

УДК 536.2.01

**ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ
ЧАСТЬ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА
ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ И ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ
СИСТЕМ**

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Изучены новые точные решения волнового уравнения с источниками энергии, обладающими кубической и квадратичной нелинейностями. Рассмотрена динамика нелинейных тепловых волн, разбегающихся в противоположных друг другу направлениях. Существенно, что волны распространяются по пространственно-неоднородному тепловому фону. Дана оценка входных параметров процесса, при которых на фронте волны наблюдается аномальный температурный отклик среды: подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры. Показано, что инверсия процессов «дозвук – сверхзвук» приводит к инверсии расположения температурных интервалов, в которых наблюдается явление «отрицательная теплоемкость». Для двухкомпонентной системы представлен пример периодического появления/исчезновения неклассических ОТ-состояний. Даны примеры точного аналитического описания стационарной 2D системы типа «реакция – диффузия». Установлено, что характер температурных колебаний в значительной степени зависит от таких факторов, как знакопеременность источника и количественное соотношение между линейными и нелинейными слагаемыми в выражениях для функций конкурирующих источников.

Ключевые слова: динамика тепловых волн, распад слабого разрыва, «отрицательная теплоемкость»; 2D система «реакция – диффузия».

**DIFFUSION AND KINETIC PROCESSES
IN NON-EQUILIBRIUM THERMOPHYSICAL SYSTEMS
WITH ENERGY SOURCES. PART 2. THE ANALYTICAL
STRUCTURE OF ONE-COMPONENT
AND TWO-COMPONENT SYSTEMS**

O. N. SHABLOVSKY, D. G. KROL, I. A. KONTSEVOI

*Educational Institution “Sukhoi State Technical University
of Gomel”, the Republic of Belarus*

New accurate solutions of the wave equation with energy sources with cubic and quadratic nonlinearities has been studied. The dynamics of nonlinear thermal waves scattering in opposite directions has been considered. It is important to mention that the waves propagate along a spatially inhomogeneous thermal background. The process input parameters are estimated where an anomalous temperature response of the medium is observed at the wavefront: heat application/abstraction gives decrease/increase in temperature. It is shown that the inversion of the “subsonic – supersonic” processes leads to the inversion of the temperature range location wherein the “negative heat capacity” phenomenon is observed. For a two-component system, an example of the periodic appearance/disappearance of non-classical negative heat capacity states is presented. The examples of an accurate analytical description of a stationary 2D system of the reaction-diffusion type are given. It has been established that to a large extent the temperature variation nature depends on factors such as sign alternation of the source and quantitative relationship between linear and nonlinear summands in the expressions for the competing source functions.

Keywords: thermal wave dynamics, weak discontinuity decay, “negative heat capacity”, 2D reaction – diffusion system.

Введение

Продолжим исследование [1] тепловых структур в системе «среда – источник энергии». Объектами исследования являются динамика нелинейных тепловых волн и градиентные свойства двумерных стационарных состояний систем типа «реакция – диффузия». Прикладные аспекты данной работы связаны с двумя задачами: 1) локализованное в пространстве высокоинтенсивное тепловое воздействие на материал; 2) рост кристалла из переохлажденного расплава в условиях конкуренции между выделением кристаллизационного тепла и теплоотводом от твердой фазы во внешнюю среду. Библиография вышеперечисленных проблем приведена в [1].

Цель второй части статьи: изучить новые динамические свойства тепловых волн, формирующихся при распаде слабого разрыва теплового поля; построить новые стационарные 2D структуры в системах типа «реакция – диффузия». Современное состояние исследований этих задач имеется в [2]–[6].

Аномальный температурный отклик среды. Запишем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + k_v$$

в характеристической форме

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{k_v}{4}, \quad (1)$$

применяя характеристические переменные:

$$\alpha = x' + t, \quad \beta = x' - t, \quad x' = x/w.$$

Здесь $\tau = T - T^0$ есть отклонение температуры от равновесного значения $T^0 \equiv \text{const}$. Подробное описание применяемых нами математических моделей дано в [1]. Полагаем $w \equiv \text{const}$, а источник $k_v(\tau)$ считаем нелинейным по температуре. Допускается также вариант, когда нелинейный источник является еще и неоднородным по одной из волновых координат, например, по координате β : $k_v = k_v(\tau, \beta)$.

Для источника

$$k_v(\tau, \beta) = -4f_1 \frac{\phi}{\varphi} \tau(1 - B_1 \tau)(1 - 2B_1 \tau) \quad (2)$$

уравнение (1) имеет точное решение [7]:

$$\tau(\alpha, \beta) \equiv \tau = B_2 \varphi E / (1 + B_1 B_2 \varphi E), \quad E = \exp(f_1 \alpha), \quad (3)$$

$$x' \in (-\infty, \infty), \quad t \geq 0, \quad \tau \in (0, B_1^{-1}).$$

В этом нетрудно убедиться, если учесть, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = f_1 \tau(1 - B_1 \tau), \quad \frac{\partial \tau}{\partial \beta} = \frac{\phi}{\varphi} \tau(1 - B_1 \tau).$$

Здесь $\varphi = \varphi(\beta)$ – произвольная ограниченная функция; $\dot{\varphi} = d\varphi/d\beta$; f_1, B_1, B_2 – произвольные постоянные. Эти произвольные параметры следует выбирать так, чтобы функция $\tau(\alpha, \beta)$ была непрерывной и ограниченной. Источник энергии (2) представляет собой полином третьей степени по отношению к аргументу τ и обращается в ноль в трех температурных точках:

$$k_v = 0, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_1 = 1/B_1, \quad \tau_2 = 1/(2B_1). \quad (4)$$

