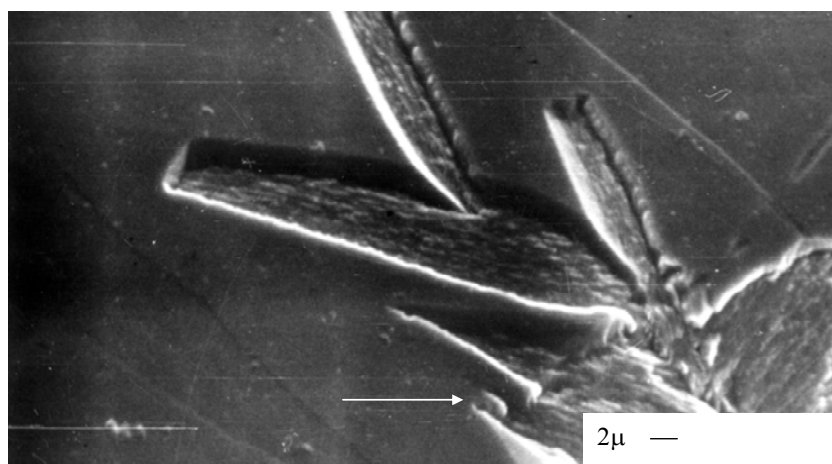
малоизученными, но важными с точки зрения понимания механизмов двойникового твердых тел. Поэтому исследование нанодвойникового представляется актуальным, что подтверждается наметившимся всплеском работ в данном направлении [139]–[146], [355]–[367], впервые обозначенном в [364].

На рис. 4.1 и 4.2 показаны микрофотоснимки, сделанные с помощью растрового электронного микроскопа. На них приведены фрагменты отпечатка индентора Виккерса на поверхности (111) монокристалла висмута, а также микродвойники. Нанодвойники на рис. 4.1 и 4.2 отмечены стрелками.



Стрелкой показан нанодвойник

Рис. 4.1. Микрофотоснимок фрагмента отпечатка индентора Виккерса на поверхности (111) монокристалла висмута



Стрелкой показан нанодвойник

Рис. 4.2. Микрофотоснимок фрагмента отпечатка индентора Виккерса на поверхности (111) монокристалла висмута

На рис. 4.1 нанодвойник, зародившийся у вершины отпечатка индентора, имеет размеры порядка 800 нм. Нанодвойник на рис. 4.2 имеет размер порядка 200 нм. Возникали ситуации, когда нанодвойники наблюдались не у вершины отпечатка индентора, а у его грани [364]. Причем в отдельных случаях нанодвойники появлялись вдали от отпечатка индентора на расстоянии порядка 50 нм.

Принадлежность отмеченных стрелками на рис. 4.1 и 4.2 образований к нанодвойникам подтверждалась детальными исследованиями рельефа поверхности при большом увеличении с помощью микроскопа CamScan-4. Так как двойниковые прослойки на поверхности образуют специфический рельеф, присущий только двойникам, то метод их выявления можно считать достаточным и достоверным. Благодаря этому данный метод и получил широкое распространение [99], [113]–[115]. Было установлено [364], что нанодвойники образуют на поверхности скола (111) монокристалла висмута такой же рельеф, как и микродвойники [313], [368], [369]. Существование нанодвойников в настоящее время является общепризнанным [139]–[146].

4.1.2. Расчет полей внутренних напряжений у нанодвойника клиновидной формы

Необходимость развития теории заклинившихся двойников связана с тем, что на практике часто приходится иметь дело с двойникующимися материалами, которые предварительно обработаны давлением. В таких твердых телах уже сформирована система двойников, которые выступают в качестве статических концентраторов напряжений, оказывающих существенное влияние на физические свойства материала [43], [49], [50], [109], [332], [334], [335], [351], [364], [365], [370]–[376]. Решать задачи механики деформируемого твердого тела с учетом локализации напряжений на двумерных дефектах удобно при использовании теоретических расчетов, основанных на представлениях о дислокационной природе процесса двойникования, рассмотренной, например, А. М. Косевичем и В. С. Бойко в работе [108]. Поэтому хорошо зарекомендовавший себя дислокационный подход в данной работе и лег в основу расчетов внутренних напряжений, созданных остаточными двойниками.

На масштабном уровне рассмотрения нанодвойникования расстояние между двойникующими дислокациями нельзя считать пренебрежимо малым [358], [377]–[379]. Поэтому в математических моделях двойников на этом масштабном уровне должен присутствовать параметр, определяющий данное расстояние. Напряжения и деформа-

ции в этом случае в рамках теории упругости определяются в результате дискретного суммирования напряжений или деформаций, сформированных каждой дислокацией двойниковой границы [318]. На данном мезоскопическом уровне возможно рассмотрение не только участка границы двойника [380], [381], но и отдельных двойников длиной до десятых долей микрометра [358], [377]–[379]. Такие двойники характеризуют начальную стадию развития двойникования и, в некоторых случаях, могут рассматриваться как зародыши двойников, изучение которых, по мнению М. В. Классен-Неклюдовой [109], является важной научной проблемой.

По аналогии с дислокационной моделью зерен [315], имеющих конечный размер вдоль оси OZ (данная ось перпендикулярна рис. 4.3), будем рассматривать плоскую задачу для остаточного клиновидного нанодвойника малой длины в направлении оси OZ . Двойниковые границы будем моделировать дислокационными лестницами, как это сделано в [43] с учетом того, что в каждой плоскости двойникования может находиться только одна двойникующая дислокация одного знака. Так же, как и в [315], примем допущение того, что каждая двойникующая дислокация имеет бесконечную длину, а линия дислокации – параллельна оси OZ (рис. 4.3). Это допущение модели для двойников конечной вдоль оси OZ длины, которое аналогично допущению, принятому в дислокационных моделях границ зерен [26]–[29], [315] и двойников [43], [346]. При этом размеры зерен [26]–[29], [315] и нанозерен [143], [145], [146], [152], при которых их подобная рассматриваемой дислокационная модель может считаться адекватной, порой существенно меньше геометрических размеров рассматриваемых в данной работе двойников.

Отметим, что и границы зерен также не бесконечны вдоль оси OZ [26]–[29], [315], как при определенных условиях это наблюдается при двойниковании. Однако результаты, полученные на основании модели с бесконечными вдоль оси OZ дислокациями, в случае границ конечных микро- и даже нанозерен являются общепризнанными и адекватными [143], [145], [146], [152]. Следовательно, приведенное в работе моделирование (в том числе и пространственно конечных двойников) не противоречит общепризнанным подходам дислокационной теории зеренных границ [26]–[29], [315]. Это правомерно, так как согласно [26]–[29], [315] напряжения рассматриваются в весьма ограниченной области – плоскости сечения двойника (зерна), где влияние других частей двойника (зерна) незначительно или скомпенсировано.

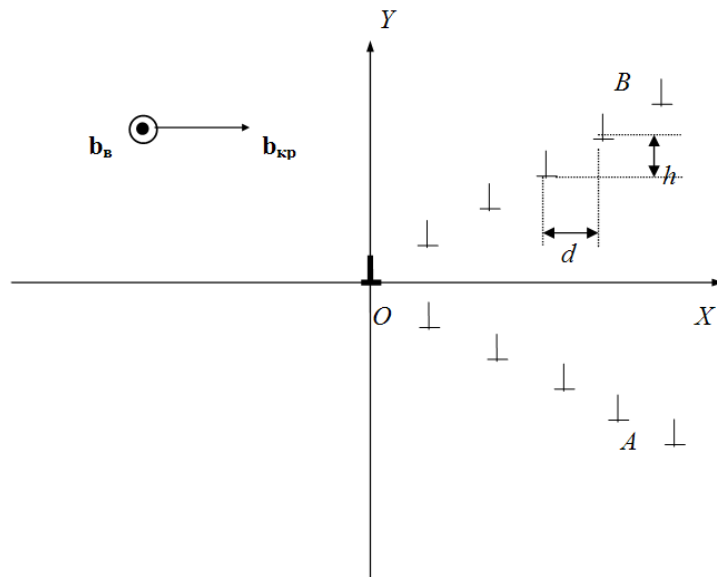


Рис. 4.3. Схема взаимного расположения дислокаций, их компонент вектора Бюргерса и декартовой системы координат для расчета полей напряжений и деформаций у клиновидного двойника

Так как представленный на рис. 4.3 двойник не является тонким, то согласно [108] такой двойник является остаточным и может существовать после снятия нагрузки. Пусть нанодвойник находится вдали от поверхности. Экспериментальное подтверждение возможности существования остаточного двойника вдали от поверхности кристалла приведено, например, в работах [315], [368], где показаны микроснимки остаточных двойников, находящихся вдали от поверхности в разрезанных кристаллах. При этом плоскость разреза кристалла и двойника – аналог плоскости XOY , которой разрезался остаточный трехмерный двойник на рис. 4.3.

Клиновидная форма двойника является производной от линзовидной [339], [382], когда одна из частей линзы у двойника, находящегося вдали от поверхности кристалла, деформирована, например, в ходе дислокационных реакций субзеренной границей, дислокационной стенкой, включением, взаимодействием с границей другого двойника или др., находящимися у устья клиновидного двойника, и влияние которых для упрощения модели (ввиду большого множества вариантов) рассматривать не будем. Таким образом, ввиду производности клиновидной формы двойника от линзовидной его формы и наличия экспериментальных подтверждений [313], [368], правомерно аналогичное с [43] утверждение о возможности существования клиновидного двойника вдали от поверхности кристалла.

В качестве допущения модели также не будем рассматривать анизотропию, свойственную кристаллическим твердым телам. Учет анизотропии приводит к весьма громоздким математическим соотношениям, которые крайне неудобны для анализа полученных результатов. Поэтому, несмотря на существование теории дислокаций в анизотропных средах (кристаллах) [26], для таких сплошных сред значительно более широко используется приближение изотропной среды [23], [26], [108], [109], [315] и др., так как оно позволяет получать достаточно адекватные результаты, не прибегая к неоправданно громоздким математическим соотношениям. Исходя из этого, в соответствии с общепринятыми традициями [23], [26], [108], [109], [315] и др., когда для случая анизотропных (кристаллических) твердых тел предпочтение отдается приближению изотропности среды, использование в данной работе такого приближения целесообразно. По этой же причине, как и в случае существующей теории границ зерен [23], [26], [315], не будем учитывать и анизотропию, обусловленную поворотом кристаллической решетки в нетонком двойнике.

Пусть рассматриваемый остаточный двойник находится вдали от поверхности ненагруженной бесконечной непрерывной изотропной среды и состоит из имеющего вид клина скопления двойникующих дислокаций с вектором Бюргерса \mathbf{b} (рис. 4.3). Экспериментальному доказательству возможности существования остаточного двойника вдали от поверхности кристалла посвящена, например, работа [315]. На рис. 4.3 в начале декартовой системы координат находится вершинная двойникующая дислокация. Пусть краевая составляющая вектора Бюргерса направлена вдоль оси OX (см. рис. 4.3) в сторону положительного ее направления, а винтовая – перпендикулярно плоскости рис. 4.3 (вдоль оси OZ). Очевидно, что в данной модели дислокационные линии параллельны оси OZ , а плоскостью двойникования является плоскость XOZ . Индексы Миллера плоскости двойникования для различных двойникующихся материалов различны. В [29] такие двойники названы плоскими, но согласно [315], такая модель может быть использована в плоской задаче и для конечных вдоль оси OZ объектов.

Представленный на рис. 4.3 двойник в двойникующемся материале получают множественными схемами деформирования. При этом согласно [109] должно выполняться условие наличия концентрации напряжений, которые в данном случае рассматривать не будем. Вдали от поверхности в качестве такого концентратора напряжений могут выступать инородные включения, границы зерен и двойников [108], [109]. Равновесие системы дислокаций, представленной на

рис. 4.3, обеспечивается силами внутреннего трения, препятствующими перемещению дислокаций [150]. Природа этой силы такова, что основной вклад в ее величину вносят полные дислокации, существовавшие в кристалле до появления двойника, либо сгенерированные двойниковыми границами, либо внешней нагрузкой одновременно с процессом двойникования [150]. Причем двойниковые границы часто способствуют образованию сидячих дислокаций [150], которые неподвижны даже при очень высоких деформациях, соизмеримых с пределом прочности материала. Наличие таких сидячих дислокаций в плоскости миграции двойникующих дислокаций в случае остаточных двойников часто сводит к нулю вклад в равновесную форму двойника сил междислокационного взаимодействия.

Проведем расчет на основании принципа суперпозиции компонент тензора напряжений, создаваемых такой, имеющей вид лестницы (см. рис. 4.3), совокупностью дислокаций. Известно [1], что данный принцип справедлив в рамках теории упругости в случае неподвижных источников внутренних напряжений, в качестве которых выступают двойникующие дислокации рассматриваемого статического остаточного двойника.

Для решаемой задачи о клиновидном двойнике на мезоскопическом (наномасштабном) уровне из (1.21) получим:

$$\Psi_{кр} = -\frac{\mu b_{кр}}{4\pi(1-\nu)} \left(\sum_{n=0}^N (y+nh) \ln \left((x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right) + \sum_{m=1}^M (y-mh) \ln \left((x-md)^2 + (y-mh)^2 \right) \right), \quad (4.1)$$

где n и m – индексы суммирования; d и h – проекции, соответственно, на оси OX и OY отрезка, соединяющего две соседние дислокации (см. рис. 4.3); N и M – число дислокаций на каждой из границ двойника.

Решая (1.23), с учетом требования принципа линейной суперпозиции, используемого в теории дислокационных стенок [26]–[28], [315], можно записать:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sum_n \sigma_{ij}^{OA}(x-nd, y+nh) + \sum_m \sigma_{ij}^{OB}(x-md, y-mh), \quad (4.2)$$

где i и j принимают значения x , y или z ; σ_{ij}^{OA} и σ_{ij}^{OB} – напряжения, создаваемые скоплениями дислокаций на границах OA и OB соответственно (см. рис. 4.3).

В существующих теориях двойникования [109]–[111], как правило, пренебрегается величиной ступеньки, которую образует двойник на поверхности твердого тела. Такое допущение не отвергает существование поворота кристаллической решетки, обусловленного двойникованием, а связано с пренебрежимо малой величиной ступеньки по сравнению с геометрическими параметрами двойника [343]. Тем более такое допущение целесообразно в случае образования двойника вдали от поверхности твердого тела, когда вызванные поворотом кристаллической решетки геометрические изменения компенсируются пластической деформацией у устья двойника. Не изменяя традициям, заложенным в [109]–[111], примем такое же допущение и в данной работе и пренебрежем геометрическими изменениями, вызванными поворотом кристаллической решетки у устья двойника. Тогда для компонент тензора напряжений, обусловленных краевой составляющей вектора Бюргера двойникующих дислокаций клиновидного двойника, (4.2) будет иметь [373]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(y+nh) \left[3(x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right]}{\left[(x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \frac{(y-mh) \left[3(x-md)^2 + (y-mh)^2 \right]}{\left[(x-md)^2 + (y-mh)^2 \right]^2} \right\}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(y+nh) \left[(x-nd)^2 - (y+nh)^2 \right]}{\left[(x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \frac{(y-mh) \left[(x-md)^2 - (y-mh)^2 \right]}{\left[(x-md)^2 + (y-mh)^2 \right]^2} \right\}, \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(x-nd) \left[(x-nd)^2 - (y+nh)^2 \right]}{\left[(x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^M \frac{(x-md) \left[(x-md)^2 - (y-mh)^2 \right]}{\left[(x-md)^2 + (y-mh)^2 \right]^2} \Bigg\}, \\
\sigma_{zz}(x, y) = & -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{y+nh}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^M \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} \right\}; \tag{4.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}(x, y) = & -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{y+nh}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^M \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} \right\}, \\
\sigma_{yz}(x, y) = & \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{x-nd}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^M \frac{x-md}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} \right\}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Следует отметить, что соотношения (4.3) и (4.4) справедливы для рассматриваемого объемного двойника, рассеченного плоскостью XOY перпендикулярно оси OZ . При этом напряжения рассматриваются только в плоскости XOY . Это справедливо, так как геометрический размер двойника вдоль оси OZ достаточно велик, чтобы в прилегающей к плоскости XOY области могло быть использовано приближение прямолинейности двойникующих дислокаций, параллельных оси OZ .

Результаты компьютерной обработки соотношений (4.3) и (4.4) приведены на рис. 4.4–4.8. При этом для удобства вычислялись безразмерные величины [373]:

$$\eta_{ij}(x, y) = \frac{L}{A_{ij}^*} \sigma_{ij}(x, y),$$

где $L = Nd$ – длина двойника; $A_{xx}^* = A_{yy}^* = A_{xy}^* = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}$,

$A_{zz}^* = \frac{\mu\nu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}$, $A_{xz}^* = A_{yz}^* = \frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi}$. В расчетах принималось: $N = 100$;

$M = 99$; $d = 1,5$ нм; $h = 0,5$ нм.

Сравнительный анализ полученного графического материала, представленного на рис. 4.4–4.8, говорит о том, что нормальные (σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz}) и скалывающие (σ_{xy} , σ_{xz} и σ_{yz}) напряжения вокруг клиновидного двойника ведут себя различным образом: нормальные напряжения распределены у границ двойника несимметрично, скалывающие же напряжения – симметричны относительно оси OX [373]. Исключение составляют напряжения σ_{zz} и σ_{xz} , конфигурация которых идентична. Однако общим является тот факт, что напряжения максимальны в непосредственной близости двойниковой границы.

Компьютерные расчеты показали, что увеличение числа двойнивающих дислокаций на двойниковых границах существенным образом не изменяет вид конфигурационных кривых полей напряжений. Однако при этом пропорционально числу дислокаций в рассматриваемом скоплении изменяется величина напряжений у двойника, что, в частности, следует из (4.3) и (4.4).

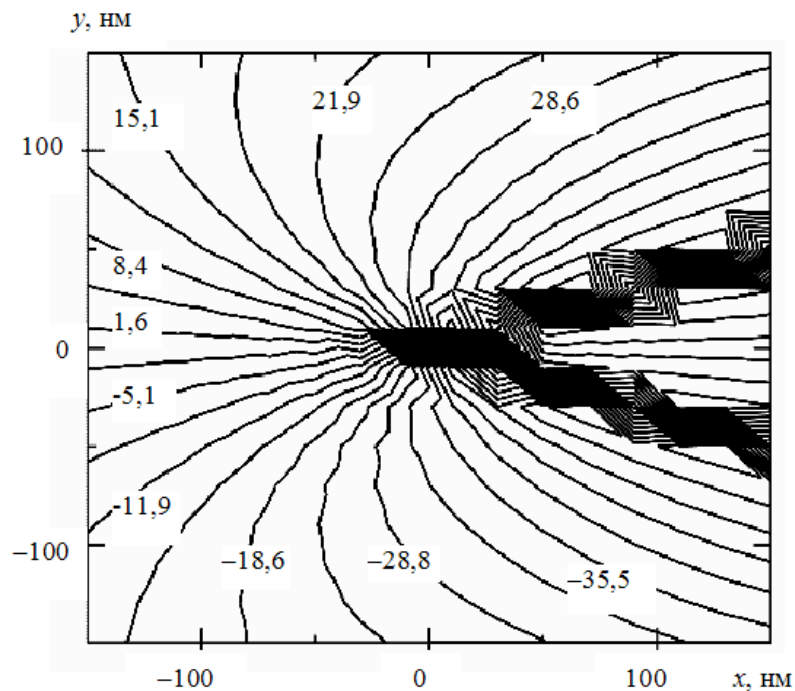


Рис. 4.4. Распределение η_{xx} (конфигурационный эквивалент σ_{xx}) у клиновидного нанодвойника

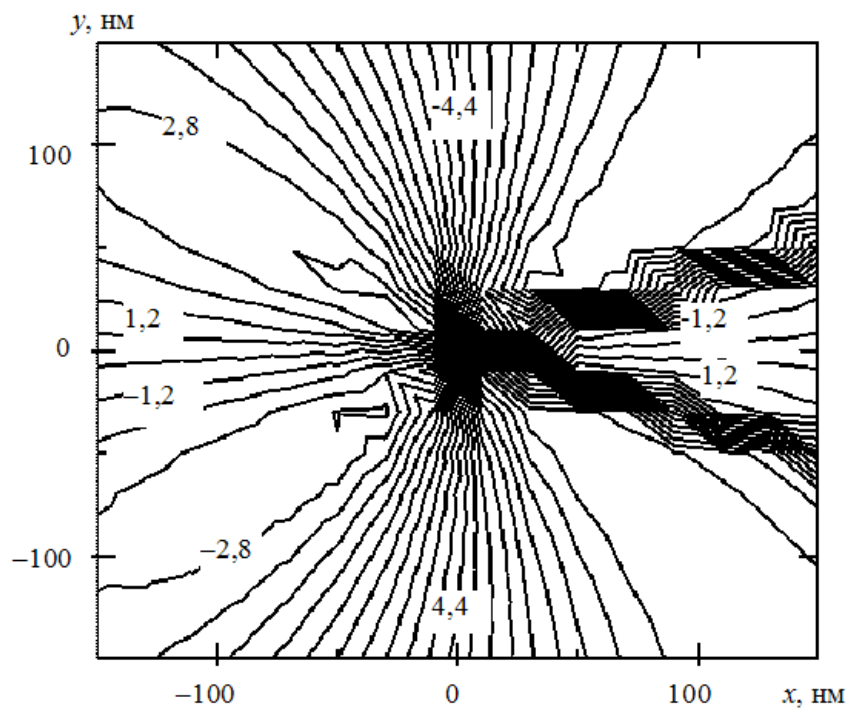


Рис. 4.5. Распределение η_{yy} (конфигурационный эквивалент σ_{yy}) у клиновидного нанодвойника

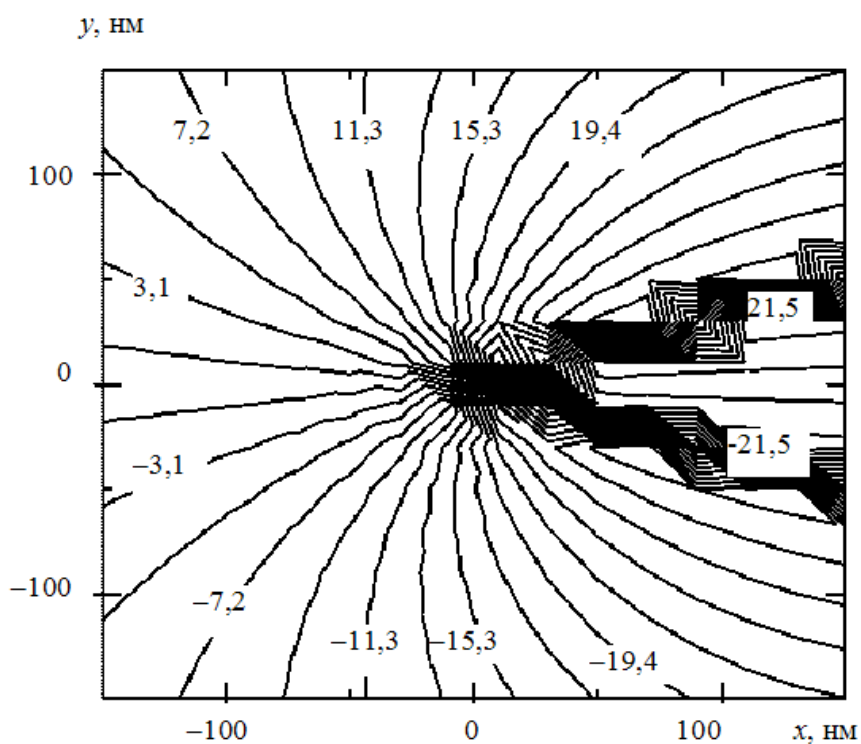


Рис. 4.6. Распределения η_{zz} (конфигурационный эквивалент σ_{zz}) и η_{xz} (эквивалент σ_{xz}) у клиновидного нанодвойника

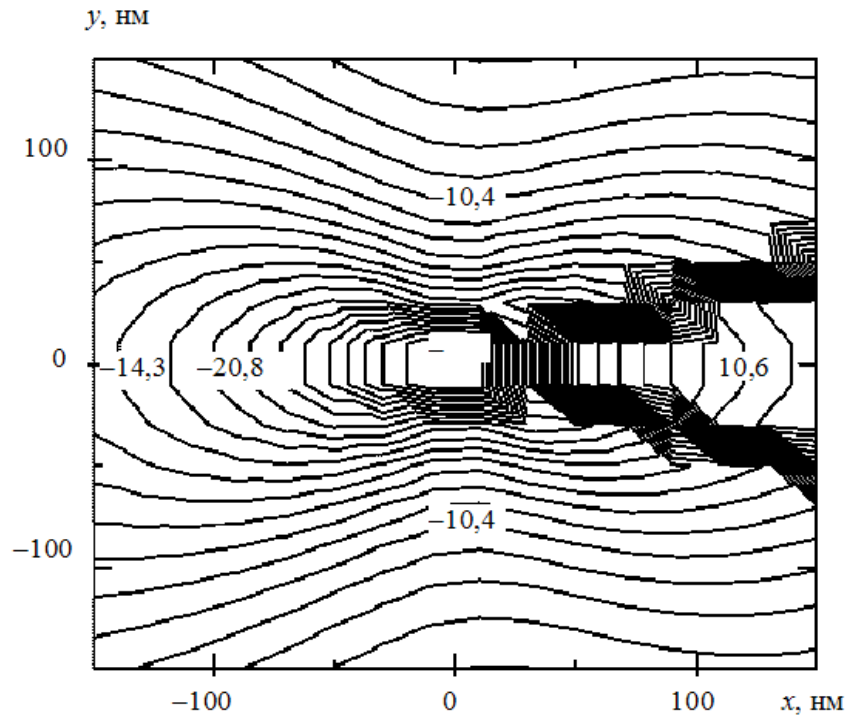


Рис. 4.7. Распределение η_{xy} (конфигурационный эквивалент σ_{xy}) у клиновидного нанодвойника

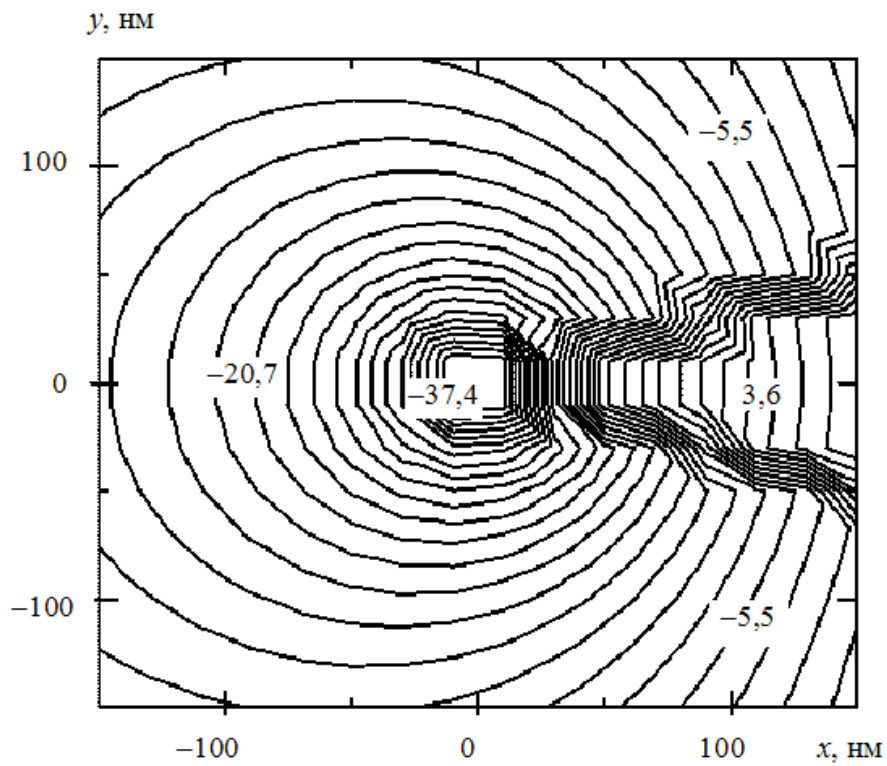


Рис. 4.8. Распределение η_{yz} (конфигурационный эквивалент σ_{yz}) у клиновидного нанодвойника

Отметим еще один, казалось бы, очевидный, но ранее не обсуждавшийся в литературе факт, заключающийся в том, что внутри двойника напряжения не являются однородными, а возрастают с удалением от устья двойника и с приближением к его вершине. Это не представляется возможным установить на основании модели тонкого двойника, представленной А. М. Косевичем и В. С. Бойко в [108].

Нормальные напряжения (σ_{xx} и σ_{yy}) локализованы у одной из двойниковых границ (рис. 4.4 и 4.5). Это говорит о наличии избыточных внутренних напряжений у одной двойниковой границы, что должно сказываться на динамике двойникующих дислокаций, образующих в результате деформации кристалла двойниковый клин. Нормальные напряжения способствуют процессу переползания дислокаций через препятствия в виде дефектов кристаллической решетки. Следовательно, двойниковая граница, у которой нормальные напряжения выше, в процессе своего формирования будет менее чувствительна к дефектам кристаллической структуры.

Напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} ответственны за миграцию точечных дефектов к двойниковой границе [372]. Антисимметрия данных напряжений (рис. 4.4–4.6) приведет к тому, что у одной из границ концентрация точечных дефектов будет выше, чем у другой, величина нормальных напряжений у которой ниже. Избыточная концентрация, например, примесей у двойниковой границы будет способствовать образованию сегрегаций, состоящих из большего числа атомов, чем у границы, величина нормальных напряжений у которой ниже (в обсуждении и анализе результатов принимал участие Ю. В. Василевич [372]).

Следует отметить, что первые попытки расчета сдвиговой компоненты тензора напряжений σ_{xy} были предприняты в [383]. Однако существовала проблема определения численных значений изолиний, которая решена в данной работе и работе [373]. Это позволило вести количественный анализ эволюции напряжений у клиновидного двойника в зависимости от его параметров.

4.1.3. Расчет смещений у клиновидного нанодвойника на мезоскопическом уровне

Выражения для расчета смещений у единичной дислокации имеют вид (1.24), (1.27). По аналогии с (4.2) для полей смещений клиновидного двойника на мезоскопическом уровне получим [322], [363]:

$$u_i(x, y) = \sum_n u_i^{OA}(x - nd, y + nh) + \sum_m u_i^{OB}(x - md, y - mh). \quad (4.5)$$

Раскрывая (4.5), с учетом (1.24) и (1.27), получим [322], [363]:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y+nh}{x-nd} \right) + \frac{(x-nd)(y+nh)}{2(1-\nu) \left[(x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right]} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y-mh}{x-md} \right) + \frac{(x-md)(y-mh)}{2(1-\nu) \left[(x-md)^2 + (y-mh)^2 \right]} \right) \right], \\
 u_y(x, y) &= -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln \left((x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x-nd)^2 - (y+nh)^2}{4(1-\nu) \left((x-nd)^2 + (y+nh)^2 \right)} \right) + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln \left((x-md)^2 + (y-mh)^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x-md)^2 - (y-mh)^2}{4(1-\nu) \left((x-md)^2 + (y-mh)^2 \right)} \right) \right], \\
 u_z(x, y) &= \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \operatorname{arctg} \left(\frac{y+nh}{x-nd} \right) + \sum_{m=1}^M \operatorname{arctg} \left(\frac{y-mh}{x-md} \right) \right]. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов смещений (4.6) представлены на рис. 4.9–4.11. Параметры расчетов принимались такие же, как и в предыдущем случае. В данном случае необходим учет значения параметра ν , который брался равным 0,33. Без ущерба общности полученных результатов для исключения необходимости учета численных значений индивидуальных для каждого материала величин $\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi}$ и $\frac{b_{\text{в}}}{2\pi}$ рассчитывались безразмерные распределения [322]:

$$\chi_i(x, y) = \frac{u_i(x, y)}{B_i^*}, \quad (4.7)$$

имеющие аналогичный вид, что и распределения $u_i(x, y)$.

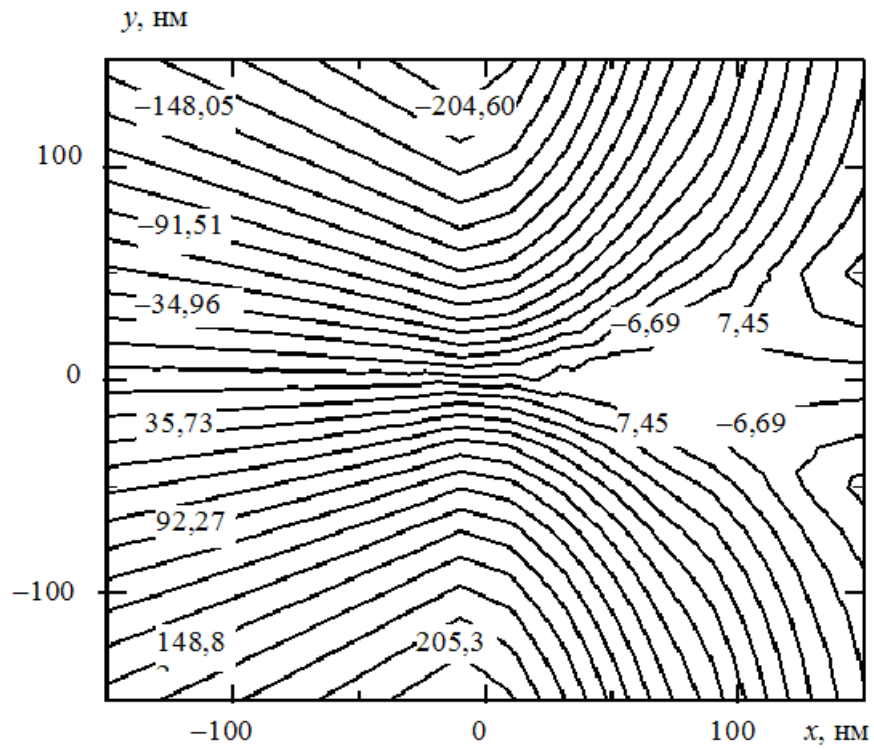


Рис. 4.9. Распределение $\chi_x(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение смещений $u_x(x, y)$)

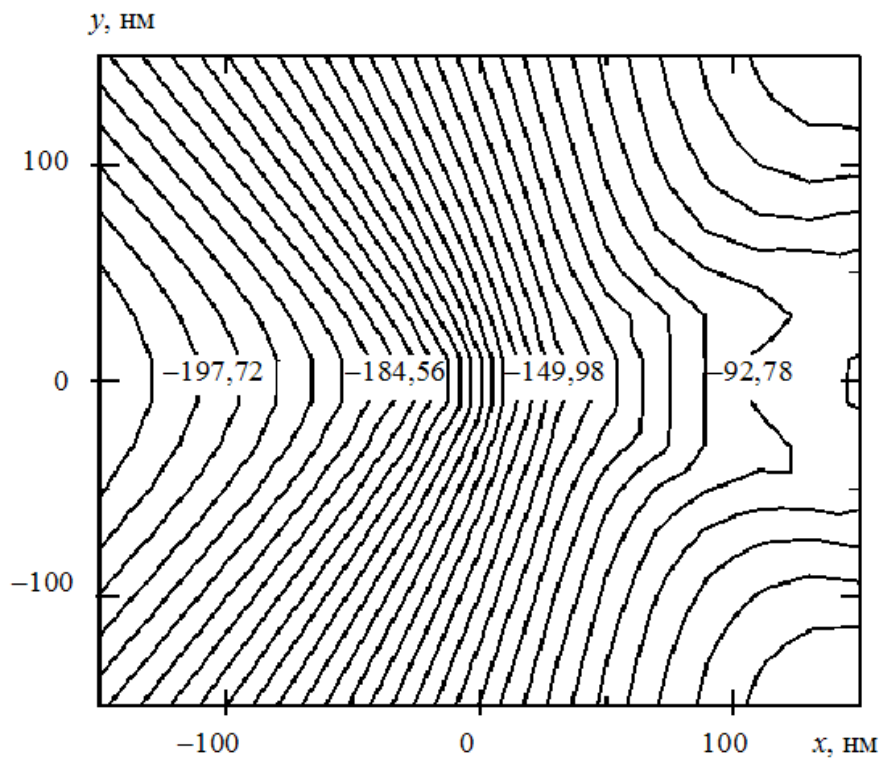


Рис. 4.10. Распределение $\chi_y(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение смещений $u_y(x, y)$)

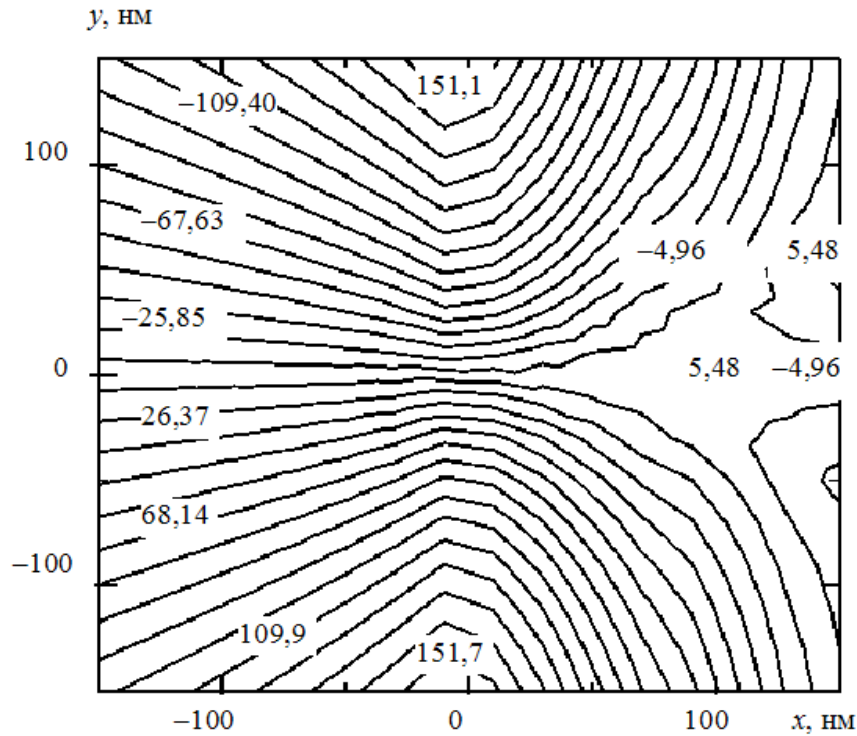


Рис. 4.11. Распределение $\chi_z(x, y)$ (аналогичный вид имеет распределение смещений $u_z(x, y)$)

В (4.7) принималось:

$$B_x^* = B_y^* = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi}, \quad B_z^* = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi}.$$

Конфигурация распределения смещений u_x и u_z имеет схожий вид. Отличие заключается в величине значений изолиний в одних и тех же областях относительно клиновидного нанодвойника. Следует отметить, что данные смещения знакопеременны относительно оси OX (рис. 4.9 и 4.11), а также оси, параллельной оси OY , и проходящей у устья двойника (в обсуждении результатов принимал участие Ю. В. Василевич [322], [373]).

Смещения u_y отрицательны и имеют более высокое численное значение также в удалении от вершины двойника (рис. 4.10).

**4.1.4. Расчет полей деформаций в приближении
дискретного распределения частичных дислокаций
на границах клиновидного нанодвойника**

Из соотношений (4.6) определяются и компоненты тензора деформаций ε_{ij} . Для этого необходимо воспользоваться соотношениями Коши (1.15), из которых получим [363]:

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y+nh}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} - \frac{(x-nd)^2 (y+nh)}{[(1-\nu)[(x-nd)^2 + (y+nh)^2]^2} \right) + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} - \frac{(x-md)^2 (y-mh)}{(1-\nu)[(x-md)^2 + (y-mh)^2]^2} \right) \right],$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y+nh}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} - \frac{(y+nh)[(x-nd)^2 - (y+nh)^2]}{2(1-\nu)[(x-nd)^2 + (y+nh)^2]^2} \right) + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} - \frac{(y-mh)[(x-md)^2 - (y-mh)^2]}{2(1-\nu)[(x-md)^2 + (y-mh)^2]^2} \right) \right],$$

$$\varepsilon_{zz}(x, y) = 0,$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4(1-\nu)} \frac{x-nd}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} + \frac{(x-nd)[(x-nd)^2 - 3(y+nh)^2]}{4(1-\nu)[(x-nd)^2 + (y+nh)^2]^2} \right) + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} - \frac{(x-md)[(x-md)^2 - 3(y-mh)^2]}{4(1-\nu)[(x-md)^2 + (y-mh)^2]^2} \right) \right],$$

$$\varepsilon_{xz}(x, y) = -\frac{b_{\text{B}}}{4\pi} \left[\sum_{n=0}^N \frac{y+nh}{(x-nd)^2 + (y+nh)^2} + \sum_{m=1}^M \frac{y-mh}{(x-md)^2 + (y-mh)^2} \right],$$

$$\varepsilon_{yz}(x, y) = \frac{b_B}{4\pi} \left[\sum_{n=0}^N \frac{x - nd}{(x - nd)^2 + (y + nh)^2} + \sum_{m=1}^M \frac{x - md}{(x - md)^2 + (y - mh)^2} \right]. \quad (4.8)$$

Результаты расчетов деформаций (4.8) представлены на рис. 4.12–4.16. В расчетах принималось $b_B = b_{кр} = 0,124$ нм [347]. Остальные параметры брались такими же, как и выше.

В отличие от смещений u_i (рис. 4.9–4.11) у распределений компонент тензора деформаций четко прослеживается локализация деформаций у границ двойника (рис. 4.12–4.16). Нормальные деформации ε_{xx} и ε_{yy} знакопеременны относительно оси OX , а также относительно двойниковых границ, т. е. у каждой границы клиновидного двойника нормальные деформации снаружи и внутри двойника имеют разный знак (рис. 4.12 и 4.13). Вдоль оси OX данные деформации близки к нулю.

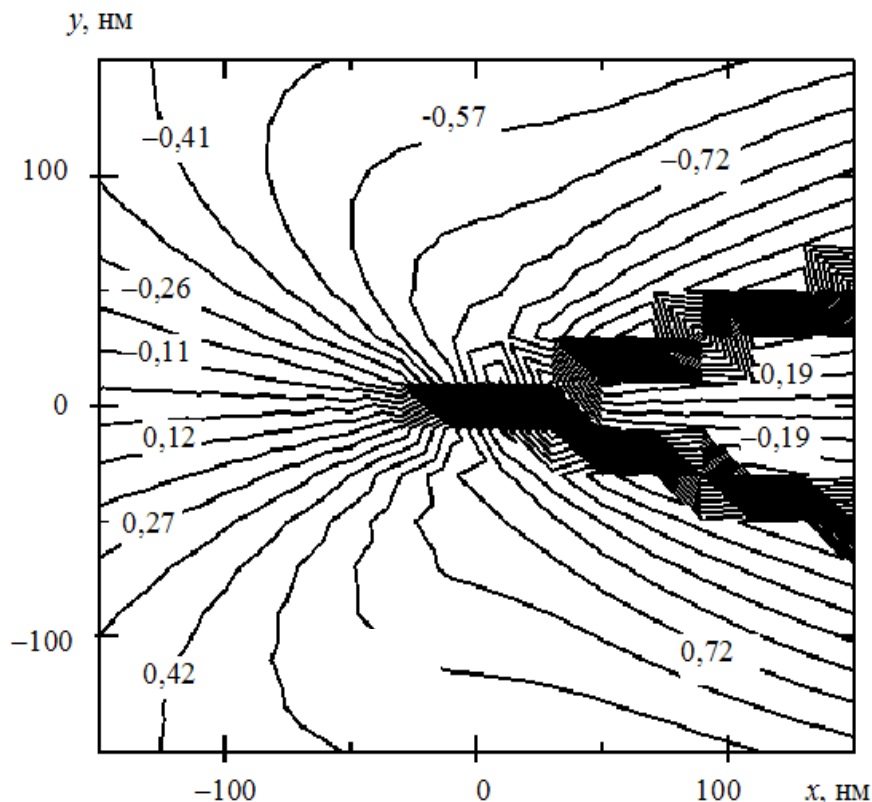


Рис. 4.12. Распределение деформации $\varepsilon_{xx}(x, y)$

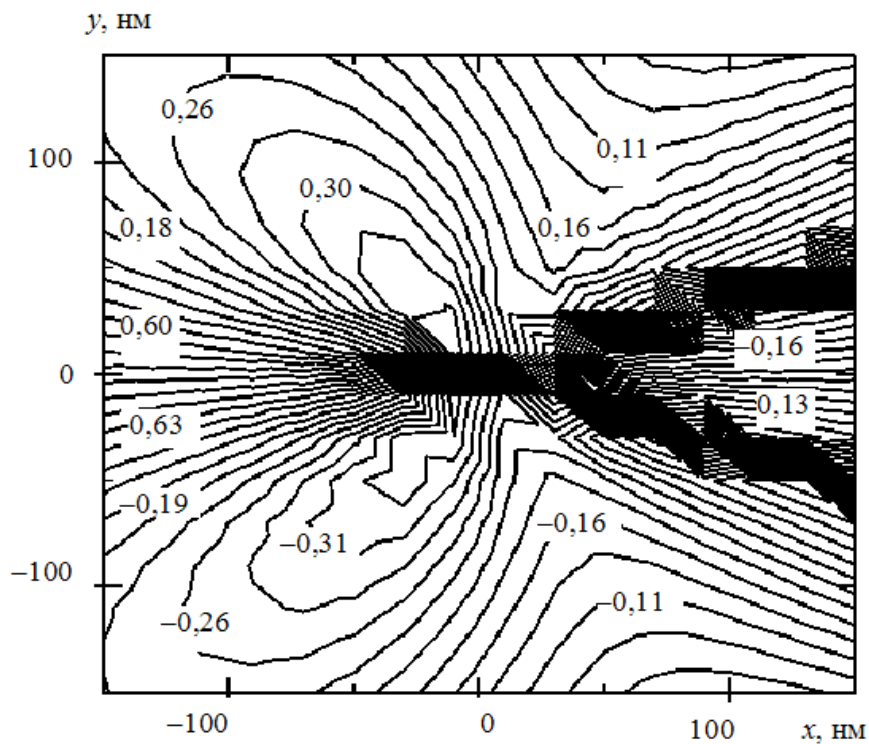


Рис. 4.13. Распределение деформации $\epsilon_{yy}(x, y)$

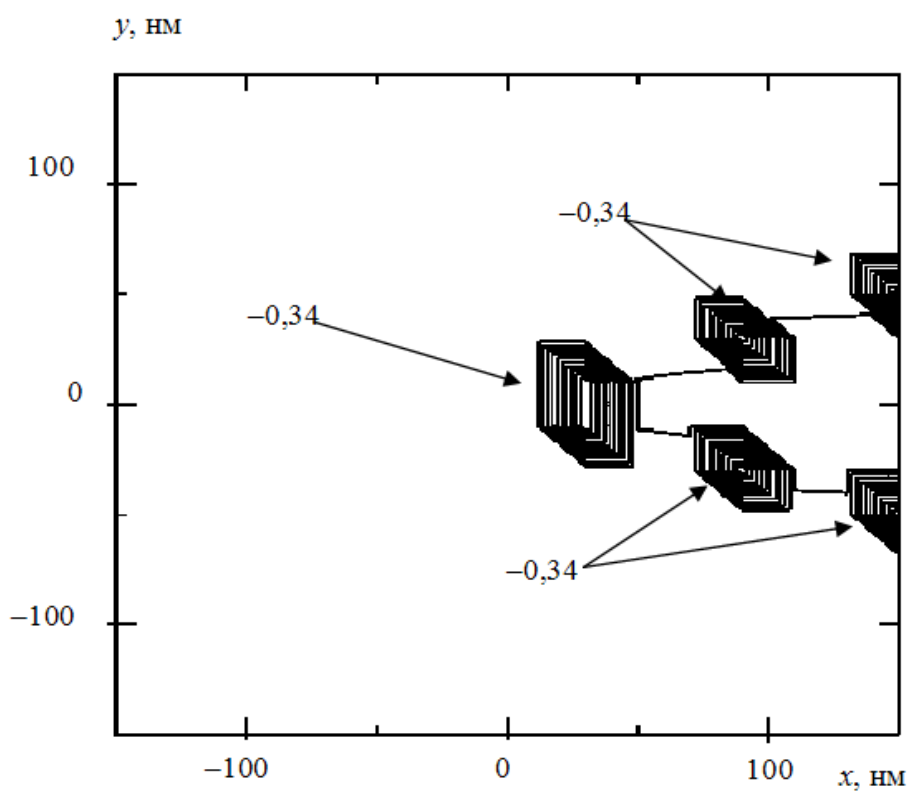


Рис. 4.14. Распределение деформации $\epsilon_{xy}(x, y)$

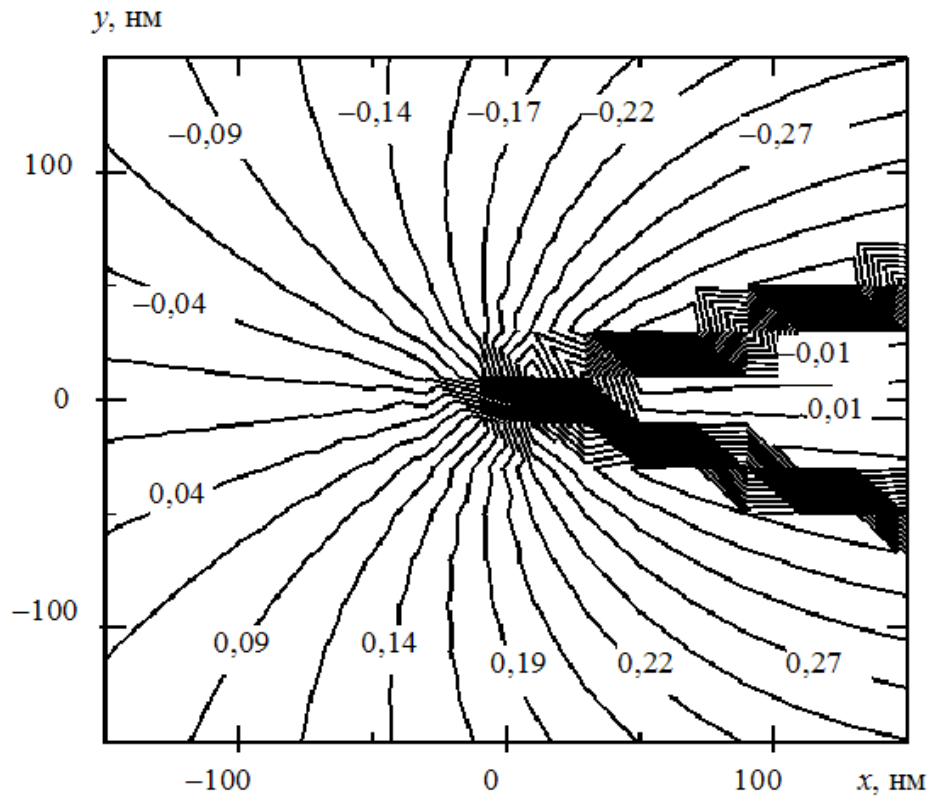


Рис. 4.15. Распределение деформации $\epsilon_{xz}(x, y)$

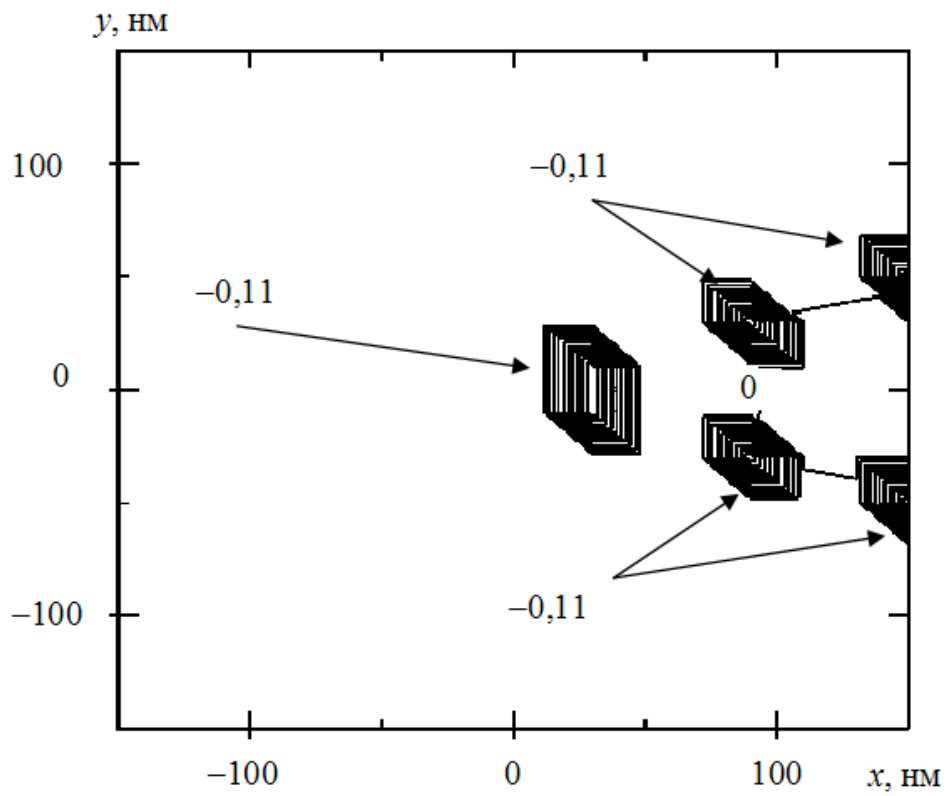


Рис. 4.16. Распределение деформации $\epsilon_{yz}(x, y)$

Деформации ε_{xy} , как и ε_{yz} , вдоль двойниковой границы локализируются в трех областях (рис. 4.14 и 4.16): у вершины, у устья и средней части клиновидного двойника. Знак данных деформаций одинаков и они равны нулю внутри двойника на оси OX .

Конфигурация полей деформаций ε_{xz} схожа с конфигурацией деформаций ε_{xx} . Отличие заключается в численных значениях этих деформаций в одинаковых областях конденсированной среды по отношению к клиновидному двойнику (рис. 4.12 и 4.15).

Следует отметить, что используемый в данной работе принцип суперпозиции справедлив для линейных моделей механики деформируемого твердого тела, когда выполняется условие [318]:

$$|\varepsilon_{ij}| < 1.$$

Как видно из рис. 4.12–4.16, данные условия выполняются практически во всей расчетной области. Согласно [26] неадекватные решения имеют место в ядре дислокации в области, размер которой соизмерим с межатомным расстоянием. Однако на рис. 4.12–4.16 приведены результаты расчетов в масштабе рассмотрения среды в рамках механики деформируемого твердого тела, когда среда считается сплошной и эффекты атомного масштаба не рассматриваются.

4.1.5. Расчет напряжений и деформаций у вершины нанодвойника клиновидной формы

В плане дальнейшего анализа напряжений и деформаций у клиновидного двойника интересно их рассмотрение в особых областях у нанодвойника. В качестве одной из таких областей можно выделить вершину двойника. Эта область интересна тем, что у нее, как правило, наблюдается самый высокий уровень напряжений, в результате чего в области вершины двойника наибольшая вероятность зарождения трещин. Удалим из вершины двойника двойникующую дислокацию и рассмотрим напряженное и деформированное состояние, создаваемое в этой точке дислокациями двойниковых границ. Такое удаление дислокации приведет к тому, что суммирование по n в (4.3), (4.4) и (4.8) будет вестись не от нуля, как ранее, а от единицы. Чтобы определить напряжения и деформации в вершине двойника, необходимо в (4.3), (4.4) и (4.8) принять $x = y = 0$. Тогда получим [360], [384], [385]:

$$\sigma_{xx}(0,0) = -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{h(3d^2 + h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(0,0) &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{h(d^2 - h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right), \\
\sigma_{xy}(0,0) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{d(d^2 - h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right), \\
\sigma_{zz}(0,0) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{h}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right), \\
\sigma_{xz}(0,0) &= -\frac{\mu b_{\text{B}}}{2\pi} \frac{h}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right), \\
\sigma_{yz}(0,0) &= -\frac{\mu b_{\text{B}}}{2\pi} \frac{d}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right); \tag{4.9} \\
\varepsilon_{xx}(0,0) &= \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{h}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1-\nu} \frac{d^2 h}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) \right), \\
\varepsilon_{yy}(0,0) &= -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \frac{1}{2(1-\nu)} \left((1-2\nu) \frac{h}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{h(d^2 - h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) \right), \\
\varepsilon_{xy}(0,0) &= -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \frac{1}{4(1-\nu)} \left(\frac{d}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{d(d^2 - 3h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right) \right), \\
\varepsilon_{xz}(0,0) &= -\frac{b_{\text{B}}}{4\pi} \frac{h}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right),
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{yz}(0,0) = -\frac{b_B}{4\pi} \frac{d}{d^2 + h^2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \right). \quad (4.10)$$

В случае, когда $N = M$, из (4.9), (4.10) получим [360], [385]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \\ \sigma_{xy} = -\frac{\mu b_{кр}}{\pi(1-\nu)} \frac{d(d^2 - h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, \\ \sigma_{yz} = -\frac{\mu b_B}{\pi} \frac{d}{d^2 + h^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = -\frac{b_{кр}}{\pi} \frac{1}{4(1-\nu)} \left(\frac{d}{d^2 + h^2} + \frac{d(d^2 - 3h^2)}{(d^2 + h^2)^2} \right) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, \\ \varepsilon_{yz} = -\frac{b_B}{\pi} \frac{d}{d^2 + h^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из-за симметричного и регулярного распределения дислокаций на двойниковых границах при $N = M$ компоненты тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} и σ_{xz} равны нулю в связи с тем, что напряжения дислокаций на двух двойниковых границах скомпенсированы. Аналогично компенсируют друг друга и деформации ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{xz} двойникующих дислокаций, находящихся на разных двойниковых границах. В то же время, из-за расположения на двойниковых границах дислокаций одного знака напряжения σ_{xy} , σ_{yz} и деформации ε_{xy} , ε_{yz} удваиваются [385]. Рассмотрим эти деформации и напряжения более подробно.

На рис. 4.16 и 4.17 представлены зависимости η_{xz} , η_{yz} и χ_{xy} , χ_{yz} , соответственно, от числа двойникующих дислокаций на двойниковых границах N . При расчете значения параметров d , h и ν в расчетных формулах (4.11), (4.12) принимались такие же, как и выше. Видно, что с ростом N рассматриваемые напряжения и деформации по модулю монотонно возрастают. При больших значениях N скорость роста величины напряжений и деформаций уменьшается.

При $N \neq M$ напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xz} и деформации ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xz} зависят от параметра [360], [384], [385]:

$$\Delta = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^M \frac{1}{m}.$$

Причем при $N < M$, $\Delta < 0$. Это значит, что если на границе OB (рис. 4.3) дислокаций больше, чем на границе OA , то напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xz} и деформации ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xz} будут менять знак своей величины на противоположный.

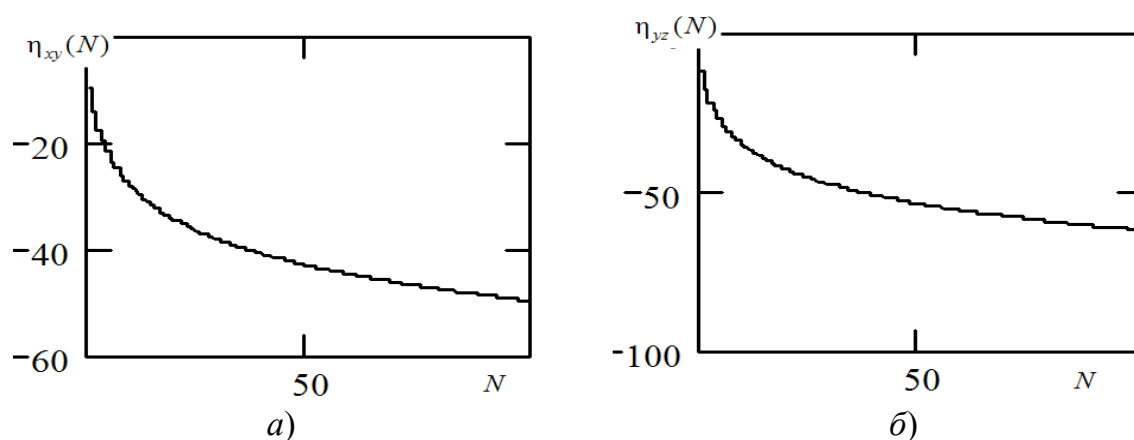


Рис. 4.17. Зависимости η_{xy} (а) и η_{xz} (б) от числа двойниующих дислокаций на двойниковых границах N

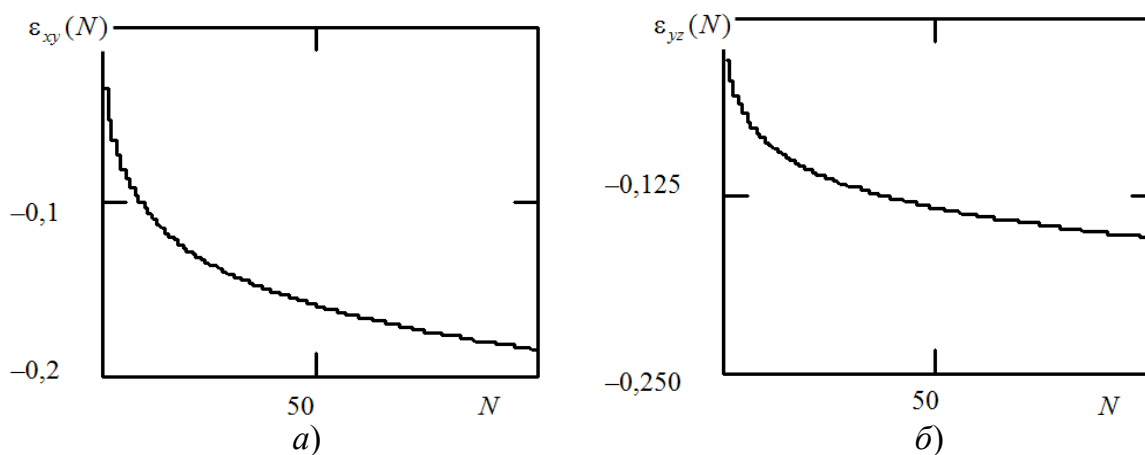


Рис. 4.18. Зависимости ε_{xy} (а) и ε_{yz} (б) от числа двойниующих дислокаций на двойниковых границах N

Для анализа напряжений и деформаций у вершины клиновидного двойника от параметров d и h рассмотрим зависимости [360], [384], [385]:

$$\frac{\eta_{ij}(d, h)}{\Delta}, \frac{\eta_{ij}(d, h)}{\Sigma}, \frac{\varepsilon_{ij}(d, h)}{\Delta}, \frac{\varepsilon_{ij}(d, h)}{\Sigma}, \quad (4.13)$$

где

$$\Sigma = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{m}.$$

Зависимости (4.13) представлены на рис. 4.19–4.28. Напряжения σ_{xx} у вершины двойника увеличиваются по модулю с уменьшением расстояния между дислокациями (рис. 4.19). Скорость роста напряжений при этом увеличивается при меньших расстояниях между дислокациями [360].

Совершенно иначе ведут себя напряжения σ_{yy} в зависимости от параметров d и h . Следует отметить, что данные напряжения меняют свой знак не только от дисбаланса плотности двойникующих дислокаций на противоположных двойниковых границах, но и от соотношения между параметрами d и h . Причем при $d < 2$ мкм напряжения σ_{yy} отрицательны, а при $d > 2$ – положительны (рис. 4.20).

Касательные напряжения σ_{xy} так же, как и напряжения σ_{yy} , принимают как отрицательные, так и положительные значения (рис. 4.21).

Напряжения σ_{zz} и σ_{xz} в зависимости от параметров d и h имеют схожий вид (рис. 4.22 и 4.23). Отличие наблюдается в численных значениях изолиний в одинаковых областях зависимостей от d и h . При малых значениях этих параметров напряжения больше по величине, чем при больших значениях d и h . Напряжения σ_{zz} и σ_{xz} в рассматриваемом интервале значений d и h не меняют знак.

Конфигурация напряжений σ_{yz} (рис. 4.24) такая же, как и у напряжений σ_{zz} и σ_{xz} , но, в отличие от них, контуры изолиний напряжений σ_{yz} замыкаются на оси d , в то время как у напряжений σ_{zz} и σ_{xz} – на оси h .

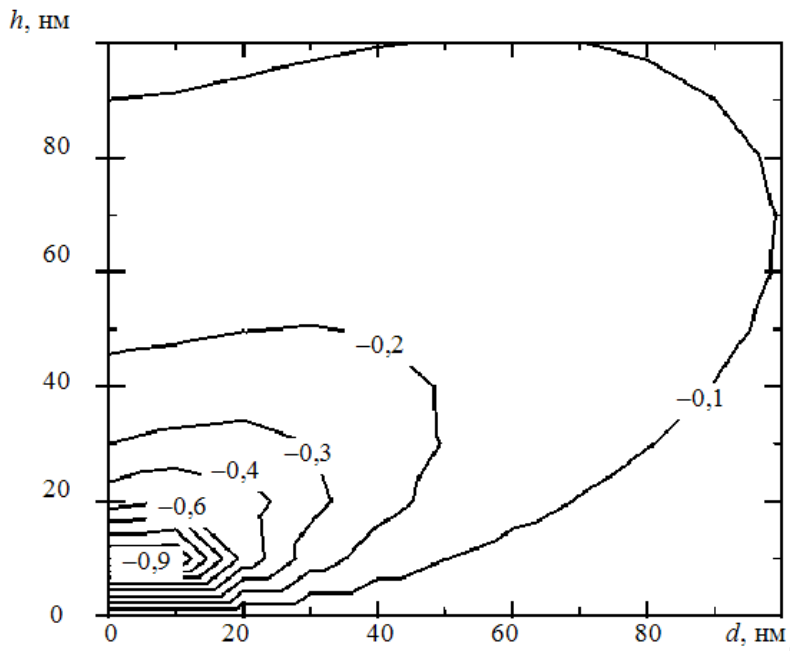


Рис. 4.19. Распределение $\frac{\eta_{xx}(d, h)}{\Delta}$

Как видно из рис. 4.25–4.29, деформации ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и ϵ_{xy} принимают как положительные, так и отрицательные значения, а деформации ϵ_{xz} и ϵ_{yz} знак своей величины не меняют (в обсуждении результатов принимал участие Ю. В. Василевич [385]).

