УДК 517.9

О. Н. Шабловский

КОЛЕБАНИЯ, РЕЗОНАНСЫ И ВОЛНЫ В НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЕ С ИСТОЧНИКАМИ

Получены новые точные решения пространственно нелокального волнового уравнения с источниками. Результаты изложены в терминах теории теплопереноса. Нелокальность задачи определяется членом уравнения, содержащим четвертую производную по пространственной координате. Рассмотрены два вида знакопеременных по отношению к температуре объемных источников энергии. Для источника технического происхождения производная от функции источника по температуре положительна, поскольку «высокие» температуры наблюдаются там, где происходит выделение энергии. Для источника, воздействующего на биологическую ткань, наклон функции источника отрицателен, так как в области «низких» температур происходит выделение тепла. Внешнее воздействие на нелокальную среду моделирует неоднородный по координате нестационарный источник энергии, подробно рассмотрены пять примеров таких источников. Аналитические решения представлены в конечном виде. Выполнено сравнение результатов воздействия монотонного и немонотонного (импульсного) по времени реономных источников. Указаны условия трансзвукового перехода скорости волны при распространении возмущения по неоднородному температурному фону. Изучены резонансные ситуации в системе «среда — источник энергии». Определены границы устойчивости / неустойчивости колебательных процессов. Получен безразмерный критерий, заключающий в себе наклон функции источника и параметр нелокальности среды и оказывающий существенное влияние на свойства корреляции «частота колебаний — параметр затухания».

New exact solutions are obtained for a spatially non-local wave equation with sources. The results are set out in the terms of the heat transfer theory. The non-locality of the problem is determined by the value of the fourth spatial derivative. We considered two types of volume energy sources which are alternating with respect to the temperature. For a technical source the derivative is positive, since «higher» temperatures arise from the energy release. For a biological source the source function is negative inclined, because a biological tissue gives off heat in the region of «lower» temperatures. The external influence on a non-local medium is simulated by spatially nonuniform energy source, and we have considered five types of such sources. The analytical solutions are presented in the finite form. The effects of monotonous and nontonotonous (impulsive) reonomic sources are compared. The conditions for a transonic transition are indicated for the wave of perturbation in the temperature set. Resonance occurrences in the system «medium — energy source» are studied.

The limits of oscillation stability/instability are determined. We found a dimensionless criterion including the inclination of the source function and the parameter of the medium non-locality. The criterion affects the correlation «oscillation frequency – fading parameter».

Ключевые слова: волновое уравнение, нелокальность, источник энергии, резонанс.

Keywords: wave equation, nonlocality, energy source, resonance.

Введение

Волновые уравнения с источниками (уравнения Клейна – Гордона) относятся к числу фундаментальных уравнений математической физики. Такие уравнения позволяют моделировать сложные явления в различных областях естествознания. В данной работе для определенности будем говорить о процессах волнового теплопереноса в системе «среда – источник энергии». Волновые задачи являются важным элементом динамической теории неравновесных состояний вещества. В качестве примера укажем гиперболическое уравнение теплопроводности, получаемое с помощью вариационных принципов [1; 2] и учитывающее конечную скорость распространения тепловых возмущений:

$$c\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+\gamma\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right)=\lambda\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+q_\upsilon, \qquad (1)$$

где t – время; x – декартова координата; $\tau=T-T^0$ есть отклонение температуры T от ее отсчетного значения $T^0\equiv\mathrm{const}$; c – объемная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; γ – время релаксации теплового потока; q_υ – мощность внутренних источников и стоков энергии; скорость распространения тепловых возмущений равна $w=(\lambda/c\gamma)^{1/2}$.

Физические аспекты обоснования уравнения (1) изложены в [3], а современное состояние термодинамической теории неклассических процессов переноса массы, импульса и энергии – в [4]. Здесь же приведены примеры учета нелокальных эффектов в задачах динамики тепловых волн. Частным случаем модели (1) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial(x')^2}=k_\upsilon(\tau,x',t), \qquad (2)$$

где $x'=x/w$, $k_\upsilon=q_\upsilon/(c\gamma)$; c, γ, w – const.

Это уравнение описывает быстрые процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным: $\gamma\partial/\partial t>>1$. Учет пространственно нелокальных эффектов переноса приводит к повышению порядка уравнения (2):

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial(x')^2}-\varepsilon\chi^2\frac{\partial^4\tau}{\partial(x')^4}=k_\upsilon(\tau,x',t). \qquad (3)$$

Здесь $\chi^2 = \chi_1^2 / w^4$, и величина $\varepsilon\chi_1^2$ есть параметр слабой нелокальности задачи.

Обоснование вывода уравнения (3) в пределе слабой нелокальности и подробная библиография даны в [5]. Современное состояние математических исследований нелокального волнового уравнения представлено в работах [6—9].

Отметим, что $dx'/dt = N/w = M$ есть число Маха, определяющее дозвуковой ($M^2 < 1$) либо сверхзвуковой ($M^2 > 1$)скоростной режим; $N = dx/dt$.

Далее применяем функцию источника

$$k_\upsilon = k_\upsilon^1 \tau + s_\upsilon(x', t),\ k_\upsilon^1 \equiv \text{const}. \tag{4}$$

Знакопеременный источник $k_\upsilon^1 \tau$ моделирует процессы энергообмена в системах различной физической природы. Источник технического происхождения ($k_\upsilon^1 > 0$) положителен в области «высоких» температур ($\tau > 0$), где происходит подвод тепла, и отрицателен в области «низких» температур ($\tau < 0$), где тепло отводится, например, вследствие теплообмена между элементом технического устройства и окружающей средой. Источник, типичный для биологической ткани, обладает свойствами, отличающими его от объектов неживой природы [10]. Такой источник ($k_\upsilon^1 < 0$) выполняет уравновешивающую роль компенсатора: в области «высоких» температур ($\tau > 0$) идет теплоотвод; в области «низких» температур ($\tau < 0$) происходит выделение энергии в биологической ткани [11—14]. В работе [15] обсуждены некоторые закономерности влияния знака производной $\partial k_\upsilon / \partial \tau$ на устойчивость волновых процессов в нелокальной среде.

Неоднородный по координате x' реономный источник $s_\upsilon(x', t)$ моделирует внешнее воздействие на нелокальную среду. В качестве примеров пространственно-временной неоднородности источника s_υ мы рассматриваем апериодические и периодические зависимости по x' и t.

Цель работы: построить новые аналитические решения нелокального уравнения (3) с физически содержательными источниками (4) и проанализировать условия возникновения резонансов в системе «среда — источник энергии».

Апериодическое решение

От аргументов (x', t) перейдем к новым независимым переменным g, h:

$$g = \exp(kx' + rt'),\ h = t' \exp[n(kx' + rt')],\ t' = t + t_0,$$

$$k, n, r, t_0 \text{ — const},\ t_0 > 0.$$

Источник энергии берем в виде, содержащем экспоненциальную зависимость от координаты и времени:

$$s_\upsilon(g) = s_\upsilon^1 g^{b_*},\ b_* = b_1 + n;\ s_\upsilon^1, b_1 \text{ — const};\ s_\upsilon^1 \neq 0. \tag{5}$$

Решение уравнений (3), (4) представляется формулами

$$\tau(g,h)=\theta_0(g)+h\,\theta_1(g), \tag{6}$$

$$\theta_1(g)=D_1 g^{b_1},\ D_1=s_\upsilon^1/(2rb_*),$$

$$\theta_0(g)=D_0 g^{b_0}+D_* g^{b_*};\ D_0, D_* - \text{const}.$$

Здесь для показателей степени b_* (то есть для b_1) и b_0 имеем два соотношения:

$$r^2-k^2=\left(k_\upsilon^1/b_*^2\right)+\varepsilon\chi^2 k^4 b_*^2, \tag{7}$$

$$\varepsilon\chi^2 k^4 b_0^2+\left(k^2-r^2\right)b_0^2+k_\upsilon^1=0.$$

Следовательно решение допускает два вида варианта значения b_0^2, а именно:

1) $b_0^2=k_\upsilon^1/\left(\varepsilon\chi k^4 b_*^2\right)$, $k_\upsilon^1\varepsilon>0$; 2) $b_0^2=b_*^2$. (8)

Физическое истолкование данного решения: тепловое поле между неподвижной стенкой $x'=0$ и волной возмущения $x'=x'_w(t)$, распространяющейся по неоднородному фону $\tau^0=\tau^0(x')$, $x'\geq 0$. Фронт волны $hg^{b_1}=H_1\equiv\text{const}$ обладает такими свойствами:

$$M_w=dx'_w/dt=(-r/k)-\left[1/(kb_*t')\right],\ t'>0, \tag{9}$$

$$x'_w=\frac{1}{b_*k}\ln\frac{H_1}{t'}-\frac{r}{k}t',\ H_1=t_0\exp(b_*rt_0), \tag{10}$$

$$\tau_w\equiv\tau(x'_w,t')=D_0\left(\frac{H_1}{t'}\right)^{b_0/b_*}+\frac{D_*H_1}{t'}+D_1H_1, \tag{11}$$

$$(k_\upsilon)_w=k_\upsilon^1\tau_w+\left(s_\upsilon^1H_1/t'\right),$$

$$k<0,\ r>0,\ n<0,\ b_0<0,\ b_1<0.$$

Две функции $x'=x'_w(t')$, $\tau^0=\tau_w(t')$ в (10), (11) дают параметрическое представление неоднородного температурного фона $\tau=\tau^0(x')$; t' — параметр; здесь $d\tau^0/dx'<0$; фронт волны движется с положительным ускорением вправо, в сторону положительных значений x.

Входные параметры задачи: k_υ^1, s_υ^1, ε, k, n, b_*, D_0, D_*. Из формулы (7) следует, что если $r^2>0$, то в решении (6) нужно взять

$$r=\left[k^2+\left(k_\upsilon^1/b_*^2\right)+\varepsilon\chi^2k^4b_*^2\right]^{1/2}>0,$$

и это решение — апериодическое по времени. Обсудим свойства скорости волны возмущения. Пусть в начальном состоянии $M_w(t=0)=0$, то есть $1/t_0=-rb_*>0$. В установившемся ($t\to\infty$) по времени режиме имеем $M_w^\infty=-r/k>0$. Значит, звуковая точка $M_w(t=t_1)=1$ достигается, если $(-r/k)>1$. В результате простых вычислений находим

$$t_1=t_0/\left(M_w^\infty-1\right)>0,\ M_w^\infty>1.$$

Вывод: трансзвуковой переход «дозвук → сверхзвук» происходит тем быстрее, чем больше тепловое число Маха в установившемся сверхзвуковом режиме.

Два периодических решения

Рассмотрим два варианта трансформирования решения (6): переход к зависимостям, содержащим колебания по времени t'; преобразование к решению, обладающему периодичностью по координате x'.

I. Если входные параметры такие, что $r^2 < 0$, то нужно взять

$$r = ir_*,\ r_* = \left[-k^2 - \left(k_\upsilon^1/b_*^2\right) - \varepsilon\chi^2 k^4 b_*^2\right]^{1/2} > 0,\ k_\upsilon^1 < 0,\ \varepsilon<0. \tag{12}$$

Выделяя действительную часть решения, находим

$$s_\upsilon = s_\upsilon^1 \exp(kb_* x')\cos b_* r_* t,\ x' \geq 0,\ t \geq 0,\ s_\upsilon^1 \neq 0, \tag{13}$$

$$\tau = D_0 \exp(kb_0 x')\cos b_0 r_* t + D_* \exp(kb_* x')\cos b_* r_* t + \tag{14}$$

$$+\left(s_\upsilon^1/2b_* r_*\right)\exp(kb_* x')t\sin b_* r_* t,\ k < 0,\ b_0 > 0,\ b_* > 0.$$

Мнимая часть решения записывается аналогичным образом. Данное решение содержит свободные параметры: k_υ^1, ε, s_υ^1, k, b_*, D_0, D_*; константа n не входит явно в эти формулы. Периодический по времени источник (13) локализован в правой окрестности $x' = 0$ и, согласно (14), возбуждает неустойчивость по резонансному типу: $t\sin b_* r_* t$. В зависимости от способа подсчета b_0 (см. (8)) решение (14) содержит колебания на одной частоте $b_* r_*$ либо на двух частотах: $b_* r_*$ и $b_0 r_*$. В случае $D_0 = 0$, $D_* \neq 0$ решение (14) определяет резонансную ситуацию, при которой температура и реономный источник s_υ колеблются на одной частоте. Зависимость $(b_* r_*)^2$ от квадрата параметра затухания $(kb_*)^2$ немонотонная, имеет минимум при $(kb_*)^2 = -1/(2\varepsilon\chi^2)$. В случае $D_0 \neq 0$ имеем решение, содержащее колебания на частоте $b_0 r_*$, отличающейся от частоты колебаний реономного источника. Из (8) ясно, что связь между квадратами параметров затухания $(kb_0)^2$ и $(kb_*)^2$ определяется величиной $k_\upsilon^1/\left(\varepsilon\chi^2\right)$.

Исходное ограничение $r^2 < 0$, при котором существует решение (14), выполнено для всех $(kb_*)^2 > 0$, если $1 < 4k_\upsilon^1\varepsilon\chi^2$. Если же $1 > 4k_\upsilon^1\varepsilon\chi^2$, то должны быть удовлетворены неравенства $(kb_*)^2 > (kb_*)_1^2$ либо $0 < (kb_*)^2 < (kb_*)_2^2$, где

$$(kb_*)_{1,2}^2 = \left(1 \pm \sqrt{1 - 4k_\upsilon^1\varepsilon\chi^2}\right)\Big/\left(-2\varepsilon\chi^2\right),$$

причем знакам «+» и «–» соответствуют индексы 1 и 2.

Вывод: в структуре данного решения безразмерный комплекс $k_\upsilon^1\varepsilon\chi^2$ характеризует мультипликативное взаимодействие источника $k_\upsilon^1\tau$ с нелокальной средой, и его числовое значение влияет на свойства корреляции «частота колебаний — параметр затухания».

II. В решении (6) сделаем замену $k = il$. Тогда, выделив действительную часть решения, получаем

$$s_\upsilon = s_\upsilon^1 \exp(rb_* t)\cos lb_* x',\ x' \ge 0,\ t \ge 0, \tag{15}$$

$$\tau = D_0 \exp(rb_0 t)\cos lb_0 x' + D_* \exp(rb_* t)\cos lb_* x' + \tag{16}$$

$$+ \left(s_\upsilon^1 / 2rb_*\right) t \exp(rb_* t)\cos lb_* x'.$$

Аналогично варианту I здесь допускаются два значения константы b_0^2:

$$1)\ b_0^2 = k_\upsilon^1 / \left(\varepsilon\chi^2 l^4 b_*^2\right),\ k_\upsilon^1 \varepsilon > 0;\ 2)\ b_0^2 = b_*^2. \tag{17}$$

Выбор знаков следующий: $b_0 > 0$, $b_* > 0$, $r < 0$, $l > 0$, $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon > 0$; величина r^2 подсчитывается по формуле (7), в которой $k^2 = -l^2$; вид начального температурного поля $\tau(t = 0, x')$ определяется выбором произвольных постоянных D_0, D_*; $t_0 = 0$.

Внешний для нелокальной среды источник s_υ монотонно релаксирует во времени и является периодическим по координате x' (см. (15)). Решение (16) имеет всплеск амплитуды, который определяется функцией $B(t) = t\exp(rb_* t)$. Эта функция имеет максимум при $t = t_m = 1/(-rb_*)$, $B(t_m) = 1/(-rb_* e)$. Если $rb_* \to 0$, то есть $t_m \to \infty$, $B(t_m) \to \infty$, то наблюдается неограниченный рост амплитуды колебаний в решении (16). Обсудим связь между параметром затухания rb_* и частотой lb_*:

$$(rb_*)^2 = \varepsilon\chi^2\left(l^2 b_*^2\right)^2 - l^2 b_*^2 + k_\upsilon^1.$$

Если $1 < 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$, то при всех $l^2 b_*^2 > 0$ будет $(rb_*)^2 > 0$, и процесс устойчив. Если $1 > 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$, то $l^2 b_*^2 = (lb_*)_1^2$ есть нижняя граница устойчивости для области высоких частот $l^2 b_*^2 > (lb_*)_1^2$; вместе с тем $l^2 b_*^2 = (lb_*)_2^2$ есть верхняя граница устойчивости для области низких частот $0 < l^2 b_*^2 < (lb_*)_2^2$. Здесь

$$(lb_*)_{1,2}^2 = \left(1 \pm \sqrt{1 - 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2}\right) \Big/ \left(2\varepsilon\chi^2\right),$$

причем знакам «+» и «–» соответствуют нижние индексы 1 и 2.

Вывод: чем дольше релаксирует (затухает) источник s_υ, тем большую амплитуду колебаний приобретает температура (16).

Корреляция «параметр затухания — частота» и резонанс

Рассмотрим источник энергии

$$k_\upsilon = k_\upsilon^1 \tau + hp_\upsilon^1,\ p_\upsilon^1 \equiv \mathrm{const}. \tag{18}$$

Решение нелокального волнового уравнения (3) имеет вид

$$\tau = D_0 g^{b_0} + D_* g^n + h\theta_1 , \tag{19}$$

$$\theta_1 = p_\upsilon^1 / s_1 ,\ s_1 = (nr)^2 - (nk)^2 - \varepsilon\chi^2 (nk)^4 - k_\upsilon^1 , \tag{20}$$

$$D_* = -2nrp_\upsilon^1 / s_1^2 ,$$

где b_0^2 следует вычислять из второго соотношения в (7); оценки параметров, при которых существует положительный корень $b_0^2 > 0$, здесь не приводятся; D_0, n — произвольные постоянные; $x' \ge 0$, $t \ge 0$.

Пусть $x' = 0$ — неподвижная стенка, $h = h_w \equiv \text{const}$ — волна, распространяющаяся вправо по неоднородному фону $\tau = \tau^0(x')$:

$$x'_w(t') = (1/nk)\ln(h_w/t') - (rt'/k),\ h_w = t_0 \exp(nrt_0) > 0 , \tag{21}$$

$$M_w = \frac{dx'_w}{dt} = -\frac{r}{k}\left(1 + \frac{1}{rnt'}\right) > 0 , \tag{22}$$

$$x'_w(t=0) = 0 ;\ r>0,\ k<0,\ n<0,\ b_0<0,\ 1+nrt_0<0;$$

$$\tau_w(t') = D_0 (h_w/t')^{b_0/n} + (D_* h_w/t') + h_w \theta_1 . \tag{23}$$

В этом решении функция $\tau^0(x')$ представлена параметрически двумя зависимостями (21), (23). Для скорости волны (22) переход «дозвук — сверхзвук» обладает такими же свойствами, как в уже изученном решении (10), (11), потому что формулы (22) и (9) имеют одинаковую структуру.

Неустойчивость решения (19) возникает, если $s_1 = 0$ (см. (20)):

$$(nr)^2 = \varepsilon\chi^2 (nk)^4 + (nk)^2 + k_\upsilon^1 > 0 . \tag{24}$$

Если правая часть этого выражения отрицательная, то решение всюду устойчивое, $s_1 > 0$. Здесь nr и nk являются параметрами неоднородности по времени и координате. При $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon > 0$ для каждого $(nk)^2 > 0$ существует $(nr)^2$ (см. (24)), дающее неустойчивость. При $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon < 0$ решение устойчивое в случае $1 < 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$ при всех $(nk)^2>0$; другой вариант устойчивости: $1 > 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$, $0 < (nk)^2 < (nk)_1^2$ либо $(nk)^2 > (nk)_2^2$. В интервале $0 < (nk)_1^2 < (nk)^2 < (nk)_2^2$ для каждого $(nk)^2$ существует значение $(nr)^2$, дающее неограниченно большую амплитуду (см. (24)). Если $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon > 0$, то решение устойчивое для $0 < (nk)^2 < (nk)_1^2$, а для $(nk)^2 > (nk)_1^2$ существуют неустойчивые решения. Если $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon < 0$, то решение устойчивое при $(nk)^2 > (nk)_2^2$, а в интервале $0 < (nk)^2 < (nk)_2^2$ существуют неустойчивые решения. Отметим, что в представленных здесь вариантах важны знаки величин ε и k_υ^1, числовое значение $k_\upsilon^1 \varepsilon \chi^2$ имеет количественное влияние на эти оценки. Границы упоминавшихся интервалов подсчитываются по формуле

$$(nk)_{1,2}^2 = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2}\right) \Big/ \left(2\varepsilon\chi^2\right).$$

Вывод: реономные источники (5) и (18) изменяются монотонно и немонотонно по времени, что приводит к существенным различиям в условиях устойчивости / неустойчивости теплового поля.

Трансформируем решение (18) — (20), взяв $k = il$ и выделяя действительную часть:

$$s_\upsilon = p_\upsilon^1 t \exp(nrt) \cos nlx', \tag{25}$$

$$\tau = D_0 \exp(rb_0 t) \cos lb_0 x' + D_* \exp(nrt) \cos nlx' + \tag{26}$$

$$+ \theta_1 t \exp(nrt) \cos nlx',$$

$$\theta_1 = p_\upsilon^1 / s_2, \; D_* = -2nrp_\upsilon^1 / s_2^2,$$

$$s_2 = (nr)^2 + (nl)^2 - \varepsilon\chi^2 (nl)^4 - k_\upsilon^1,$$

$$l > 0, n > 0, r < 0, b_0 > 0, t_0 = 0.$$

Напомним, что при замене $k = il$ меняется вид второго соотношения в (7). Именно это соотношение несет информацию о взаимодействии источника $k_\upsilon^1 \tau$ с нелокальной средой.

Пространственно-периодический источник (25) отличается от (15) немонотонным изменением во времени. Анализ поведения решения (26) дает следующие результаты. Неограниченная амплитуда колебаний получается при $s_2 = 0$:

$$(nr)^2 = \varepsilon\chi^2 (nl)^4 - (nl)^2 + k_\upsilon^1 > 0. \tag{27}$$

Если правая часть этого выражения отрицательная, то решение устойчивое, $s_2 > 0$. Пусть $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon > 0$: если $1 < 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$, то для каждого $(nl)^2 > 0$ существует (см. (27)) резонансное значение $(nr)^2$; если $1 > 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$, то имеем устойчивость при $(nl)_1^2 < (nl)^2 < (nl)_2^2$, а значения $(nr)^2$, дающие неустойчивость, существуют на интервалах $0 < (nl)^2 < (nl)_1^2$ и $(nl)^2 > (nl)_2^2$. Пусть $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon < 0$: решение устойчивое при всех $(nl)^2 > 0$. Если $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon > 0$, то решение устойчивое для $0 < (nl)^2 < (nl)_1^2$, а для $(nl)^2 > (nl)_1^2$ существуют резонансные значения $(nr)^2$, которые подсчитываются по формуле (27). Если $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon < 0$, то решение устойчивое при $(nl)^2 > (nl)_2^2$, а в интервале $0 < (nl)^2 < (nl)_2^2$ существуют неустойчивые решения. Границы названных интервалов определяются выражением

$$(nl)_{1,2}^2 = \left(1 \pm \sqrt{1 - 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2}\right) \Big/ \left(2\varepsilon\chi^2\right).$$

Вывод: пространственно-периодические решения (25), (26) и (15), (16) при $D_0 \neq 0$ содержат колебания на собственной частоте lb_0, отличающейся от частоты колебаний источника s_υ; различия в нестационарных свойствах этого источника приводят к различиям в условиях возникновения резонансов.

Заключение

Получены точные аналитические решения нелокального волнового уравнения (3) с источниками (4) вида (5), (13), (15), (18) и (25). Построены волны возмущения, содержащие трансзвуковой переход «дозвук — сверхзвук» по отношению к скорости w. Проанализированы условия возникновения резонансных ситуаций. Установлена важная роль безразмерного комплекса $k_{\upsilon}^{1}\varepsilon\chi^{2}$ при оценке границ устойчивости / неустойчивости колебаний. В частном случае $\varepsilon = 0$ (классическое волновое уравнение) поведение представленных здесь решений определяется прежде всего знаком параметра источника k_{υ}^{1}. Анализ этих простых вариантов здесь не приводится.

Список литературы

1. *Глазунов Ю. Т.* Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40, №1. С. 134—138.

2. *Яворский Н. И.* Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. №3. С. 3—10.

3. *Никитенко Н. И.* Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73, №4. С. 851—859.

4. *Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J.* Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin ; Heidelberg, 2001.

5. *Алфимов Г. А.* Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, №4. С. 585—602.

6. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.

7. *Мамчуев М. О.* Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественнонаучная серия. 2014. №7. С. 45—59.

8. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2016. №4. С. 76—86.

9. *Дрегля А. И., Сидоров Н. А.* Идентификация динамики внешней силы при моделировании колебаний // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2017. Т. 19. С. 105—112.

10. *Pennes H. H.* Analysis of Tissue and Arterial Temperature in the Resting Human Forearm // J. Appl. Phisiol. 1948. Vol. 1, iss. 2. P. 93—122.

11. *Tung M. M., Trujillo M., Lopez Molina J. A. et al.* Modelling the Heating of Biological Tissue Based on the Hyperbolic Heat Transfer Equation // Math. Comput. Model. 2009. Vol. 50, iss. 5—6. P. 665—672.

12. *Yang C.-Y.* Boundary Estimation of Hyperbolic Bio-Heat Conduction // Int. J. Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 54, iss. 11—12. P. 2506—2513.

13. *Lin S.-Y., Chou T.-M.* Numerical Analysis of the Pennes Bioheat Transfer Equation on Skin Surface // 2015 Third International Conference on Robot, Vision and Signal Processing (RVSP). IEEE, 2015. P. 71—74.

14. *Mochnacki B., Ciesielski M., Piasecka-Belhayat A.* Numerical Solution of the Bio-Heat Transfer Equation with Uncertain Parameters Using the Sensitivity Analysis Method // Defect Diffus. Forum. 2017. Vol. 379. P. 39—47.

15. *Шабловский О.Н.* Нелокальность и возникновение резонансов в динамике волн // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. 2017. Вып. 18. С. 125—138.

Об авторе

Олег Никифорович Шабловский — д-р физ.-мат. наук, проф., Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Беларусь.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

The author

Prof. Oleg N. Shablovsky, Sukhoi State Technical University of Gomel, Belarus.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru