УДК 4.942

РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛАСТИНЕ СВОБОДНО ЛЕЖАЩЕЙ НА НАГРЕТОЙ ПОДЛОЖКЕ

КУРОЧКА КОНСТАНТИН СЕРГЕЕВИЧ,
к.т.н., доцент
КОМРАКОВА ЕВГЕНИЯ ВЛАДИМИРОВНА
старший преподаватель
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

Аннотация: Рассчитано распределение температур и термоупругих деформаций для заготовки свободно лежащей на нагретой подложке. Расчет проводился методом конечных элементов путем решения системы дифференциальных уравнений. Полученные численные результаты могут быть применены для расчета кузнечнопрессового оборудования.
Ключевые слова: метод конечных элементов, уравнение Ламе, термоупругие деформации, дифференциальные уравнения.

CALCULATION OF THERMOELASTIC DEFORMATIONS IN PLATE FREE-RELATED ON A HEATED SUBSTRATE

Kurochka Konstantin Sergeevich,
Kamrakova Yauheniya Uladzimirauna

Abstract: The temperature distribution and thermoelastic deformations are calculated for a blank free-lying on a heated substrate. The calculation was carried out by the finite element method by solving a system of differential equations. The obtained numerical results can be applied to calculate the forging equipment.
Keywords: finite element method, Lame equation, thermoelastic deformation, differential equations.

Современная техника требует в ряде случаев максимального уменьшения веса конструкций и сооружений. Возможность осуществления этого требования тесно связана с точным знанием действительного распределения напряжений и деформаций в частях конструкций и сооружений; без такого знания надежный расчет на прочность невозможен.

Достаточно часто детали конструкций изготавливаются путем прессования. При данном способе изготовления заготовка переводится в деталь с необходимой конфигурацией путем деформации под воздействием внешних сил. Эта изменение формы заготовки (деформация) приводит к выделению тепла внутри заготовки(тела) и, следовательно, к изменению температуры тела. Далее, это изменение температуры приводит к дополнительной деформации тела, т.е. неравномерный нагрев приводит к возникновению внутренних напряжений [1, с.142]. Решение подобных задач имеет важное прикладное значение.

В соответствии с общей постановкой рассматриваемой задачи, основные уравнения термоупругости должны включать в себя как уравнения для смещений твердого тела, так и уравнения для распределения температуры [2 с. 43].

Обозначим через $\mathrm{u}=\left(u_x,u_y,u_z,t\right)$ – смещение твердого тела от положения равновесия. Уравнения движения твердого тела в соответствии со вторым законом Ньютона имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz}+\rho f_x,\\
&\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz}+\rho f_y,\\
&\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}+\rho f_z
\end{aligned} \qquad (1)$$

где ρ – как обычно плотность среды; f – вектор заданных объемных сил.

Для компонент тензора упругих напряжений, применяемых в (1) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\gamma T,\ \sigma_{yy}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\gamma T,\ \sigma_{zz}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}-\gamma T,\\
&\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \sigma_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right),\ \sigma_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right),\quad \theta=\mathrm{div}u,
\end{aligned} \qquad (2)$$

где λ, μ – постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды. Предположим, что среда однородная, тогда подстановкой (2) в (1) получим уравнение Ламе

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mu\Delta\mathrm{u}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad\,div\,u}-\gamma\,\mathrm{grad}\,T+\rho\mathrm{f}, \qquad (3)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа.

Для получения решения системы гиперболических уравнений второго порядка (3) необходимо дополнить её соответствующими начальными и краевыми условиями. Зададим начальное смещение и скорость точек тела:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x,y,z,}0)=\mathrm{u}_0(x,y,z), \qquad 4)$$

$$\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}(x,y,z,0)=\mathrm{u}_1(x,y,z). \qquad 5)$$

Простейшее краевое условие для системы уравнений Ламе соответствует заданию смещений на границе расчетной области, например [3 с.119]:

$$\mathrm{u}(x,y,z,t)=0,\quad (x,y,z)\in\partial\Omega. \qquad (6)$$

Тем самым при заданном температурном поле среды напряженное состояние определяется краевой задачей типа (3)-(6).

Уравнение теплопроводности в твердом однородном теле с учетом сжимаемости имеет вид (без учета внутренних источников тепла):

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\gamma\frac{T}{c\rho}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div\,u}=\alpha\Delta T. \qquad 7)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим решение системы уравнений (3) с граничными условиями (4)-(7) для плоского случая. Пусть имеется бесконечный параллелепипед (заготовка) лежащий на нагретой поверхности (рис. 1).

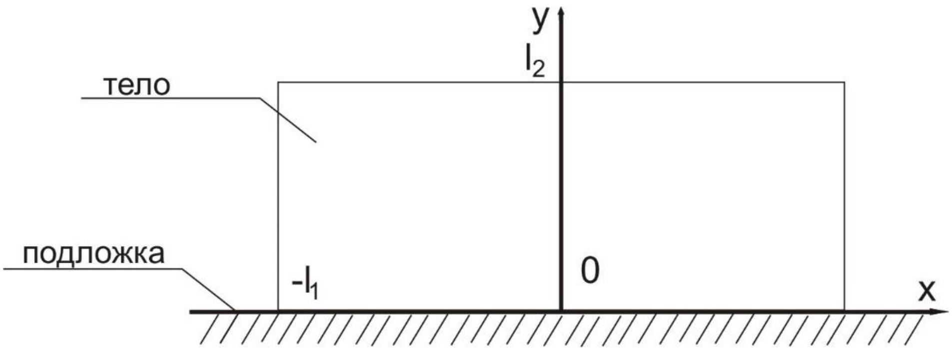

Рис. 1. Заготовка, лежащая на нагретой поверхности

Исходя из физики рассматриваемой задачи необходимо учитывать конвективный теплообмен между телом и окружающей средой.

Плоские деформации описываются уравнением Ламе (3), которое в данном случае имеет вид:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}-\gamma\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad (8)$$

$$\mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}-\gamma\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad (9)$$

для перемещений $\mathrm{v}=\{v_1,v_2\}$, $v_\alpha(x)=v_\alpha(x,y)$, $\alpha=1,2$.

Учитывая тот факт, что в заготовка изготавливается из однородного материала, запишем уравнение для стационарного температурного состояния

$$\Delta u=0\,,\ x\in\Omega\,. \quad (10)$$

Предположим, что между телом и подложкой существует идеальный контакт, а температура подложки постоянная. Тогда соответствующее граничное условие имеет вид

$$u(x,0)=u_0\,,\quad 0\le x\le l_1 \quad (11)$$

Между телом и подложкой предполагается жесткое сцепление, и поэтому

$$\mathrm{v}(x,0)=0\,,\quad 0\le x\le l_1 \quad (12)$$

Условие симметрии дает следующие краевые условия на левой границе:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\,,\ x=0\,,\ 0<y<l_2\,, \quad (13)$$

$$v_1(0,y)=0\,,\quad 0<y<l_2\ , \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}=0\,,\ x=0\,,\ 0<y<l_2\,. \quad (15)$$

Верхняя и боковая поверхности граничат с окружающей средой, температура которой u_c, поэтому принимаются краевые условия

$$k\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma(u-u_c)=0\,,\ x=l_1\,,\ 0<y<l_2\,, \quad (16)$$

$$k\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma(u-u_c)=0\,,\ y=l_2\,,\ 0<x<l_1\ . \quad (17)$$

где k, σ – коэффициенты теплопроводности и конвективного теплообмена соответственно. Эти участки границы свободны, и при отсутствии нагрузок имеем следующие краевые условия для смещений:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v_2}{\partial y}-\gamma(u-u_c)=0, \tag{18}$$

$$\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=0,\ x=l_1,\ 0<y<l_2, \tag{19}$$

$$\lambda\frac{\partial v_1}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_2}{\partial y}-\gamma(u-u_c)=0, \tag{20}$$

$$\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=0,\ y=l_2,\ 0<x<l_1\ . \tag{21}$$

Условия (18)-(21) соответствуют рассмотрению тепловых расширений относительно состояния тела при температуре окружающей среды.

Нормируя смещения на l_1, для характеристики тепловых деформаций получим безразмерный параметр.

$$G=(3+2k)\alpha(u_0-u_c). \tag{22}$$

В безразмерные переменные уравнения (8), (9) примут вид

$$(1+2k)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+(1+k)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial y}-G\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{23}$$

$$k\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+(1+2k)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}+(1+k)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}-G\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{24}$$

Уравнение теплопроводности (10) сохраняет свой вид.

Граничное условие (11) на подложке дает

$$u(x,0)=1,\ 0\le x\le l_1\ , \tag{25}$$

а для смещений имеем (12). Сохраняют свой вид условия симметрии (13)-(15).

Интенсивность теплообмена с окружающей средой характеризуется параметром Bi, поэтому из (16), (17) следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{Bi}\,u=0,\ x=1,\ 0<y<l_2, \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{Bi}\,u=0,\ y=l_2,\ 0<x<l_1\ , \tag{27}$$

где $\mathrm{Bi}=\sigma l_1/k$. Для смещений граничные условия (18)-(21) переписываются следующим образом:

$$(1+2k)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}-Gu=0, \tag{28}$$

$$k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=0,\ x=1,\ 0<y<l_2, \tag{29}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}+(1+2k)\frac{\partial v_2}{\partial y}-Gu=0, \tag{30}$$

$$k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=0,\ y=l_2,\ 0<x<l_1\ . \tag{31}$$

Таким образом решение задачи термоупругости в рассматриваемой постановке распадается на две подзадачи: автономную задачу расчета температурного поля и задачу расчета напряжений для этого температурного состояния тела.

Используется равномерная прямоугольная сетка ω в прямоугольнике Ω. Дифференциальной задаче для стационарного уравнения теплопроводности (10) с граничными условиями (13), (24)-(26) на отдельных сторонах прямоугольника ставится в соответствие разностная задача [4 с.182]. Аналогичным образом рассматривается разностная задача расчета упругих напряжений.

Полученные численные результаты могут быть применены для расчета кузнечнопрессового оборудования, т.к. позволяют связать температуру подложки, температуру окружающей среды и геометрические характеристики поковки применяемой для изготовления заданного изделия.

Список литературы

1. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов –. М.: Физматгиз, 1959 – 356 с.
2. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975.
3. Старовойтов Э.,И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости – Гомель: БелГУТ, 2001.
4. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов. – М: Мир, 1979.
5. Liu G.,R., Quek S.,S. Finite Element Method A practical course, PRENTICE-HALL, 2003.