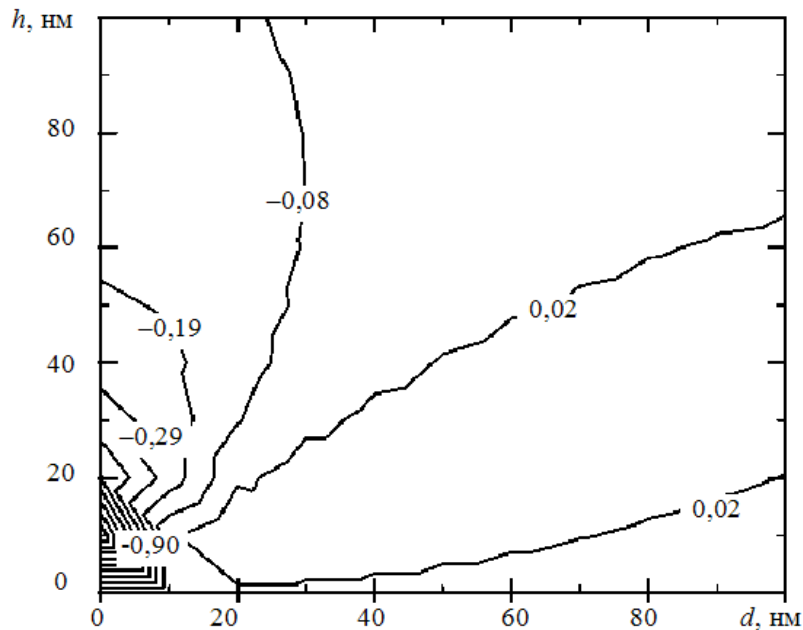


Рис. 4.20. Распределение $\frac{\eta_{yy}(d, h)}{\Delta}$

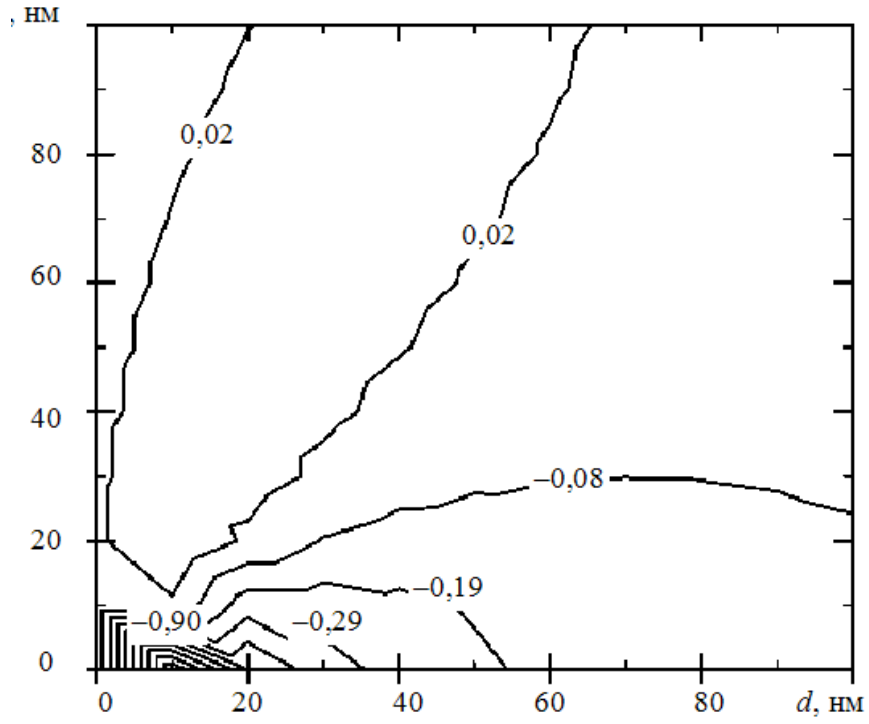


Рис. 4.21. Распределение $\frac{\eta_{xy}(d, h)}{\Delta}$

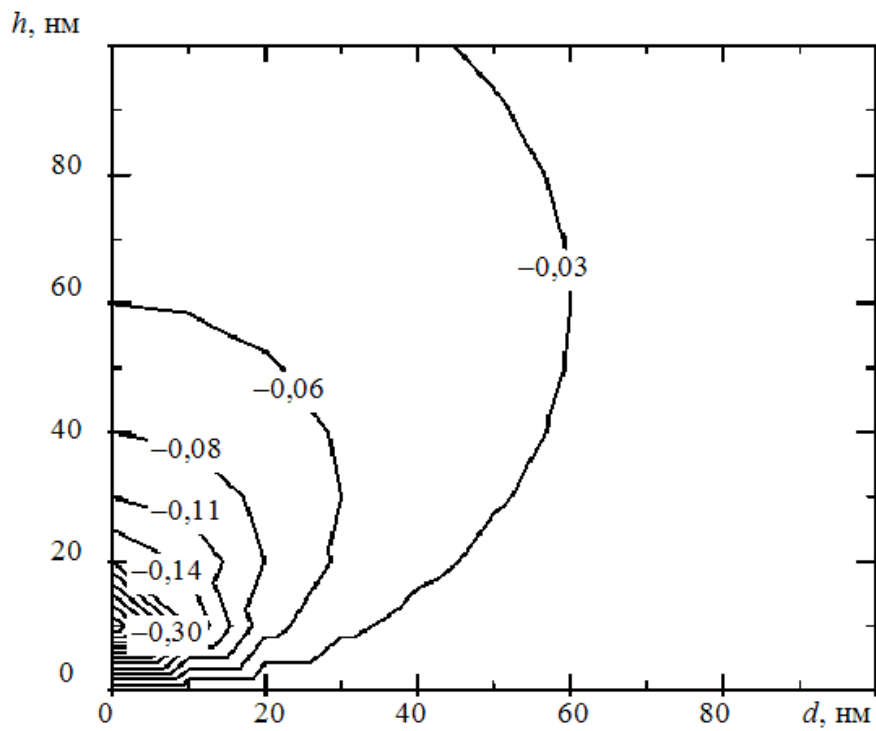


Рис. 4.22. Распределение $\frac{\eta_{zz}(d, h)}{\Delta}$

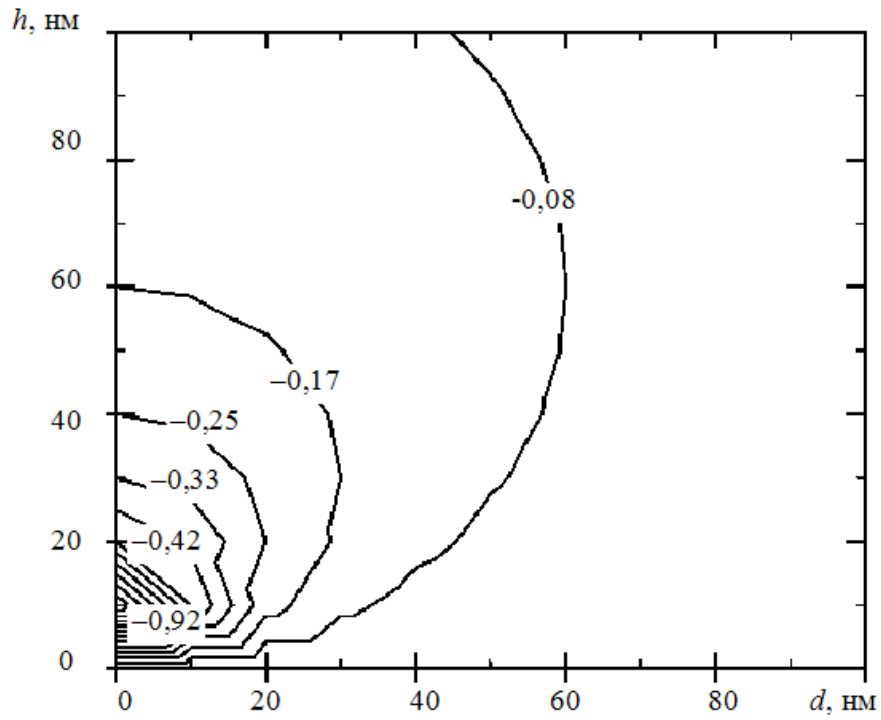


Рис. 4.23. Распределение $\frac{\eta_{xz}(d, h)}{\Delta}$

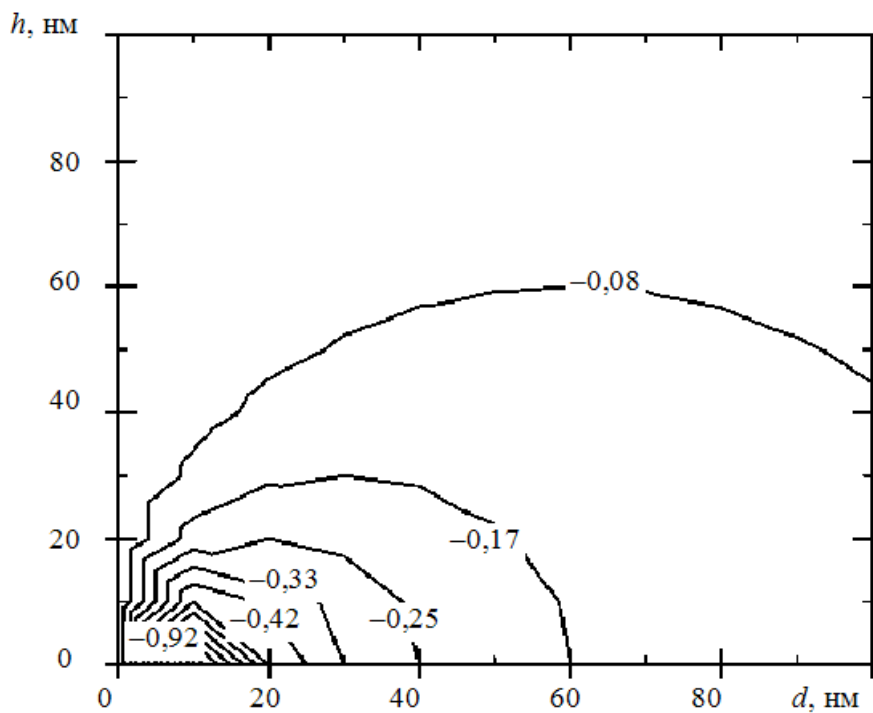


Рис. 4.24. Распределение $\frac{\eta_{yz}(d, h)}{\Sigma}$

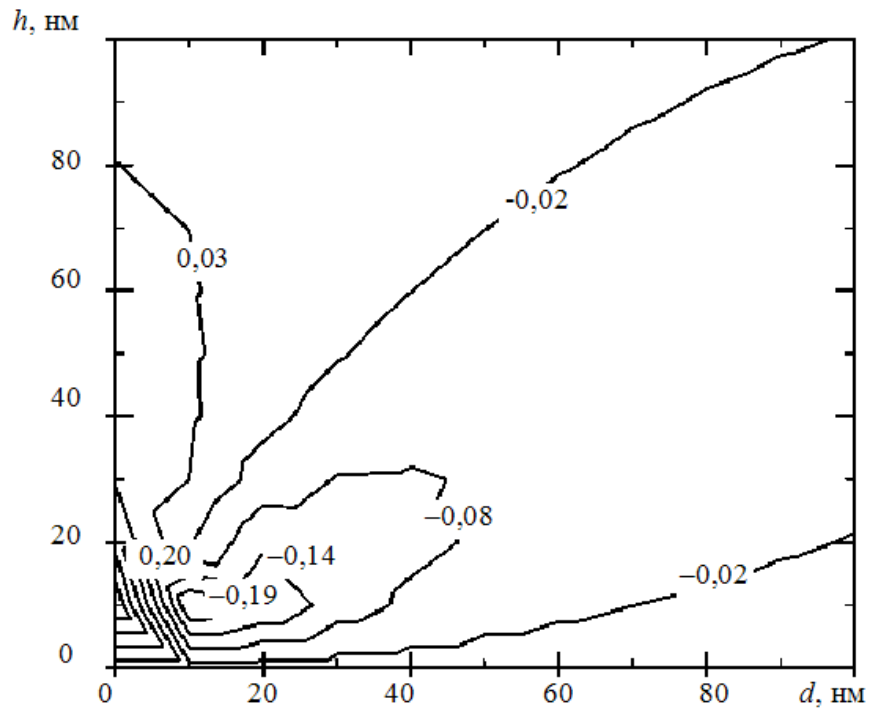


Рис. 4.25. Распределение $\frac{\varepsilon_{xx}(d, h)}{\Delta}$

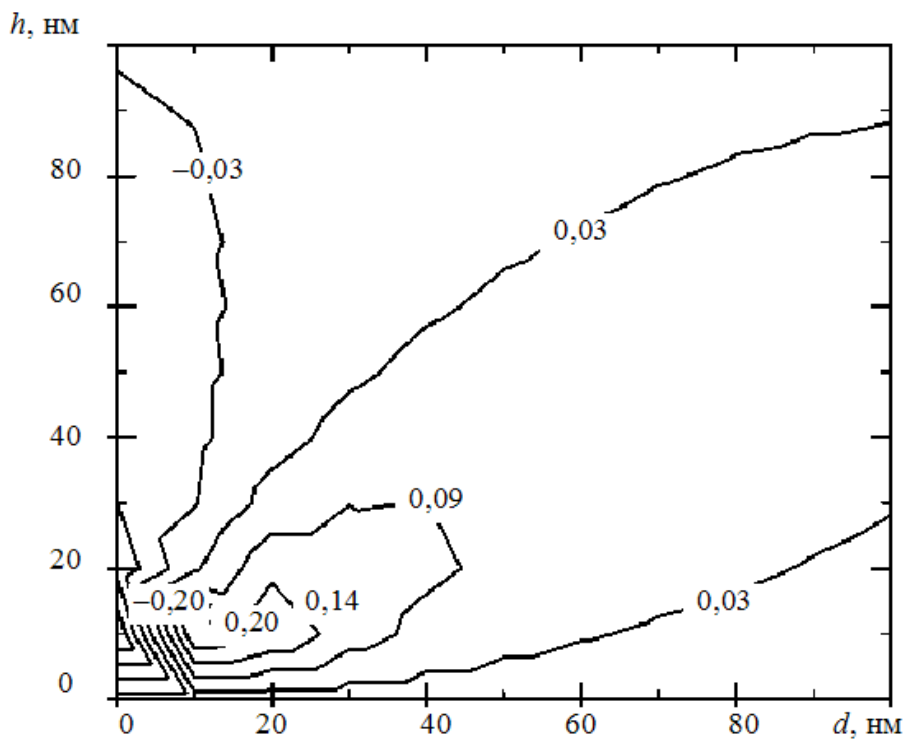


Рис. 4.26. Распределение $\frac{\varepsilon_{yy}(d, h)}{\Delta}$

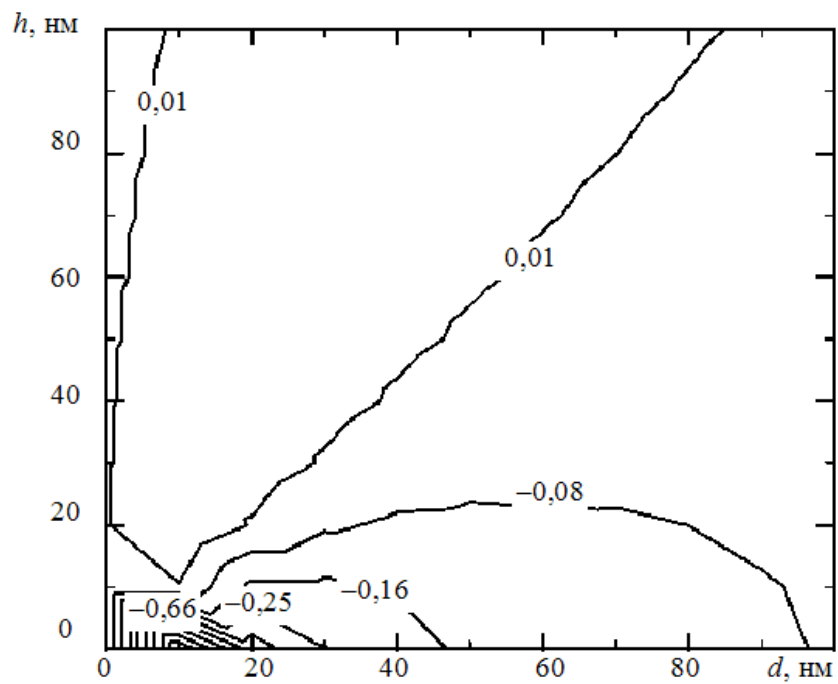


Рис. 4.27. Распределение $\frac{\varepsilon_{xy}(d, h)}{\Sigma}$

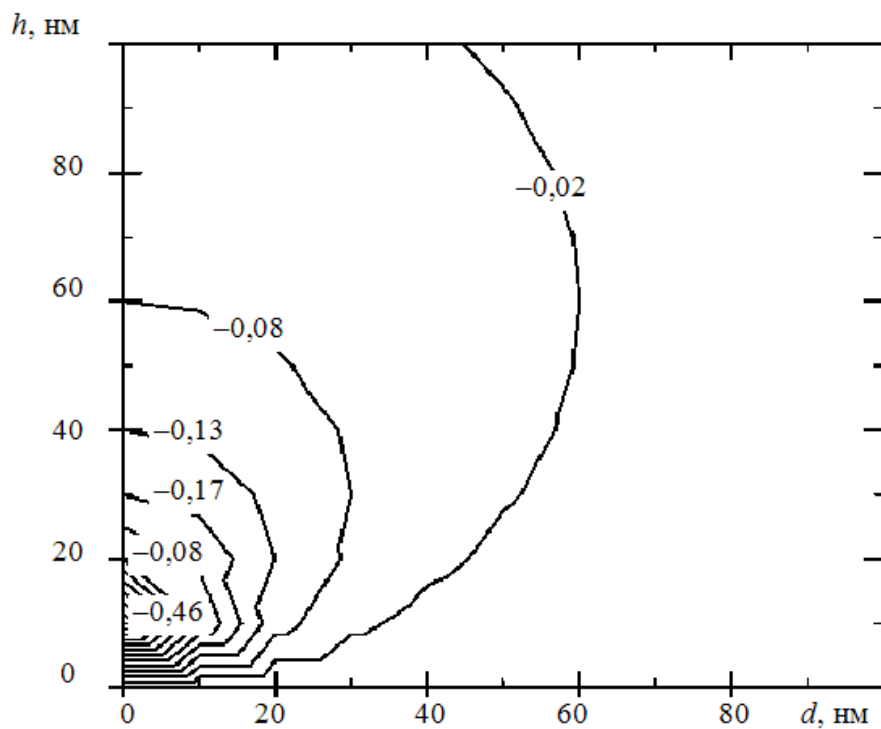


Рис. 4.28. Распределение $\frac{\varepsilon_{xz}(d, h)}{\Delta}$

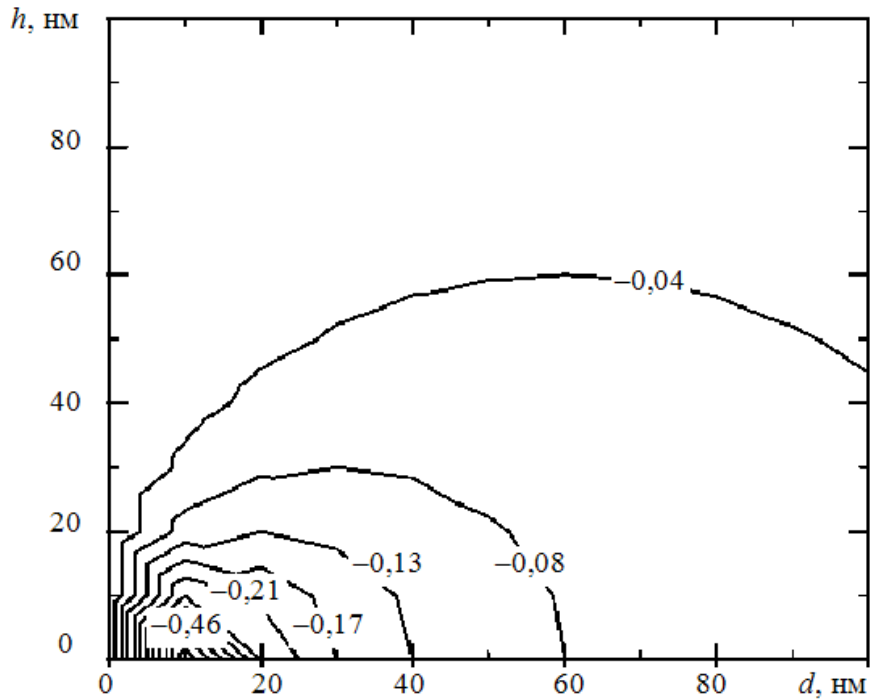


Рис. 4.29. Распределение $\frac{\varepsilon_{yz}(d, h)}{\Sigma}$

4.1.6. Методика расчета внутренних напряжений у клиновидного нанодвойника при неравном количестве двойникующих дислокаций на границах

Рассмотренная ранее ситуация, когда на двойниковых границах находится одинаковое количество двойникующих дислокаций, на практике встречается крайне редко. Как правило, число двойникующих дислокаций на противоположных границах клиновидного двойника различно. Это связано с тем, что скорость генерации двойникующих дислокаций на разных двойниковых границах меняется из-за отличий условий генерирования дислокаций в различных точках деформируемого твердого тела. В этом случае расстояние между двойникующими дислокациями, находящимися на противоположных двойниковых границах, не будет одинаковым. Зададим его проекциями отрезков, соединяющих две соседние дислокации, как d_1 и d_2 (проекции на ось OX), h_1 и h_2 (проекции на ось OY). Индексы 1 и 2 относятся к первой или второй двойниковой границе соответственно. В результате соотношение (4.2) примет вид [340]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sum_n \sigma_{ij}^{OA}(x - nd_1, y + nh_1) + \sum_m \sigma_{ij}^{OB}(x - md_2, y - mh_2).$$

Из данного соотношения получим [377]:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(y + nh_1) \left[3(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2 \right]}{\left[(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2 \right]^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^M \frac{(y - mh_2) \left[3(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2 \right]}{\left[(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2 \right]^2} \right\};$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(y + nh_1) \left[(x - nd_1)^2 - (y + nh_1)^2 \right]}{\left[(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2 \right]^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^M \frac{(y - mh_2) \left[(x - md_2)^2 - (y - mh_2)^2 \right]}{\left[(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2 \right]^2} \right\};$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{(x - md_2) \left[(x - md_2)^2 - (y - mh_2)^2 \right]}{\left[(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2 \right]^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^N \frac{(x - nd_1) \left[(x - nd_1)^2 - (y + nh_1)^2 \right]}{\left[(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2 \right]^2} \right\};$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{y + nh_1}{(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^M \frac{y - mh_2}{(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2} \Bigg\}; \\
\sigma_{xz}(x, y) = & -\frac{\mu b_B}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{y + nh_1}{(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^M \frac{y - mh_2}{(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2} \right\}; \\
\sigma_{yz}(x, y) = & \frac{\mu b_B}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{x - nd_1}{(x - nd_1)^2 + (y + nh_1)^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^M \frac{x - md_2}{(x - md_2)^2 + (y - mh_2)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь должно выполняться условие $h_1 = h_2 = a$, где a – межатомное расстояние в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования.

4.2. Условие равновесия нанодвойника клиновидной формы

Как и ранее, решение задачи будем рассматривать как суперпозицию решений двух задач для краевого и винтового двойников [43], [51]. Начнем с рассмотрения краевого нанодвойника (результаты получены совместно с Ю. В. Василевичем [386]).

На рис. 4.30 представлено схематическое изображение клиновидного нанодвойника с произвольным расположением двойникующих дислокаций на двойниковых границах. Построение схемы на рис. 4.30 аналогично подходам, использованным в [43]. При этом линии двойникующих дислокаций прямолинейны, бесконечны и параллельны друг другу и оси OZ , перпендикулярной плоскости рис. 4.30. Такой подход широко используется в [43], [108]–[111], [143], [145], [146], [152], [387], [388] для моделирования нанозерен и двойников, имею-

щих конечные размеры вдоль оси OZ . Это связано с тем, что в большинстве случаев решается плоская задача, когда поля напряжений и связанные с ними силовые поля рассматриваются только в плоскости XOY . При этом полагается, что отрезки дислокаций, находящиеся вблизи плоскости XOY , имеют малую кривизну либо двойник симметричен относительно данной плоскости, что способствует малым погрешностям расчетов полей напряжений в рассматриваемой плоскости.

Пусть краевая составляющая вектора Бюргера двойникующих дислокаций $b_{кр}$ краевого нанодвойника направлена вдоль оси OX (см. рис. 4.30). Очевидно, что двойник образован двумя типами дислокаций, отличающихся своим знаком [26]. Пусть дислокации обратного знака вместе с концентратором напряжений, благодаря которому образовался нанодвойник, находятся у его устья. В настоящей работе не будем рассматривать данные источники напряжений либо будем считать их роль незначительной. Ограничимся рассмотрением только двойникующих дислокаций двойниковых границ.

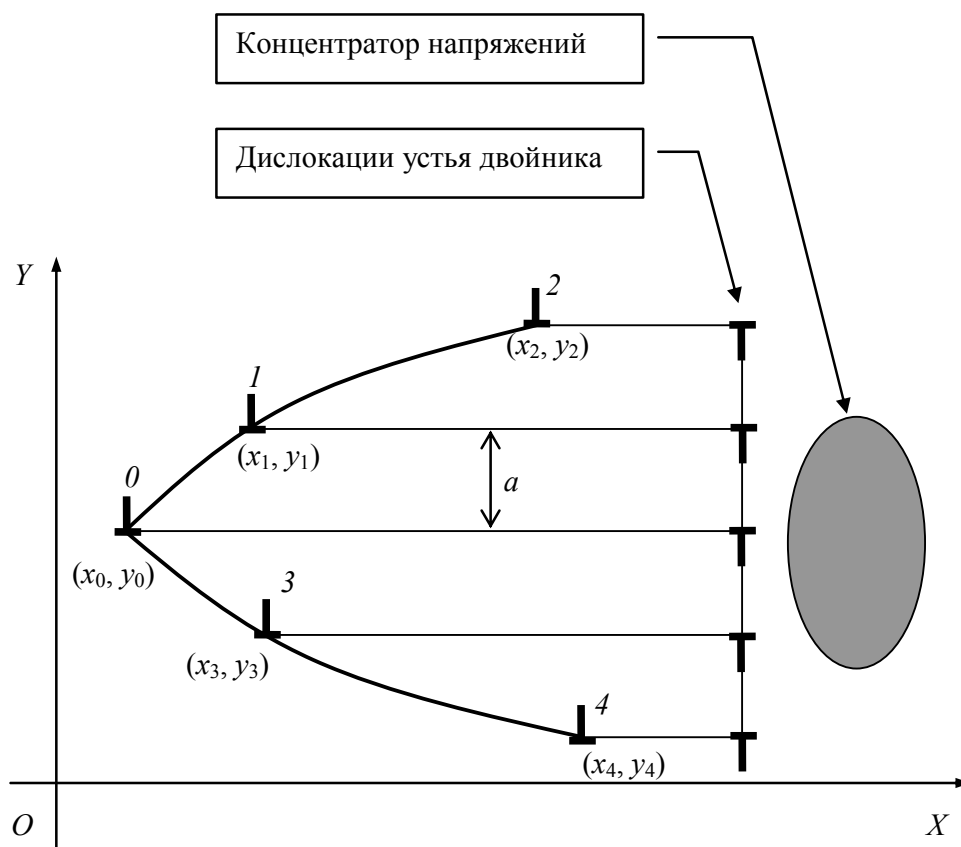


Рис. 4.30. Схематическое изображение системы «клиновидный нанодвойник – дислокации устья и концентратор напряжений» при произвольном расположении дислокаций на двойниковых границах

Координаты каждой двойнивающей дислокации зададим как (x_i, y_i) , где i изменяется от нуля до N . Для уменьшения громоздкости вычислений примем $N = 4$. Тогда количество двойнивающих дислокаций, образующих двойник, равно пяти.

Разрабатываемая в данной работе модель клиновидного двойника в ряде работ [338], [356], [358], [360]–[364], [370], [379], [381] названа мезоскопической. Это связано с использованием в ней промежуточного масштабного уровня, находящегося между атомным и макроскопическим уровнями абстрагирования. Так как рассматриваемые на этом масштабном уровне двойники имеют длину, как правило, не превышающую несколько сотен нанометров, то альтернативным названием разрабатываемой модели можно считать название наномасштабной модели.

При произвольном распределении дислокаций на границах двойника (см. рис. 4.30) каждая дислокация создает поле сдвиговых напряжений, в общем случае определяемое по формулам [386]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(0)} &= \sigma_{xy}^{(0)}(x - x_0, y - y_0), \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)}(x - x_1, y - y_1), \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= \sigma_{xy}^{(2)}(x - x_2, y - y_2), \quad \sigma_{xy}^{(3)} = \sigma_{xy}^{(3)}(x - x_3, y - y_3), \\ \sigma_{xy}^{(4)} &= \sigma_{xy}^{(4)}(x - x_4, y - y_4),\end{aligned}\tag{4.14}$$

где $\sigma_{xy}^{(i)} = \sigma_{xy}^{(i)}(x - x_i, y - y_i)$ – сдвиговая компонента тензора напряжений, создаваемых i -й дислокацией нанодвойника.

Для нахождения нанодвойника в равновесии необходимо [23], чтобы силы, действующие на каждую двойнивающую дислокацию со стороны других дислокаций, были равны нулю, т. е.:

$$\begin{aligned}F_0 &= b_{\text{кр}} \left(\sigma_{xy}^{(1)}(x_0 - x_1, y_0 - y_1) + \sigma_{xy}^{(2)}(x_0 - x_2, y_0 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^{(3)}(x_0 - x_3, y_0 - y_3) + \sigma_{xy}^{(4)}(x_0 - x_4, y_0 - y_4) \right) = 0, \\ F_1 &= b_{\text{кр}} \left(\sigma_{xy}^{(0)}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) + \sigma_{xy}^{(2)}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^{(3)}(x_1 - x_3, y_1 - y_3) + \sigma_{xy}^{(4)}(x_1 - x_4, y_1 - y_4) \right) = 0, \\ F_2 &= b_{\text{кр}} \left(\sigma_{xy}^{(0)}(x_2 - x_0, y_2 - y_0) + \sigma_{xy}^{(1)}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^{(3)}(x_2 - x_3, y_2 - y_3) + \sigma_{xy}^{(4)}(x_2 - x_4, y_2 - y_4) \right) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= b_{\text{кр}} \left(\sigma_{xy}^{(0)}(x_3 - x_0, y_3 - y_0) + \sigma_{xy}^{(1)}(x_3 - x_1, y_3 - y_1) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{xy}^{(2)}(x_3 - x_2, y_3 - y_2) + \sigma_{xy}^{(4)}(x_3 - x_4, y_3 - y_4) \right) = 0, \\
F_4 &= b_{\text{кр}} \left(\sigma_{xy}^{(0)}(x_4 - x_0, y_4 - y_0) + \sigma_{xy}^{(1)}(x_4 - x_1, y_4 - y_1) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{xy}^{(2)}(x_4 - x_2, y_4 - y_2) + \sigma_{xy}^{(3)}(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \right) = 0, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

где F_i – сила, действующая на i -ю двойникующую дислокацию со стороны остальных дислокаций нанодвойника.

Выше рассматривалась только сдвиговая компонента тензора напряжений, так как, согласно [23], проекция силы F_i на ось OX определяется по формуле (2.18) которая также может быть представлена в виде

$$F_x = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4.16)$$

Рассмотрение проекции силы F_i на ось OY (т. е. F_y) нецелесообразно, так как каждая двойникующая дислокация перемещается только в своей плоскости двойникования вдоль оси OX , а вдоль оси OY движение рассматриваемых дислокаций не осуществляется.

Полагая далее $F_i = (F_i)_x$ и учитывая (4.16), из (4.15) получим:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(x_0 - x_1) \left((x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2 \right)}{\left((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x_0 - x_4) \left((x_0 - x_4)^2 - (y_0 - y_4)^2 \right)}{\left((x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2 \right)^2} \right\} = 0, \\
F_1 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(x_1 - x_0) \left((x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 \right)}{\left((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right)^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x_1 - x_2)\left((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right)}{\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)^2} + \frac{(x_1 - x_3)\left((x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2\right)}{\left((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2\right)^2} + \\
& \left. + \frac{(x_1 - x_4)\left((x_1 - x_4)^2 - (y_1 - y_4)^2\right)}{\left((x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2\right)^2} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} & \left\{ \frac{(x_2 - x_0)\left((x_2 - x_0)^2 - (y_2 - y_0)^2\right)}{\left((x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2\right)^2} + \right. \\
& + \frac{(x_2 - x_1)\left((x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2\right)}{\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right)^2} + \frac{(x_2 - x_3)\left((x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2\right)}{\left((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\right)^2} + \\
& \left. + \frac{(x_2 - x_4)\left((x_2 - x_4)^2 - (y_2 - y_4)^2\right)}{\left((x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2\right)^2} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} & \left\{ \frac{(x_3 - x_0)\left((x_3 - x_0)^2 - (y_3 - y_0)^2\right)}{\left((x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2\right)^2} + \right. \\
& + \frac{(x_3 - x_1)\left((x_3 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)^2\right)}{\left((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right)^2} + \frac{(x_3 - x_2)\left((x_3 - x_2)^2 - (y_3 - y_2)^2\right)}{\left((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\right)^2} + \\
& \left. + \frac{(x_3 - x_4)\left((x_3 - x_4)^2 - (y_3 - y_4)^2\right)}{\left((x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2\right)^2} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} & \left\{ \frac{(x_4 - x_0)\left((x_4 - x_0)^2 - (y_4 - y_0)^2\right)}{\left((x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2\right)^2} + \right. \\
& + \frac{(x_4 - x_1)\left((x_4 - x_1)^2 - (y_4 - y_1)^2\right)}{\left((x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2\right)^2} + \frac{(x_4 - x_2)\left((x_4 - x_2)^2 - (y_4 - y_2)^2\right)}{\left((x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2\right)^2} + \\
& \left. + \frac{(x_4 - x_3)\left((x_4 - x_3)^2 - (y_4 - y_3)^2\right)}{\left((x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2\right)^2} \right\} = 0. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
a_{01} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_1)\left((x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2\right)}{\left((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\right)^2}, \\
a_{02} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_2)\left((x_0 - x_2)^2 - (y_0 - y_2)^2\right)}{\left((x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2\right)^2}, \\
a_{03} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_3)\left((x_0 - x_3)^2 - (y_0 - y_3)^2\right)}{\left((x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2\right)^2}, \\
a_{04} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_4)\left((x_0 - x_4)^2 - (y_0 - y_4)^2\right)}{\left((x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2\right)^2}, \\
a_{12} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_1 - x_2)\left((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right)}{\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)^2},
\end{aligned}$$

$$a_{13} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_1 - x_3) \left((x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2 \right)}{\left((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \right)^2},$$

$$a_{14} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_1 - x_4) \left((x_1 - x_4)^2 - (y_1 - y_4)^2 \right)}{\left((x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 \right)^2},$$

$$a_{23} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_2 - x_3) \left((x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \right)}{\left((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right)^2},$$

$$a_{24} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_2 - x_4) \left((x_2 - x_4)^2 - (y_2 - y_4)^2 \right)}{\left((x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 \right)^2},$$

$$a_{34} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_3 - x_4) \left((x_3 - x_4)^2 - (y_3 - y_4)^2 \right)}{\left((x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 \right)^2},$$

$$a_{10} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_1 - x_0) \left((x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 \right)}{\left((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right)^2},$$

$$a_{20} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_2 - x_0) \left((x_2 - x_0)^2 - (y_2 - y_0)^2 \right)}{\left((x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 \right)^2},$$

$$a_{30} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_3 - x_0) \left((x_3 - x_0)^2 - (y_3 - y_0)^2 \right)}{\left((x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 \right)^2},$$

$$a_{40} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_4 - x_0) \left((x_4 - x_0)^2 - (y_4 - y_0)^2 \right)}{\left((x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2 \right)^2},$$

$$a_{21} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_2 - x_1) \left((x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 \right)}{\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right)^2},$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_3 - x_1)((x_3 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)^2)}{\left((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right)^2}, \\
a_{41} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_4 - x_1)((x_4 - x_1)^2 - (y_4 - y_1)^2)}{\left((x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2\right)^2}, \\
a_{32} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_3 - x_2)((x_3 - x_2)^2 - (y_3 - y_2)^2)}{\left((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\right)^2}, \\
a_{42} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_4 - x_2)((x_4 - x_2)^2 - (y_4 - y_2)^2)}{\left((x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2\right)^2}, \\
a_{43} &= \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_4 - x_3)((x_4 - x_3)^2 - (y_4 - y_3)^2)}{\left((x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2\right)^2}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Это позволяет из (4.17) получить систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}
a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{04} = 0; \\
a_{10} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 0; \\
a_{20} + a_{21} + a_{23} + a_{24} = 0; \\
a_{30} + a_{31} + a_{32} + a_{34} = 0; \\
a_{40} + a_{41} + a_{42} + a_{43} = 0,
\end{cases} \tag{4.19}$$

в которой

$$\begin{aligned}
a_{01} &= -a_{10}, \quad a_{02} = -a_{20}, \quad a_{03} = -a_{30}, \quad a_{04} = -a_{40}, \\
a_{12} &= -a_{21}, \quad a_{13} = -a_{31}, \quad a_{14} = -a_{41}, \quad a_{23} = -a_{32}, \\
a_{24} &= -a_{42}, \quad a_{34} = -a_{43}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Учитывая (4.20), из (4.19) получаем:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{04} = 0; \\ a_{01} - a_{12} - a_{13} - a_{14} = 0; \\ a_{02} + a_{12} - a_{23} - a_{24} = 0; \\ a_{03} + a_{13} + a_{23} - a_{34} = 0; \\ a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34} = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

В данной системе неизвестных больше, чем входящих в нее уравнений. Это делает систему (4.21) неразрешимой без использования дополнительных условий и допущений. В качестве такого допущения примем дислокации 1 и 3, 2 и 4 расположенными соответственно в одних и тех же плоскостях, перпендикулярных плоскости XOY . Параллельные оси OY следы таких плоскостей на рис. 4.31 показаны пунктирными линиями.