Физическая интерпретация решения (2), (3) состоит в следующем. В начальном состоянии ($t = 0$) при $x = 0$ находится слабый разрыв теплового поля. Этот разрыв распадается на две волны $\alpha = 0, \beta = 0$, распространяющиеся влево ($x \leq 0$) и вправо ($x \geq 0$) вдоль оси x . Перед волной $x' = t$, бегущей вправо, температурный фон имеет вид:

$$\tau_r(x') = B_2\varphi(0)\exp(2f_1x')/[1 + B_1B_2\varphi(0)\exp(2f_1x')], \quad x' \geq 0.$$

Перед волной $x' = -t$, бегущей влево, неоднородный температурный фон

$$\tau_l(x') = B_2\varphi(2x')/[1 + B_1B_2\varphi(2x')], \quad x' \leq 0$$

можно варьировать посредством функции $\varphi(2x')$. Таким образом, явная зависимость источника k_v от волновой координаты β означает учет влияния начальной неоднородности теплового поля при $x \leq 0$ на энергообмен в системе «среда – источник энергии». Решение (3) определяет тепловое поле, содержащее две волны $\alpha = 0, \beta = 0$, разбегающиеся в противоположных друг другу направлениях.

Проведем числовые расчеты для трех вариантов выбора функции $\varphi = \varphi(\beta)$ в (2).

Вариант 1. Источник энергии однороден по отношению к волновой координате β :

$$\varphi = \varphi_1 \exp(r\beta), \quad \varphi_1, r - \text{const}. \quad (5)$$

Вариант 2. Режим, при котором происходит резкое изменение функции φ в интервале $(\varphi_0 - \varphi_1, \varphi_0 + \varphi_1)$:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \text{th}(r\bar{\beta}), \quad \bar{\beta} = \beta + \beta_1, \quad \varphi_0, \varphi_1, \beta_1, r - \text{const}. \quad (6)$$

Вариант 3. Режим периодической по β неоднородности источника энергии:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(r\beta), \quad \varphi_0, \varphi_1, r - \text{const}. \quad (7)$$

Некоторые результаты вычислений для вариантов (5)–(7) показаны на рис. 1–3. Расчеты показали, что своеобразие режимов (6) и (7) наблюдается главным образом на фронте волны, распространяющейся влево (см. левые столбцы рис. 1–3). Обращает на себя внимание факт существования неоднозначной (гистерезисной) зависимости $k_v(\tau)$ на фронте левой волны в режиме периодической неоднородности (см. рис. 3). Для правой волны каждому значению τ соответствует единственное значение $k_v(\tau)$. Представленные здесь волны обладают свойством «отрицательной теплоемкости» (ОТ). Этот термин означает, что среда реагирует аномальным образом на воздействие источника энергии: подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры. Следовательно, при «отрицательной теплоемкости» необходимо иметь: 1) если $k_v > 0$, то $\partial\tau/\partial t < 0$; 2) если $k_v < 0$, то $\partial\tau/\partial t > 0$. Обзор экспериментальных и теоре-

тических работ по этой проблеме и примеры «отрицательной теплоемкости» в задачах конвекции стратифицированных двухкомпонентных жидкостей в поле силы тяжести даны в [8], [9]. Нелинейные аспекты явления «отрицательной теплоемкости» изучены в [7] с позиции теории локально-неравновесного теплопереноса. На рис. 1–3 области ОТ отмечены черным треугольником.

