УДК 519.95:519.872

МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЪЕКТОВ, ИМЕЮЩИХ ВНУТРЕННИЕ СОСТОЯНИЯ, С КОЛЛЕКТИВОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ АГЕНТОВ

О. Д. АСЕНЧИК, В. С. МУРАШКО
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Создание адекватных и имеющих приемлемую вычислительную сложность математических моделей стохастического движения агентов по системе центров с внутренней структурой актуально для многих прикладных областей науки и техники. Обслуживание стационарных объектов (нефтяных скважин, энергетических объектов и т. п.) передвижными бригадами [1], [2], когерентный и некогерентный перенос электронов, электронных возбуждений или квазичастиц в системе многоуровневых центров различной физической, химической или биологической природы [3]–[5], передача пакетов в компьютерных сетях [6] – некоторые примеры подобных областей.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую в некоторый момент времени из N обслуживаемых производственных объектов и M обслуживающих агентов ($N \geq M$).

Обслуживаемый объект может находиться в одном из трех состояний (рис. 1): в «основном» состоянии ожидания обслуживания – 0; в «метастабильном» состоянии, когда объект не требует обслуживания – 1; в «возбужденном» состоянии, когда на объекте находится агент и он обслуживается – 2. Возможные переходы между состояниями изображаются на рис. 1 сплошными стрелками. Специфичным является то, что переход $2 \to 1$ может индуцировать появление (высвобождение) агента, который перемещается к другому объекту, а переход $0 \to 2$ индуцируется агентом, пришедшим от другого объекта. Агент движется от объекта к объекту, при этом он может переходить только на объекты, находящиеся в состоянии ожидания обслуживания. Таким образом, объекты «взаимодействуют» между собой посредством обмена агентами.

Целью настоящей работы является разработка адекватных математических моделей для описания взаимодействия имеющих внутренние состояния объектов с коллективом обслуживающих агентов.

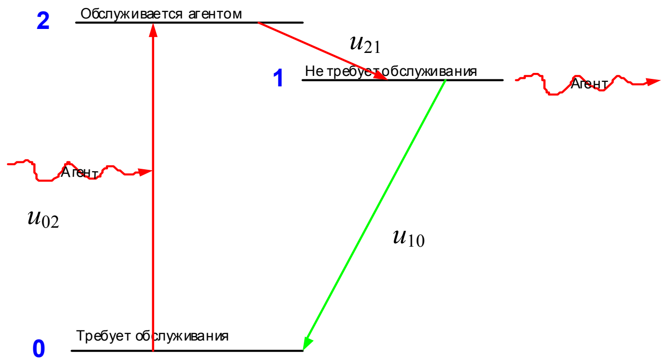

Рис. 1. Схема взаимодействия трехуровневого центра с «полем» агентов

Модель с фиксированным количеством агентов

Рассмотрим случай, когда количество агентов M, обслуживающих центры, постоянно. Множество состояний рассматриваемой системы будем описывать совокупностью векторов: $\{\vec{k}\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$, где k_i – номер состояния i-го объекта, $k_i = 0, 1, 2; \quad i = \overline{1, N}$.

Все множество значений вектора $\vec{k}$ можно разбить на три подмножества номеров объектов, находящихся в различных состояниях:

$$I^0 = \{i \,|k_i = 0, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad I^1 = \{i \,|k_i = 1, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad I^2 = \{i \,|k_i = 2, \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Система дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова [7]) для функций $P(\vec{k}, t)$-вероятностей реализации состояния $\vec{k}$ в момент времени t, будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} P(\vec{k},t) = \sum_{i \in I^0} \left(- \sum_{j \in I^2} u_i^{0,2} w_{ij} P(\vec{k}, t) + u_i^{1,0} P(\vec{k} + \vec{l}_i, t) \right) +$$

$$+ \sum_{i \in I^1} \left(-u_i^{1,0} P(\vec{k}, t) + \sum_{j \in I^2} u_j^{2,1} w_{ji} P(\vec{k} + \vec{l}_i - 2\vec{l}_j, t) \right) +$$

$$+ \sum_{i \in I^2} \left(- \sum_{j \in I^1} u_i^{2,1} w_{ij} P(\vec{k}, t) + \sum_{j \in I^0} u_j^{0,2} w_{ji} P(\vec{k} - \vec{l}_i + 2\vec{l}_j, t) \right), \tag{1}$$

$$P(\vec{k},0) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}_0}, \quad \sum_k P(\vec{k}, t) = 1,$$

где $\vec{l}_j$ – вектор той же размерности, что и вектор $\vec{k}$, у которого j-я компонента равна 1, а все остальные равны 0; $u_i^{q,r}$ – средняя скорость перехода из состояния q в состояние r для i-го объекта; w_{ij} – сетевая матрица, задающая относительную вероятность перехода агента с i-го на j-й объект [6], $\sum_{j=1}^{N} w_{ij} = 1, \quad w_{ii} = 0$.