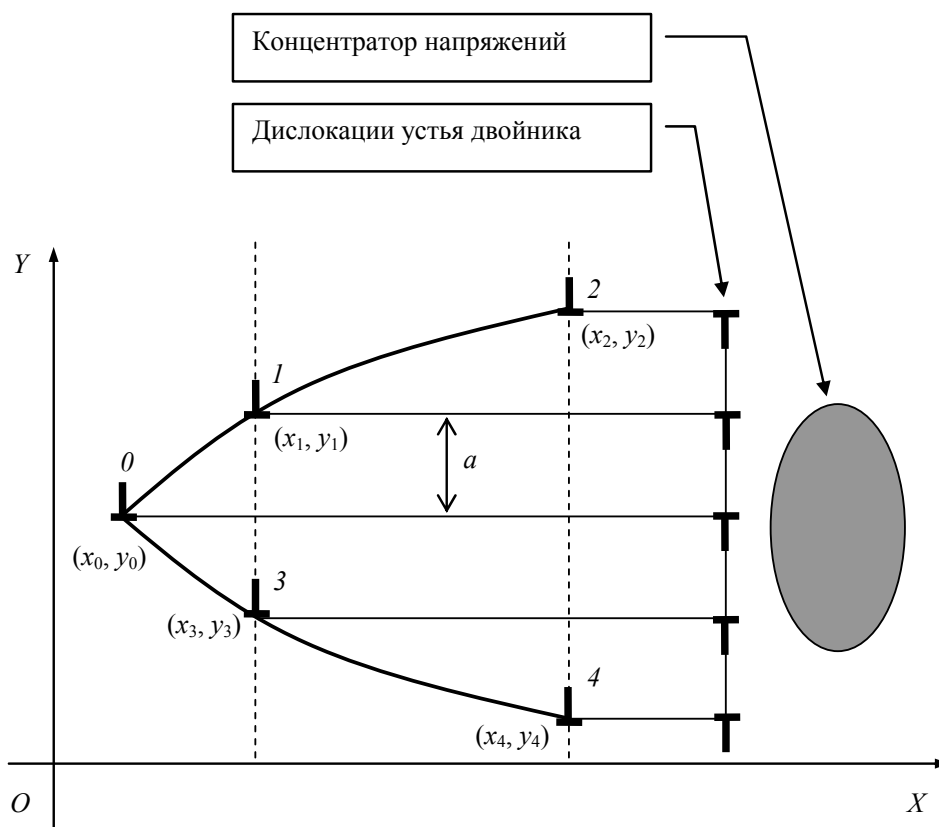


Рис. 4.31. Схематическое изображение системы «клиновидный нанодвойник – дислокации устья и концентратор напряжений» при расположении дислокаций на двойниковых границах парами в плоскостях, следы которых в плоскости XOY параллельны оси OY

Тогда с учетом того, что

$$\begin{aligned}
 |y_0 - y_1| &= |y_1 - y_0| = |y_0 - y_3| = |y_3 - y_0| = a, \\
 |y_1 - y_2| &= |y_2 - y_1| = |y_3 - y_4| = |y_4 - y_3| = a, \\
 |y_0 - y_2| &= |y_2 - y_0| = |y_0 - y_4| = |y_4 - y_0| = 2a, \\
 |y_1 - y_3| &= |y_3 - y_1| = 2a, \\
 |y_1 - y_4| &= |y_4 - y_1| = |y_2 - y_3| = |y_3 - y_2| = 3a, \\
 |y_2 - y_4| &= |y_4 - y_2| = 4a,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

можно записать

$$a_{01} = a_{03}, \quad a_{02} = a_{04}, \quad a_{12} = a_{34}, \quad a_{14} = a_{23}. \tag{4.23}$$

Тогда система (4.21) примет вид:

$$\begin{cases}
 a_{01} + a_{02} + a_{01} + a_{02} = 0; \\
 a_{01} - a_{12} - a_{13} - a_{14} = 0; \\
 a_{02} + a_{12} - a_{14} - a_{24} = 0; \\
 a_{01} + a_{13} + a_{14} - a_{12} = 0; \\
 a_{02} + a_{14} + a_{24} + a_{12} = 0.
 \end{cases} \tag{4.24}$$

С учетом (4.20) дальнейшие преобразования (4.24) приведут к системе

$$\begin{cases}
 a_{01} + a_{02} = 0; \\
 a_{01} - a_{12} = 0; \\
 a_{02} + a_{12} = 0,
 \end{cases} \tag{4.25}$$

в которой три неизвестных и столько же уравнений, причем, учитывая (4.22):

$$a_{01} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_1) \left((x_0 - x_1)^2 - a^2 \right)}{\left((x_0 - x_1)^2 + a^2 \right)^2},$$

$$a_{02} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_0 - x_2)((x_0 - x_2)^2 - 4a^2)}{\left((x_0 - x_2)^2 + 4a^2\right)^2},$$

$$a_{12} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^2}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x_1 - x_2)((x_1 - x_2)^2 - a^2)}{\left((x_1 - x_2)^2 + a^2\right)^2}. \quad (4.26)$$

Заметим, что в (4.26)

$$x_0 - x_2 = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2). \quad (4.27)$$

Введем обозначения:

$$d_{01} = x_0 - x_1, \quad d_{02} = x_0 - x_2, \quad d_{12} = x_1 - x_2. \quad (4.28)$$

Тогда (4.27) примет вид:

$$d_{02} = d_{01} + d_{12}. \quad (4.29)$$

Подставляя (4.26) в (4.25) и используя обозначения (4.28), получим:

$$\begin{cases} \frac{d_{01}(d_{01}^2 - a^2)}{(d_{01}^2 + a^2)^2} + \frac{d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)}{(d_{02}^2 + 4a^2)^2} = 0; \\ \frac{d_{01}(d_{01}^2 - a^2)}{(d_{01}^2 + a^2)^2} - \frac{d_{12}(d_{12}^2 - a^2)}{(d_{12}^2 + a^2)^2} = 0; \\ \frac{d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)}{(d_{02}^2 + 4a^2)^2} + \frac{d_{12}(d_{12}^2 - a^2)}{(d_{12}^2 + a^2)^2} = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Отсюда очевидно следует:

$$d_{01}^2 + a^2 \neq 0, \quad d_{02}^2 + 4a^2 \neq 0, \quad d_{12}^2 + a^2 \neq 0. \quad (4.31)$$

Система (4.20) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} d_{01}(d_{01}^2 - a^2)(d_{02}^2 + 4a^2)^2 + d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)(d_{01}^2 + a^2)^2 = 0; \\ d_{01}(d_{01}^2 - a^2)(d_{12}^2 + a^2)^2 - d_{12}(d_{12}^2 - a^2)(d_{01}^2 + a^2)^2 = 0; \\ d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)(d_{12}^2 + a^2)^2 + d_{12}(d_{12}^2 - a^2)(d_{02}^2 + 4a^2)^2 = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Из второго уравнения системы (4.32) следует:

$$\frac{d_{01}(d_{01}^2 - a^2)}{(d_{01}^2 + a^2)^2} = \frac{d_{12}(d_{12}^2 - a^2)}{(d_{12}^2 + a^2)^2}. \quad (4.33)$$

Отсюда $d_{01} = d_{12}$. Тогда

$$d_{02} = 2d_{01} = 2d_{12}. \quad (4.34)$$

Используя (4.34), первое уравнение в (4.32) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & d_{01}(d_{01}^2 - a^2)(d_{02}^2 + 4a^2)^2 + d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)(d_{01}^2 + a^2)^2 = \\ & = d_{01}(d_{01}^2 - a^2)(4d_{01}^2 + 4a^2)^2 + 2d_{01}(4d_{01}^2 - 4a^2)(d_{01}^2 + a^2)^2 = \\ & = 24d_{01}(d_{01}^2 - a^2)(d_{01}^2 + a^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Отсюда получаем два имеющих физический смысл решения:

$$d_{01} = 0, \quad d_{01} = a. \quad (4.36)$$

С использованием условия (4.34) третье уравнение в (4.32) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} & d_{02}(d_{02}^2 - 4a^2)(d_{12}^2 + a^2)^2 + d_{12}(d_{12}^2 - a^2)(d_{02}^2 + 4a^2)^2 = \\ & = 2d_{12}(4d_{12}^2 - 4a^2)(d_{12}^2 + a^2)^2 + d_{12}(d_{12}^2 - a^2)(4d_{12}^2 + 4a^2)^2 = \\ & = 8d_{12}(d_{12}^2 - a^2)(d_{12}^2 + a^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Отсюда:

$$d_{12} = 0, \quad d_{12} = a. \quad (4.38)$$

Далее, подставляя (4.38) в (4.34), получим:

$$d_{02} = 0, \quad d_{02} = 2a. \quad (4.39)$$

Так как пары двойникующих дислокаций на противоположных границах нанодвойника по условию задачи находятся в одной плоскости (см. рис. 4.31), то

$$d_{03} = d_{01}, \quad d_{04} = d_{02}, \quad d_{34} = d_{12} \quad (4.40)$$

и

$$d_{03} = 0, d_{03} = a; d_{04} = 0, d_{04} = 2a; d_{34} = 0, d_{34} = a. \quad (4.41)$$

Очевидно, что

$$d_{14} = d_{23} = d_{12}, \quad (4.42)$$

и в равновесии

$$d_{14} = 0, d_{23} = 0 \text{ или } d_{14} = a, d_{23} = a. \quad (4.43)$$

Полученные результаты указывают на то, что в идеальном кристалле после снятия нагрузки возможно два варианта равновесной формы краевого клиновидного нанодвойника. В первом случае в плоскости двойникования расстояние между двойникующими дислокациями стремится к нулю. При этом в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования, расстояние между соседними двойникующими дислокациями равно межплоскостному расстоянию. В этом случае равновесия двойникующие дислокации выстраиваются в стенку и существование нанодвойника проблематично из-за аннигиляции двойникующих дислокаций границ двойника с имеющими противоположный знак дислокациями устья нанодвойника и связанного с этим процессом исчезновения нанодвойника.

Во втором случае для равновесия нанодвойника требуется, чтобы расстояние между соседними двойникующими дислокациями на его границах в плоскости двойникования равнялось межплоскостному расстоянию. Известно [23], что такое равновесие групп дислокаций является неустойчивым. Для обеспечения устойчивости в этом случае необходимо достаточное для фиксации дислокаций высокое значение сил неупругой природы, оказывающих сопротивление движению двойникующих дислокаций. Обеспечить равновесие такого нанодвойника могут и поля внутренних напряжений от источников, находящихся, например, у устья нанодвойника.

Рассмотрим винтовой нанодвойник, состоящий только из винтовых дислокаций [43], [51]. Как и ранее для уменьшения объема математических соотношений выберем минимальное число двойникующих дислокаций, образующих нанодвойник. Пусть это число будет равно пяти.

В процессе развития двойника каждая его двойникующая дислокация перемещается только в одной плоскости. Следы этих плоскостей на рис. 4.30 параллельны оси OX , а сами плоскости, в которых

осуществляется движение двойникующих дислокаций, перпендикулярны плоскости XOY (см. рис. 4.30). Поэтому при решении поставленной задачи не будем рассматривать составляющую силы взаимодействия двойникующих дислокаций, направленную вдоль оси OY , ввиду отсутствия перемещения дислокаций в этом направлении. Тогда составляющая этой силы, направленная вдоль оси OX , согласно [23], может быть найдена из соотношения (2.57), где σ_{yz} – сдвиговые напряжения, создаваемые всеми двойникующими дислокациями, за исключением дислокации, по отношению к которой рассматривается действие сил, обусловленных этими напряжениями.

Каждая из пяти рассматриваемых двойникующих дислокаций границ нанодвойника, находящаяся в точке с координатами (x_i, y_i) , создает поле сдвиговых напряжений, которое можно задать функциями [386]:

$$\begin{aligned}\sigma_{zy}^{(0)} &= \sigma_{zy}^{(0)}(x - x_0, y - y_0), \quad \sigma_{zy}^{(1)} = \sigma_{zy}^{(1)}(x - x_1, y - y_1), \\ \sigma_{zy}^{(2)} &= \sigma_{zy}^{(2)}(x - x_2, y - y_2), \quad \sigma_{zy}^{(3)} = \sigma_{zy}^{(3)}(x - x_3, y - y_3), \\ \sigma_{zy}^{(4)} &= \sigma_{zy}^{(4)}(x - x_4, y - y_4).\end{aligned}\tag{4.44}$$

Действующая на i -ю двойникующую дислокацию вдоль оси OX составляющая силы, обусловленная этими напряжениями, может быть найдена из соотношений:

$$\begin{aligned}F_0 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(1)}(x_0 - x_1, y_0 - y_1) + \sigma_{zy}^{(2)}(x_0 - x_2, y_0 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_0 - x_3, y_0 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_0 - x_4, y_0 - y_4) \right) = 0, \\ F_1 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) + \sigma_{zy}^{(2)}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_1 - x_3, y_1 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_1 - x_4, y_1 - y_4) \right) = 0, \\ F_2 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_2 - x_0, y_2 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_2 - x_3, y_2 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_2 - x_4, y_2 - y_4) \right) = 0, \\ F_3 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_3 - x_0, y_3 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_3 - x_1, y_3 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(2)}(x_3 - x_2, y_3 - y_2) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_3 - x_4, y_3 - y_4) \right) = 0,\end{aligned}$$

$$F_4 = b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_4 - x_0, y_4 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_4 - x_1, y_4 - y_1) + \right. \\ \left. + \sigma_{zy}^{(2)}(x_4 - x_2, y_4 - y_2) + \sigma_{zy}^{(3)}(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \right) = 0. \quad (4.45)$$

Учитывая, что (2.57) может быть представлена в виде [23]:

$$F_x = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (4.46)$$

соотношения (4.45) можно представить в виде:

$$F_0 = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} + \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} + \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2} \right\} = 0,$$

$$F_1 = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \right\} = 0,$$

$$F_2 = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_2 - x_0}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} + \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2} \right\} = 0,$$

$$F_3 = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_3 - x_0}{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} + \frac{x_3 - x_1}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_3 - x_2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} \right\} = 0,$$

$$F_4 = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_4 - x_0}{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2} + \frac{x_4 - x_1}{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} + \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \right\} = 0,$$

$$\left. + \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} + \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \right\} = 0. \quad (4.47)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}, & c_{02} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}, \\ c_{03} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}, & c_{04} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2}, \\ c_{10} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}, & c_{12} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ c_{13} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}, & c_{14} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}, \\ c_{20} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_0}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}, & c_{21} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ c_{23} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, & c_{24} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}, \\ c_{30} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_0}{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2}, & c_{31} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_1}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \\ c_{32} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}, & c_{34} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}, \\ c_{40} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_0}{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2}, & c_{41} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_1}{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}, \\ c_{42} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}, & c_{43} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Из (4.48) очевидно, что

$$\begin{aligned} c_{01} &= -c_{10}, & c_{02} &= -c_{20}, & c_{03} &= -c_{30}, & c_{04} &= -c_{40}, & c_{12} &= -c_{21}, \\ c_{13} &= -c_{31}, & c_{14} &= -c_{41}, & c_{23} &= -c_{32}, & c_{24} &= -c_{42}, & c_{34} &= -c_{43}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Принятые обозначения (4.48) позволяют преобразовать (4.47) в систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{04} = 0; \\ c_{10} + c_{12} + c_{13} + c_{14} = 0; \\ c_{20} + c_{21} + c_{23} + c_{24} = 0; \\ c_{30} + c_{31} + c_{32} + c_{34} = 0; \\ c_{40} + c_{41} + c_{42} + c_{43} = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

которая с учетом (4.49) преобразуется в систему

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{04} = 0; \\ c_{01} - c_{12} - c_{13} - c_{14} = 0; \\ c_{02} + c_{12} - c_{23} - c_{24} = 0; \\ c_{03} + c_{13} + c_{23} - c_{34} = 0; \\ c_{04} + c_{14} + c_{24} + c_{34} = 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

Как видно, в данной системе уравнений больше, чем неизвестных. Ввиду этого система (4.51) без дополнительных условий неразрешима. В связи с этим, как и в случае краевого двойника, примем, что у каждой двойнивающей дислокации на одной границе нанодвойника имеется парная дислокация на его другой границе. Эти парные дислокации находятся в одной плоскости, перпендикулярной плоскости XOY . На рис. 4.31 следы этих плоскостей в плоскости XOY показаны пунктирными линиями. Таким образом, пусть в одной плоскости находятся дислокации 1 и 3, 2 и 4, соответственно (см. рис. 4.31). Тогда из (4.48) следует, что

$$c_{01} = c_{03}, \quad c_{02} = c_{04}, \quad c_{12} = c_{34}, \quad c_{14} = c_{23}. \quad (4.52)$$

Здесь учтено (4.22) и в силу принятых допущений (4.51) сводится к системе

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} = 0; \\ c_{01} - c_{12} = 0; \\ c_{02} + c_{12} = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

Следует отметить, что в (4.53) количество уравнений равно количеству неизвестных.

Принимая во внимание (4.22), можно записать:

$$\begin{aligned}
c_{01} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + a^2}, \\
c_{02} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + a^2}, \\
c_{12} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + a^2}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Пусть

$$d_{01} = x_0 - x_1, \quad d_{02} = x_0 - x_2, \quad d_{12} = x_1 - x_2. \tag{4.55}$$

Тогда (4.53) с учетом (4.54) и (4.55) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} + \frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} &= 0; \\
\frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} - \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} &= 0; \\
\frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} + \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} &= 0.
\end{aligned} \right. \tag{4.56}$$

Преобразования (4.56) дают:

$$\left\{ \begin{aligned}
d_{01}(d_{02}^2 + 4a^2) + d_{02}(d_{01}^2 + a^2) &= 0; \\
d_{01}(d_{12}^2 + a^2) - d_{12}(d_{01}^2 + a^2) &= 0; \\
d_{02}(d_{12}^2 + a^2) + d_{12}(d_{02}^2 + 4a^2) &= 0.
\end{aligned} \right. \tag{4.57}$$

Очевидно, что

$$d_{01}^2 + a^2 \neq 0, \quad d_{02}^2 + 4a^2 \neq 0, \quad d_{12}^2 + a^2 \neq 0. \tag{4.58}$$

Из (4.56) следует, что

$$\frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} = \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2}. \tag{4.59}$$

Выполнение этого условия возможно, когда

$$d_{01} = d_{12}. \tag{4.60}$$

Из рис. 4.31 следует, что

$$x_0 - x_2 = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2). \quad (4.61)$$

Принимая во внимание (4.55), (4.61) можно представить в виде:

$$d_{02} = d_{01} + d_{12}. \quad (4.62)$$

Из (4.60) и (4.62) следует, что

$$d_{02} = 2d_{01} = 2d_{12}. \quad (4.63)$$

Тогда первое уравнение в (4.57) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{01} (d_{02}^2 + 4a^2) + d_{02} (d_{01}^2 + a^2) &= d_{01} (4d_{01}^2 + 4a^2) + 2d_{01} (d_{01}^2 + a^2) = \\ &= 6d_{01} (d_{01}^2 + a^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Учитывая (4.58), из (4.64) получаем одно имеющее физический смысл решение уравнения:

$$d_{01} = 0. \quad (4.65)$$

Из (4.63) и (4.64) следует, что и

$$d_{02} = 0, \quad d_{12} = 0. \quad (4.66)$$

Из построения рис. 4.31 очевидно следует:

$$d_{03} = d_{01}, \quad d_{04} = d_{02}, \quad d_{14} = d_{23} = d_{34} = d_{12}. \quad (4.67)$$

Тогда для равновесия винтового нанодвойника также должно выполняться

$$d_{03} = d_{04} = d_{14} = d_{23} = d_{34} = 0. \quad (4.68)$$

Решения (4.65), (4.66) и (4.68) задачи о равновесии винтового нанодвойника говорят о том, что равновесие такого двойника возможно, когда дислокации двойниковых границ выстраиваются в стенку. Известно [23], что такое равновесие для винтовых дислокаций не является устойчивым. Таким образом, существование остаточного двойника после снятия нагрузки на кристалл возможно только при достаточной величине сил неупругой природы, тормозящих перемещение двойникоующих дислокаций [386]. Согласно [150] такие силы создают полные и сидячие дислокации у двойниковых границ, в том

числе и дислокации, сгенерированные самими двойниковыми границами в ходе дислокационных реакций.

4.3. Дислокационная модель развивающегося нанодвойника

В качестве исходных данных для решения задачи по расчету напряжений у развивающегося клиновидного нанодвойника в рамках дислокационной модели двойника, будем использовать известные соотношения для расчета полей напряжений у движущейся дислокации, приведенные, например, в монографии Дж. Хирта и И. Лоте [26]. Уравнения равновесия для компонент вектора смещения движущейся винтовой дислокации имеют вид:

$$\rho_{\text{ср}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (4.69)$$

где $\rho_{\text{ср}}$ – плотность среды. В векторных обозначениях эти уравнения имеют вид [26]:

$$\rho_{\text{ср}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \vec{u}). \quad (4.70)$$

Для винтовой составляющей двойнивающей дислокации $u_i = (0, 0, u_z)$. Тогда уравнение (4.69) может быть представлено в форме [1], [26]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z = \frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (4.71)$$

Используя преобразования [26]:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c_t^2)^{1/2}}; \\ y' = y; \\ z' = z; \\ t' = \frac{t - vx/c_t^2}{(1 - v^2/c_t^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

где $v = v_z$ – скорость движения дислокации; c_t – скорость распространения поперечной звуковой волны, определяемая по формуле

$$c_t = \left(\frac{\mu}{\rho_{\text{ср}}} \right)^{1/2},$$

нетрудно показать, что уравнение (4.71) дает [26]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) u_z = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t'^2}. \quad (4.72)$$

В случае равномерного движения, когда $v = v_z = \text{const}$, из уравнения (4.72) получаем [26]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) u_z = 0.$$

Используя граничные условия [26]:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ x' > 0}} u_z(x', \varepsilon) - u_z(x', -\varepsilon) = -b_B,$$

где ε – положительно, получим [26], [27]:

$$u_z(x, y, t) = \frac{b_B}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'},$$

или в координатах x, y, z :

$$u_z(x, y, t) = \frac{b_B}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\gamma_t y}{x - vt},$$

где

$$\gamma_t = \left(1 - \frac{v^2}{c_t^2} \right)^{1/2}.$$

Окончательно для напряжений получим [26]:

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\gamma_t y}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2};$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{\gamma_t (x - vt)}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2}.$$

Для учета влияния краевой составляющей двойнивающей дислокации с учетом того, что в этом случае $u_i = (u_x, u_y, 0)$, уравнение (4.70) приводится к виду [26]:

$$\rho_{\text{cp}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\mu (\nabla \times \vec{G}) + (\lambda + 2\mu) \nabla H^*, \quad (4.73)$$

где

$$\vec{G} = G \vec{k} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k};$$

$$H^* = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Уравнение (4.73) может быть преобразовано к виду [26]:

$$\rho_{\text{cp}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G \quad (4.74)$$

и

$$\rho_{\text{cp}} \left(\frac{\partial^2 H^*}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H^*. \quad (4.75)$$

В движущейся системе координат G и H^* должны удовлетворять уравнениям [26]:

$$\nabla_t^2 G = 0, \quad \nabla_l^2 H^* = 0,$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_l^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ x_t = \frac{x - vt}{\gamma_t}; \quad x_l = \frac{x - vt}{\gamma_l}; \\ \gamma_t = \left(1 - \frac{v^2}{c_t^2} \right)^{1/2}; \quad \gamma_l = \left(1 - \frac{v^2}{c_l^2} \right)^{1/2}; \\ c_t = \left(\frac{\mu}{\rho_{\text{cp}}} \right)^{1/2}; \quad c_l = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{cp}}} \right)^{1/2}, \end{array} \right. \quad (4.76)$$

здесь c_l – скорость продольных звуковых волн.

Для покоящейся дислокации [26]:

$$G(x, y) \approx \frac{x}{r^2}, \quad H^*(x, y) \approx \frac{y}{r^2}.$$

Поэтому решение в движущейся системе отсчета, удовлетворяющее уравнениям (4.74) и (4.75), имеет вид [26]:

$$\begin{cases} G(x, y, t) = \frac{\alpha_G x_t}{r_t^2}; H^*(x, y, t) = \frac{\beta_G y}{r_t^2}; \\ r_t^2 = x_t^2 + y^2; \quad \bar{r}_t^2 = x_t^2 + y^2. \end{cases} \quad (4.77)$$

Здесь константы α_G и β_G определяются из соответствующих граничных условий, а константы $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ находятся из следующего из (4.74) и (4.75) уравнения [1], [26]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x = \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Данное уравнение с использованием замены переменных [26]:

$$\begin{cases} \eta = x - iy; \quad x = \frac{\eta + \zeta}{2}; \\ \zeta = x + iy; \quad y = \frac{\zeta - \eta}{2i} \end{cases}$$

преобразуется к виду:

$$4 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (H^* - iG) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H^* + iG).$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$4 \frac{\partial u_x}{\partial \eta} = H^* - iG + \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} (H^* + iG) d\zeta. \quad (4.78)$$

При $\zeta \rightarrow -\infty$ получим $\frac{\partial u_x}{\partial \eta}$. Тогда вещественная часть уравнения (4.78) будет иметь вид [26]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\beta_G y c_l^2}{r_l^2 v^2} - \frac{\alpha_G \gamma_l y c_l^2}{r_l^2 v^2}. \quad (4.79)$$

Мнимая часть уравнения (4.77) есть $\frac{\partial u_x}{\partial y}$. Полученное выражение для $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ и уравнение (4.73) дают [26]:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\alpha_G c_l^2 x_l}{r_l^2 v^2} - \frac{\beta_G c_l^2 \gamma_l x_l}{r_l^2 v^2}. \quad (4.80)$$

Подстановка выражения (4.80) в условие [26]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = \begin{cases} b_{кр}/2, y > 0; \\ -b_{кр}/2, y < 0 \end{cases} \quad (4.81)$$

дает

$$\frac{\pi \beta_G c_l^2 \gamma_l}{v^2} - \frac{\pi \alpha_G c_l^2 \gamma_l^2}{v^2} = \frac{b_{кр}}{2}. \quad (4.82)$$

Подставляя (4.79) и (4.77) в формулу закона Гука, получим [1], [9], [20]:

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\beta_G y}{r_l^2} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

С учетом (4.81) это выражение позволяет представить очевидное условие [26]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy} dx = 0$$

в виде:

$$\left(\lambda - \frac{2\mu \gamma_l^2 c_l^2}{v^2} \right) \gamma_l \beta_G + \frac{2\mu \gamma_l^2 c_l^2}{v^2} \alpha_G = 0. \quad (4.83)$$

Совместное решение уравнений (4.82) и (4.83) дает [23]:

$$\beta_G = \frac{b_{\text{кр}} c_t^2}{\pi \gamma_l c_l^2}; \quad (4.84)$$

$$\alpha_G = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi \gamma_l^2} (1 + \gamma_t^2). \quad (4.85)$$

Таким образом, с учетом (4.73) закон Гука можно записать в виде [1], [26]:

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial u_y}{\partial x} - G \right).$$

Подставляя в данное выражение (4.77), (4.80), (4.84) и (4.85), получим [26], [27]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{\mu b_{\text{кр}} c_t^2}{2\pi v^2} \left[\frac{(1 + \gamma_t^2)^2 x_t}{\gamma_t^2 r_t^2} - \frac{4x_t}{r_t^2} \right] = \\ &= \frac{\mu b_{\text{кр}} c_t^2}{2\pi v^2} \left[\frac{(1 + \gamma_t^2)^2 (x - vt)}{\gamma_t [(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2]} - \frac{4\gamma_l (x - vt)}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично получаем [26], [27]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{b_{\text{кр}} \gamma c_t^2}{\pi v^2} \left[\frac{\gamma_l (\lambda + 2\mu - \gamma_t^2 \lambda)}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2} - \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2)}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{b_{\text{кр}} \gamma c_t^2}{\pi v^2} \left[\frac{\gamma_l (\lambda - \gamma_t^2 (\lambda + 2\mu))}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2} + \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2)}{(x - vt)^2 + \gamma_t^2 y^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= v (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \end{aligned}$$

На рис. 4.32 схематически представлен клиновидный двойник в виде совокупности двойникующих дислокаций. Пунктирными линиями показано положение дислокаций (изображенных сплошными линиями) в последующий момент времени. Пусть краевая и винтовая составляющие двойникующих дислокаций будут направлены так, как это показано на рис. 4.32.

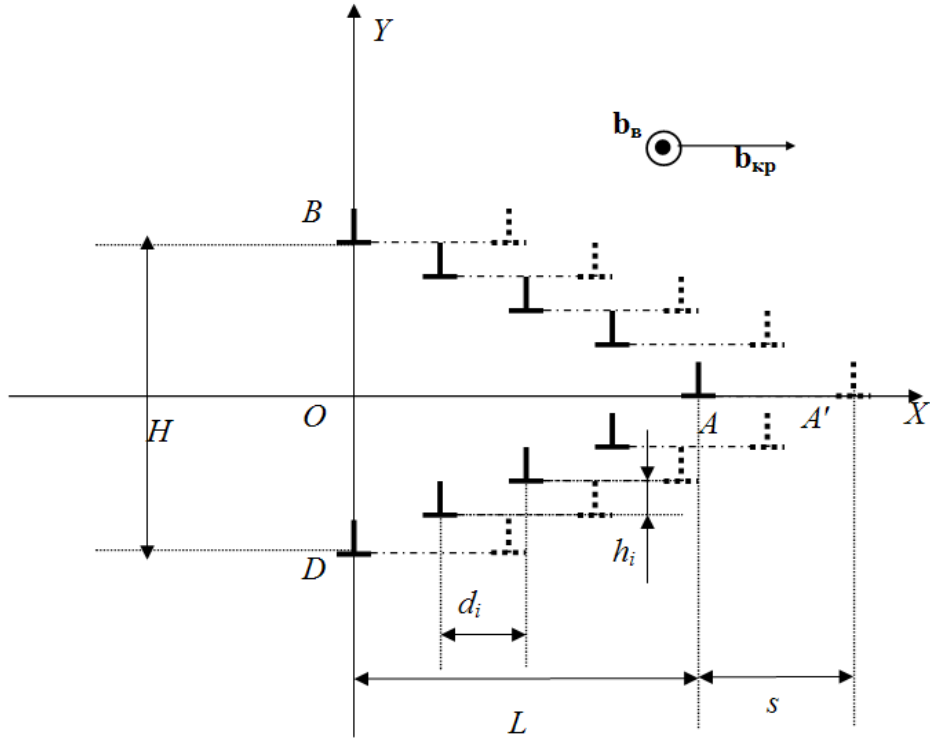


Рис. 4.32. Схематическое изображение клиновидного двойника в виде совокупности двойникующих дислокаций (пунктирными линиями показано положение движущихся дислокаций, изображенных сплошными линиями, в последующий момент времени)

Для такой движущейся с постоянной скоростью системы дислокаций можно записать следующие соотношения для определения компонент тензора напряжений [362]:

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{\mu b_{кр} c_t^2}{2\pi v^2} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[\frac{(1 + \gamma_t^2)^2 (x - L + nd_1 - vt)}{\gamma_t \left[(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_t^2 (y + nh_1)^2 \right]} - \frac{4\gamma_t (x - L + nd_1 - vt)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_t^2 (y + nh_1)^2} \right] + \sum_{m=1}^M \left[\frac{(1 + \gamma_t^2)^2 (x - L + md_2 - vt)}{\gamma_t \left[(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_t^2 (y - mh_2)^2 \right]} - \frac{4\gamma_t (x - L + md_2 - vt)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_t^2 (y - mh_2)^2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{b_{\text{kp}} c_t^2}{\pi v^2} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[\frac{\gamma_l (\lambda + 2\mu - \gamma_l^2 \lambda) (y + nh_1)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} - \frac{\mu \gamma_l (1 + \gamma_l^2) (y + nh_1)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} \right] + \sum_{m=1}^M \left[\frac{\gamma_l (\lambda + 2\mu - \gamma_l^2 \lambda) (y - mh_2)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} - \frac{\mu \gamma_l (1 + \gamma_l^2) (y - mh_2)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{b_{\text{kp}} c_t^2}{\pi v^2} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[\frac{\gamma_l (\lambda - \gamma_l^2 (\lambda + 2\mu)) (y + nh_1)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} + \frac{\mu \gamma_l (1 + \gamma_l^2) (y + nh_1)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} \right] + \sum_{m=1}^M \left[\frac{\gamma_l (\lambda - \gamma_l^2 (\lambda + 2\mu)) (y - mh_2)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} + \frac{\mu \gamma_l (1 + \gamma_l^2) (y - mh_2)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = v (\sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y)),$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = -\frac{\mu b_B}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\gamma_l (y + nh_1)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} + \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_l (y - mh_2)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} \right\},$$

$$\sigma_{yz}(x, y) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\gamma_l (x - L + nd_1 - vt)}{(x - L + nd_1 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y + nh_1)^2} + \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_l (x - L + md_2 - vt)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_l^2 (y - mh_2)^2} \right\},$$

$$\left. + \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_t (x - L + md_2 - vt)}{(x - L + md_2 - vt)^2 + \gamma_t^2 (y - mh_2)^2} \right\}, \quad (4.86)$$

где d_i и h_i – проекции соответственно на ось OX и OY отрезка, соединяющего две соседние двойникующие дислокации на одной из двойниковых границ (индекс i принимает значение 1 или 2 и определяет принадлежность дислокации той или иной двойниковой границе).

Простейшей задачей, которую позволяют решать соотношения (4.86), является расчет напряжений у развивающегося двойника, у которого прекратилась генерация двойникующих дислокаций. При этом в (4.86) N и M остаются постоянными в любой отличный от нуля момент времени (если за нулевое значение принято время начала развития двойника). Схематически данный процесс представлен на рис. 4.33. В эксперименте такой случай наблюдается, например, при пропускании через электропроводящий кристалл с двойниками импульсного электрического тока [115]. При этом электрический ток приводит к увеличению длины двойников, что может происходить и без генерации новых двойникующих дислокаций. В этом случае, как показали расчеты, проведенные в данной работе, фронт напряжений, концентраторами которых выступают двойниковые границы, мигрирует вместе с движущимися двойникующими дислокациями.

В рассмотренном примере увеличения длины двойников под действием электрического тока скорость движения двойникующих дислокаций, как правило, невысокая. Поэтому фронт напряжений перемещается за дислокациями без существенной трансформации своей конфигурации. Однако в ситуации, когда под действием внешних напряжений была сгенерирована лишь порция двойникующих дислокаций, а дальнейший рост двойника обеспечивался лишь движением этого количества дислокаций, скорость двойникования соизмерима со скоростью звука в кристалле [270]. В этом случае можно принять допущение $v \approx c_l \approx c_t$. Тогда из (4.76) следует, что $\gamma_l \rightarrow 0$ и $\gamma_t \rightarrow 0$. Из соотношений (4.86) следует, что у движущегося с такой скоростью двойника напряжения значительно возрастают. При остановке двойника происходит релаксация энергии данных напряжений, что часто сопровождается звуковыми сигналами, свойственными процессу двойникования.

В эксперименте чаще реализуется ситуация, когда рост двойника сопровождается генерацией двойникующих дислокаций, что проявляется в увеличении ширины двойника [362]. За время t_g генерации

двух двойникующих дислокаций (по одной на каждой из двойниковых границ) длина двойника возрастет на величину s_{tw} . В этом случае очевидно

$$s_{tw} = vt_{\Gamma}.$$

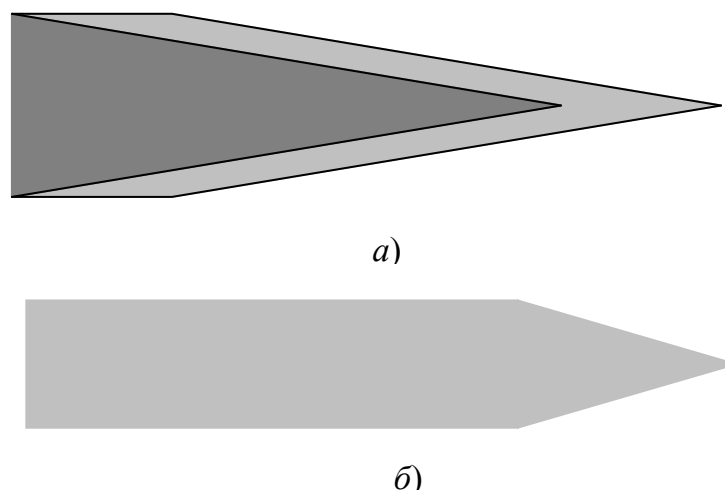


Рис. 4.33. Схематическое изображение процесса роста клиновидного двойника в условиях отсутствия генерации дополнительных двойникующих дислокаций:
а – исходное состояние и начальный этап роста двойника;
б – конечная стадия развития двойника

Изменение числа двойникующих дислокаций может быть задано соотношением

$$N(t) = \left(N_0 + D\left(\frac{t}{t_{\Gamma}}\right) \right),$$

где N_0 – число двойникующих дислокаций на двойниковых границах до начала повторного развития двойника; $D\left(\frac{t}{t_{\Gamma}}\right)$ – так называемая возрастающая функция Антье [326], [327], имеющая вид, представленный на рис. 4.34.

В этом случае развитие двойника будет происходить по схеме, представленной на рис. 4.35.

Так как в большинстве случаев процесс развития двойников является высокоскоростным, то зависимость $N(t)$ можно задать непрерывной в виде

$$N(t) = v_{\Gamma} t.$$

Здесь v_{Γ} – скорость генерации двойникующих дислокаций, определяющая количество двойникующих дислокаций, генерируемых в единицу времени. Эта скорость связана со скоростью роста ширины двойника или с его нормальной скоростью v_n , направленной перпендикулярно движению вершины двойника, исходя из следующих соотношений [362]:

$$v_n = \frac{H}{t} = \frac{Nh_1 + Mh_2}{t} = 2h \frac{N}{t} = 2hv_{\Gamma}.$$

Здесь принималось: $h_1 = h_2 = h$, $N = M$.

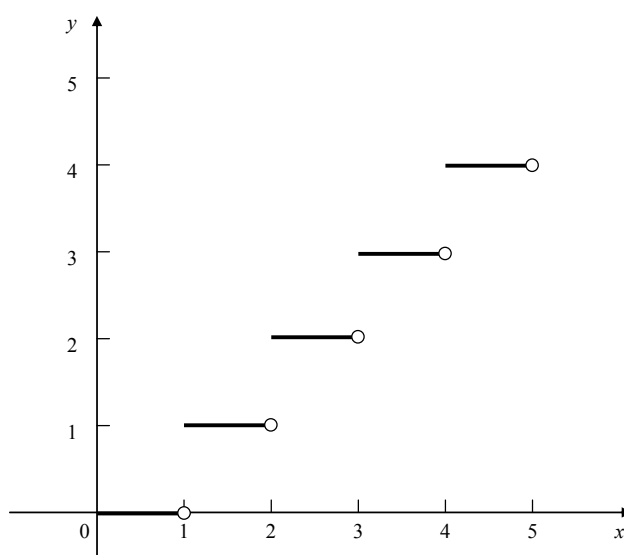


Рис. 4.34. Вид функции, описывающей рост числа двойникующих дислокаций

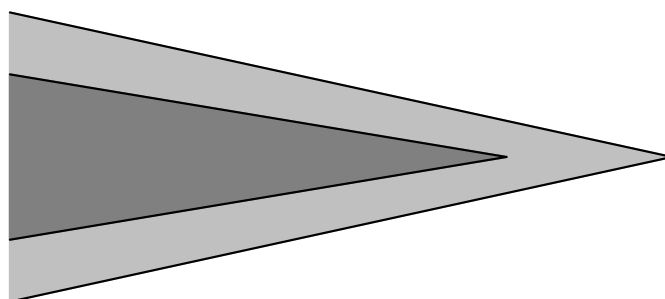


Рис. 4.35. Схематическое изображение роста клиновидного двойника с одновременной генерацией двойникующих дислокаций: темный цвет – начальная стадия; светлый – конечная

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ОСТАТОЧНЫХ КЛИНОВИДНЫХ ДВОЙНИКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАЖНЫХ ДЛЯ МИКРОМЕХАНИКИ ЗАДАЧ

5.1. Прогнозирование распределения полей напряжений в системе «остаточный клиновидный двойник – трещина»

Механическое двойникование часто выступает причиной зарождения разрушения [43], [49]–[57]. Это связано с тем, что двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений. При затрудненном скольжении двойникование может выступать и в качестве релаксатора напряжений у трещин, препятствуя их развитию [43]. Поэтому при определенных условиях деформирования двойникование может рассматриваться как ресурс пластичности материала, что также важно с практической точки зрения [43]. Таким образом, изучение напряженного состояния в системе «остаточный клиновидный двойник – трещина» является важной практической задачей.

На рис. 5.1 показан результат оптической микроскопии системы «остаточный клиновидный двойник – трещина» в монокристалле Ni_2MnGa с эффектом памяти формы (образцы любезно предоставлены А. Л. Созиновым, в эксперименте участвовал Е. В. Шматок [389]). В данном случае двойники выступают релаксаторами напряжений у вершины трещины, где, как известно [48], локализуются большие внутренние напряжения. Изучению зарождения трещин у двойников посвящены работы [43], [49]–[57].

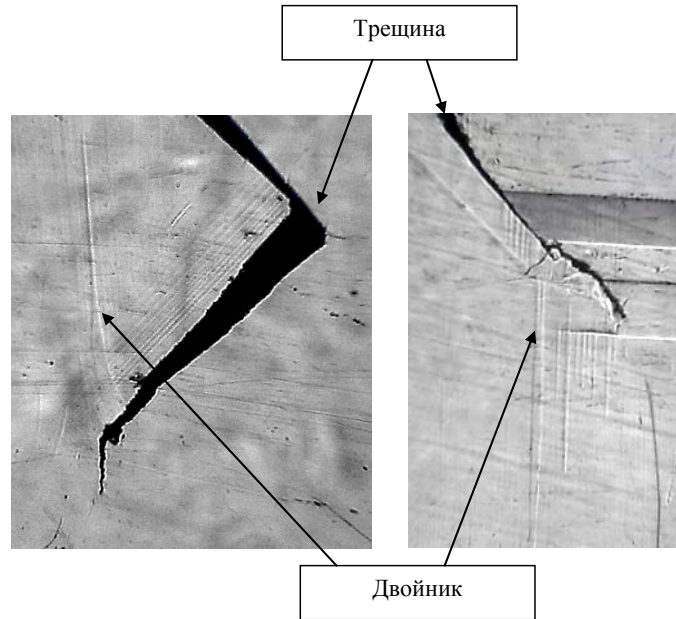


Рис. 5.1. Система «двойник – трещина» в ферромагнитном монокристалле Ni_2MnGa с эффектом памяти формы [389]

Различают три типа трещин [2], [48]: нормального отрыва (тип I), поперечного сдвига (тип II) и продольного (антиплоского) сдвига (тип III). Согласно дислокационной теории трещин поля напряжений, обусловленных каждым типом трещин, могут быть рассчитаны по формулам [48]:

– для трещины нормального отрыва:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta) \left[(x-\zeta)^2 - y^2 \right]}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta) \left[(x-\zeta)^2 + 3y^2 \right]}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta;\end{aligned}\tag{5.1}$$

– для трещины поперечного сдвига:

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{3(x-\zeta)^2 - y^2}{\left[(x-\zeta)^2 + y^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta,$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)[(x-\zeta)^2 - y^2]}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta; \quad (5.2)$$

– для трещины антиплоского сдвига:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\sigma_{yz}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta,$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{x-\zeta}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \quad (5.3)$$

где σ_{yy}^{∞} – нормальные и σ_{xy}^{∞} , σ_{yz}^{∞} – сдвиговые напряжения на бесконечно удаленных поверхностях; l – половина длины трещины; ζ – параметр интегрирования.

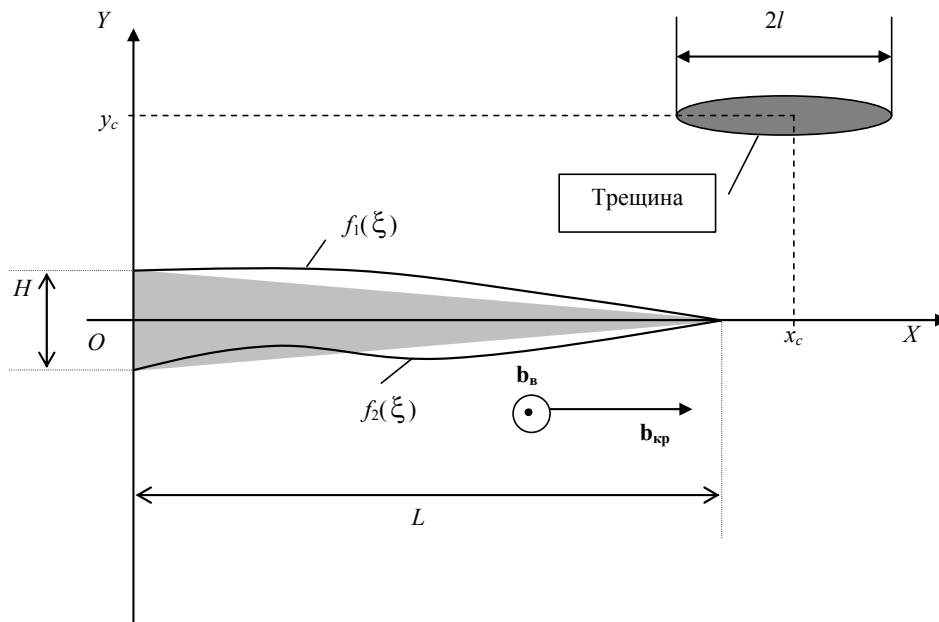


Рис. 5.2. Схематическое изображение остаточного механического клиновидного двойника и трещины вдали от поверхности

На рис. 5.2 схематически представлена система «остаточный клиновидный двойник – трещина» вдали от поверхности кристалла [390]. Координаты центра трещины обозначим (x_c, y_c) . На бесконечно удаленных поверхностях кристалла действуют напряжения σ_{yy}^∞ , σ_{xy}^∞ и σ_{yz}^∞ . Пусть величина этих напряжений такова, что двойникующие дислокации остаются неподвижными. Это возможно, когда сила внутреннего трения, обусловленная полными и сидячими дислокациями, достаточно велика. Тогда при неподвижной трещине в рамках теории упругости для системы «остаточный клиновидный двойник – трещина» поля напряжений можно рассчитать, как суперпозицию напряжений (2.1)–(2.5) клиновидного двойника и напряжений, создаваемых трещиной, которые можно рассчитать по получаемым из (4.1)–(4.3) формулам [390]:

– для трещины нормального отрыва:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{yy}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta) \left[((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2 \right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^\infty + \frac{\sigma_{yy}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta) \left[((x-x_c)-\zeta)^2 + 3(y-y_c)^2 \right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma_{yy}^\infty (y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta; \quad (5.4)\end{aligned}$$

– для трещины поперечного сдвига:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{\sigma_{xy}^\infty (y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{3((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_{xy}^\infty (y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta,\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta) \left[((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2 \right]}{\left[((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2 \right]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta; \quad (5.5)$$

– для трещины антиплоского сдвига:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\sigma_{yz}^{\infty} (y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta,$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-x_c)-\zeta}{((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta. \quad (5.6)$$

Результаты расчетов полей напряжений, МПа, в системе «остаточный клиновидный двойник – трещина» представлены на рис. 5.3–5.10 [390]. Принималось: $b_b = b_{кр} = 0,124$ нм [356]; $\mu = 81$ ГПа [347]; $\nu = 0,29$ [347]; $\sigma_{yy}^{\infty} = 10$ МПа, $\sigma_{xy}^{\infty} = 10$ МПа, $\sigma_{yz}^{\infty} = 10$ МПа; $L = 100$ мкм; $H = 11$ мкм; $l = 20$ мкм; $x_c = 120$ мкм; $y_c = 50$ мкм.

На рис. 5.3–5.5 показано распределение нормальных σ_{xx} и σ_{yy} и сдвиговых σ_{xy} напряжений в системе «двойник – трещина» в случае трещины нормального отрыва [48]. Соответствующие компоненты тензора напряжений двойника рассчитывались по формулам (2.1)–(2.5). Из рис. 5.3–5.5 видно, что концентраторами напряжений являются не только двойниковые границы, но и вершины трещины и двойника.

В случае трещины нормального отрыва напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рис. 5.3), напряжения σ_{yy} имеют один знак (рис. 5.4), а напряжения σ_{xy} знакопеременны относительно оси OY (рис. 5.5).

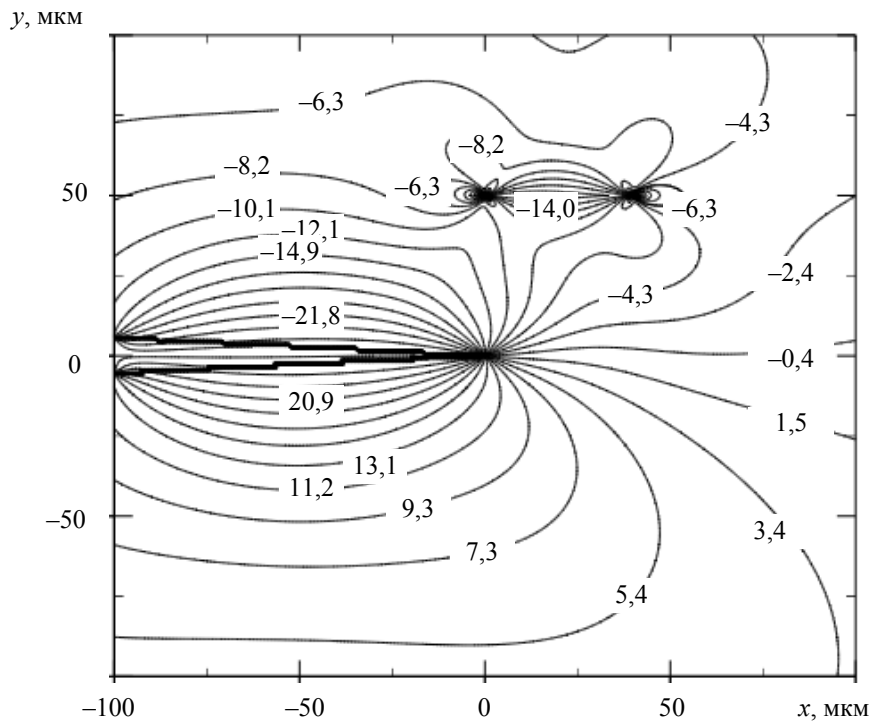


Рис. 5.3. Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина нормального отрыва)

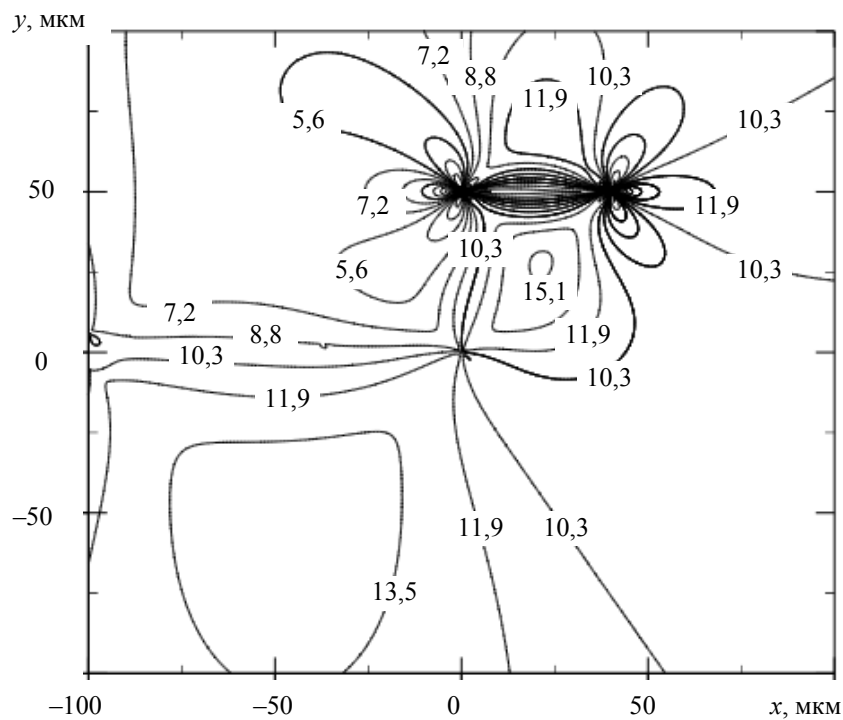


Рис. 5.4. Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина нормального отрыва)

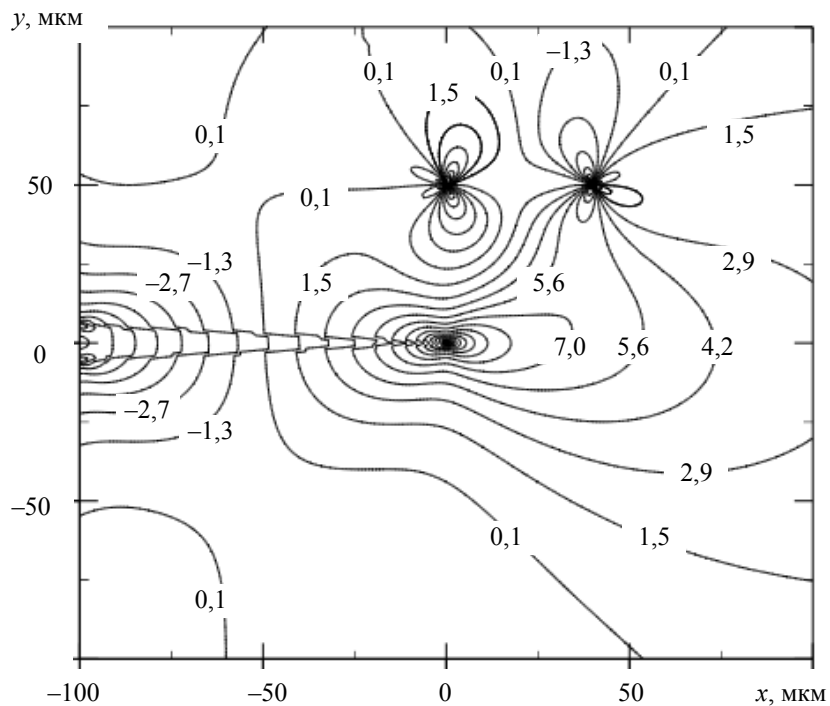


Рис. 5.5. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина нормального отрыва)

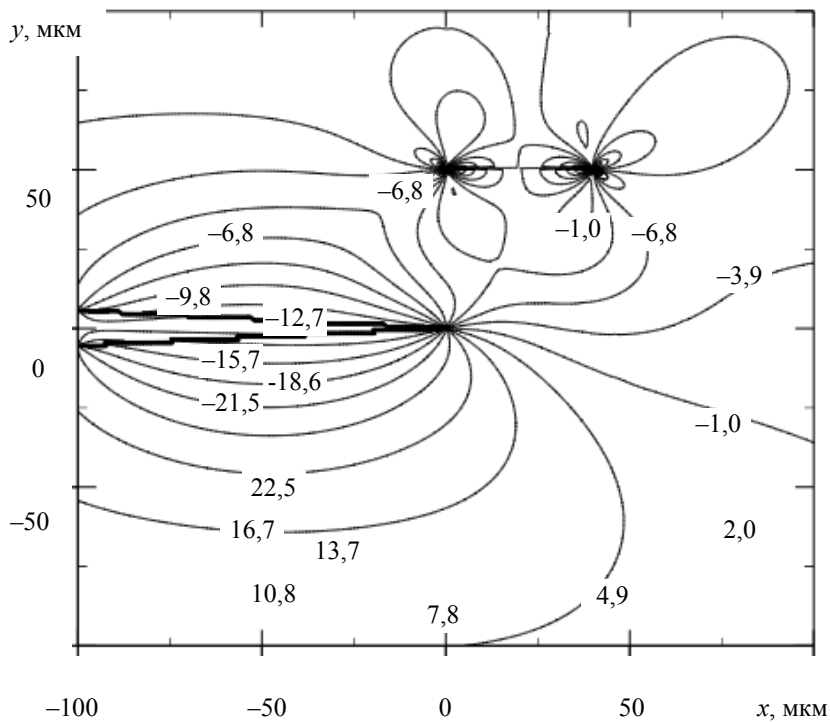


Рис. 5.6. Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина поперечного сдвига)

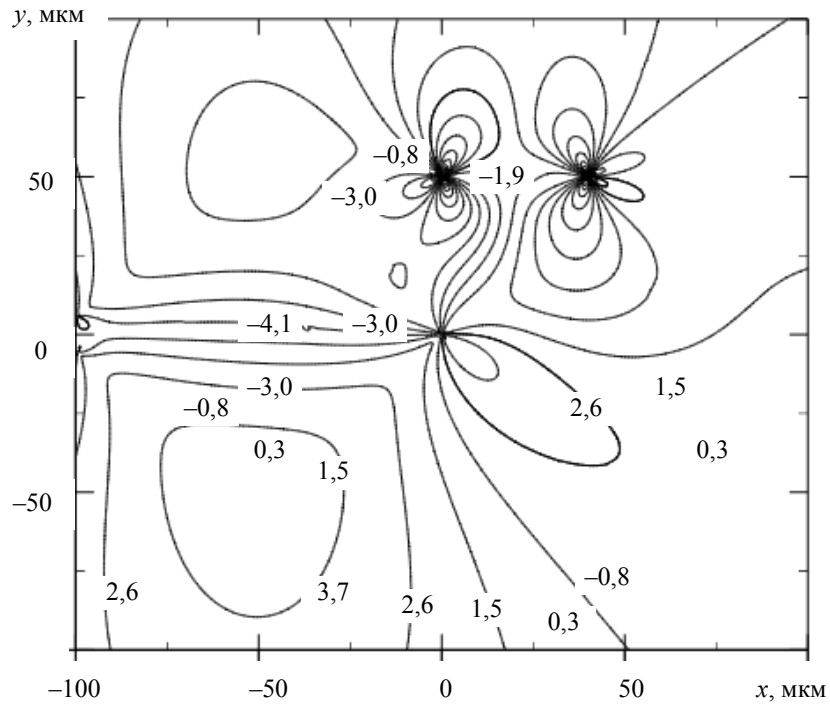


Рис. 5.7. Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина поперечного сдвига)

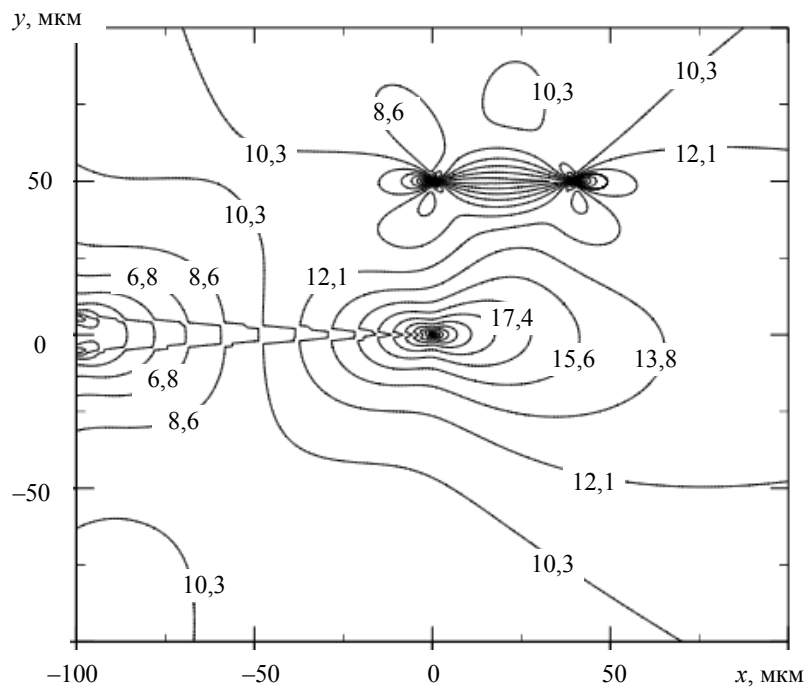


Рис. 5.8. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина поперечного сдвига)

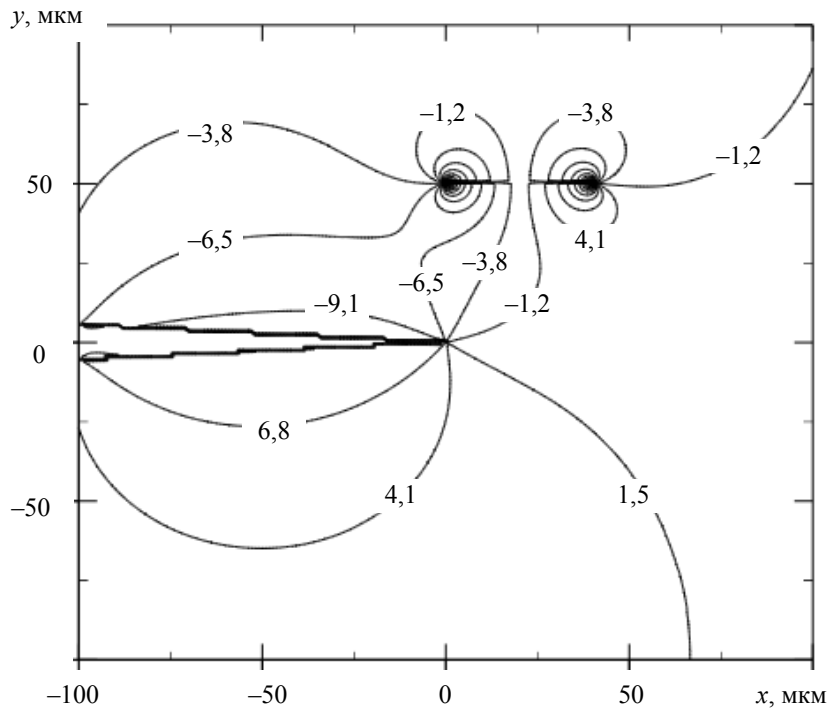


Рис. 5.9. Распределение сдвиговых напряжений σ_{xz} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина антиплоского сдвига)

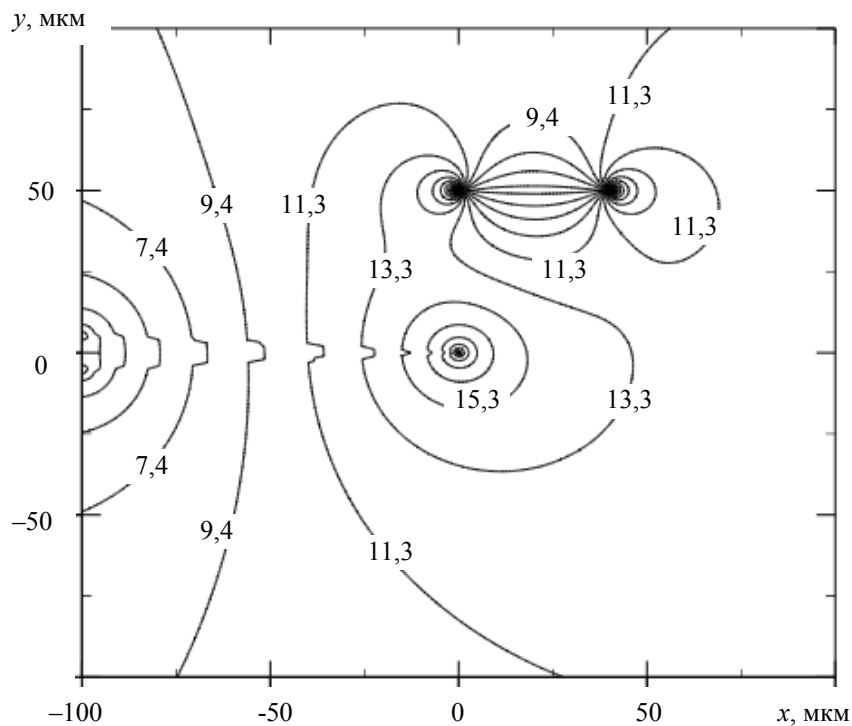


Рис. 5.10. Распределение сдвиговых напряжений σ_{yz} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина антиплоского сдвига)

В случае трещины поперечного сдвига нормальные напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рис. 5.6), напряжения σ_{yy} знакопеременны относительно оси OY (рис. 5.7), а сдвиговые напряжения σ_{xy} имеют один знак (рис. 5.8).

Трещина антиплоского сдвига создает отрицательные сдвиговые напряжения σ_{xz} (рис. 5.9). В целом напряжения σ_{xz} знакопеременны относительно оси OX . Сдвиговые напряжения σ_{yz} имеют один знак (рис. 5.10).

5.2. Прогнозирование распределения полей напряжений в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

Двойникование кристаллов редко происходит в чистом виде [108], [109]. Как правило, двойникование сопровождается скольжением [150]. С другой стороны, трудно получить кристаллы с отсутствием дефектов. Наиболее распространенными дефектами при этом являются дислокации [150]. Поэтому в деформируемых твердых телах двойникование неизбежно осуществляется в условиях активного взаимодействия со скольжением [150].

Изучению закономерностей взаимодействия двойников и дислокаций посвящено много экспериментальных работ [100], [104], [150], [158], [391], [392]. Это указывает на большую важность данной проблематики и актуальность изучения закономерностей взаимодействия двойников и полных дислокаций, прогнозирования распределения полей напряжений в системе «двойник – полная дислокация».