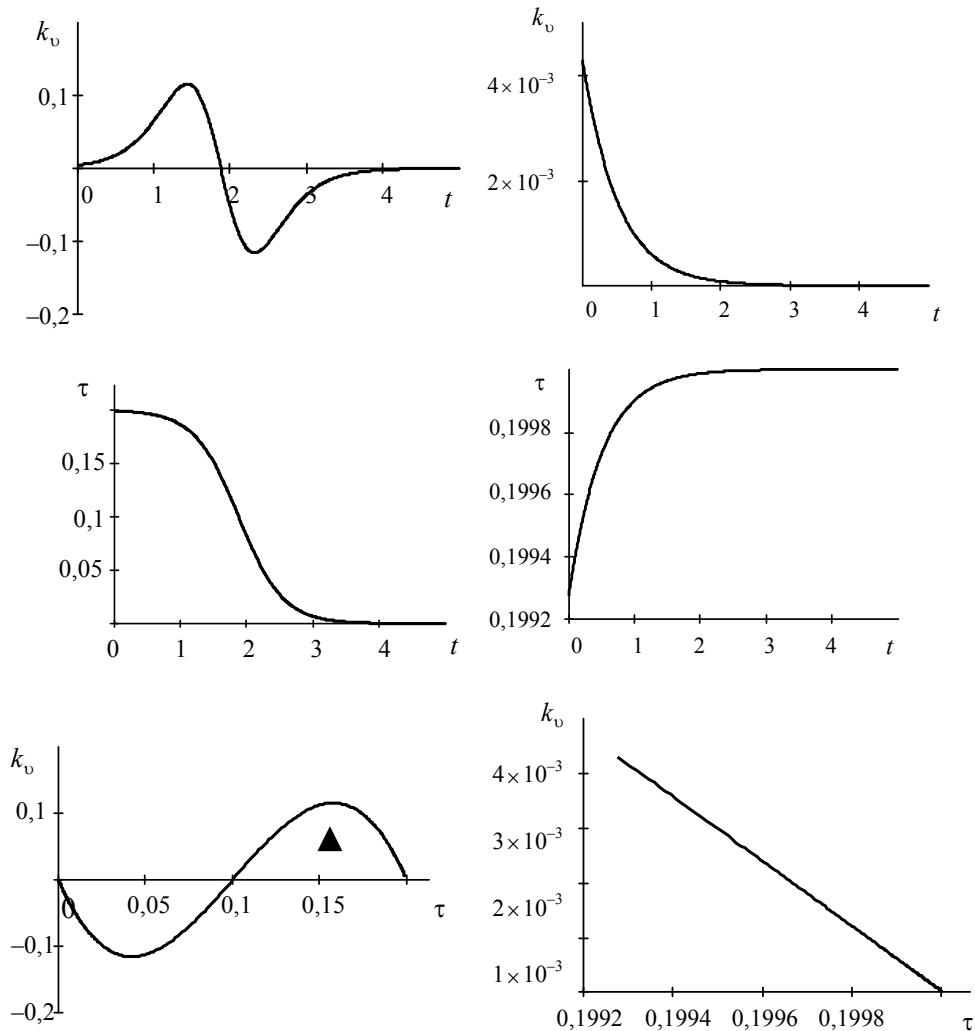


Рис. 1. Кубическая нелинейность источника энергии (2): случай (5), источник зависит только от температуры. Температура, объемное выделение тепла на фронте волны, бегущей влево (левый столбец) и на фронте волны, бегущей вправо (правый столбец); $f_1 = 1$; $B_1 = 5$; $B_2 = 5$; $r = 1,5$; $\varphi_1 = 11$; черным треугольником ▲ отмечена область ОТ

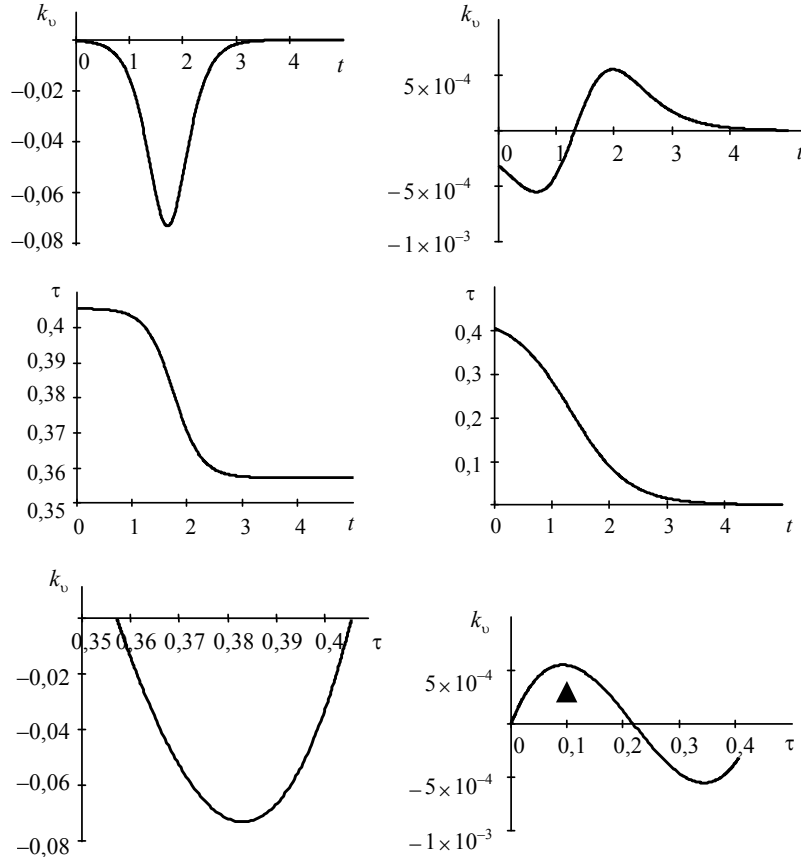


Рис. 2. Кубическая нелинейность источника энергии (2): случай (6) резкого изменения функции неоднородности фона. Температура и объемное выделение тепла на фронте волны, бегущей влево (левый столбец) и на фронте волны, бегущей вправо (правый столбец): $f_1 = -1$; $B_1 = 2,3$; $B_2 = 2$; $r = 1$; $\varphi_0 = 2$, $\varphi_1 = 1$, $\beta_1 = 3$; черным треугольником \blacktriangle отмечена область ОТ

Для источника

$$k_v(\tau, \beta) = \frac{6D_1}{\sqrt{\tau_{11}}} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} (\tau - \tau_{11}) \left(\frac{\tau_{11}}{3} - \tau \right) \quad (8)$$

уравнение (1) имеет точное решение [7]:

$$\tau(\alpha, \beta) = \tau_{11} (\varphi E - 1)^2 / (\varphi E + 1)^2, \quad E = \exp(g_1 \alpha), \quad (9)$$

$$\tau_{11} = f / D_1, \quad g_1 = \sqrt{f D_1}; \quad x' \in (-\infty, \infty), \quad t \geq 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = g_1 \left(\frac{\tau}{\tau_{11}} \right)^{1/2} (\tau_{11} - \tau), \quad \frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 4\tau E \dot{\varphi} / [(\varphi E - 1)(\varphi E + 1)].$$

Здесь $\varphi = \varphi(\beta)$ – произвольная функция; $\dot{\varphi} = d\varphi/d\beta$; f, D_1 – произвольные постоянные; ясно, что $\tau_{11} = f^2 / g_1^2 > 0$. Источник энергии есть полином второй степени по отношению к аргументу τ и обращается в ноль в двух температурных точках:

$$k_v = 0, \quad \tau = \tau_{11}, \quad \tau = \tau_2 = \tau_{11} / 3.$$

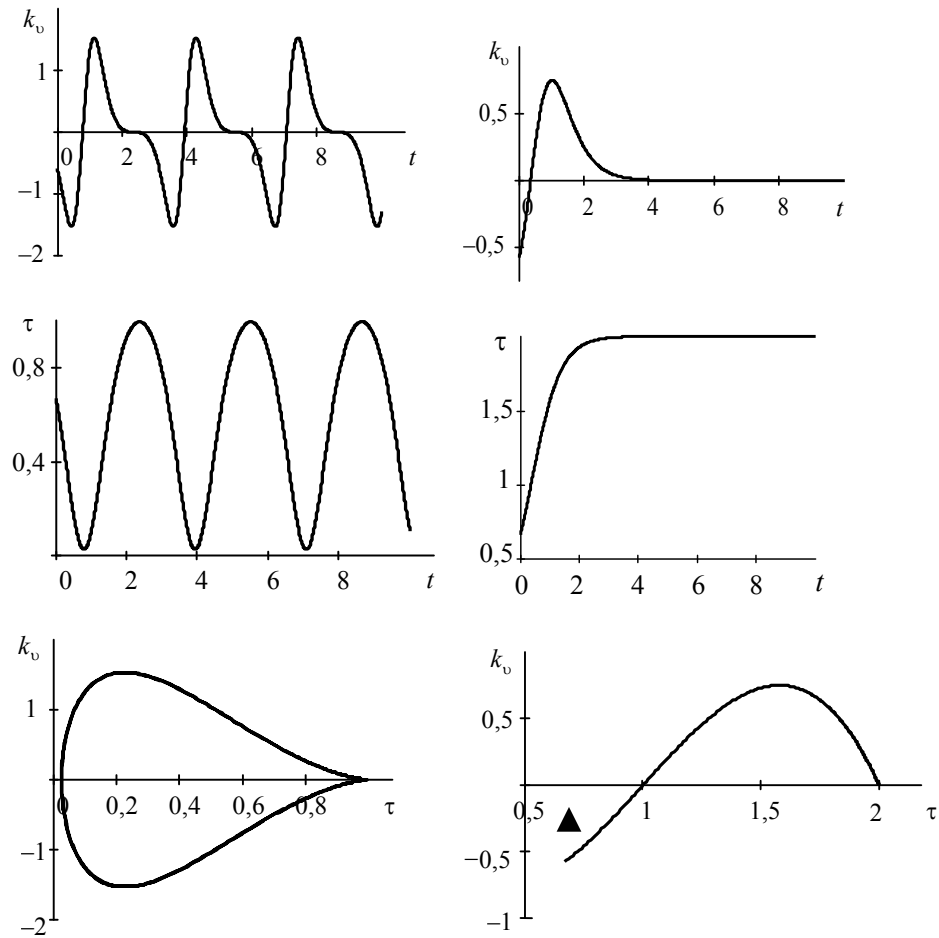


Рис. 3. Кубическая нелинейность источника энергии: режим (7) периодической неоднородности фона. Температура, объемное выделение тепла на фронте волны, бегущей влево (левый столбец), и на фронте волны, бегущей вправо (правый столбец): $f_1 = 1; B_1 = 0,5; B_2 = 0,5; r = 1; \varphi_0 = 2; \varphi_1 = 1,95$; черным треугольником \blacktriangle отмечена область ОТ

Физическое истолкование решения такое же, как для источника (2). В начальном состоянии ($t = 0$) при $x = 0$ находится слабый разрыв теплового поля. Этот разрыв распадается на две волны $\alpha = 0, \beta = 0$. Перед волной $x' = t$, бегущей вправо, температурный фон имеет вид:

$$\tau_r(x') = \tau_{11} [\varphi(0) \exp(2g_1 x') - 1]^2 / [\varphi(0) \exp(2g_1 x') + 1]^2, \quad x' \geq 0.$$

Здесь нет ограничений на выбор знака константы g_1 . Перед волной $x' = -t$, бегущей влево, неоднородный температурный фон

$$\tau_l(x') = \tau_{11} [\varphi(2x') - 1]^2 / [\varphi(2x') + 1]^2, \quad x' \leq 0$$

определяется выбором произвольной аналитической функции $\varphi(2x')$. Таким образом, температурное поле (9) содержит две волны, разбегающиеся в противоположных друг другу направлениях. На рис. 4 показаны примеры аномального взаимодействия в системе «среда – источник энергии» для вариантов (5)–(7).

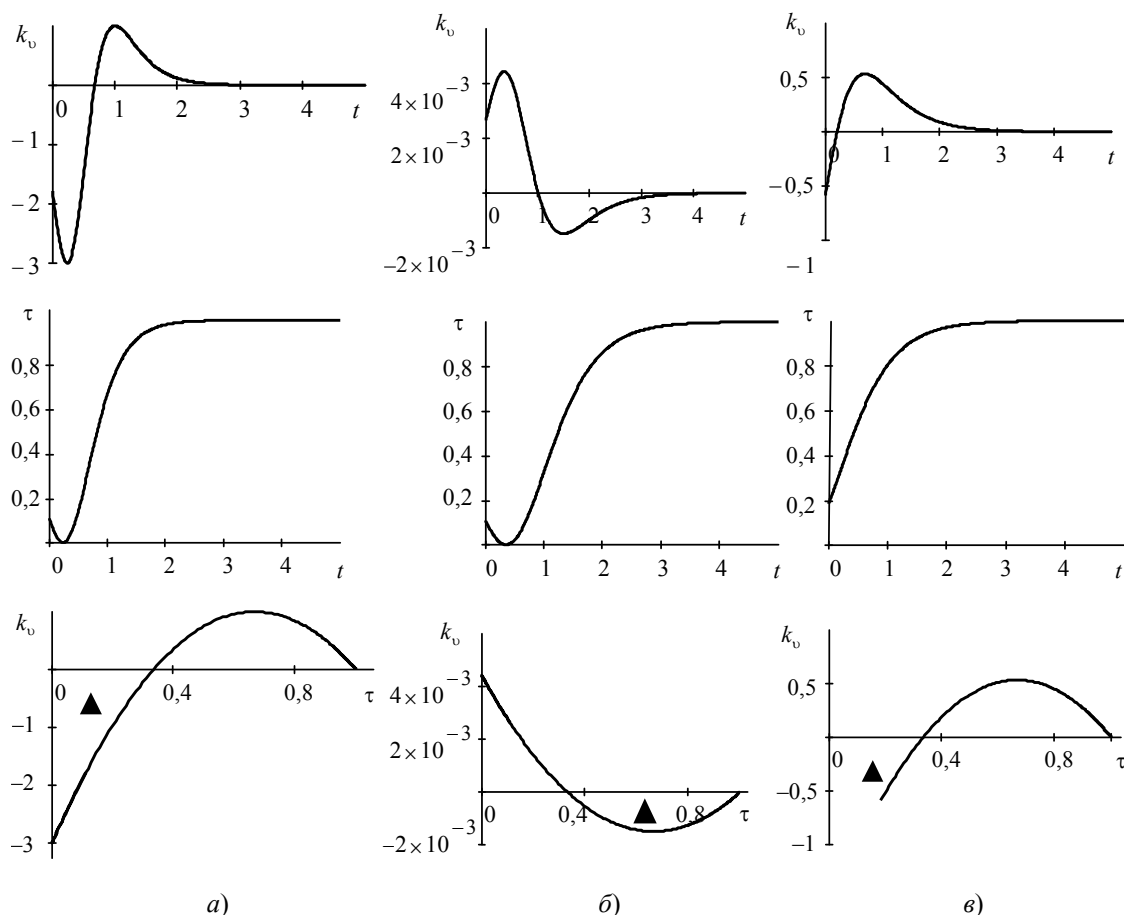


Рис. 4. Квадратичная нелинейность источника энергии (8): температура и объемное выделение тепла на фронте волны: а – случай (5), источник зависит только от температуры, волна бежит влево; $f = 1; D_1 = 1; r = 1,5; \varphi_1 = 2$; б – режим (6), волна бежит вправо; $f = 1; D_1 = 1; r = 1,5; \varphi_0 = 2; \varphi_1 = -1,5; \beta = 3$; в – режим (7), волна бежит вправо; $f = 1; \varphi_0 = 2,5; \varphi_1 = 1; r = 2; D_1 = 1$; черным треугольником ▲ отмечена область ОТ

Анализ представленных здесь ОТ-ситуаций позволяет утверждать следующее. Источник k_v обращается в ноль при некоторой температуре $\tau = \tau_0$: $k_v(\tau = \tau_0) = 0$. В конечной окрестности $\tau = \tau_0$ с течением времени наблюдается переключение режимов температурного отклика среды. Если при $\tau = \tau_0$ наклон функции источника отрицателен, $dk_v/d\tau < 0$, то имеем переключение вида «нормальный отклик → аномальный отклик» (рис. 2 и 4, б). Если при $\tau = \tau_0$ наклон положителен, $dk_v/d\tau > 0$, то имеем переключение «аномальный отклик → нормальный отклик» (рис. 1, 3 и 4, в). Эти результаты вычислительного моделирования совпадают с выводами работы [7].

Диффузионно-кинетические свойства двухкомпонентных систем. Решение (2), (3) волнового уравнения возьмем за основу построения решения двух эллиптических уравнений с зацепляющимися источниками:

$$\frac{\partial^2 \tau_\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_\sigma}{\partial y^2} + R_v^{(\sigma)}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad q_v^{(\sigma)} = \lambda_\sigma R_v^{(\sigma)}, \quad (10)$$

где $\sigma = 1, 2$ – номер компоненты; смысл обозначений раскрыт в [1]. Далее при упоминании номеров формул из [1] снабжаем эти номера дополнительным нижним индексом

сом «1», указывающим, что речь идет о первой части данной работы. Уравнения (10) являются нелинейной системой типа «реакция – диффузия». Сделаем замену аргументов $x' \rightarrow x$, $t \rightarrow (-iy)$. Тогда исходное гиперболическое уравнение (3) преобразуется в эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + k_v(\tau) = 0,$$

в котором нужно принять:

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2, \quad \operatorname{Re}[k_v(\tau)] = R_v^{(1)}(\tau_1, \tau_2), \quad \operatorname{Im}[k_v(\tau)] = R_v^{(2)}(\tau_1, \tau_2).$$

Выделяя действительную и мнимую части в формуле (2) для источника, получаем для случая (5):

$$R_v^{(1)} = 4f_1 r [-\tau_1 + 3B_1(\tau_1^2 - \tau_2^2) - 2B_1^2(\tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2^2)]; \quad (11)$$

$$R_v^{(2)} = 4f_1 r [-\tau_2 + 6B_1\tau_1\tau_2 - 2B_1^2(3\tau_1^2\tau_2 - \tau_2^3)], \quad (12)$$

где f_1 , B_1 , B_2 , r – произвольные постоянные.

Действительная и мнимая части решения (3) выглядят так:

$$\tau_1 = \delta_1 / \delta, \quad \tau_2 = \delta_2 / \delta, \quad (13)$$

$$\delta = b_1^2 + b_2^2 \neq 0, \quad \delta_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad \delta_2 = b_1 a_2 - a_1 b_2,$$

$$a_1 = \varphi_1 B_2 E_1, \quad a_2 = \varphi_1 B_2 E_2, \quad b_1 = 1 + \varphi_1 B_1 B_2 E_1, \quad b_2 = \varphi_1 B_1 B_2 E_2;$$

$$E_1 = \exp[x(r + f_1)] \cos[y(r - f_1)], \quad E_2 = \exp[x(r + f_1)] \sin[y(r - f_1)]. \quad (14)$$

Формулы (13) представляют собой температурные поля в двухкомпонентной стационарной теплофизической системе (10) с конкурирующими источниками энергии (11), (12). Теплофизическое содержание данного решения определяется тем обстоятельством, что линия $x = 0$ представляет собой разрыв вида (21)₁:

$$W = (q_x^{(r)})_1 - (q_x^{(l)})_1 + (q_x^{(r)})_2 - (q_x^{(l)})_2, \quad (15)$$

на котором действует внешний источник энергии W . Условие ограниченности решения $\delta \neq 0$ выполнено, если $(\varphi_1 B_1 B_2)^2 < 1$. В правой полуплоскости нужно взять $x \geq 0$, $r + f_1 < 0$; в левой полуплоскости нужно взять $x \leq 0$, $r + f_1 > 0$.

Следует отметить одномерные варианты решения (13), (14). Если $r = f_1$, то $E_2 \equiv 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $\tau_1 = a_1 / b_1$, $\tau_2 \equiv 0$, и в итоге имеем ангармоническое решение вида (3), (5) для динамической системы с одной степенью свободы:

$$\frac{d^2 \tau_1}{dx^2} = 4r^2 (\tau_1 - 3B_1 \tau_1^2 + 2B_1^2 \tau_1^3), \quad \tau_1 = \frac{\varphi_1 B_2 E_1}{1 + \varphi_1 B_2 B_1 E_1}, \quad E_1 = \exp(2rx). \quad (16)$$

Физическая интерпретация этого решения сохраняется: при $x = 0$ на разрыве действует источник

$$W = q_x^{(r)} - q_x^{(l)} \quad (17)$$

[см. (21)₁]; для $x \geq 0$ берем $r < 0$, для $x \leq 0$ берем $r > 0$. Можно поступить иначе и рассматривать решение вдоль всей оси x . Например, если $r > 0$, то получаем при $x \rightarrow (-\infty)$ предельное значение $\tau_1 \rightarrow 0$; при $x \rightarrow (+\infty)$ предельное значение $\tau_1 \rightarrow (1/B_1)$.

Ясно, что решение (16) легко переформулировать в решение динамической системы (4)₁, соответствующей волновому уравнению (3)₁.

Если $r + f_1 = 0$, то основным элементом структуры решения является гармоническое колебание $\cos(2ry)$, $\sin(2ry)$. Решение (13), (14) принимает вид:

$$\tau_1 = \delta_1/\delta, \quad \tau_2 = \delta_2/\delta, \quad \delta = 1 + 2\varphi_1 B_1 B_2 \cos(2ry) + (\varphi_1 B_1 B_2)^2, \quad (18)$$

$$\delta_1 = \varphi_1 B_2 \cos(2ry) + \varphi_1^2 B_1 B_2^2, \quad \delta_2 = \varphi_1 B_2 \sin(2ry), \quad (\varphi_1 B_1 B_2)^2 \neq 1;$$

$$\frac{d\tau_1}{dy^2} + R_v^{(1)} = 0, \quad \frac{d\tau_2}{dy^2} + R_v^{(2)} = 0.$$

Для данной динамической системы важен отрицательный знак величины $f_1 r = -r^2 < 0$, поскольку в этом случае выражения (11), (12) содержат $4r^2 \tau_1$, $4r^2 \tau_2$. Эти слагаемые в физическом отношении доминируют в $R_v^{(1)}$, $R_v^{(2)}$ и обеспечивают периодичность решения по аргументу y . Для сравнения: ангармоничность решения (16) обусловлена слагаемым $(-4r^2 \tau_1)$ в формуле для $R_v^{(1)}$. Решение (18) нетрудно переформулировать в решение двухкомпонентной односкоростной волновой задачи: $w_1^2 = w_2^2 = w^2$.

Теперь займемся преобразованием решения (8), (9), (5) в решение стационарных диффузионно-кинетических уравнений (10). Выполняя замену $x' \rightarrow x$, $t \rightarrow (-iy)$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ и действуя так же, как при выводе решения (11)–(14), получаем следующие результаты. Источники энергии в (10) имеют вид:

$$R_v^{(1)} = \frac{6D_1 r}{\sqrt{\tau_{11}}} \left(\frac{4}{3} \tau_{11} \tau_1 - \tau_1^2 + \tau_2^2 - \frac{1}{3} \tau_{11}^2 \right); \quad (19)$$

$$R_v^{(2)} = \frac{6D_1 r}{\sqrt{\tau_{11}}} \left(\frac{4}{3} \tau_{11} \tau_2 - 2\tau_1 \tau_2 \right), \quad (20)$$

$$\tau_{11} = f/D_1, \quad g_1 = \sqrt{f D_1}, \quad f > 0, \quad D_1 > 0, \quad r, f, D_1 - \text{const.}$$

Тепловое состояние первой и второй компонент определяется формулами

$$\tau_1 = \delta_1/\delta, \quad \tau_2 = \delta_2/\delta, \quad \delta = b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \quad (21)$$

$$\delta_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad \delta_2 = b_1 a_2 - a_1 b_2,$$

$$a_1 = 1 + \varphi_1^2 (E_1^2 - E_2^2) - 2\varphi_1 E_1, \quad a_2 = 2\varphi_1 E_2 (\varphi_1 E_1 - 1), \quad \varphi_1 \equiv \text{const.}$$

$$b_1 = 1 + \varphi_1^2 (E_1^2 - E_2^2) + 2\varphi_1 E_1, \quad b_2 = 2\varphi_1 E_2 (\varphi_1 E_1 + 1),$$

$$E_1 = \exp[x(r + g_1)] \cos[y(r - g_1)], \quad E_2 = \exp[x(r + g_1)] \sin[y(r - g_1)].$$

Условие $\delta \neq 0$ дает ограничение $\varphi_1^2 < 1$. На разрыве $x = 0$ действует источник энергии W вида (15). Слева от разрыва $r + g_1 > 0$, $x \leq 0$; справа от разрыва $r + g_1 < 0$, $x \geq 0$.

Одномерный ангармонический режим получаем при $r = g_1$: $E_2 \equiv 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $\tau_1 = a_1/b_1$, $\tau_2 \equiv 0$, $R_v^{(2)} \equiv 0$,

$$\frac{d^2 \tau_1}{dx^2} = \frac{-6D_1 r}{\sqrt{\tau_{11}}} \left(\frac{4}{3} \tau_{11} \tau_1 - \tau_1^2 - \frac{1}{3} \tau_{11}^2 \right);$$

$$\tau_1 = \tau_{11} (1 - \varphi_1 E_1)^2 / (1 + \varphi_1 E_1)^2, \quad E_1 = \exp(2rx), \quad r > 0. \quad (22)$$

В этом случае при $x = 0$ действует источник вида (17). Структура решения (22) аналогична (9). Можно рассматривать данное решение при $x \in (-\infty; \infty)$, взяв $\varphi_1 > 0$. Следовательно, будем иметь $\tau_1 \rightarrow 1$ при $x \rightarrow (\pm\infty)$.

Стационарный гармонический режим получаем при $r + g_1 = 0$; запись решения остается прежней и содержит функции $\cos(2ry)$, $\sin(2ry)$. Для этого решения, а также для (22) все слагаемые в (19), (20) образуют единый нелинейный комплекс. В отличие от (11), (12) здесь нет доминирующего влияния слагаемых, содержащих τ_1 , τ_2 в первой степени. Оба одномерных варианта решения можно формулировать в терминах автомодельных волновых задач (4)₁.

Приведем некоторые результаты численной обработки построенных решений. При физическом истолковании расчетов будем говорить о решении волнового уравнения и рассматривать эволюцию теплового поля во времени при фиксированной координате x . Напомним, что для волновых задач формальный переход от «дозвукового» к «сверхзвуковому» режиму означает инверсию знака источника $k_v(\tau)$ [см. комментарий к формуле (4)₁].

Для однокомпонентной системы с кубической нелинейностью на рис. 5 при $d\tau/dt > 0$ указан возможный вариант поведения источника при фиксированном значении параметра B_1 и параметра начального ($t = 0$) состояния B_2 . Здесь хорошо видно различие между дозвуковым и сверхзвуковым процессами: меняются местами температурные интервалы, в которых существует ОТ.

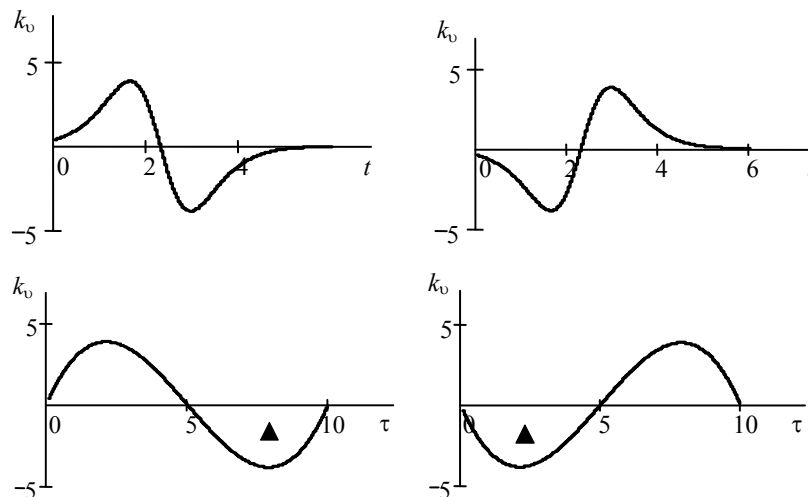


Рис. 5. Кубическая нелинейность источника энергии. Ангармоническое решение (16) и инверсия расположения областей ОТ; $r = 1$; $\varphi_1 = 1$; $B_1 = 0,1$; $B_2 = 0,1$. Левый столбец – сверхзвуковой режим, правый столбец – дозвуковой режим; черным треугольником ▲ отмечена область ОТ

Для двухкомпонентных теплофизических систем на рис. 6 наблюдаем конкурентный характер взаимодействия источников. Эти результаты приведены для сверхзвуковых процессов. Сопоставление кубической и квадратичной нелинейностей позволяет сделать вывод, что в обоих случаях характер температурных колебаний каждой компоненты в значительной степени зависит от таких факторов, как знакопеременность источника и количественные соотношения между линейными и нелинейными слагаемыми в выражениях для функций источников [см. (11), (12) и (19), (20)]. Отметим также периодический характер появления/исчезновения состояний, присущих аномальному температурному отклику обеих компонент системы (рис. 6).

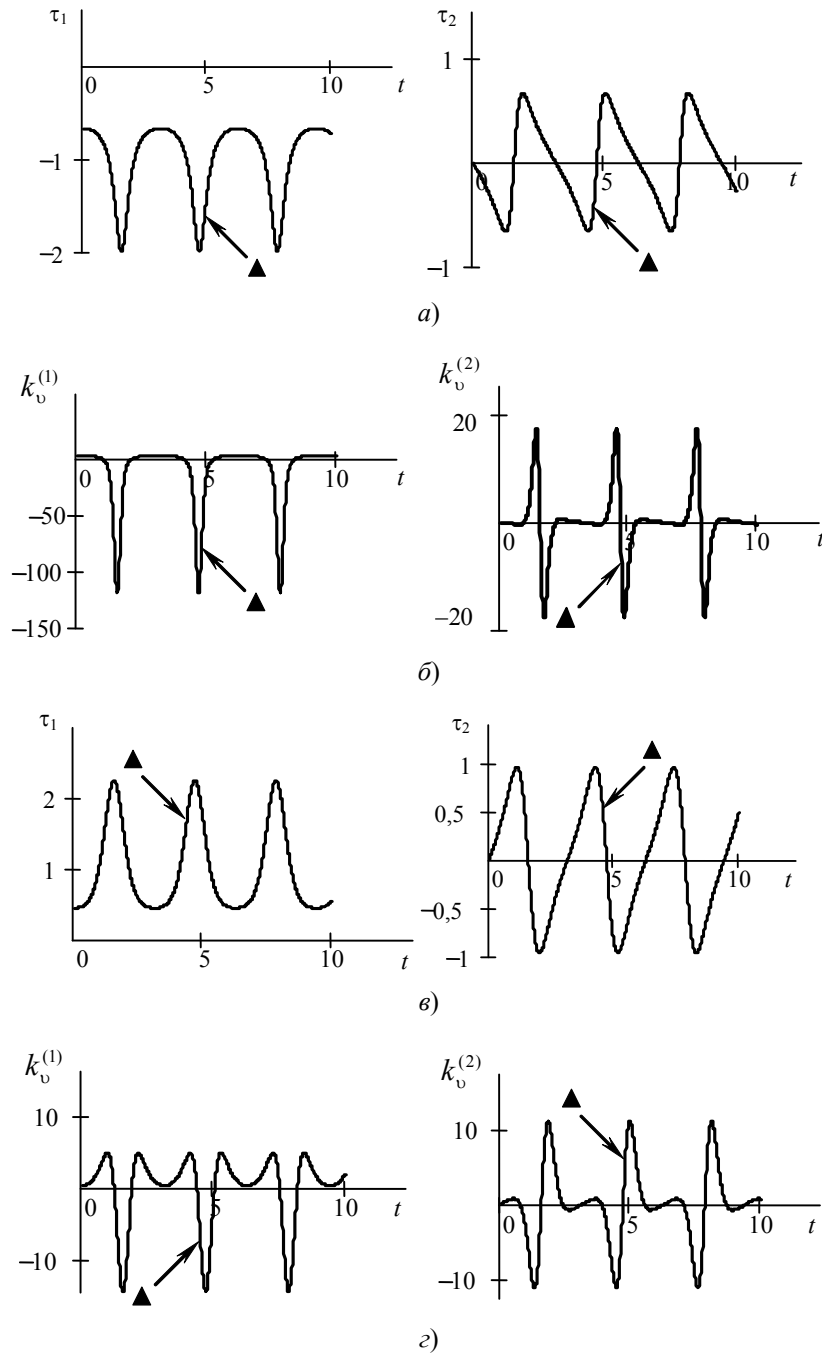


Рис. 6. Кубическая [(18), а, б] и квадратичная [(21), в, г] нелинейности двухкомпонентных систем: температурные свойства взаимодействующих источников энергии.
 а, б - $r = 1$; $\varphi_1 = 1$; $B_1 = -1$; $B_2 = -2$; в, г - $r = -1$; $\varphi_1 = 0,2$; $f = 1$; $D_1 = 1$;
 стрелка указывает расположение области ОТ

Заключение

Изучены новые точные решения волнового уравнения с источниками энергии, обладающими кубической [см. (2), (3)] и квадратичной [см. (8), (9)] нелинейностями. Рассмотрена динамика нелинейных тепловых волн, разбегающихся в противоположных друг другу направлениях. Существенно, что волны распространяются по пространственно-неоднородному тепловому фону. Дана оценка входных параметров процесса, при которых на фронте волны наблюдается аномальный температурный отклик среды: подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры. Показано, что инверсия процессов «дозвук – сверхзвук» приводит к инверсии расположения температурных интервалов, в которых наблюдается явление «отрицательная теплоемкость». Для двухкомпонентной системы представлен пример периодического появления/исчезновения неклассических ОТ-состояний. Даны примеры точного аналитического описания стационарной 2D системы типа «реакция – диффузия». Установлено, что характер температурных колебаний в значительной степени зависит от таких факторов, как знакопеременность источника и количественное соотношение между линейными и нелинейными слагаемыми в выражениях для функций конкурирующих источников.

Литература

1. Шабловский, О. Н. Диффузионно-кинетические процессы в неравновесных теплофизических системах с источниками энергии. Ч. 1. Дисперсия нелинейных тепловых волн / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого, 2020. – № 1 (80). – С. 3–14.
2. Структуры и хаос в нелинейных средах / Т. С. Ахромеева и [др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
3. Фила, М. Системы «реакция – диффузия»: разрушение решений, возникающее и исчезающее под действием диффузии / М. Фила, Х. Ниномия // Успехи мат. наук. – 2005. – Т. 60, вып. 6 (366). – С. 207–226.
4. Корпусов, М. О. О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Изв. РАН. Серия математическая. – 2005. – Т. 69, вып. 4. – С. 89–128.
5. Ванаг, В. К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова-Жаботинского в обращенной микроэмульсии / В. К. Ванаг // Успехи физ. наук. – 2004. – Т. 174, № 9. – С. 991–1010.
6. Борина, М. Ю. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция – диффузия» / М. Ю. Борина, А. А. Полежаев // Компьютер. исследование и моделирование. – 2011. – Т. 3, вып. 2. – С. 135–146.
7. Шабловский, О. Н. «Отрицательная теплоемкость» в задачах нелинейной динамики волн / О. Н. Шабловский // Фундамент. физико-мат. проблемы и моделирование технико-технолог. систем. – Вып. 16. – М. : Янус-К, 2014. – С. 103–112.
8. Ингель, Л. Х. «Отрицательная теплоемкость» стратифицированных жидкостей / Л. Х. Ингель // Успехи физ. наук. – 2002. – Т. 172, № 6. – С. 691–699.
9. Ингель, Л. Х. Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов / Л. Х. Ингель, М. В. Калашник // Успехи физ. наук. – 2012. – Т. 182, № 4. – С. 379–406.

Получено 12.03.2020 г.