Первое слагаемое в (1) учитывает изменение вероятности $P(\vec{k}, t)$ вследствие переходов $0 \to 2$, предполагающих «захват» агентов, а также переходов $1 \to 0$, не затрагивающих изменения состояний соседних объектов. Второе слагаемое в (1) учитывает изменения вероятности $P(\vec{k},t)$ вследствие переходов $1 \to 0$, а также переходов $2 \to 1$, сопровождающиеся высвобождением агента. Третье слагаемое учитывает вклад переходов $2 \to 1$ и $1 \to 0$.

Входящие в (1) параметры $u_i^{q,r}$, характеризирующие i-й объект, можно интерпретировать следующим образом: $\left(u_i^{1,0}\right)^{-1}$ – среднее время между плановыми обслуживаниями; $\left(u_i^{0,2}\right)^{-1}$ – среднее время ожидания обслуживания; $\left(u_i^{2,1}\right)^{-1}$ – среднее время обслуживания.

Модель с переменным количеством агентов

В общем случае в рассматриваемой системе число агентов необязательно должно быть постоянным: агенты могут выводиться из процесса обслуживания и приступать к нему вновь. Учитывая это, (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(\vec{k},t) &= -\sum_{i\in I^0} G_i P(\vec{k},t) + \sum_{i\in I^0}\left(-\sum_{j\in I^2}(1-\varphi_i)u_i^{0,2}w_{ij}P(\vec{k},t) + u_i^{1,0}P(\vec{k}+\vec{l}_i,t)\right) + \\
&+ \sum_{i\in I^1}\left(-u_i^{1,0}P(\bar{k},t) + u_i^{2,1}\varphi_i P(\vec{k}+l_i+t) + \sum_{j\in I^2}(1-\varphi_j)u_j^{2,1}w_{ji}P(\vec{k}+\vec{l}_i-2\vec{l}_j,t)\right) + \\
&+ \sum_{i\in I^2} G_i P(\vec{k}-2\vec{l}_i,t) + \\
&+ \sum_{i\in I^2}\left(-u_i^{2,1}\varphi_i P(\vec{k},t) - u_i^{2,1}(1-\varphi_i)\sum_{j\in I^1} w_{ij}P(\vec{k},t) + \sum_{j\in I^0}(1-\varphi_j)u_j^{0,2}w_{ji}P(\vec{k}-\vec{l}_i+2\vec{l}_j,t)\right), \quad (2)
\end{aligned}$$

$$P(\vec{k},0) = \delta_{\vec{k},\vec{k}_0}, \ \sum_{k} P(\vec{k},t) = 1,$$

где φ_i – вероятность ухода агента из системы после обслуживания объекта; G_i – средняя скорость появления нового агента на i-м объекте.

Первое и четвертое слагаемые описывают изменение вероятности текущего состояния заданного объекта вследствие того, что возможны переходы $0 \to 2$, сопровождающиеся «рождением» агента. Второе слагаемое по смыслу аналогично первому слагаемому в (1). Третье слагаемое несет ту же смысловую нагрузку, что и второе слагаемое в (1), только с учетом того, что после обслуживания объекта агент переходит на другой объект с меньшей на $1-\varphi_i$ вероятностью. Пятое слагаемое описывает вклады переходов $2 \to 1$, сопровождающиеся высвобождением агента, который либо покидает систему («гибнет»), либо остается в системе, а также вклады переходов $0 \to 2$.

Модель взаимодействия многоуровневых центров с «полем» агентов

Для случая, когда можно пренебречь временными корреляциями между нахождением агентов на различных центрах, предлагается система самосогласованных нелинейных дифференциальных уравнений существенно меньшей размерности – $5N$. Данная модель подразумевает эффективные «взаимодействия» различных центров между собой посредством взаимодействия с единым «полем» агентов. Здесь прослеживается аналогия с моделью взаимодействия квантовых частиц с квантованным электромагнитным полем [8].

Уравнения для вероятности того, что i-й объект находится в состоянии k, имеют вид:

$$\dot{P}_i^k(t) = -\sum_{l=0}^{2} u_i^{k,l} P_i^k(t) + \sum_{l=0}^{2} u_i^{l,k} P_i^l(t), \tag{3}$$

где $k = 0, 1, 2$; N – число центров; $u_{l,l} = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Для каждого i-го центра необходимо выполнение условия нормировки

$$\sum_{k=0}^{2} P_i^k(t) = 1. \tag{4}$$

Обозначим через $p_m(t)$ вероятность того, что имеется m свободных агентов, не занятых обслуживанием центров. Тогда вероятность перехода $0 \to 2$, стимулированная взаимодействием с «полем» агентов, будет равна

$$u_i^{0,2} = \sum_{m=1}^{M} w_i p_m(t), \tag{5}$$

где $(w_i)^{-1}$ – параметр, связанный со средним временем ожидания обслуживания, $\sum_{m}^{M} p_m(t) = 1$.

Процесс изменения количества агентов – типичный процесс гибели и размножения [8]. Уравнения для вероятностей $p_m(t)$ имеют следующую структуру:

$$\dot{p}_m(t) = r_{m+1} p_{m+1}(t) + g_{m-1} p_{m-1}(t) - (r_m + g_m) p_m(t),$$
$$\sum_{m=0}^{M} p_m(t) = 1.$$

Для граничных точек процесса: $p_0 = g_{-1} = 0, \quad r_{M+1} = g_M = 0$, для остальных m:

$$r_m = r = \sum_{i=1}^{N} u_{0,2}^i P_0^i + R; \tag{6}$$

$$g_m = g = \sum_{i=1}^{N} u_{2,1}^i P_2^i + G, \tag{7}$$

где R – скорость «ухода» из системы агентов; G – скорость «прихода» агентов в систему; $M = N$; r – средняя скорость «гибели» агента; g – средняя скорость «рождения» агента.

В стационарном случае $(\dot{p}_m = 0)$ (3)–(7) сводятся к системе нелинейных уравнений:

$$u_{0,2}^i = w^i \frac{\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{g}{r}\right)^m}{1 + \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{g}{r}\right)^m},$$

$$-\sum_{l=0}^{2} u_i^{k,l} P_i^k + \sum_{l=0}^{2} u_i^{l,k} P_i^l = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{2} P_l^k = 1.$$

Вероятности того, что все агенты заняты обслуживанием или есть m свободных агентов в стационарном случае примут соответственно следующий вид:

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{g}{r}\right)^m}; \quad p_m = \left(\frac{g}{r}\right)^m p_0 . \tag{9}$$

Нелинейность системы (8) относительно неизвестных P_k^i – это следствие зависимости $u_{0,2}^i$ от состояния «поля» агентов, которое, в свою очередь, зависит от состояний, в которых находятся объекты.

Случай фиксированного количества агентов, равного M, также может быть описан в рамках этой модели, если положить скорости «ухода» и «прихода» агентов в системе равными нулю ($R = G = 0$), а также потребовать выполнения условия сохранения количества агентов в системе:

$$\sum_{m=0}^{M} m p_m(t) + \sum_{i=1}^{N} P_i^2 = M . \tag{10}$$

Заключение

В настоящей работе описаны линейные математические модели (1) и (2) взаимодействия объектов, имеющих внутренние состояния, с коллективом агентов и нелинейная математическая модель (8) взаимодействия объектов с «полем» агентов.

Предложенные модели имеют различную вычислительную сложность. Количество уравнений в модели (1) с фиксированным количеством агентов равно $N_M = 2^{(N-M)} C_N^{(N-M)}$, а количество уравнений (2) с непостоянным количеством агентов равно $\sum_{M=0}^{N} N_M$. Это линейные дифференциальные уравнения или просто линейные уравнения в стационарном случае. Реализация таких моделей является трудоемкой вычислительной задачей. В предложенной нелинейной модели (8) количество уравнений существенно меньше – $5N$ уравнений, из которых только N нелинейных.

Предложенные математические модели можно использовать: в системах поддержки принятия решений; для диспетчерского управления; для составления долгосрочных и краткосрочных графиков обслуживания; для задач оптимизации размещения новых объектов, количества привлекаемых бригад и т. п.

Литература

1. Мамчистова, Е. И. Теоретические основы оптимального распределения ремонтных бригад для технического обслуживания и ремонта скважин / Е. И. Мамчистова // Моделирование технологических процессов нефтедобычи : сб. науч. тр. – Тюмень : Вектор-Бук, 2003. – Вып. 4. – С. 157–161.

2. Система технического обслуживания и планового предупредительного ремонта энергетического оборудования и сетей промышленной энергетики / сост. А. С. Овчинников. – Минск : Дизайн ПРО, 2007. – 687 с.

3. Агранович, В. М. Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах / В. М. Агранович, М. Д. Галанин. – Москва : Наука, 1978. – 383 с.

4. Багнич, С. А. Миграция триплетных возбуждений сложных молекул в неупорядоченных средах и в системах с ограниченной геометрией / С. А. Багнич // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42, вып. 10. – С. 1729 –1756.

5. Light-Harvesting Antennas in Photosynthesis. Series: Advances in Photosynthesis and Respiration (Vol. 13) / Eds.: Green B.R., Parson W.W. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 544 p.

6. Вишневский, В. М. Теоретические основы компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – Москва : Техносфера, 2003. – 512 с.

7. Кампен, Ван. Стохастические процессы в физике и химии / Ван Кампен. – Москва : Высш. шк., 1990. – 376 с.

8. Гардинер, К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. – Москва : Мир, 1986. – 528 с.

Получено 03.11.2008 г.