На рис. 5.11 клиновидный двойник схематически представлен в виде совокупности двойникующих дислокаций, расстояние между которыми определяется проекциями d и h на оси OX и OY , соответственно, отрезка, соединяющего две соседние дислокации. Пусть, как и ранее, длина такого двойника L , а ширина у устья – H . Компоненты тензора напряжений у такого двойника, находящегося вдали от поверхности, могут быть найдены по формулам [370]:

$$\sigma_{xx}^{fw} = -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(y+nh) \left[3(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2 \right]}{\left[(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N \frac{(y-nh) \left[3(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2 \right]}{\left[(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2 \right]^2} \Bigg\}; \quad (5.7)$$

$$\sigma_{yy}^{fw} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(y+nh)^2 \left[(x+nd-L)^2 - (y+nh)^2 \right]^2}{\left[(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N \frac{(y-nh) \left[(x+nd-L)^2 - (y-nh)^2 \right]}{\left[(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2 \right]^2} \right); \quad (5.8)$$

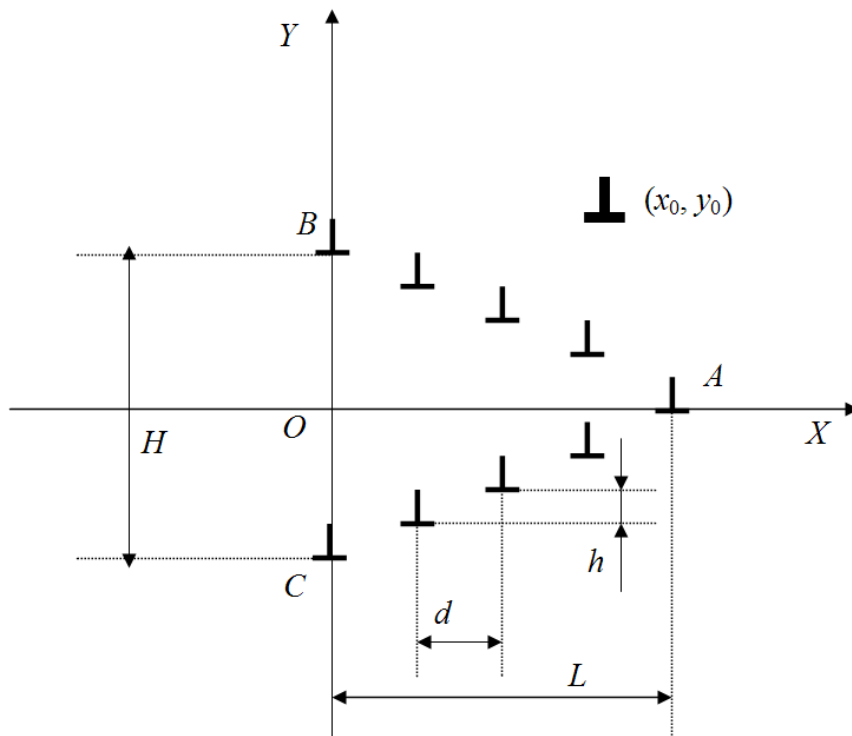


Рис. 5.11. Схематическое изображение системы «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

$$\sigma_{zz}^{fw} = -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \left(\sum_{n=0}^N \frac{y+nh}{(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{y-nh}{(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2} \right); \quad (5.9)$$

$$\sigma_{xy}^{fw} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(x+nd-L) \left[(x+nd-L)^2 - (y+nh)^2 \right]}{\left[(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2 \right]^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(x+nd-L) \left[(x+nd-L)^2 - (y-nh)^2 \right]}{\left[(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2 \right]^2} \right); \quad (5.10)$$

$$\sigma_{xz}^{fw} = -\frac{\mu b_{\text{B}}}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N \frac{y+nh}{(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{y-nh}{(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2} \right); \quad (5.11)$$

$$\sigma_{yz}^{fw} = \frac{\mu b_{\text{B}}}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^N \frac{x+nd-L}{(x+nd-L)^2 + (y+nh)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{x+nd-L}{(x+nd-L)^2 + (y-nh)^2} \right); \quad (5.12)$$

где N – число двойникующих дислокаций на двойниковых границах; n – индекс суммирования. В формулах (5.7)–(5.12) учтено, что в вершине клиновидного двойника находится только одна двойникующая дислокация. Принято, что вектор краевой составляющей вектора Бюргера двойникующей дислокации направлен в сторону положительного направления оси OX , а винтовой – перпендикулярно плоскости рис. 5.11 в сторону положительного направления оси OZ правой декартовой системы координат.

Компоненты тензора напряжений у краевой дислокации, находящейся вдали от поверхности в точке с координатами (x_0, y_0) (рис. 5.11), в приближении однородной изотропной среды, исходя из (1.25) [26], определяются по формулам [370]:

$$\sigma_{xx}^d = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^d}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0)(3(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^2}; \quad (5.13)$$

$$\sigma_{yy}^d = \frac{\mu b_{\text{кр}}^d}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0)\left((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^2}; \quad (5.14)$$

$$\sigma_{xy}^d = \frac{\mu b_{\text{кр}}^d}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2\right)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^2}; \quad (5.15)$$

$$\sigma_{zz}^d = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^d \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (5.16)$$

В случае винтовой дислокации из (1.28) [26] имеем [370]:

$$\sigma_{xz}^d = -\frac{\mu b_{\text{в}}^d}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \quad (5.17)$$

$$\sigma_{yz}^d = \frac{\mu b_{\text{в}}^d}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (5.18)$$

Распределение результирующих напряжений в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация» в рамках справедливого в теории упругости приближения суперпозиции напряжений находятся из соотношения [370]:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{\text{tw}}(x, y) + \sigma_{ij}^d(x, y). \quad (5.19)$$

Результаты расчетов компонент тензора напряжений в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация» представлены на рис. 5.12–5.16. Принималось $b_{\text{кр}}^d = 2b_{\text{кр}}^{\text{tw}}$, $b_{\text{в}}^d = 2b_{\text{в}}^{\text{tw}}$, $d = 2,5$ нм, $h = 0,25$ нм, $N = 10$, $L = Nd$, $x_0 = L + a$, $a = 30$ нм, $y_0 = 10$ нм. Это со-

ответствует важному с практической точки зрения случаю двойникова железа. Рассчитывались величины

$$\sigma_{ij}^*(x, y) = \frac{\sigma_{ij}(x, y)}{A_{ij}},$$

где

$$A_{xx} = A_{yy} = A_{xy} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{tw}}{2\pi(1-\nu)L}, \quad A_{zz} = \frac{\mu\nu b_{\text{кр}}^{tw}}{2\pi(1-\nu)L}, \quad A_{xz} = A_{yz} = \frac{\mu b_{\text{в}}^{tw}}{2\pi L}.$$

На рис. 5.12–5.16 представлена ситуация, когда вектор Бюргера полной краевой (винтовой) дислокации направлен в одну сторону с направлением вектора Бюргера краевой (винтовой) составляющей частичных двойникующих дислокаций клиновидного двойника. Наличие дислокации у двойника приводит к искажению у него конфигурации полей напряжений по сравнению с ситуацией, когда полная дислокация у двойника отсутствует (рис. 4.4–4.8). Это искажение становится несущественным, когда высока плотность двойникующих дислокаций на двойниковых границах или когда полная дислокация находится в непосредственной близости у двойника в области создаваемого им высокого уровня напряжений.

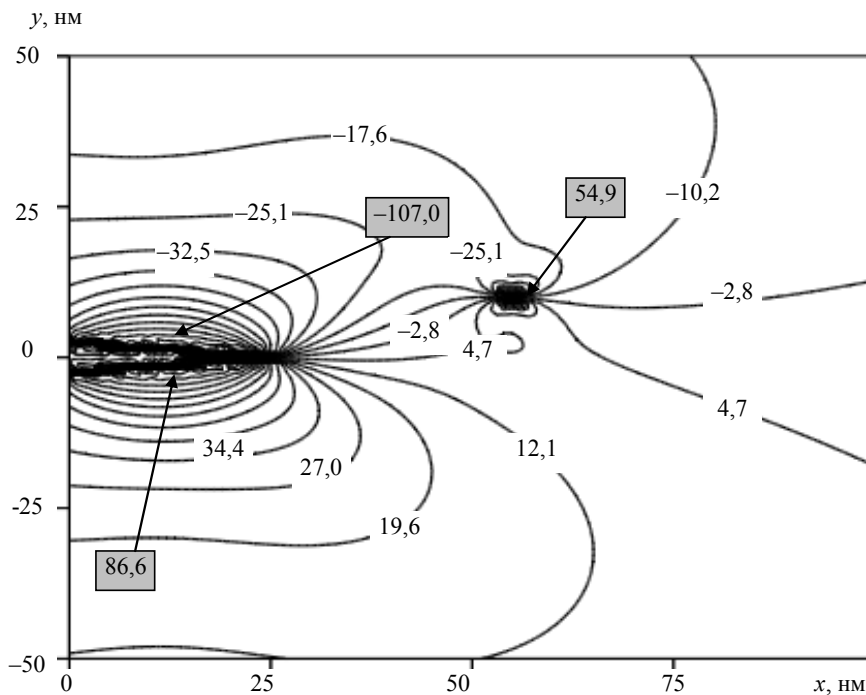


Рис. 5.12. Конфигурация полей напряжений σ_{xx}^* в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

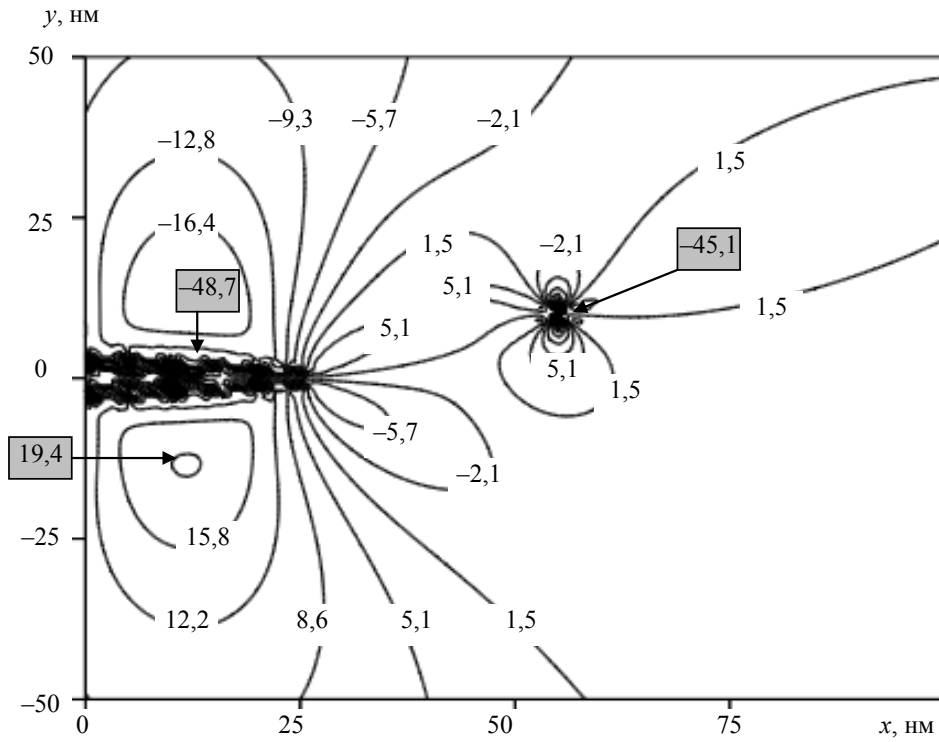


Рис. 5.13. Конфигурация полей напряжений σ_{yy}^* в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

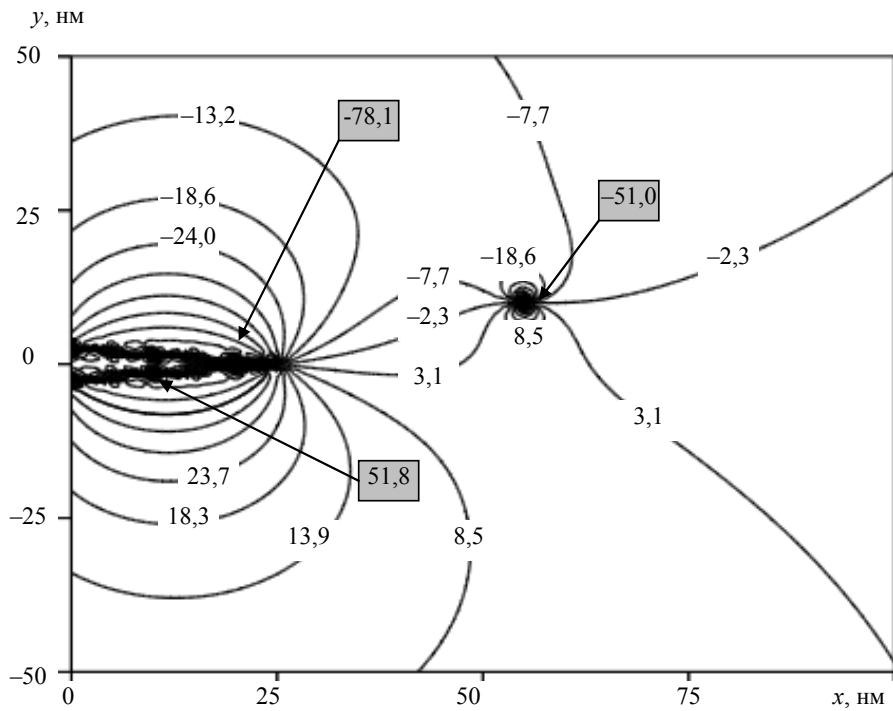


Рис. 5.14. Конфигурация полей напряжений σ_{zz}^* и σ_{xz}^* в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

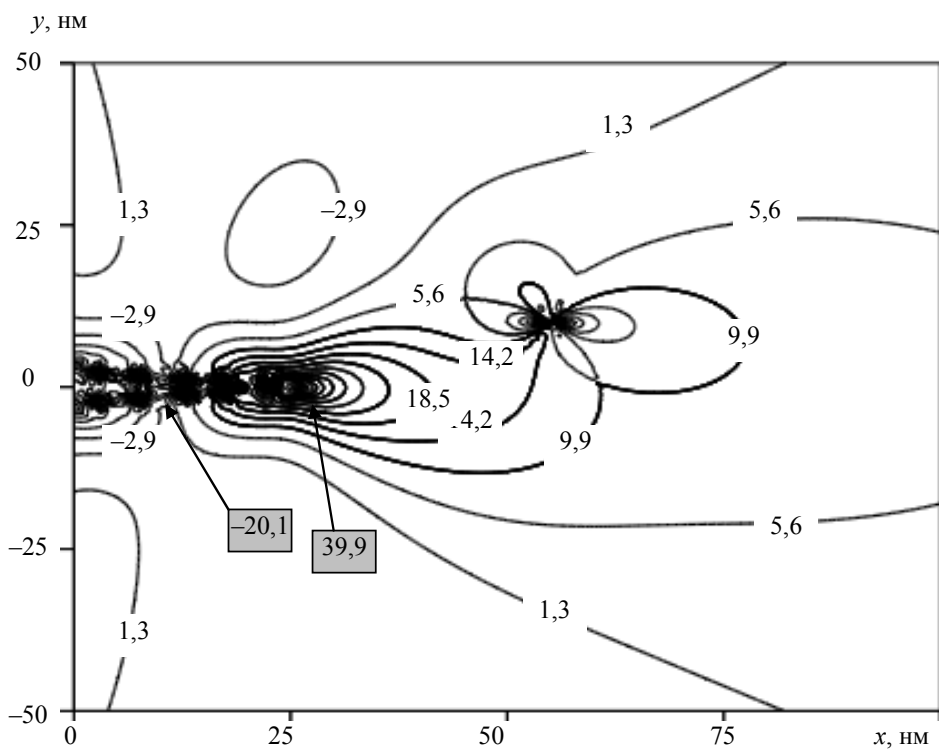


Рис. 5.15. Конфигурация полей напряжений σ_{xy}^* в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

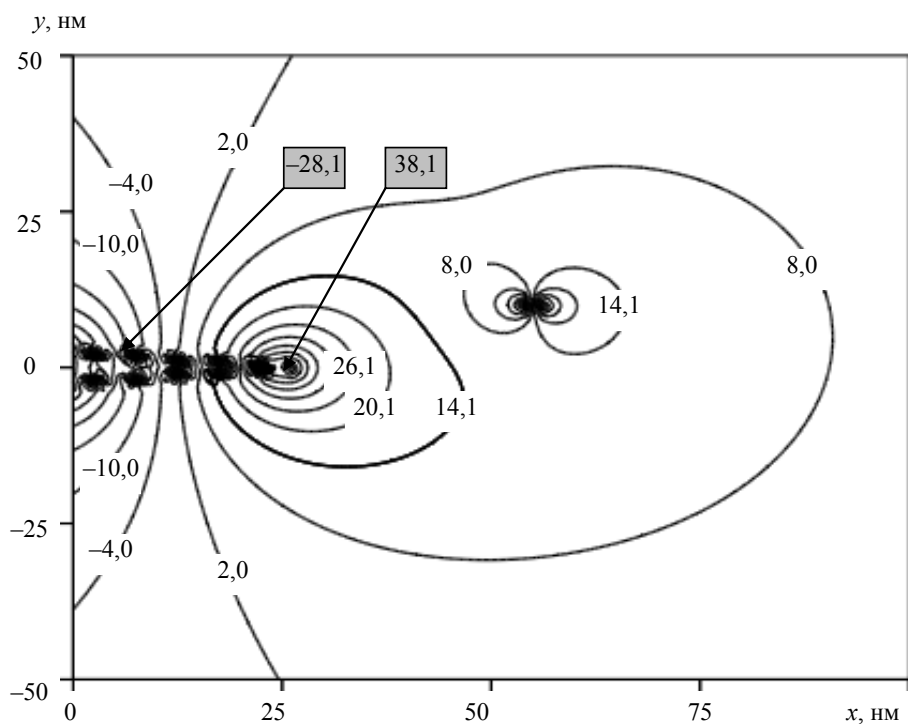


Рис. 5.16. Конфигурация полей напряжений σ_{yz}^* в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация»

Напряжения σ_{xx}^* у клиновидного двойника положительны у одной из границ двойника и отрицательны у другой (рис. 5.12). Нахождение у двойника в области отрицательных напряжений полной краевой дислокации, вектор Бюргерса которой направлен в одну сторону с краевой составляющей вектора Бюргерса двойникующих дислокаций, приводит к некоторому увеличению уровня положительных и отрицательных напряжений у двойниковых границ. Несколько иная ситуация наблюдается, когда векторы Бюргерса полной краевой дислокации и краевой составляющей двойникующих дислокаций направлены в разные стороны. В этом случае наблюдается уменьшение уровня напряжений σ_{xx}^* у границ клиновидного двойника. Это обусловлено зеркальной симметрией в конфигурации положительных и отрицательных напряжений у двойника и полной дислокации.

Аналогичная картина наблюдается и в случае таких компонент тензора напряжений, как σ_{yy}^* , σ_{zz}^* (рис. 5.13 и 5.14), когда у двойника находится краевая дислокация, и σ_{xz}^* (рис. 5.14), когда на месте краевой находится винтовая дислокация.

Конфигурация напряжений σ_{xy}^* (рис. 5.15) и σ_{yz}^* (рис. 5.16) отличается от конфигураций напряжений, представленных на рис. 5.12–5.14. Напряжения σ_{xy}^* и σ_{yz}^* знакопеременны относительно оси, параллельной оси OY и проходящей через середину двойника. Данные напряжения у устья двойника и у его вершины имеют разный знак. Поэтому наличие полной дислокации способствует увеличению или уменьшению уровня напряжений либо у вершины двойника, либо у его устья.

Как это было показано в [370] и [393], в системе «остаточный клиновидный нанодвойник – полная дислокация» аналогичным образом могут быть рассчитаны и поля смещений, деформаций, относительная объемная дилатация и силы взаимодействия двойникующих дислокаций с полными.

5.3. Прогнозирование распределения примеси и потоков ее миграции у остаточного клиновидного двойника

Атмосферы примесей у дислокаций во многом определяют их поведение при деформировании кристаллических материалов, изменяя динамические параметры дислокаций [108]. Избыток примесных

атомов в областях локализации напряжений повышает вероятность зарождения фазы, образование которой вдали от источников напряжений невозможно [26]. Это интересно в плане практического использования полученных в данной работе результатов в технологии целенаправленного формирования необходимых свойств материалов.

Распределение легирующего компонента у клиновидного двойника рассчитывается по общеизвестной формуле [28]:

$$C^{\text{пр}} = C_0^{\text{пр}} \exp\left(-\frac{U_{\text{вз}}}{kT}\right), \quad (5.20)$$

где $C_0^{\text{пр}}$ – концентрация примесей вдали от внутренних источников напряжений; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; $U_{\text{вз}}$ – энергия взаимодействия примесей с клиновидным двойником, которая находится по формуле [28]:

$$U_{\text{вз}} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \varepsilon (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (5.21)$$

Здесь r – радиус атома матрицы; $\varepsilon = (r_0 - r)/r$ – малый параметр (r_0 – радиус атома легирующего компонента); σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} – нормальные компоненты тензора напряжений, определяемые из (2.1), (2.3)–(2.5).

Результаты расчетов распределения примеси у клиновидного двойника [372] представлены на рис. 5.17. Принималось $L = 100$ мкм, $H = 11$ мкм, $T = 300$ К [372]. Плотность двойникующих дислокаций на двойниковых границах в данной работе принималась постоянной. Профили распределения примесей у клиновидного двойника при $r > r_0$ и $r < r_0$ имеют одинаковый вид. Разница заключается в расположении областей минимальной и максимальной концентрации примесей. В случае, когда $r > r_0$, примесь локализуется в областях сжатия, а при $r < r_0$ – в областях растяжения, т. е. в тех областях, где для случая $r > r_0$ наблюдается максимум концентрации примесей, в случае $r < r_0$ имеет место ее минимум.

Для определения направления потоков миграции примесей необходимо построение эквипотенциальных поверхностей [28]. Согласно расчетам на основании (4.20) и (4.21), их профиль для рассматриваемого двойника имеет аналогичный вид, как и вид профилей распределения примесей на рис. 5.17 [372]. По данным работы [28],

линии, перпендикулярные линиям профилей эквипотенциальных поверхностей, укажут поток миграции примеси. Схематически эти потоки для случая $r > r_0$ показаны на рис. 5.18. Примесь, радиус которой больше радиуса атомов матрицы, мигрирует в противоположном направлении.

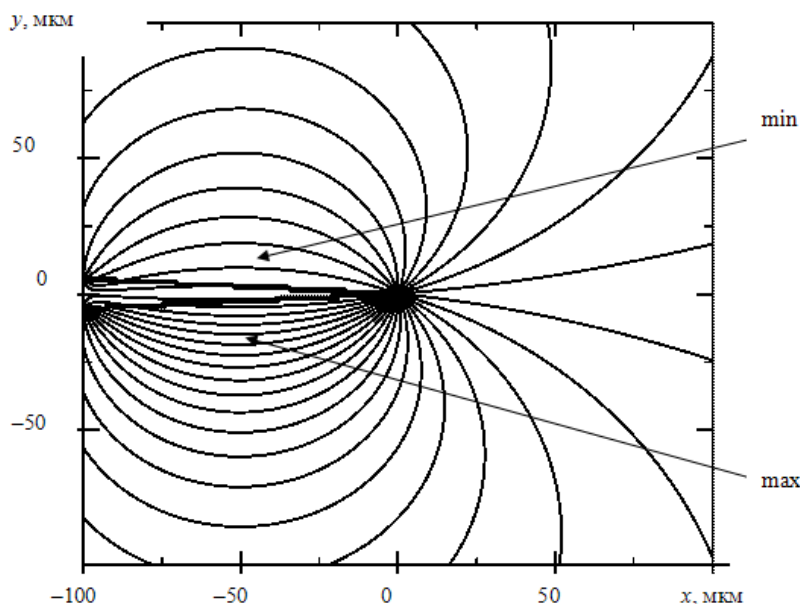


Рис. 5.17. Рассчитанные концентрационные профили распределения примеси у клиновидного двойника с постоянной плотностью двойникующих дислокаций на двойниковых границах

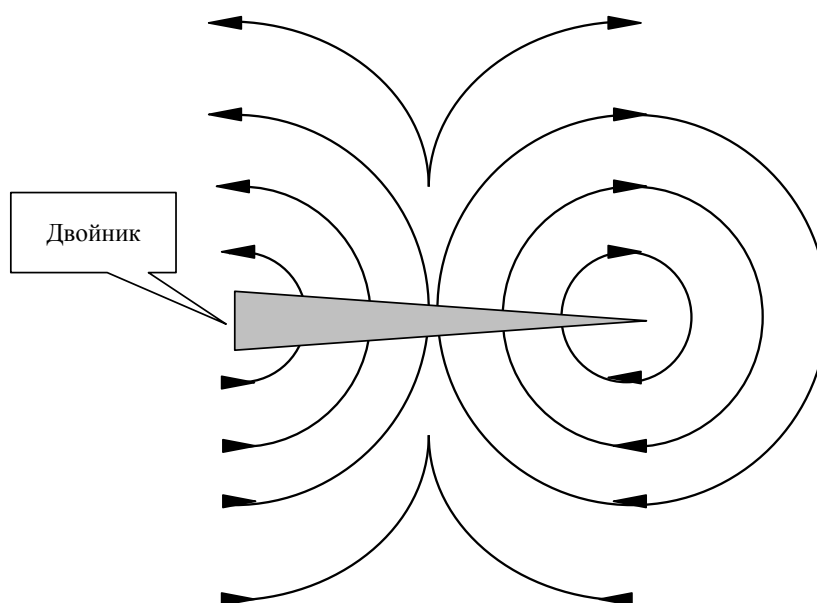


Рис. 5.18. Потоки миграции у клиновидного двойника примеси, радиус которой меньше радиуса атомов матрицы

Следует отметить, что дрейф примесных атомов происходит от области, близкой к вершине и устью двойника к его центральной части [372]. При этом максимальная концентрация примеси наблюдается не только у двойниковых границ, но и в некотором удалении от них (для рассматриваемого двойника это удаление от границы составляет около 10 мкм).

Скорость дрейфа атомов примеси может быть определена из соотношения [28]:

$$\mathbf{V} = \frac{D^{\text{диф}}}{kT} \mathbf{F} = - \frac{D^{\text{диф}}}{kT} \mathbf{grad} U_{\text{вз}}, \quad (5.22)$$

где $D^{\text{диф}}$ – коэффициент диффузии; \mathbf{F} – сила, действующая на атом примеси в поле двойника. Не трудно показать, что модуль скорости дрейфа атомов примеси определяется из соотношения [28]:

$$V = \frac{D^{\text{диф}}}{kT} \sqrt{\left(\frac{\partial U_{\text{вз}}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\text{вз}}}{\partial y}\right)^2}.$$

Частные производные по x и y от $U_{\text{вз}}$ равны нулю в точках максимального и минимального значений $U_{\text{вз}}(x, y)$ [28]. В этих точках $V = 0$. Такие области наблюдаются на двойниковых границах, у вершины двойника и в областях максимальной и минимальной концентрации примесей в удалении от средней части двойника. Сопоставляя данные, представленные на рис. 5.17 и 5.18, учитывая (5.22), можно сделать заключение, что в областях максимальной концентрации примеси у клиновидного двойника величина ее скорости стремится к нулю. Это связано с тем, что нормальные напряжения у клиновидного двойника распределены таким образом, что обеспечивают дрейф примеси к местам ее локализации (рис. 5.17) и способствуют ее торможению в этих областях [372].

Известно [109], [150], что двойникованию при определенных условиях деформирования или термообработки подвержены материалы с ОЦК, ГЦК, ГПУ – структурами, к которым, в частности, относятся подавляющее большинство кристаллов, используемых в кристаллооптике, электронике, машиностроении. Перераспределение примесей у двойника под действием его упругих полей напряжений способствует зарождению новых фаз, которые имеют условия для зарождения и в нанодвойниках [355]. С практической точки зрения вопрос формирования наноразмерной фазы в нанодвойниках представ-

ляется весьма интересным, так как задание в кристалле определенной плотности нанодвойников контролируемо, например, внешними напряжениями. С научной точки зрения данный вопрос также интересен, так как формирование нанофаз в полях напряжений двойниковых границ и в нанодвойниках – малоизученная проблема [355].

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
2. Работнов, Ю. Н. Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1987. – 80 с.
3. Mikhasev, G. On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium / G. Mikhasev // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2014. – Vol. 94, № 1/2. – P. 130–141.
4. Михасев, Г. И. Оценка осесимметричного напряженного состояния углеродной нанотрубки, внедренной в неоднородную упругую среду, основанная на нелокальной теории ортотропных оболочек / Г. И. Михасев, М. Г. Ботогова, Е. С. Филончик // *Вестн. БГУ, Сер. 1.* – 2014. – № 3. – С. 97–100.
5. Михасев, Г. И. Исследование влияния начальных напряжений на собственные частоты колебаний многостенной углеродной нанотрубки, основанное на нелокальной теории оболочек / Г. И. Михасев, А. Н. Шейко // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2013. – № 4. – С. 60–64.
6. Михасев, Г. И. Вывод уравнений движения многостенной углеродной нанотрубки с использованием нелокальной континуальной теории ортотропных цилиндрических оболочек / Г. И. Михасев, А. Н. Шейко // *Теорет. и приклад. механика.* – 2012. – Вып. 27. – С. 70–77.
7. Михасев, Г. И. Бифуркация многослойной углеродной нанотрубки, лежащей в упругой матрице, при осевом сжатии / Г. И. Михасев, М. Г. Ботогова, А. В. Бальцевич // *Теорет. и приклад. механика.* – 2012. – Вып. 27. – С. 149–154.
8. Михасев, Г. И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек / Г. И. Михасев // *Докл. НАН Беларуси.* – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 119–123.
9. Журавков, М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований / М. А. Журавков. – Минск : БГУ, 2008. – 247 с.
10. Журавков, М. А. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред / М. А. Журавков, М. Д. Мартыненко. – Минск : Изд-во БГУ, 1999. – 358 с.
11. Журавков, М. А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов) / М. А. Журавков. – Минск : БГУ, 2002. – 456 с.

12. Витязь, П. А. Синтез и применение сверхтвердых материалов / П. А. Витязь, В. Д. Грицук, В. Т. Сенють. – Минск : Бел. навука, 2005. – 358 с.
13. Витязь, П. А. Термодинамические аспекты получения композитов спеканием порошковых металлических материалов, модифицированных наноразмерными углеродными добавками / П. А. Витязь, В. И. Жорник, В. С. Вихренко // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 122–130.
14. Чигарев, А. В. Биомеханика / А. В. Чигарев, Г. И. Михасев. – Минск : Технопринт, 2004. – 306 с.
15. Чигарев, А. В. Курс теоретической механики / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : Новое знание, 2010. – 399 с.
16. Северденко, В. П. Обработка металлов давлением с ультразвуком / В. П. Северденко, В. В. Клубович, А. В. Степаненко. – Минск : Наука и техника, 1976. – 286 с.
17. Мышкин, Н. К. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения в трибологии / Н. К. Мышкин, М. И. Петровец. – М. : Физматлит, 2007. – 367 с.
18. Плескачевский, Ю. М. Анизотропная модель и результаты анализа деформирования ауксетичного материала / Ю. М. Плескачевский, Д. В. Черноус, С. В. Шилько // Механика композиц. материалов и конструкций. – 1998. – Т. 4, № 3. – С. 28–38.
19. Федосюк, В. М. Многослойные магнитные структуры / В. М. Федосюк. – Минск : БГУ, 2000. – 197 с.
20. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
21. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.
22. Владимиров, В. И. Физическая природа разрушения металлов / В. И. Владимиров. – М. : Металлургия, 1984. – 280 с.
23. Миркин, Л. И. Физические основы прочности и пластичности / Л. И. Миркин. – М. : МГУ, 1968. – 540 с.
24. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М. : НКТП СССР, 1935. – 674 с.
25. Чижик, С. А. Экспериментальная наномеханика. Методы на базе атомно-силовой микроскопии / С. А. Чижик // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 1(2). – С. 78–83.
26. Хирт, Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.

27. Фридель, Ж. Дислокации / Ж. Фридель. – М. : Мир, 1967. – 644 с.
28. Физика кристаллов с дефектами / А. А. Предводителей [и др.]. – М. : МГУ, 1986. – 240 с.
29. Косевич, А. М. Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич. – Киев : Наук. думка, 1978. – 220 с.
30. Ван Бюрен, Х. Дефекты в кристаллах / Х. Ван Бюрен. – М. : Изд-во ИЛ, 1962. – 584 с.
31. Вит, де Р. Континуальная теория дисклинаций / Вит де Р. – М. : Мир, 1977. – 208 с.
32. Коттрел, А. Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах / А. Х. Коттрел. – М. : Metallurgizdat, 1958. – 268 с.
33. Коттрел, А. Х. Теория дислокаций / А. Х. Коттрел. – М. : Мир, 1969. – 96 с.
34. Малыгин, Г. А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов / Г. А. Малыгин // Успехи физ. наук. – 1999. – Т. 109, № 9. – С. 979–1010.
35. Бердичевский, В. Л. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности / В. Л. Бердичевский // Приклад. математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 6. – С. 981–1000.
36. Губа, А. В. Винтовая дислокация в нелинейно упругой среде / А. В. Губа // Изв. высш. учеб. заведений. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. Спец. вып. «Математическое моделирование». – 2001. – С. 59–60.
37. Гуткин, М. Ю. Зарождение дислокационных петель и пластическая деформация нанокристаллических материалов / М. Ю. Гуткин, И. А. Овидько // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 2. – С. 123–136.
38. Гуткин, М. Ю. Упругое поведение винтовой дислокации в стенке полый нанотрубки / М. Ю. Гуткин, А. Г. Шейнерман // Физика твердого тела. – 2007. – Т. 49, № 9. – С. 1595–1602.
39. Косевич, А. М. Дислокации и точечные дефекты в гидростатически сжатом кристалле / А. М. Косевич, В. В. Токий, З. А. Стрельцов // Физика металлов и металловедение. – 1978. – Т. 45, № 16. – С. 1135–1144.
40. Устинов, Ю. А. Задачи о дислокациях в упругом кольце / Ю. А. Устинов // Докл. РАН. – 1997. – Т. 354, № 5. – С. 619–622.
41. Nabarro, F. R. Theory of crystal dislocation / F. R. Nabarro. – Oxford : Clarendon press, 1967. – 821 p.

42. Владимиров, В. И. Дискретно-континуальное рассмотрение дислокационных скоплений / В. И. Владимиров, Ш. Х. Ханнанов // Физика металлов и металловедение. – 1969. – Т. 27, № 6. – С. 969–975.
43. Финкель, В. М. Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов-на-Дону, 1990. – 172 с.
44. Финкель, В. М. Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М. : Metallurgiya, 1977. – 360 с.
45. Финкель, В. М. Физика разрушения / В. М. Финкель. – М. : Metallurgiya, 1970. – 376 с.
46. Качанов, Л. М. Основы механики разрушения / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1974. – 312 с.
47. Алехин, В. П. Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов / В. П. Алехин. – М. : Наука, 1983. – 280 с.
48. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Самар. ун-т, 2001. – 562 с.
49. Федоров, В. А. Образование трещин на границах зерен и двойников в цинке при охлаждении до низких температур / В. А. Федоров, В. М. Финкель, В. П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1980. – Т. 49, № 2. – С. 413–416.
50. Финкель, В. М. Кинетика двойникования и образования КР2 в цинке / В. М. Финкель, В. А. Федоров, В. П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1979. – Т. 47, № 4. – С. 867–870.
51. Влияние двойников на зарождение трещин в Fe + 3,25% Si при интенсивном сопутствующем скольжении / В. М. Финкель [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1979. – Т. 48, № 2. – С. 415–423.
52. Влияние распределения дислокаций в границах двойника на зарождение микротрещин в его вершине / В. А. Федоров [и др.] // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44, № 6. – С. 1057–1059.
53. О развитии быстрой трещины вдоль системы параллельных ей двойников / В. М. Финкель [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1981. – Т. 52, № 4. – С. 863–869.
54. Финкель, В. М. Взаимодействие трещин с двойниковыми прослойками в кристаллах исландского шпата / В. М. Финкель, В. А. Федоров, М. М. Кижнер // Кристаллография. – 1976. – Т. 21, № 2. – С. 345–350.
55. Яковлева, Э. С. Влияние двойникования на хрупкое разрушение кристаллов цинка / Э. С. Яковлева, М. В. Якутович // Журн. техн. физики. – 1950. – Т. 20, № 4. – С. 420–423.

56. Образование трещин на фронте разрушения по спайности / В. М. Финкель [и др.] // Физика твердого тела. – 1986. – Т. 28, № 7. – С. 2210–2213.

57. Cerv, J. Transonic twinning from the crack tip / J. Cerv, M. Landa, A. Machova // Scr. Mater. – 2000. – Vol. 43, № 5. – P. 423–428.

58. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1987. – 246 с.

59. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

60. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.

61. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.

62. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

63. Бриллиантов, Н. А. О пластической деформации, IV / Н. А. Бриллиантов, И. В. Обреимов // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1937. – Т. 7, № 8. – С. 978–986.

64. Берковский, Б. С. Статическая аэрогидроупругость несущих элементов и их систем, работающих вблизи границ / Б. С. Берковский. – Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1983. – 122 с.

65. Болотин, В. В. Статистические методы в строительной механике / В. В. Болотин. – М. : Стройиздат, 1961.

66. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

67. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л. : Судпрогиз, 1962. – 432 с.

68. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1968. – 418 с.

69. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. – 530 с.

70. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 560 с.

71. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек / П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1995. – 409 с.

72. Аменадзе, Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Аменадзе. – М. : Высш. шк., 1976. – 272 с.

73. Васидзу, Кюитри. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Кюитри Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.

74. Волков, С. Д. Статистическая механика композитных материалов / С. Д. Волков, В. П. Ставров. – Минск : Изд-во БГУ, 1978. – 205 с.
75. Вольмир, А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости) / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
76. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979. – 319 с.
77. Еременко, С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел / С. Ю. Еременко. – Харьков : Основа, 1991. – 271 с.
78. Жигалко, Ю. П. Вынужденные колебания оболочек и пластин / Ю. П. Жигалко. – Казань : Изд-во Каз. ун-та, 1990. – 102 с.
79. Зубчанинов, В. Г. Основы теории упругости и пластичности / В. Г. Зубчанинов. – М. : Высш. шк., 1990. – 367 с.
80. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
81. Кан, С. Н. Расчет самолета на прочность / С. Н. Кан, И. А. Свердлов. – М. : Машиностроение, 1966. – 514 с.
82. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.
83. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 940 с.
84. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
85. Огибалов, П. М. Оболочки и пластины / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М. : Изд-во МГУ, 1969. – 696 с.
86. Петрашень, Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах / Г. И. Петрашень. – М. : Наука, 1980. – 280 с.
87. Победря, Б. Е. Численные методы теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
88. Поручиков, В. Б. Методы динамической теории упругости / В. Б. Поручиков. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
89. Работнов, Ю. Н. Проблемы механики деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1991. – 134 с.
90. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Физматгиз, 1963. – 636 с.
91. Угодчиков, А. Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. – Казань : Изд-во Каз. ун-та, 1986. – 294 с.

92. Шемякин, Е. И. Введение в теорию упругости / Е. И. Шемякин. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 96 с.
93. Сачков, В. В. О роли механического двойникования при хрупком разрушении железа / В. В. Сачков, Л. М. Потак // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1954. – Т. 24, № 3. – С. 460–466.
94. Халл, Д. Двойникование и зарождение трещин в металлах с объемно-центрированной кубической решеткой / Д. Халл // Разрушение твердых тел. – 1976. – С. 222–225.
95. Федоров, В. А. О повреждаемости кристаллов кальцита при двойниковании / В. А. Федоров, В. П. Плотников // Кристаллография. – 1984. – Т. 29, № 1. – С. 123–127.
96. Астафурова, Е. Г. Влияние легирования алюминием на прочностные свойства и механизм деформации $\langle 123 \rangle$ монокристаллов стали Гадфильда / Е. Г. Астафурова, М. С. Тукеева, Ю. И. Чумляков // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2007. – Т. 50, № 10. – С. 3–7.
97. Изучение физических свойств легированных германием монокристаллов кремния, содержащих плоскости и границу двойникования / М. Я. Дашевский [и др.] // Изв. высш. учеб. заведений. Материалы электр. техники. – 2003. – № 2. – С. 24–26.
98. Tadmor, E. V. Deformation twinning at aluminum crack tips / E.V. Tadmor, Hais // Acta mater. – 2003. – Vol. 51, № 1. – P. 117–131.
99. Точицкий, Т. А. Двойникование в наноструктурных пленках и нанопроволоках / Т. А. Точицкий, В. М. Федосюк. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 442 с.
100. Hay, R. S. Deformation twinning in monazite / R. S. Hay, D. V. Marshall // Acta mater. – 2003. – Vol. 51, № 18. – P. 5235–5254.
101. Liu, Y. Twinning and detwinning of $\langle 011 \rangle$ type II twin in shape memory alloy / Y. Liu, Z. L. Xie // Acta mater. – 2003. – Vol. 51, № 18. – P. 5529–5543.
102. Xiao, Lin. Twinning behavior in the Ti-5 at. % Al single crystals during cyclic loading along [0001] / Lin Xiao // Mater. Sci. and Eng. A. C. – 2005. – Vol. 394, № 1/2. – P. 168–175.
103. The role of mechanical twinning on microcrack nucleation in a near- γ TiAl alloy / B. S. Ng [et al.]. – 2004. – Vol. 12, № 12. – P. 1317–1323.
104. Wang, P. Observation of twins in the α_2 phase in a quenched Ti-46,54 at. % Al alloy / P. Wang, D. Velraraghavan, V. K. Vasudevan // Scr. Mater. – 1996. – Vol. 34, № 10. – P. 1601–1607.
105. Карькина, Л. Е. Роль дальнедействующих напряжений при образовании дефектных деполей в TiAl / Л. Е. Карькина // Физика металлов и металловедение. – 1995. – Т. 80, № 1. – С. 124–133.

106. Карькина, Л. Е. Взаимодействие двойников с дислокациями и двойниками в TiAl. I. Взаимодействие с дислокациями / Л. Е. Карькина, А. Б. Ноткин // Физика металлов и металловедение. – 1993. – Т. 75, № 3. – С. 147–154.

107. Карькина, Л. Е. Взаимодействие двойников с дислокациями и двойниками в TiAl. II. Взаимодействие двойников / Л. Е. Карькина, А. Б. Ноткин // Физика металлов и металловедение. – 1993. – Т. 75, № 3. – С. 155–161.

108. Косевич, А. М. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А. М. Косевич, В. С. Бойко // Успехи физ. наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.

109. Классен-Неклюдова, М. В. Механическое двойникование кристаллов / М. В. Классен-Неклюдова. – М. : АН СССР, 1960. – 262 с.

110. Косевич, А. М. О дислокационной модели двойникования / А. М. Косевич, Л. А. Пастур // Физика твердого тела. – 1961. – Т. 3, № 4. – С. 1291–1297.

111. Лифшиц, И. М. О макроскопическом описании явления двойникования кристаллов / И. М. Лифшиц // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1948. – Т. 18, № 12. – С. 1134–1143.

112. Косевич, В. М. Исследование двойникования металлических кристаллов с помощью сосредоточенной нагрузки / В. М. Косевич, В. И. Башмаков // Физика металлов и металловедение. – 1960. – Т. 9, № 2. – С. 288–293.

113. Башмаков, В. И. Изучение электромеханического эффекта при двойниковании кристаллов висмута в интервале температур 77–500 К / В. И. Башмаков, В. С. Савенко // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 1980. – № 7. – С. 29–33.

114. Башмаков, В. И. Возбуждение двойникования кристаллов висмута импульсами тока большой плотности / В. И. Башмаков, В. С. Савенко, М. С. Цедрик // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 109–112.

115. Электропластический эффект при одновременном наложении электрического и магнитного поля в монокристаллах висмута / В. С. Савенко [и др.] // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. – 1995. – № 1. – С. 27–30.

116. Лаврентьев, Ф. Ф. Взаимодействие дислокаций в цинке, висмуте и сурьме при двойниковании / Ф. Ф. Лаврентьев // Физика металлов и металловедение. – 1964. – Т. 18, № 3. – С. 428–436.

117. Лихачев, В. А. Эффект памяти формы / В. А. Лихачев, С. Л. Кузьмин, З. П. Каменцева. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1987. – 216 с.

118. Basic properties of magnetic shape memory actuators / J. Telling [et al.] // AdaptaMat Ltd., Helsinki. Published in 8th Int. Conf. «Actuator 2002», Germany, 2002. – P. 4.

119. Giant two-way shape memory effect in high-temperature Ni-Mn-Ga single crystal / V. A. Chernenko [et al.] // 3rd Int. Symposium on Shape Mem. Mat. Smart Systems. – 2010. – P. 94–98.

120. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // J. Mater. Eng. Perform. – 1996. – Vol. 5. – P. 405–409.

121. Ullakko, K. Large magnetic-field-induced strains in Ni₂MnGa single crystals / K. Ullakko [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 1996. – Vol. 69. – P. 1966–1968.

122. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory effect in Ni₂MnGa intermetallics / K. Ullakko [et al.] // Scripta Metall. – 1997. – Vol. 36. – P. 1133–1138.

123. James, R. D. Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R. D. James, R. Tickle, M. Wuttig // Mater. Sci. Eng. – 1999. – Vol. A273–275. – P. 320–325.

124. Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system / R. Tickle [et al.] // IEEE Trans. magn. – 1999. – Vol. 35. – P. 4301–4310.

125. Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials / R. C. O'Handley [et al.] // J. Appl. Phys. 2000. – Vol. 87. – P. 4712–4717.

126. 6 % magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni–Mn–Ga / S. J. Murrey [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2000. – Vol. 77. – P. 886–888.

127. Magnetic order and phase transformation in Ni₂MnGa / P. J. Webster [et al.] // Phil. Mag. – 1984. – Vol. B49. – P. 295–310.

128. Crystal structure of martensitic phases in Ni–Mn–Ga shape memory alloys / J. Pons [et al.] // Acta Mat. – 2000. – Vol. 48. – P. 3027–3038.

129. O'Handley, R. C. Model for strain and magnetization in magnetic shape-memory alloys / R. C. O'Handley // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 83. – P. 3263–3270.

130. Likhachev, A. A. Quantitative model of large magnetostrain effect in ferromagnetic shape memory alloys / A. A. Likhachev, K. Ullakko // Eur. Phys. J. – 2000. – Vol. B14. – P. 263–267.

131. Likhachev, A. A. Magnetic-field-controlled twin boundaries motion and giant magneto-mechanical effects in Ni–Mn–Ga shape memory alloy / A. A. Likhachev, K. Ullakko // *Phys. Lett.* – 2000. – Vol. A275. – P. 142–151.

132. Tickle, R. Magnetic and magnetomechanical properties of Ni₂MnGa / R. Tickle, R. D. James // *J. Magn. Magn. Mat.* – 1999. – Vol. 195. – P. 627–638.

133. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni–Mn–Ga / A. Saren, K. Ullakko // *Scripta Materialia.* – 2017. – Vol. 139. – P. 126–129.

134. Absence of magnetic domain wall motion during magnetic field induced twin boundary motion in bulk magnetic shape memory alloys / Y. U. Lai [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2007. – Vol. 90, № 19. – P. 1–3.

135. Хлюстикова, И. Н. Повышение критической температуры сверхпроводимости олова двойникованием / И. Н. Хлюстикова, М. С. Хайкин // *Письма в ЖЭТФ.* – 1983. – Т. 38, № 4. – С. 191–194.

136. Boyko, V. S. Microstructure design by twinning in high-temperature superconductor YBa₂Cu₃O_{7-δ} for enhanced J_C et high magnetic fields / V. S. Boyko, Siu-Wai Chan // *Physica C.* – 2007. – Vol. 466, № 1/2. – P. 1–3.

137. On the pinning performance analysis in bulk Re–123 twin-free superconductors / M. Jirsa [et al.] // *Physica C.* – 2007. – Vol. 463–465. – P. 1–3.

138. Хлюстикова, И. Н. Влияние дефектов на критические параметры сверхпроводимости плоскости двойникования / И. Н. Хлюстикова // *ЖЭТФ.* – 1989. – Т. 96, № 6. – С. 2073–2081.

139. Wu, Xiao-Lei. Deformation twinning mechanisms in nanocrystalline Ni / Xiao-Lei Wu, En Ma // *Appl. Phys. Lett.* – 2006. – Vol. 88, № 6. – P. 1–3.

140. Twinning in nanocrystalline Ni by severe plastic deformation / X. Y. Feng [et al.] // *J. Phys. D.* – 2006. – Vol. 39, № 4. – P. 746–749.

141. Waitz, T. Size-dependent martensitic transformation path causing atomic-scale twinning of nanocrystalline NiTi shape memory alloys / T. Waitz, D. Spisak, J. Hafner // *Europhys. Lett.* – 2005. – Vol. 71, № 1. – P. 98–103.

142. Deformation twins in nanocrystalline Al / X. Z. Liao [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 83, № 24. – P. 5062–5064.

143. Гуткин, М. Ю. Механизм образования деформационных двойников в нанокристаллических материалах / М. Ю. Гуткин,

И. А. Овидько, Н. В. Скиба // Физика твердого тела. – 2007. – Т. 49, № 5. – С. 830–838.

144. Рущиц, С. В. Нанодвойникование мартенситных кристаллов и теория адаптивных фаз / С. В. Рущиц, В. Л. Ильичев // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Металлургия». – 2008. – Вып. 11, № 24 (124). – С. 44–46.

145. Ovid'ko, I. A. Effect of twin boundary migration on fracture toughness of nano-twinned metals / I. A. Ovid'ko, A. G. Sheinerman // Materials Physics and Mechanics. – 2014. – Vol. 21, № 21. – P. 248–258.

146. Ovid'ko, I.A. Nucleation of deformation nanotwins at grain boundaries containing disclinations in nanomaterials / I. A. Ovid'ko, N. V. Skiba // Materials Physics and Mechanics. – 2014. – Vol. 21, № 22. – P. 288–298.

147. Черных, К. Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1991. – 287 с.

148. Слепян, Л. И. Механика трещин / Л. И. Слепян. – Л. : Судостроение, 1990. – 295 с.

149. Кукуджанов, В. Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций : учеб. пособие / В. Н. Кукуджанов. – М. : МФТИ, 2008. – 215 с.

150. Башмаков, В. И. Физические закономерности механического двойникования гексагональных и ромбоэдрических металлических кристаллов под действием статических, переменных и импульсных нагрузок : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.07 / В. И. Башмаков. – Мозырь, 1986. – 319 с.

151. Mugge, O. Uber kunstliche Zwillingsbildung durch Druck an Antimon, Wismuth und Diopsid / O. Mugge // Neues. Jahrb. Mineral. Geol. – 1886. – В. 1. – S. 183–187.

152. Ovid'ko, I. A. Crossover from dislocation slip to deformation twinning in nanostructured and coarse-grained metals / I. A. Ovid'ko, N. V. Skiba // Rev. Adv. Mater. Sci. – 2017. – Vol. 50. – P. 31–36.

153. Interface structures and twinning mechanisms of twins in hexagonal metals / M. Gong [et al.] // Mater. Res. Lett. – 2017. – Vol. 5, № 7. – P. 449–464.

154. Мазилова, Т. И. Тонкая структура когерентных двойниковых границ в металлах / Т. И. Мазилова, И. М. Михайловский, Е. И. Луговская // Физика низких температур. – 2000. – Т. 26, № 12. – С. 1241–1244.

155. Dislocation movements and deformation twinning in zinc / J. G. Antonopoulos [et al.] // *Acta Metallurgica*. – 1988. – Vol. 36. – P. 2493–2502.

156. Исследование пластической деформации монокристаллов цинка / Ф. Ф. Лаврентьев [и др.] // *Тр. физико-техн. ин-та низких температур*. – Киев : АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 101–117.

157. Захаров, С. Д. Двойникование кристаллов – новые аспекты / С. Д. Захаров, Р. В. Галиулин // *Теория, история, философия и практика минералогии : материалы IV Междунар. минерал. семинара, 17–20 мая 2006 г.* – Сыктывкар, 2006. – С. 35.

158. Yan, F. Simulation of twin boundary effect on characteristics of single grain-silicon thin film transistors / F. Yan, P. Migliorato, R. Ishihara // *Appl. Phys. Lett.* – 2007. – Vol. 91, № 7. – P. 1–3.

159. Гарбер, Р. И. Механическое двойникование кальцита, III / Р. И. Гарбер // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. – 1940. – Т. 10, № 3. – С. 354–357.

160. Гарбер, Р. И. О повышении предела текучести при отжиге двойникового кальцита / Р. И. Гарбер // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. – 1946. – Т. 16, № 10. – С. 923–927.

161. Гарбер, Р. И. Отжиг двойникованных кристаллов кальцита и натронной селитры / Р. И. Гарбер // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. – 1947. – Т. 17, № 1. – С. 63–68.

162. Отжиг двойникованных кристаллов железа / Р. И. Гарбер [и др.] // *Докл. АН СССР*. – 1950. – Т. 74, № 2. – С. 343–344.

163. Гарбер, Р. И. Механизм двойникования натронной селитры при пластической деформации / Р. И. Гарбер // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. – 1947. – Т. 17, № 1. – С. 48–62.

164. Исследование пластических свойств монокристаллов бериллия / Р. И. Гарбер [и др.] // *Физика металлов и металловедение*. – 1955. – Т. 1, № 3. – С. 528–537.

165. Гарбер, Р. И. Механизм двойникования кальцита и натронной селитры при пластической деформации / Р. И. Гарбер // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. – 1947. – Т. 17, № 1. – С. 48–62.

166. Гарбер, Р. И. Механические свойства единичных двойниковых прослоек / Р. И. Гарбер // *Физика твердого тела*. – 1959. – Т. 1, № 5. – С. 814–825.

167. Deformation of lamellar TiAl alloys by longitudinal twinning / T. E. J. Edwards [et al.] // *Scripta Materialia*. – 2016. – Vol. 118. – P. 46–50.

168. Longitudinal twinning in a TiAl alloy at high temperature by in situ microcompression / T. E. J. Edwards [et al.] // *Acta Materialia*. – 2018. – Vol. 148. – P. 202–215.

169. Complex investigation of deformation twinning in g-TiAl by TEM and neutron diffraction / P. Beran [et al.] // *J. Mech. Phys. Solid.* – 2016. – Vol. 95. – P. 647–662.

170. Farenc, S. An in situ study of twin propagation in TiAl / S. Farenc, A. Coujou, A. Couret // *Philos. Mag.* – 1993. – Vol. A67, № 1. – P. 127–142.

171. An energy approach to the formation of twins in TiAl / H. Petryk [et al.] // *Metall. Mater. Trans.* – 2003. – Vol. 34, № 12. – P. 2827–2836.

172. Crack opening due to deformation twin shear at grain boundaries in near-g TiAl / B. A. Simkin [et al.] // *Intermetallics.* – 2007. – Vol. 15, № 1. – P. 55–60.

173. Deformation of polysynthetically twinned crystals of TiAl with a nearly stoichiometric composition / T. Fujiwara [et al.] // *Philos. Mag.* – 1990. – Vol. A61, № 4. – P. 591–606.

174. Room-temperature tensile deformation of polysynthetically twinned (PST) crystals of TiAl / H. Inui [et al.] // *Acta Metall. Mater.* – 1992. – Vol. 40, № 11. – P. 3095–3104.

175. Yoo, M. H. On the dislocation pole mechanism for twinning in TiAl crystals / M. H. Yoo // *Phil. Mag. Lett.* – 1997. – Vol. 76, № 4. – P. 259–268.

176. Appel, F. An electron microscope study of mechanical twinning and fracture in TiAl alloys / F. Appel // *Phil. Mag.* – 2005. – Vol. 85, № 2/3. – P. 205–231.

177. Wen, Y. F. Generalized planar fault energies and mechanical twinning in gamma TiAl alloys / Y. F. Wen, J. Sun // *Scripta Mater.* – 2013. – Vol. 68, № 9. – P. 759–762.

178. Plastic flow of g-TiAl-based polysynthetically twinned crystals: micromechanical modeling and experimental validation / R. Lebensohn [et al.] // *Acta Mater.* – 1998. – Vol. 46, № 13. – P. 4701–4709.

179. The interaction of borides and longitudinal twinning in polycrystalline TiAl alloys / T. E. J. Edwards [et al.] // *Acta Mater.* – 2017. – Vol. 140 (Supplement C). – P. 305–316.

180. Yoo, M. H. Physical constants, deformation twinning, and microcracking of titanium aluminides / M. H. Yoo, C. L. Fu // *Metall. Mater. Trans.* – 1998. – Vol. 29, № 1. – P. 49–63.

181. Влияние температуры и скорости нагружения на количественные характеристики сопутствующего двойникования в поликри-

сталле Fe–3,25% Si / В. А. Федоров [и др.] // Деформация и разрушение материалов. – 2007. – № 7. – С. 13–16.

182. Финкель, В. М. О температурной зависимости интенсивности и кинетики развития двойникования при динамическом растяжении кремнистого железа / В. М. Финкель, А. М. Савельев, А. П. Королев // Физика металлов и металловедение. – 1979. – Т. 47, № 2. – С. 411–419.

183. Моисеев, В. Ф. Механическое двойникование и температурная зависимость трещиностойкости титана / В. Ф. Моисеев, И. В. Моисеева, Э. П. Печковский // Металлофизика и новейшие технологии. – 1998. – Т. 20, № 10. – С. 60–64.

184. Tang, Q. H. Deformation twinning and its effect on crack extension / Q. H. Tang, T. C. Wang // Acta. Mater. – 1998. – Vol. 46, № 15. – P. 5313–5321.

185. Влияние наводораживания на закономерности развития механического двойникования, деформационное упрочнение и разрушение <111>- и <144>-монокристаллов стали Гадфильда / Е. Г. Астафурова [и др.] // Физ/ мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 5. – С. 94–104.

186. Федоров, В. А. Дислокационные механизмы разрушения двойникующихся материалов / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин, В. А. Тялина. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 336 с.

187. Федоров, В. А. О зарождении трещин на границах двойников в кальците / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин // Кристаллография. – 1981. – Т. 26, № 4. – С. 775–781.

188. Торможение трещин двойниками / В. М. Финкель [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1970. – Т. 29, № 6. – С. 1248–1256.

189. Веселянский, Ю. С. Хрупкое разрушение и двойникование в железе и сталях / Ю. С. Веселянский, М. П. Браун // Металлофизика. – Киев – 1969. – Вып. 23. – С. 25–42.

190. Мильман, Ю. В. Влияние деформационного двойникования на механические свойства сплавов с ОЦК-решеткой / Ю. В. Мильман, И. В. Гончарова // Успехи физики металловедения. – 2017. – Т. 3. – С. 265–294.

191. Халл, Д. Двойникование и зарождение трещин в металлах с объемно-центрированной кубической решеткой / Д. Халл // Разрушение твердых тел. – 1967. – С. 222–255.

192. Яковлева, Э. С. Влияние двойникования на хрупкое разрушение кристаллов цинка / Э. С. Яковлева, М. В. Якутович // Журн. техн. физики. – 1950. – Т. 20, № 4. – С. 420–423.

193. Ароне, Р. Г. К вопросу о зарождении хрупких трещин в стали при двойниковании / Р. Г. Ароне // Физика металлов и металловедение. – 1966. – Т. 22, № 4. – С. 617–618.

194. Twin induced Grain Boundary Cracking in b. c. c. Metals / A. Gilbert [et al.] // Acta Met. – 1964. – Vol. 12. – P. 754–755.

195. Федоров, В. А. Влияние скорости деформирования, размера зерен и температуры на механическое двойникование в электромеханической стали Э2412 / В. А. Федоров, А. М. Кириллов, Т. Н. Плужникова // Изв. высш. учеб. заведений. Чер. металлургия. – 2017. – Т. 60, № 6. – С. 469–473.

196. О зарождении квазихрупкого разрушения в Fe+3,25%Si в условиях деформационного двойникования / А. П. Королев [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1981. – Т. 52, № 6. – С. 1282–1288.

197. Roberts, E. The formation of fatigue cracks in magnesium at {1012} <1011> twin boundaries / E. Roberts, P. G. Partridge // Deformation twinning. – N. Y., London, 1964. – P. 378–379.

198. Vere, A. V. Mechanical twinning and crack nucleation in lithium niobate / A. V. Vere // J. Mater. Sci. – 1968. – Vol. 3, № 6. – P. 617–621.

199. Fong, S. T. Effect of atomic order on slip, twinning and crack formation in FeCo at 4,2 K / S. T. Fong, M. J. Marcinkowski, K. Sadananda // Acta Met. – 1973. – Vol. 21, № 3. – P. 799–806.

200. Michel, D. J. Deformation induced twin boundary crack formation in type 304 Stainless Steel / D. J. Michel, H. Nahm, J. Moteff // Mater. Sci. and Eng. – 1973. – Vol. 11. – P. 97–102.

201. Федоров, В. А. Двойникование, сопутствующее разрушению моно- и поликристаллического ОЦК-сплава Fe + 3,25 % Si в интервале температур 77-5-473 К / В. А. Федоров, С. Н. Плужников, А. П. Королев // Вестн. Тамб. гос. ун-та. – 1998. – Т. 3, № 3. – С. 251–253.

202. Зарождение микротрещин при двойниковании в ОЦК и ГЦК металлах / В. А. Куранова [и др.] // Вестн. Тамб. гос. ун-та. – 2001. – Т. 6, № 3. – С. 346–350.

203. Влияние структуры границ двойника на зарождение трещин в его вершине / В. А. Куранова [и др.] // Вестн. Тамб. гос. ун-та. – 2001. – Т. 6, № 3. – С. 351–353.

204. Федоров, В. А. Анализ микропластичности и разрушения при пересечении двойников в ОЦК-решетке / В. А. Федоров, С. Н. Плужников, В. А. Куранова // Вестн. Тамб. государственного ун-та. – 2000. – Т. 5, № 2/3. – С. 387–389.

205. Влияние распределения дислокаций в границах двойника на зарождение микротрещин в его вершине / В. А. Федоров [и др.] // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44, № 6. – С. 1057–1059.

206. Нашельский, А. Я. Производство полупроводниковых материалов / А. Я. Нашельский. – М. : Metallurgia, 1989. – 272 с.
207. Twinning defects in spherical GeSi alloy nanocrystals / Y. M. Yang [et al.] // *J. Cryst. Growth*. – 2006. – Vol. 219, № 2. – P. 358–362.
208. Electronic properties of nanoscale multiple twin boundaries in indirect-gap AlGaAs / Y. Ohno [et al.] // *Physica B*. – 2007. – Vol. 401/402. – P. 270–274.
209. Дашевский, М. Я. Анализ наблюдаемых двойниковых структур в кремнии / М. Я. Дашевский, Р. В. Кибизов // *Кристаллография*. – 1996. – Т. 41, № 3. – С. 522–533.
210. Исследование двойниковой структуры монокристаллов LaGaO₃ / Д. И. Савицкий [и др.] // *Функцион. материалы*. – 1994. – Т. 1, № 2. – С. 55–59.
211. Hsiung, L. M. Shock-induced deformation twinning and omega transformation in tantalum and tantalum-tungsten alloys / L. M. Hsiung, D. H. Lassila // *Acta mater.* – 2000. – Vol. 48, № 20. – P. 4851–4865.
212. Новый механизм пластического течения в полосах локализации и двойниках деформации В₂-фазы никелида титана путем неравновесных мартенситных превращений в полях напряжений / А. Н. Тюменцев [и др.] // *Физика металлов и металловедение*. – 2003. – Т. 95, № 1. – С. 97–106.
213. Валеева, А. А. Ближний порядок и двойники в упорядоченном монооксиде титана / А. А. Валеева, А. И. Гусев // *Письма в ЖЭТФ*. – 2004. – Т. 79, № 9/10. – С. 579–584.
214. Двойникование в монокристаллах α-титана разной чистоты / Л. Д. Кумаева [и др.] // *Физика металлов и металловедение*. – 2004. – Т. 98, № 4. – С. 56–59.
215. Barton, N. R. Dauphine twinning in polycrystalline quartz / N. R. Barton, Hans-Rudolf Wenk // *Model and Simul. Mater. Sci. and Eng.* – 2007. – Vol. 15, № 3. – P. 369–384.
216. Cheng, S.-Yu. Transformation-induced twinning: The 90° and 180° ferroelectric domains in tetragonal barium titanate / S.-Yu Cheng, N.-J. Ho, H.-Y. Lu // *J. Amer. Ceram. Soc.* – 2006. – Vol. 89, № 7. – P. 2177–2187.
217. Turan, S. High resolution transmission electron microscopy of the planar defect structure of hexagonal boron nitride / S. Turan, K. M. Knowles // *Phys. status solidi. A*. – 1995. – Vol. 150, № 1. – P. 227–237.
218. The atomic structure of twin boundaries in rutile / W.-Y. Lee, P. D. Bristowe [et al.] // *Phil. Mag. Lett.* – 1993. – Vol. 68, № 5. – P. 309–314.

219. Головин, Ю. И. Нано- и микротвердость твердых тел – современные проблемы / Ю. И. Головин, А. И. Тюрин // Вестн. Тамб. гос. ун-та. – 2000. – Т. 5, № 2/3. – С. 251–253.

220. Головин, Ю. И. Наноиндентирование и его возможности / Ю. И. Головин. – М. : Машиностроение, 2009. – 312 с.

221. Исследование износостойкости тонких нитридных покрытий на стальных подложках атомно-силовой микроскопией с алмазным зондом / Т. А. Кузнецова [и др.] // Трение и износ. – 2017. – Т. 38, № 6. – С. 475–481.

222. Рущиц, С. В. Нанодвойникование мартенситных кристаллов и теория адаптивных фаз / С. В. Рущиц, В. Л. Ильичев // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Металлургия». – 2008. – Т. 11, № 24 (124). – С. 44–46.

223. Акчурин, М. Ш. Двойникование кристаллов как механизм создания совершенных нанокристаллических материалов / М. Ш. Акчурин, Р. В. Галиулин, П. П. Федоров // Вестн. Тамб. гос. ун-та. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 549–552.

224. Superstrength through nanotwinning / Q. An [et al.] // Nano Lett. – 2016. – Vol. 16, № 12. – P. 7573–7579.

225. Nanotwinning and structural phase transition in CdS quantum dots / P. Kumar [et al.] // Nanoscale Res Lett. – 2012. – Vol. 7, № 1. – P. 584.

226. Mylvaganam, K. Nanotwinning in monocrystalline silicon upon nanoscratching / K. Mylvaganam, L. C. Zhan // Scripta Materialia. – 2011. – Vol. 65. – P. 214–216.

227. Nanotwinning and amorphization of boron suboxide / C. Kunka [et al.] // Acta Materialia. – 2018. – Vol. 147. – P. 195–202.

228. О движении ростовой межзеренной границы двойниковой ориентации в бикристаллах сплава Fe+3,5%Si / М. Е. Босин [и др.] // Физика твердого тела. – 1996. – Т. 38, № 12. – С. 3625–3627.

229. Баранникова, С. А. Локализация пластической деформации двойникования в монокристаллах легированного γ -Fe / С. А. Баранникова, В. И. Данилов, Л. Б. Зуев // Журн. техн. физики. – 2002. – Т. 72, № 9. – С. 63–66.

230. Extrinsic effects in twinned ferroelectric polycrystals / R. Porez [et al.] // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 102, № 4. – P. 1–9.

231. Изменение спектра фотолюминисценции вблизи двойниковых границ в кристаллах ZnTe, полученных при быстрой кристаллизации / В. С. Багаев [и др.] // Физика твердого тела. – 2008. – Т. 50, № 5. – С. 774–780.

232. Марченко, В. И. О двойниковании смектиков / В. И. Марченко // Письма в ЖЭТФ. – 2007. – № 11/12. – С. 841.
233. Herbsommer, J. A. Interaction of vortices with oriented twin boundaries in single-crystal $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ / J. A. Herbsommer, G. Nieva, J. Luzuriaga // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 61, № 17. – P. 11745–11751.
234. Kienle, L. Polysintetic twinning in RbIn_3S_5 / L. Kienle, A. Simon // J. Solid State Chem. – 2002. – Vol. 167, № 1. – P. 214–225.
235. Ferroelectric domains and twinning in high-quality $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$ single crystals / H. Amornin [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2006. – Vol. 88, № 6. – P. 1–3.
236. Миронов, Б. В. Двойникование в кристаллах $\text{Na}_5\text{YSi}_4\text{O}_{12}$ / Б. В. Миронов, Б. А. Максимов, М. И. Сирота // Кристаллография. – 1986. – Т. 31, № 2. – С. 244–247.
237. Особенности двойникования ромбических фаз кристаллов PbHfO_3 / В. Ю. Тополов [и др.] // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, № 3. – С. 755–760.
238. Тамазян, Р. А. Атомная структура и микродвойникование содалита / Р. А. Тамазян, Ю. А. Малиновский, А. М. Ильинец // Кристаллография. – 1988. – Т. 33, № 3. – С. 625–629.
239. Edel'man, V. S. STM observation of twin microlayers on cleaved bismuth surfaces / V. S. Edel'man // Phys. Lett. A. – 1996. – Vol. 210, № 1/2. – P. 105–109.
240. Старцев, В. И. Термическое травление и отжиг двойниковых прослоек в кристаллах сурьмы / В. И. Старцев, Ф. Ф. Лаврентьев, Л. М. Соيفер // Кристаллография. – 1960. – Т. 15, № 3. – С. 214–219.
241. Старцев, В. И. О некоторых явлениях, наблюдаемых при деформации монокристаллов сурьмы / В. И. Старцев, Л. М. Соифер // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134, № 3. – С. 99–103.
242. Структурные аспекты двойникования в ростовых бикристаллах цинка двойниковой ориентации / М. Е. Босин [и др.] // Физика твердого тела. – 1995. – Т. 37, № 10. – С. 3130–3134.
243. Солдатов, В. П. О некоторых особенностях двойникования монокристаллов цинка при низких температурах / В. П. Солдатов // Физика металлов и металловедение. – 1967. – Т. 24, № 4. – С. 744–753.
244. Яковлева, Э. С. Зависимость критического скалывающего напряжения двойникования и скольжения кристаллов кадмия от диаметра / Э. С. Яковлева, М. В. Якутович // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1940. – Т. 10, № 5. – С. 1146–1150.
245. Точицкий, Т. А. Двойникование в электролитических пленках никеля / Т. А. Точицкий, А. Э. Дмитриева // Поверхность. Рентген., синхротрон. и нейтрон. исслед. – 2008. – № 1. – С. 88–92.

246. Giant magnetic-field-induced strain in NiMnGa seven-layered martensitic phase / A. Sozinov [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2002. – Vol. 80. – P. 1746–1748.

247. Heczko, O. Temperature dependence and temperature limits of magnetic shape memory effect / O. Heczko, L. Straka // *Journal of Applied Physics.* – 2003. – Vol. 94, № 11. – P. 7139–7143.

248. Heczko, O. Magnetic properties and domain structure of magnetic shape memory Ni-Mn-Ga alloy / O. Heczko, K. Jurek, K. Ullakko // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* – 2001. – Vol. 226–230. – P. 996–998.

249. Romberg, J. Geometric factors on magnetically driven actuation behavior for polycrystalline Ni–M–Ga and its composites / J. Romberg [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds.* – 2013. – Vol. 577. – P. 344–347.

250. Superelasticity and shape memory effects in polycrystalline Ni–Mn–Ga microwires / M. F. Qian [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds.* – 2013. – Vol. 577. – P. 296–299.

251. Structural, physical and damping properties of melt-spun Ni–Mn–Ga wire-epoxy composites / S. Glock [et al.] // *Composites: Part A.* – 2014. – Vol. 63. – P. 68–75.

252. Intra-variant substructure in Ni-Mn-Ga: Conjugation boundaries / B. Muntifering [et al.] // *Acta Materialia.* – 2014. – Vol. 71. – P. 255–263.

253. Martensitic transformation in Ni–Mn–Ga/Si(100) thin films / I. R. Aseguinolaza [et al.] // *Thin Solid Films.* – 2014. – Vol. 558. – P. 449–454.

254. Fabricating Ni–Mn–Ga microdubes by diffusion of Mn and Ga into Ni tubes / P. Zheng [et al.] // *Intermetallics.* – 2014. – Vol. 49. – P. 70–80.

255. Controlling twin variant configuration in a constrained Ni–Mn–Ga sample using local magnetic fields / A. Smith [et al.] // *Scripta Materialia.* – 2014. – Vol. 77. – P. 68–70.

256. Superelasticity by reversible variants reorientation in a Ni–Mn–Ga microwire with bamboo grains / Z. L. Wang [et al.] // *Acta Materialia.* – 2015. – Vol. 99. – P. 373–381.

257. Lindquist, P. L. Working Ni–Mn–Ga single crystals in a magnetic field against a spring / P. L. Lindquist, P. Müllner // *Shape Memory and Superelasticity.* – 2015. – Vol. 1. – P. 69–77.

258. Magnetic-field-induced bending and straining of Ni–Mn–Ga single crystal beams with high aspect ratio / N. Kucza [et al.] // *Acta Materialia.* – 2015. – Vol. 95. – P. 284–290.

259. Influence of annealing on martensitic transformation and magnetic entropy in Ni_{37.7}Co_{12.7}Mn_{40.8}Sn_{8.8} magnetic shape memory alloy

ribbon / F. Chen [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2015. – Vol. 377. – P. 137–141.

260. Effect of porosity on the magneto-mechanical behavior of polycrystalline magnetic shape-memory Ni–Mn–Ga foams / C. Witherspoon [et al.] // Acta Materialia. – 2015. – Vol. 92. – P. 64–71.

261. Effect of directionally solidification on texture and magnetic-field-induced strain in Ni–Mn–Ga foams with coarse grains / P. Zheng [et al.] // Acta Materialia. – 2015. – Vol. 86. – P. 95–101.

262. Mechanical and magnetic behavior of oligocrystalline Ni–Mn–Ga microwires / P. Zheng [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2015. – Vol. 624. – P. 226–233.

263. Ullakko, K. Stabilizing a fine twin structure in Ni–Mn–Ga sample by coatings and ion implantation / K. Ullakko, M. Chmielus, P. Müllner // Scripta Materialia. – 2015. – Vol. 94. – P. 44–43.

264. Self-patterning of epitaxial Ni–Mn–Ga/MgO(001) thin films / I. R. Aseginolaza [et al.] // Acta Materialia. – 2016. – Vol. 111. – P. 194–201.

265. Influence of the twin microstructure on the mechanical properties in magnetic shape memory alloys / B. Reinholz [et al.] // Acta Materialia. – 2016. – Vol. 108. – P. 197–206.

266. Fatigue life and fracture mechanics of unconstrained Ni–Mn–Ga single crystals in a rotating magnetic field / T. Lawrence [et al.] // Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. A654. – P. 221–227.

267. Stress-assisted removal of conjugation boundaries in non-modulated Ni–Mn–Ga by coordinated secondary twinning / B. Muntifering [et al.] // Journal of Materials Science. – 2016. – Vol. 51. – P. 457–466.

268. The effect of step-like martensitic transformation on the magnetic entropy change of Ni_{40.6}Co_{8.5}Mn_{40.9}Sn₁₀ unidirectional crystal grown with the Bridgman-Stockbarger technique / F. Chen [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2017. – Vol. 691. – P. 269–274.

269. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 512 с.

270. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1978. – 792 с.

271. Gillman, J. J. Dislocation dynamics and the response of material to impact / J. J. Gillman // Appl. Mech. Rev. – 1968. – Vol. 21, № 8. – P. 767–783.

272. Владимиров, В. И. Дислокационные скопления в упругих полях / В. И. Владимиров, М. Д. Приемский // Журн. техн. физики. – 1982. – Т. 5, № 9. – С. 1721–1724.

273. Орлов, А. Н. Введение в теорию дефектов в кристаллах / А. Н. Орлов. – М. : Высш. шк., 1983. – 144 с.

274. Эшелби, Дж. Континуальная теория дислокаций / Дж. Эшелби. – М. : ИЛ, 1963. – 248 с.

275. Кренер, Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений / Э. Кренер. – М. : Мир, 1965. – 102 с.

276. Киселев, С. П. Внутренние напряжения в твердом теле с дислокациями / С. П. Киселев // Приклад. механика и техн. физика. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 131–136.

277. Киселев, С. П. Модель упругопластического деформирования материалов на основе калибровочной теории дефектов с учетом диссипации энергии / С. П. Киселев // Приклад. механика и техн. физика. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 177–187.

278. Ханнанов, Ш.Х. Модель идеальной релаксации термоупругих напряжений при выращивании монокристаллов / Ш. Х. Ханнанов, С. П. Никаноров, С. И. Бахолдин // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45, № 6. – С. 1020–1023.

279. Белай, О. В. Расчет полей внутренних напряжений для плоскодеформированного состояния упругого тела с дислокациями / О. В. Белай, С. П. Киселев // Приклад. механика и техн. физика. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 116–123.

280. Лифшиц, И. М. Несколько соображений о двойниковании кальцита / И. М. Лифшиц, И. В. Обреимов // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1948. – Т. 12, № 2. – С. 65–80.

281. Understanding modulated twin transition at the atomic level / M. Nan [et al.] // Acta mater. – 2007. – Vol. 55, № 5. – P. 1731–1740.

282. Плескачевский, Ю. М. Этапы развития и уровни организации структуры материалов: адаптивные композиты / Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько, С. В. Стельмах // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 5. – С. 119–123.

283. Pleskachevsky, Yu. M. Evolution and structural levels of materials: adaptive composites / Yu. M. Pleskachevsky, S. V. Shilko, S. V. Stelmakh // Journal of Wave–Material Interaction. – 1999. – Vol. 14, № 1/2. – P. 49–58.

284. Сергиевич, Н. В. Автолокализация дефектов в адаптивных композитах: вероятностная модель процесса / Н. В. Сергиевич, С. В. Шилько, М. Д. Юдин // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 504–509.

285. Shilko, S. V. The mathematical simulation of free boundary evolution in frictional contact / S. V. Shilko, Yu. M. Pleskachevsky // *Boundary Elements Communications Journal*. – 2001. – Vol. 12, № 2/3. – P. 18–33.

286. Плескачевский, Ю. М. Актуальные проблемы материаловедения 21 века / Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько // *Порошковая металлургия : Респ. межвед. сб. науч. тр. – Вып. 29. – Минск, 2006. – С. 28–42.*

287. Шилько, С. В. Ауксетичные пороматериалы: трение, устойчивость, мультимодульность / С. В. Шилько, Е. М. Петроковец, Ю. М. Плескачевский // *Механика – 2007 : сб. науч. тр. III Белорус. конгр. по теорет. и приклад. механике ОИМ НАН Белоруси, Минск, 16–18 окт. 2007 г. – Минск, 2007. – С. 275–281.*

288. Шилько, С. В. Биомеханический анализ протезирующих материалов / С. В. Шилько // *9 Всерос. съезд по теорет. и приклад. механике. – Н. Новгород, 22–28 авг. 2006 г. / Нижегород. гос. ун-т. – 2006. – С. 170.*

289. Плескачевский, Ю. М. Создание полимерных композитов и эксплуатация изделий из них на принципе подвижности межфазных границ / Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько // *Поликомтриб – 2007 : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф., Гомель, 16–19 июля 2007 г. – Гомель, 2007. – С. 9.*

290. Плескачевский, Ю. М. Новые тенденции в материаловедении полимерных материалов / Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько // *Тез. докл. XX Междунар. науч.-техн. конф. «Химические реактивы, реагенты и процессы малотоннажной химии “Реактив-2007”». – Минск, 2–4 окт. 2007 г. – Минск, 2007. – С. 10.*

291. Pleskachevsky, Yu. M. Adaptive polymer composites in biomechanical applications / Yu. M. Pleskachevsky, S. V. Shilko // *Mech. of Comp. Mater. MCM – 2008 : 15 Int. Conf., Riga, 29 May–2 June 2008 / Inst. Polymer Mechanics. – P. 208–209.*

292. Modeling self-healing process of structural defects in adaptive materials / S. V. Shilko [et al.] // *Поликомтриб – 2009 : тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – Гомель : ИММС НАН Беларусь, 22–25 июня 2009 г. – С. 13.*

293. Плескачевский, Ю. М. Адаптивные приборостроительные материалы и системы / Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько // *Приборостроение – 2009 : Междунар. науч.-техн. конф. – Минск, 11–13 нояб. 2009 г. – С. 308–309.*

294. Composition dependence on the martensitic structures of the Mn-rich NiMnGa alloys / C. Jiang [et al.] // *Acta Materialia*. – 2004. – Vol. 52. – P. 2779–2785.

295. Остриков, О. М. Влияние скорости нагружения на механизм пластической деформации в висмуте / О. М. Остриков, С. Н. Дуб // *Журн. техн. физики*. – 2001. – Т. 71, № 5. – С. 44–46.

296. Боярская, Ю. С. Деформирование кристаллов при испытаниях на микротвердость / Ю. С. Боярская. – Кишинев : Штиинца, 1972. – 236 с.

297. Головин, Ю. И. Магнитопластичность твердых тел / Ю. И. Головин // *Физика твердого тела*. – 2004. – Т. 46, № 5. – С. 769–803.

298. Yoo, M. H. Twinning in zinc by indentation / M. H. Yoo, C. T. Wei // *J. Appl. Phys.* – 1967. – Vol. 38, № 7. – P. 2974–2976.

299. Бойко, В. С. Динамика развития двойника под сосредоточенной нагрузкой / В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, В. Ф. Кившик // *Физика твердого тела*. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 3655–3657.

300. Верещагин, М. Н. Негомогенная пластическая деформация аморфных сплавов на основе железа : монография / М. Н. Верещагин, В. Г. Шепелевич, О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004. – 134 с.

301. Особенности пластической деформации при индентировании пирамидой Виккерса поверхности аморфного сплава Fe–Cr–Mo–V–B–Si / М. Н. Верещагин [и др.] // *Физика металлов и металловедение*. – 2002. – Т. 93, № 5. – С. 101–104.

302. Исследование методом локального деформирования особенностей пластической деформации аморфного сплава Fe–Cr–Mo–V–B–Si / М. Н. Верещагин [и др.] // *Кристаллография*. – 2002. – Т. 47, № 4. – С. 691–696.

303. Characterization of the (0001) cleavage surface of antimony single crystals using scanning probe microscopy: Atomic structure, vacancies, cleavage steps, and twinned interlayers / B. Stegemann [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 2004. – Vol. 69. – P. 155–432.

304. Тепловое расширение сплава $\text{Ni}_{2.14}\text{Mn}_{0.81}\text{Fe}_{0.05}\text{Ga}$ в крупнокристаллическом, субмикронном и нанокристаллическом состояниях / Р. Н. Имашев [и др.] // *Физика твердого тела*. – 2005. – Т. 47, № 10. – С. 1867–1870.

305. Рунов, В. В. Мезоструктура сплавов $\text{Ni}_{2+x}\text{Mn}_{1+x}\text{Ga}$ в области концентраций, соответствующих совмещенному магнитоструктурному переходу / В. В. Рунов, М. К. Рунова, В. В. Ховайло // *Физика твердого тела*. – 2010. – Т. 52, № 7. – С. 1249–1252.

306. Еремеев, С. В. Исследование границ раздела сплав Гейслера – полупроводник / С. В. Еремеев, С. С. Кульков, С. Е. Кулькова // Физика твердого тела. – 2008. – Т. 50, № 2. – С. 250–260.

307. Остриков, О. М. Исследование пластической деформации поверхности монокристалла Ni_2MnGa методом индентирования / О. М. Остриков, А. Л. Созинов, А. В. Сорока // Инженер.-физ. журн. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 1132–1141.

308. Остриков, О. М. Закономерности слияния двойников в монокристаллах висмута / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2012. – Т. 113, № 8. – С. 846–852.

309. 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni–Mn–Ga / S. J. Murray [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2000. – Vol. 77. – P. 886–888.

310. Кинетика изменения двойниковой структуры в монокристаллах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ / Л. А. Доросинский [и др.] // Письма в журн. техн. физики. – 1989. – Т. 49, № 3. – С. 156–159.

311. Ясников, И. С. Получение материалов, насыщенных двойниковыми границами, с помощью метода компактирования микрочастиц электролитического происхождения / И. С. Ясников, Д. А. Денисова // Журн. техн. физики. – 2012. – Т. 82, № 1. – С. 36–39.

312. Косевич, А. М. Соотношение между дислокационной теорией двойников и макроскопической теорией Лифшица / А. М. Косевич, Л. А. Пастур // Физика твердого тела. – 1963. – Т. 5, № 7. – С. 1970–1978.

313. Якутович, М. В. Форма механического двойника и причины, ее обуславливающие / М. В. Якутович, Э. С. Яковлева // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1939. – Т. 9, № 7. – С. 884–888.

314. Остриков, О. М. Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 10–18.

315. Грабский, М. В. Структура границ зерен в металлах / М. В. Грабский. – М. : Металлургия, 1972. – 160 с.

316. Василевич, Ю. В. Выполнение условия равновесия твердого тела с нетонким остаточным двойником в случае плосконапряженного состояния / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Машиностроение. – 2017. – Вып. 30. – С. 195–199.

317. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2004. – 368 с.

318. Остриков, О. М. О возможности использования теории упругости в теории механического двойникования / О. М. Остриков // Физическое материаловедение и актуальные проблема прочности : сб. тез. VIII Междунар. шк. с элементами науч. шк. для молодежи, Тольятти, 3–12 сент. 2017 г. и LIX Междунар. конф., Тольятти, 5–8 сент. 2017 г. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С. 102–103.

319. Остриков, О. М. Дислокационная модель некогерентного нетонкого двойника / О. М. Остриков // Журн. техн. физики. – 2012. – Т. 82, № 11. – С. 38–42.

320. Остриков, О. М. О знаке величины плотности двойникующих дислокаций / О. М. Остриков // Физическое материаловедение и актуальные проблема прочности : сб. тез. VIII Междунар. шк. с элементами науч. шк. для молодежи, Тольятти, 3–12 сент. 2017 г. и LIX Междунар. конф., Тольятти, 5–8 сент. 2017 г. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С. 62.

321. Шаскольская, М. П. Кристаллография / М. П. Шаскольская. – М. : Высш. шк., 1984. – 376 с.

322. Василевич, Ю. В. Способ расчета полей смещений у клиновидного двойника / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Машиностроение. – Минск : БНТУ, 2007. – Вып. 23. – С. 317–320.

323. Остриков, О. М. Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Изв. РАН. Сер. «Механика твердого тела». – 2009. – № 4. – С. 52–58.

324. Василевич, Ю. В. Условие равновесия краевого клиновидного двойника, находящегося вдали от поверхности постдеформированного твердого тела в приближении бесконечно малых сил внутреннего трения / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Машиностроение. – 2018. – Вып. 31. – С. 205–213.

325. Василевич, Ю. В. Условие равновесия нетонкого винтового клиновидного двойника, находящегося вдали от поверхности недеформируемого кристалла / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Наука и техника. – 2018. – Т. 17, № 6. – С. 515–520.

326. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : Высш. шк., 1988. – 269 с.

327. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.

328. Остриков, О. М. Силовой баланс на границах остаточного клиновидного двойника / О. М. Остриков // Фазовые превращения и прочность кристаллов : сб. тез. IX Междунар. конф., 7–11 нояб. 2016 г., Черногоровка. – Черногоровка, 2016. – С. 63.

329. Griffith, A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids / A. A. Griffith // Phil. Trans. Roy. Soc., London. – 1920. – Vol. A221. – P. 162–198.

330. Griffith, A. A. The Theory of Rupture / A. A. Griffith // Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. Delft. – 1924. – P. 55–63.

331. Irwin, G. R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate / G. R. Irwin // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1957. – Vol. 24. – P. 361–364.

332. Остриков, О. М. Использование полипараксилиленовых тонких пленок при исследовании пластической деформации монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Приклад. механика и техн. физика. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 162–166.

333. Остриков, О. М. Учет формы границ клиновидного двойника в его макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т. 106, № 5. – С. 471–476.

334. Остриков, О. М. Исследование механического двойникования монокристаллов сурьмы методом наноиндентирования / О. М. Остриков, С. Н. Дуб // Инженер.-физ. жур. – 2003. – Т. 76, № 1. – С. 170–172.

335. Дуб, С. Н. Влияние скорости нагружения на механизм пластической деформации в висмуте и сурьме во время испытаний на нанотвердость / С. Н. Дуб, О. М. Остриков // Актуальные проблемы прочности : материалы XXXVII Междунар. семинара. – Киев, 2001. – С. 36.

336. Dub, S. N. The effect of loading rate on the mechanism of plastic deformation in bismuth studied by instrumented sharp indentations / S. N. Dub, O. M. Ostrikov // Symposium Z: Multiscale Materials Modeling / MRS Fall Meeting. – Boston, USA, 2000. – P. 54.

337. Способ определения микротвердости аморфных металлов : пат. Респ. Беларусь, G01N / П. Н. Гракович, Н. П. Глазырин, С. В. Паркалов, М. Н. Верещагин, О. М. Остриков ; заявитель ИММС НАН Беларуси. – № a20020778BY ; заявл. 23.09.02 ; опубл. 31.03.04 // Афіцыйны бюл. / Дзярж. пат. ведамства Рэсп. Беларусь. – 2004. – № 1. – С. 63.

338. Остриков, О. М. Определение на основании мезоскопической дислокационной модели равновесных параметров клиновидного двойника при отсутствии внешних напряжений / О. М. Остриков // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2009. – № 4. – С. 66–70.

339. Остриков, О. М. Закономерности слияния двойников в монокристаллах висмута / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2012. – Т. 113, № 8. – С. 846–852.

340. Остриков, О. М. Влияние плотности двойникующих дислокаций на конфигурацию полей напряжений вблизи клиновидного двойника с различной формой границ / О. М. Остриков // Приклад. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 199–204.

341. Верещагин, М. Н. Аналогии и различия в развитии сдвиговой пластической деформации при локальном деформировании аморфных и монокристаллических материалов / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков // Изв. высш. учеб. заведений. Чер. металлургия. – 2003. – № 3. – С. 35–37.

342. Остриков, О. М. Способ расчета полей напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла, в приближении непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах / О. М. Остриков // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2009. – № 4. – С. 36–39.

343. Остриков, О. М. Учет в дислокационной модели клиновидного двойника ступеньки на поверхности кристалла, обусловленной поворотом кристаллической решетки / О. М. Остриков // Физическое материаловедение : IX Междунар. шк. с элементами науч. шк. для молодежи, Тольятти, 9–13 сент. 2019 г. ; Актуальные проблемы прочности : LXI Междунар. конф., посвящ. 90-летию проф. М. А. Криштала, Тольятти, 9–13 сент. 2019 г.) : сб. материалов / отв. ред. Д. Л. Мерсон. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – С. 94.

344. Остриков, О. М. Угол наклона к поверхности вектора Бюргера дислокации у некогерентного двойника, цепочки дислокаций и дислокационной стенки / О. М. Остриков // Современные проблемы машиноведения : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. (науч. чтения, посвящ. П. О. Сухому), Гомель, 22–23 нояб. 2018 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого, Филиал ПАО «Компания «Сухой» ОКБ «Сухого» ; под общ. ред. А. А. Бойко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – С. 314–315.

345. Остриков, О. М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Журн. техн. физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.

346. Остриков, О. М. О возможности использования дислокаций бесконечной длины в плоской модели клиновидного двойника конечной длины / О. М. Остриков // XXIII Петербургские чтения по про-

блемам прочности, посвященные 100-летию ФТИ им. А. Ф. Иоффе и 110-летию со дня рождения чл.-кор. АН СССР А. В. Степанова, Санкт-Петербург, 10–12 апр. 2018 г. – СПб. : ВВМ, 2018. – С. 277.

347. Полухин, П. И. Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – М. : Metallurgia, 1982. – 584 с.

348. Остриков, О. М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой распределенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. «Машиностроение». – 2011. – № 4 (70). – С. 39–43.

349. Остриков, О. М. Расчет полей напряжений у полисинтетического двойника, находящегося у поверхности кристалла / О. М. Остриков // Инженер.-физ. журн. – 2009. – Т. 82, № 1. – С. 184–190.

350. Остриков, О. М. Методика расчета на основании макроскопической дислокационной модели полей напряжений у полисинтетического двойника, находящегося вдали от поверхности двойникового материала / О. М. Остриков // Вестн. Белорус. нац. техн. ун-та. – 2008. – № 5. – С. 68–70.

351. Остриков, О. М. Классификация полисинтетических двойников / О. М. Остриков // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 3–9.

352. Остриков, О. М. Полисинтетическое двойникование кристаллов и научная значимость его классификации / О. М. Остриков // Фазовые превращения и прочность кристаллов : сб. тез. X Междунар. конф., Черногоровка, 29 окт.–2 нояб. 2018 г. / под ред. Б. Б. Страумала. – Черногоровка. – С. 137.

353. Остриков, О. М. Способ расчета полей напряжений в деформируемом упругом полупространстве при наличии у его поверхности полисинтетического двойника / О. М. Остриков // Изв. РАН. Сер. «Механика твердого тела». – 2012. – № 3. – С. 78–88.

354. Остриков, О. М. О величине внутренних напряжений на двойниковых границах / О. М. Остриков // Физическое материаловедение и актуальные проблемы прочности : сб. тез. VIII Междунар. шк. с элементами науч. шк. для молодежи, Тольятти, 3–12 сент. 2017 г. и LIX Междунар. конф., Тольятти, 5–8 сент. 2017 г. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С. 63.

355. Остриков, О. М. Формирование наноразмерных фаз в нанодвойниках / О. М. Остриков // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2006. – № 3. – С. 3–7.

356. Остриков, О. М. Расчет на основании мезоскопической дислокационной модели собственной энергии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 2. – С. 22–24.

357. Остриков, О. М. Условие равновесия наноразмерных зародышей двойников / О. М. Остриков // Вестн. Белорус. нац. техн. ун-та. – 2007. – № 2. – С. 26–28.

358. Остриков, О. М. Расчет энергии нанодвойника клиновидной формы в рамках дислокационной мезоскопической модели / О. М. Остриков // Журн. техн. физики. – 2008. – Т. 78, № 2. – С. 58–62.

359. Остриков, О. М. Дислокационная модель нанодвойника / О. М. Остриков // Изв. РАН. Сер. «Механика твердого тела». – 2008. – № 5. – С. 124–129.

360. Остриков, О. М. Расчет деформаций у вершины клиновидного двойника на основании мезоскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Вест. Могилев. гос. ун-та. – 2008. – № 1 (29). – С. 166–175.

361. Остриков, О. М. Расчет энергии взаимодействия двойнивающих дислокаций клиновидного двойника, проведенный на основании мезоскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Инженер.-физ. журн. – 2009. – Т. 82, № 6. – С. 1199–1203.

362. Остриков, О. М. Мезоскопическая дислокационная модель развивающегося клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – 2010. – № 3 (42) – С. 3–8.

363. Василевич, Ю. В. Расчет полей смещений и деформаций у клиновидного двойника на основании мезоскопической дислокационной модели / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Вестн. Белорус. нац. техн. ун-та. – 2011. – № 4. – С. 52–55.

364. Остриков, О. М. Нанодвойникование монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Изв. высш. учеб. заведений. Чер. металлургия. – 2002. – № 3. – С. 51–52.

365. Остриков, О. М. Нанодвойникование как эффективный способ формирования композитов с наноразмерными включениями / О. М. Остриков // Структурные основы модификации материалов методами нетрадиционных технологий : материалы науч. конф. / Ин-т атом. теплоэнергетики. – Обнинск, 2007. – С. 89–90.

366. Остриков, О. М. Напряженное состояние у наноразмерного двойникового зародыша при наличии внутри него точечного источника расширения / О. М. Остриков // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – 2010. – № 1 (40) – С. 16–22.

367. Остриков, О. М. Дислокационная модель нанодвойникового композита / О. М. Остриков // Вестн. Могилев. гос. ун-та им. А. А. Кулешова. – Сер. В. – 2013. – № 1 (41). – С. 35–46.

368. Солдатов, В. П. О равновесной форме двойника, затормозившегося у препятствий / В. П. Солдатов, В. И. Старцев // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 166, № 3. – С. 588–591.

369. Гиндин, И. А. Экспериментальное определение формы и расчет поля напряжений заклинившихся двойниковых прослоек / И. А. Гиндин, Л. А. Чиркина // Физика твердого тела. – 1969. – Т. 11, № 1. – С. 120–123.

370. Остриков, О. М. Использование дислокационной мезоскопической модели для расчета полей напряжений, относительной объемной дилатации и сил взаимодействия в системе «клиновидный нанодвойник – полная дислокация» / О. М. Остриков // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2012. – Т. 17, № 2. – С. 7–16.

371. Способ определения интенсивности выкрашивания материалов : пат. Респ. Беларусь, МПК7 G01N 3/08 / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков, Д. Б. Зюков, П. Н. Гракович, С. В. Шилько, Н. П. Глазырин ; заявитель ИММС НАН Беларуси. – № a20030020BY ; заявл. 10.01.03 ; опубл. 30.09.04 // Афіцыйны бюл. / Дзярж. пат. ведамства Рэсп. Беларусь. – 2004. – № 3. – С. 61.

372. Остриков, О. М. Расчет распределения примеси и потоков ее миграции у клиновидного двойника на основании макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2009. – № 4. – С. 62–65.

373. Василевич, Ю. В. Теория двойникового деформируемых твердых тел / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Механика – 2009 : материалы IV Белорус. конгр. по теорет. и приклад. механике. – Минск, 2009. – С. 78–82.

374. Остриков, О. М. Потоки миграции примесей у клиновидного двойника / О. М. Остриков // Современные проблемы машиноведения : материалы VI Междунар. конф. – Гомель, 2006. – С. 59–60.

375. Остриков, О. М. Обоснование возможности формирования слоистых материалов на основе явления полисинтетического механического двойникового, вызванного интенсивной деформацией / О. М. Остриков // Структурные основы модификации материалов методами нетрадиционных технологий : материалы науч. конф. / Ин-т атом. теплоэнергетики. – Обнинск, 2007. – С. 88–89.

376. Остриков, О. М. Распределение легирующего компонента в полисинтетических двойниках и теоретический прогноз формирова-

ния слоистых материалов с использованием явления полисинтетического двойникования / О. М. Остриков // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2006. – Т. 11, № 3. – С. 54–56.

377. Остриков, О. М. Напряженное состояние у клиновидного двойника при дисбалансе плотностей двойникующих дислокаций / О. М. Остриков // *Приклад. механика и техн. физика.* – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 180–182.

378. Остриков, О. М. Расчет напряжений и вывод условия равновесия клиновидного нанодвойника, находящегося у поверхности ионно-имплантированного материала / О. М. Остриков // *Структурные основы модификации материалов методами нетрадиционных технологий : материалы науч. конф. / Ин-т атом. теплоэнергетики.* – Обнинск, 2007. – С. 84–85.

379. Остриков, О. М. Мезоскопическая дислокационная динамическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // *Современные проблемы машиноведения : материалы VII Междунар. науч.-техн. конф.* – Гомель, 2008. – С. 55–56.

380. Остриков, О. М. Дислокационная модель полисинтетического двойника / О. М. Остриков, Е. В. Корнеевец // *Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого.* – 2006. – № 3. – С. 42–50.

381. Остриков, О. М. Дислокационная мезоскопическая модель полисинтетического двойника / О. М. Остриков // *Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого.* – 2007. – № 2. – С. 11–21.

382. Остриков, О. М. Производность клиновидной формы двойников от линзовидной / О. М. Остриков // *Физическое материаловедение и актуальные проблема прочности : сб. тез. VIII Междунар. шк. с элементами науч. шк. для молодежи, Тольятти, 3–12 сент. 2017 г. и LIX Междунар. конф., Тольятти, 5–8 сент. 2017 г.* – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2017. – С. 66.

383. Савенко, В. С. Новые каналы реализации механического двойникования / В. С. Савенко // *Письма в журн. техн. физики.* – 1998. – Т. 24, № 9. – С. 43–49.

384. Остриков, О. М. Напряженное состояние у вершины клиновидного двойника / О. М. Остриков // *Изв. РАН. Сер. «Механика твердого тела».* – 2004. – № 2. – С. 104–113.

385. Остриков, О. М. Анализ напряженного состояния у вершины клиновидного механического двойника / О. М. Остриков, Ю. В. Василевич // *Машиностроение.* – 2007. – Вып. 23. – С. 320–324.

386. Василевич, Ю. В. Условие равновесия остаточного краевого клиновидного нанодвойника в постдеформированном твердом теле /

Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Наука и техника. – 2017. – Т. 16, № 4. – С. 335–342.

387. Ovid'ko, I. A. Deformation twinning through nanoscale ideal shears in nano- and polycrystalline materials at ultra high stresses / I. A. Ovid'ko, A. G. Sheinerman // Rev Adv. Mater. Sci. – 2011. – № 27. – P. 189–194.

388. Гуткин, М. Ю. Пластическое течение и разрушение аморфных межкристаллитных прослоек в керамических нанокompозитах / М. Ю. Гуткин, И. А. Овидько // Физика твердого тела. – 2010. – Т. 52, № 4. – С. 668–677.

389. Остриков, О. М. Разрушение и сопутствующие ему эффекты в ферромагнитном монокристалле Ni_2MnGa с эффектом памяти формы / О. М. Остриков, Е. В. Шматок // Инженер.-физ. журн. – 2015. – Т. 88, № 1. – С. 272–279.

390. Остриков, О. М. Методика прогнозирования распределения полей напряжений в системе «остаточный клиновидный двойник – трещина» / О. М. Остриков // Вест. Могилев. гос. ун-та им. А. А. Кулешова. Сер. В, Природоведческие науки (математика, физика, биология). – 2019. – № 2 (54). – С. 69–78.

391. Boyko, V. S. Microstructure design by twinning in high-temperature superconductor $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ for enhanced J_c at high magnetic fields / V. S. Boyko, Siu-Wai Chan // Physica C. – 2007. – № 466. – P. 56–60.

392. Mei, L. Twin engineering for high critical current densities in bulk $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ / L. Mei, V. S. Boyko, Siu-Wai Chan // Physica C. – 2006. – № 439. – P. 78–84.

393. Остриков, О. М. Использование дислокационной мезоскопической модели для расчета полей смещений и деформаций в системе «клиновидный нанодвойник – полная дислокация» / О. М. Остриков // Вест. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундамент. науки. – 2011. – № 12. – С. 77–85.

Научное издание

Остриков Олег Михайлович

**МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ
В РЕАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ
С ОСТАТОЧНЫМИ НЕКОГЕРЕНТНЫМИ
ДВОЙНИКАМИ**

Монография

Ответственный за выпуск *Н. Г. Мансурова*

Редакторы: *А. В. Власов, Н. В. Гладкова,
Т. Н. Мисюрова*

Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 30.12.19.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 16,27. Уч.-изд. л. 16,28.
Тираж 100 экз. Заказ № 838/38.

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель