Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Л. Д. Корсун

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ПОСОБИЕ
по одноименной дисциплине для студентов
специальности 1-40 04 01 «Информатика
и технологии программирования»
дневной формы обучения

Гомель 2019

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.16я73
К69

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 4 от 03.12.2018 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Информатика» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *Т. А. Трохова*

Корсун, Л. Д

К69 Специальные математические задачи и алгоритмы их решения : практикум по одноим. дисциплине для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / Л. Д. Корсун. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 58 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по каждой теме с разобранными типовыми примерами и достаточное количество задач для решения. Предназначен для использования на практических занятиях, а также самостоятельной работы студентов.

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.16я73

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2019

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Понятие функционала

<u>Опр. 1.1.</u> Если каждой функции $y = y(x)$ из некоторого множества поставлено в соответствие некоторое число *J*, то говорят, что на этом множестве задан *функционал* и пишут $J[y(x)]$.

Функционал является обобщением понятия функции. Функция одной переменной ставит в соответствие одному числу x другое число y. Функционал ставит в соответствие функции $y = y(x)$ (бесконечному числу её значений) число *J*. Множество функций $y(x)$, на котором определен функционал $J[y(x)]$, называется областью определения функционала, а число *J* – значением функционала.

Приведем примеры функционалов:

1. <u>*Длина дуги плоской кривой*</u>, заданной уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$;

$$l[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

2. <u>*Задача о брахистохроне*</u>. Задача, сформулированная в 1696 году Иоганном Бернулли: *«Даны две точки A и B в вертикальной плоскости. Найти для движущейся частицы M путь AMB, спускаясь вдоль которого под действием силы тяжести, она может в кратчайшее время достичь из точки A точку B»,* получила название задачи о брахистохроне. Именно она дала начало самостоятельной и обширной области математики, которая называется **вариационным исчислением.**

3. <u>*Задача о геодезических линиях (Якоб Бернулли)*</u>.

На заданной поверхности Ф требуется найти линию, соединяющую две фиксированные точки поверхности, имеющую наименьшую длину. Такие кривые называются *геодезическими*.

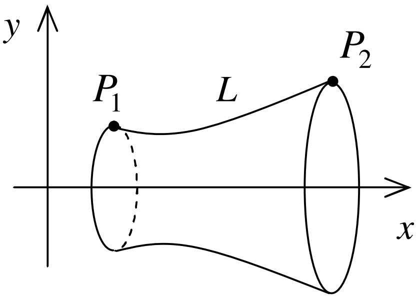
4. <u>*Задача о наименьшей поверхности*</u>.

Даны две точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ плоскости $X0Y$, причем $x_1 < x_2$. Пусть $y = y(x)$ – уравнение кривой, соединяющей точки P_1 и P_2, т.е.

$$y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2).$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Кривая L вращается вокруг оси $0X$. Требуется найти линию L такую, чтобы площадь поверхности была наименьшей.



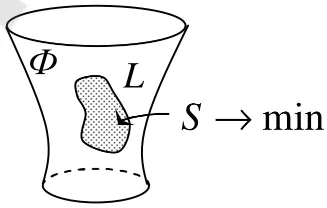
Площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Таким образом, требуется определить функцию $y(x)$, которая минимизирует интеграл (функционал) $S[y]$. Такие поверхности называются *катеноидами*.

5. <u>*Проблема Плато*</u>:

Обобщение предыдущей задачи – найти поверхность, проходящую через заданную пространственную замкнутую кривую так, чтобы площадь, ограниченная кривой, была наименьшей.



Все приведенные задачи сводятся к определению гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей начальным условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

которая минимизирует интеграл типа

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \tag{1.1}$$

где F – заданная функция трех аргументов.

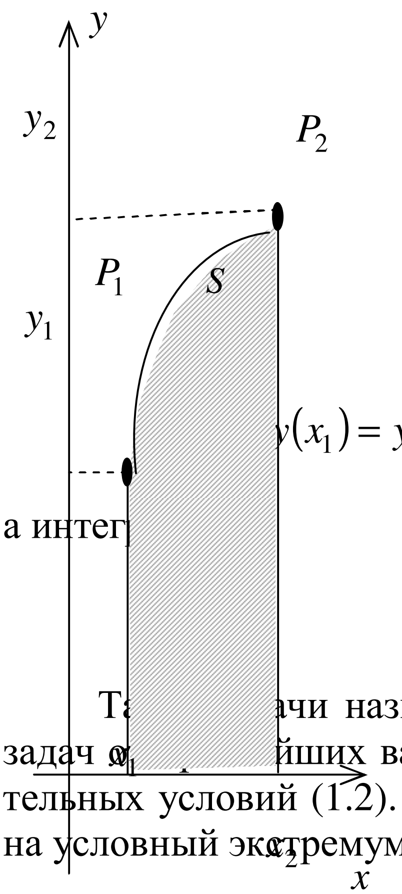
Такие задачи называются ***простейшими задачами вариационного исчисления.***

6. <u>*Задача Дидоны*</u> - легендарной карфагенской царевны, которой понадобилось ремешком данной длины ограничить участок земли наибольшей площади <u>*(Леонард Эйлер).*</u> (*Изометрическая задача).*

Рассмотрим следующую задачу, которую приписывают первой карфагенской царице Дидо (задача Дидони из «Энеиды» Вергилия), около 850 года до Рождества Христова.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Среди всех гладких кривых <u>длины L</u>, соединяющих заданные тоски P_1 и P_2 ($L > |P_1 P_2|$) найти ту, которая ограничивает наиболее возможную площадь, заключенную между отрезками двух перпендикуляров, опущенных из точек P_1, P_2 на ось $0X$.



По-существу, требуется найти функцию $y(x)$ такую, что

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L, \qquad (1.2)$$

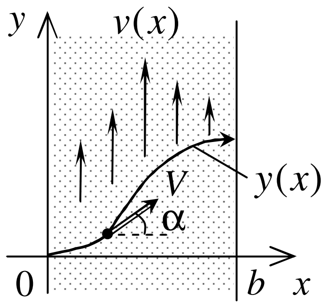
а интег

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx \to \max.$$

Т ачи называются *изопериметрическими*. Отличие этих задач о йших вариационных заключается в наличии дополнительных условий (1.2). Здесь мы имеем дело с вариационной задачей на условный экстремум.

7. <u>*Задача навигации*</u>.

Пусть имеется река ширины b с прямыми параллельными берегами. Считая один берег совпадающим с осью $0X$, обозначим через $v = v(x)$ скорость течения реки.



Лодка с постоянной скоростью V ($V > \max\limits_{[0,b]} v(x)$) за кратчайшее время должна пересечь реку, отчалив из фиксированной точки $O(0,0)$.

Обозначим через α – угол курса лодки. Тогда компоненты скорости лодки в реке будут определятся равенствами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = v + V\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v + V\sin\alpha}{V\cos\alpha}.$$

Разрешая это уравнение, находим:

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

$$\left(y' - \frac{v}{V\cos\alpha}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{V\cos\alpha} = \frac{\sqrt{V^2\left(1+y'^2\right)-v^2} - vy'}{V^2 - v^2}.$$

Для времени пересечения реки находим

$$dt = \frac{dx}{V\cos\alpha} \quad \Rightarrow t = \int_0^b \frac{\sqrt{V^2\left(1+y'^2\right)-v^2(x)} - v(x)\cdot y'}{V^2 + v^2(x)}\,dx.$$

Последний интеграл должен быть минимизирован за счет выбора функции $y(x)$ при условии $y(0)=0$.

В данном типе задач правый конец искомой кривой заранее не определен.

Здесь мы имеем дело с *вариационной задачей со свободными концами*.

2. Экстремум функционалов

Опр. 1.2. *Вариацией* δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу G функций:

$$\delta y = y(x) - y_0(x). \tag{1.3}$$

Для класса k раз дифференцируемых функций по определению имеем:

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x). \tag{1.4}$$

Понятно, что вариация δy сама является функцией.

Опр. 1.3. Пусть функционал $J[y]$ задан на множестве G функций $y(x)$. *Приращением функционала* $J[y]$, соответствующим приращению аргумента δy называется величина, определяемая как

$$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y]. \tag{1.5}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Опр. 1.4. Функционал $J[y]$ достигает на кривой $y_0(x)$ *локального* или *относительного минимума* (*максимума*), если для всех $y(x)$ из некоторой ε-окрестности кривой $y_0(x)$ выполняется неравенство

$$J[y_0(x)] \leq J[y(x)] \quad (J[y_0] \geq J[y]). \tag{1.6}$$

Локальные max и min называются локальными экстремумами. Если неравенства (1.6) выполняются для всех функций из множества $G \subset C_n[a,b]$, то говорят, что на кривой $y_0(x)$ функционал достигает *абсолютного экстремума*.

Пример 1.

Показать, что функционал

$$J[y(x)] = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx .$$

На кривой $y_0(x) \equiv 0$ достигает строго min.

Решение.

Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $y(x)$ имеем

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 y^2 dx \geq 0 .$$

Причем 0 достигается только на кривой $y(x) \equiv 0$. ▲

3. Уравнение Эйлера-Лагранжа

Лемма 1.1. Пусть $y(x)$ фиксированная непрерывная функция, определенная на интервале $[a,b]$. Тогда если

$$\int_a^b y(x) \delta y(x) = 0 \tag{1.7}$$

при произвольном выборе непрерывно дифференцируемой функции $\delta y(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0, \tag{1.8}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

то функция $y(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Пусть известно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, которая минимизирует интеграл простейшей вариационной задачи

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{1.9}$$

где

$$y(a) = y_0,\ y(b) = y_1. \tag{1.10}$$

Требуется найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая функция $y(x)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Для того, чтобы функционал (1.9), определенный на множестве функций из $G \in C_1[a, b]$ и удовлетворяющих граничным условиям (1.10), достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо чтобы эта функция удовлетворяла *уравнению Эйлера-Лагранжа*:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство:

Согласно необходимому условию экстремума теоремы 1.1 имеем

$$\delta J[y] = \delta \int_a^b F(x, y, y')dx = 0.$$

Для вариации функционала находим

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \begin{bmatrix} \textit{второе} \\ \textit{слагаемое} \\ \textit{интегрируем} \\ \textit{по частям} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] \Bigg|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Так как на концах отрезка $[a,b]$ вариации δy обращаются в 0 (на концах функция фиксирована граничными условиями (1.10)), то первое слагаемое зануляется, следовательно, получим

$$\delta J[y]=\int_a^b\left[F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)\right]\delta y(x)dx.$$

Далее согласно лемме 1.1 получаем

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

<u>Опр. 1.5.</u> Решения уравнений Эйлера-Лагранжа называются *экстремалями функционала* (1.9).

<u>Замечание.</u> Условие $\delta J=0$ не является достаточным для экстремума. Поэтому экстремали могут приводить как к минимуму, так и к максимуму и более того вообще не быть экстремумами.

<u>Пример 2.</u>

Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(y'^2-12xy\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0)=y(1)=1$.

Решение.

В данном случае $F(x,y,y')=y'^2-12xy$, поэтому $F'_y=-12x$, $F'_{y'}=2y'$, следовательно,

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)=-12x-2y''=0\Rightarrow y''(x)+6x=0.$$

Последовательно интегрируя, находим

$$y'(x)=-3x^2+C_1 \quad\Rightarrow\quad y(x)=-x^3+C_1x+C_2.$$

Определим константы C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 1; \quad y(1) = -1 + C_1 + 1 = C_1 = 1.$$

Следовательно, имеем единственную экстремаль

$$y(x) = -x^3 + x + 1. \blacktriangle$$

Ответ: $y(x) = -x^3 + x + 1$.

В вариационном исчислении функцию $F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)$ называют *вариационной производной* функционала J и пишут

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{1.12}$$

Отметим также, что вариационная задача может и не иметь решений или иметь бесконечное множество решений.

4. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера-Лагранжа

Уравнение Эйлера-Лагранжа не всегда интегрируется в квадратурах, а в ряде случаев его решение может вызвать затруднение. Рассмотрим простейшие случаи.

I. *F не зависит явно от y.*

Пусть $F = F(x, y')$. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 = const.$$

Это есть ДУ первого порядка, не содержащее явно $y(x)$. Если возможно его разрешение относительно y', то далее получим

$$y' = \varphi(x, C_1) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \varphi(x, C_1)dx.$$

II. *F не зависит явно от x.*

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Пусть $F = F(y, y')$. Тогда получаем, что $y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} - F = C_1$ – первый интеграл уравнения. Далее, если это уравнение удается явно разрешить относительно производной

$$y' = \psi(y, C_1),$$

то получаем экстремали в виде

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y, C_1)}.$$

III. *Случай полной производной.*

Пусть $F = \dfrac{d}{dx}G(x, y)$. Тогда интеграл I не зависит от выбора функции y

$$I = G(x_2, y_2) - G(x_1, y_1).$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа будет выполняться тождественно и любая функция из $C_1[a, b]$ будет экстремальна. Вариационная задача теряет свой смысл.

IV. *F не зависит от y'.*

Пусть $F = F(x, y)$. Тогда имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Это алгебраическое уравнение. Его решение не содержит произвольных констант, и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям только в исключительных случаях.

V. *F зависит только от y'.*

Пусть $F = F(y')$. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F'_{y'}\right) = 0 \Rightarrow F''_{y'y'} \cdot y''(x) = 0.$$

Если $F_{y'y'} = 0$, то имеем

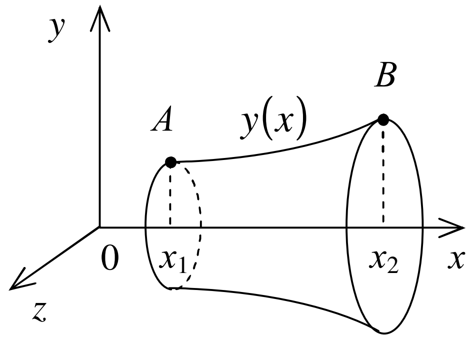
Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$y''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2,$$

т.е. экстремалями являются всевозможные прямые линии.

<u>Пример 3.</u> О наименьшей поверхности вращения.

Требуется минимизировать функционал



$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Подинтегральная функция не зависит от x, поэтому первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$F - y'F'_{y'} = C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Проще всего это ДУ интегрируется подстановкой $y' = \operatorname{sh} t$, тогда

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2} = C_1 \operatorname{ch} t,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt \;\Rightarrow\; x = C_1 t + C_2.$$

Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1 \operatorname{ch} t. \end{cases}$$

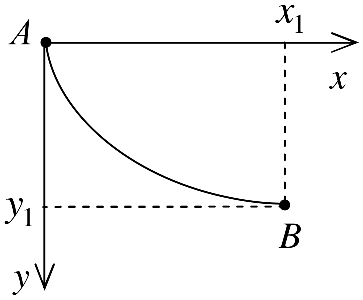
Исключая параметр t, получим

$$y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x - C_1}{C_2}$$ – цепная линия.

Библиотека ГГТУ имени П.О. Сухого

Пример 4. Задача о брахистохроне.

Даны две точки A и B в вертикальной плоскости. Найти для движущейся частицы M путь AB, спускаясь вдоль которого под действием силы тяжести, она может в кратчайшее время достичь из точки A точку B**.**



Предположим, что точки A и B лежат в плоскости $X0Y$ с осью $0Y$, направленной вниз.

Положим $A = A(0{,}0)$, $B = B(x_1, y_1)$ и пусть $y = y(x)$ – уравнение дуги, соединяющей точки A и B. Скорость движения вдоль кривой равна $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Тогда время спуска равно

$$T = \int\limits_{AB} \frac{ds}{dv} = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx.$$

Определим скорость v как функцию координаты x из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \text{ (начальная скорость равна 0).}$$

Отсюда $v = \sqrt{2g(y - y_1)}$ (ось $0Y$ направлена вниз), поэтому получим

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1-y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

Задача сводится к определению функции $y(x)$, для которой интеграл T достигает наименьшего возможного значения.

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx, \quad y(0) = 0,$$

$$y(x_1) = y_1.$$

Подинтегральная функция опять не зависит от x, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$F - y'F'_{y'} = C_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1 - y'^2\right)}} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{y\left(1 - y'^2\right)}} = C_1 \ \Rightarrow \quad y\left(1 + y'^2\right) = \tilde{C}_1 .$$

Проще всего это уравнение интегрируется с помощью подстановки

$$y' = \operatorname{ctg} t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\tilde{C}_1}{1+y'^2} = y = \frac{\tilde{C}_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \tilde{C}_1 \sin^2 t = C_1(1-\cos 2t).$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1-\cos 2t)dt \Rightarrow$$

$$x = \int C_1(1-\cos 2t)dt = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2 .$$

Преобразовав параметр $2t = t_1$, получим

$$\begin{cases} x - \underbrace{C_2}_{=0} = \dfrac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1) \\ \quad y = \dfrac{C_1}{2}(t_1 - \cos t_1) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \sin t). \end{cases}$$

– уравнение циклоиды, если начальная точка имеет координаты $(0,0)$.

Константа a находится по координатам точки $B(x_1, y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида. ▲

5. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи

I. ***Функционал от вектор-функции***

Пусть функционал простейшей вариационной задачи зависит от вектор-функции $\bar{y}(x) = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$:

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$J[\bar{y}(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))dx.$$

Вектор-функция представляет собой совокупность независимых функций $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Поэтому в этом случае мы имеем, по-существу, простейшую вариационную задачу, в которой функция F зависит от набора функций:

$$J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx. \qquad (1.13)$$

При этом граничные условия записываются как

$$y_k(x_1) = y_k^{(0)}, \; y_k(x_2) = y_k^{(1)}, \; k = \overline{1, n}.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dx}\left(F'_{y'_k}\right) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (1.14)$$

Пример 5.

Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a, b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J = [y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2\right)dx$$

при граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение.

Система уравнений Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + y_2 = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \; y_2 = -y_1'' \; \Rightarrow \; y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Общее решение

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$y_2(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $C_4 = 1$. Поэтому

$$y_1(x) = \sin x,$$
$$y_2(x) = \sin x. \blacktriangle$$

II. ***Функционалы, зависящие от производных высших порядков***

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right)dx. \qquad (1.15)$$

с граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad \ldots, \quad y'(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

$$y(x_2) = y_2, \quad y'(x_2) = y_2', \quad \ldots, \quad y'(x_2) = y_2^{(n-1)}.$$

Экстремалями функционала (1.15), имеющими производную порядка $2n$, являются решения уравнения Эйлера-Пуассона

$$F_y' - \frac{d}{dx}F_{y'}' + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}' - \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}' + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}' = 0. \qquad (1.16)$$

Пример 6.

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 (y'')^2\, dx,$$

при граничных условиях $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$.

Решение.

Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0, \qquad y^{(4)} = 0,$$

его общее решение $y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Из граничных условий находим: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0$. Следовательно, экстремум функционала может достигаться только на прямой $y = x$. $\blacktriangle$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

III. ***Вариационная задача с подвижными границами***

Пусть одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых в вариационной задаче расширяется. Кроме кривых сравнения, которые имеют общие граничные точки можно брать и кривые с подвижными границами. Поэтому если на какой-нибудь кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум достигается и по отношении к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с этой кривой $y = y(x)$, и следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие, а именно, функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера-Лагранжа

$$F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) = 0.$$

Итак, *кривые* $y = y(x)$, *на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами*, *должны быть экстремалями*.

Общее решение Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными границами условия записывались как

$$y(x_1) = y_1 \text{ и } y(x_2) = y_2.$$

В задаче с подвижными границами одно или даже два граничных условия отсутствуют. Поэтому соотношения на определение неизвестных констант должны следовать из исходного необходимого условия

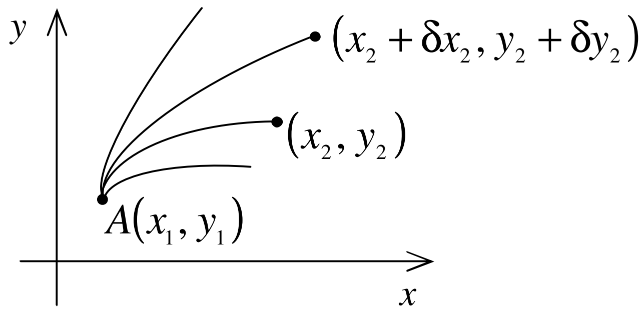
$$\delta J[y] = 0.$$

Итак, будем рассматривать функционал $J[y]$ на экстремалях $y = y(x, C_1, C_2)$. Тогда он превращается в функцию от констант C_1, C_2 и пределов интегрирования x_1, x_2. Поэтому является функцией

$$J\left(y(x, C_1, C_2), x_1, x_2\right),$$

а его вариация δJ – в дифференциал dJ.

Пусть для простоты левый конец кривых закреплен в точке $A(x_1, y_1)$.



Приращения координат правого конца по-прежнему будем обозначать как δx - δy вместо Δx и Δy.

Для приращения (вариации) функционала находим

$$\Delta J = \int\limits_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx =$$

$$= \Delta J_1 + \Delta J_2.$$

Полное приращение представляет собой сумму двух слагаемых. В первом слагаемом воспользуемся теоремой о среднем для определенного интеграла:

$$\Delta J_1 = \int\limits_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F\Big|_{x=x_2+\theta\delta x_2} \cdot \delta x_2, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Далее в силу непрерывности функции F имеем

$$\Delta J_1 = \left(F(x, y, y')\Big|_{x=x_2} + O(\delta x_2)\right)\cdot \delta x_2 =$$
$$= F(x, y, y')\Big|_{x=x_2} \delta x_2 + O(\delta x_2).$$

Вторая часть приращения после интегрирования по частям и учета закрепления левого конца кривой дает

$$\Delta J_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} [F'_y\delta_y + F'_{y'}\delta_{y'} + R_1]dx =$$

$$= [F'_{y'}\delta y]_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'})\right)\delta y dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} R_1 dx =$$

$$= [F'_{y'}\delta y]_{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} R_1 dx,$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

где R_1 – остаток в формуле Тейлора, а $\dfrac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right) \equiv 0$.

Пренебрегая остатком R_1, главная линейная часть приращения ΔJ_2, будет иметь вид:

$$\Delta J_2 \approx F_{y'}\Big|_{x=x_2} \cdot \left(\delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2\right).$$

Суммируя приращения ΔJ_1 и ΔJ_2, получаем для вариации (дифференциала, главной линейной части по δx_2 и δy_2):

$$\delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 = F\Big|_{x=x_2}\delta x_2 + F'_{y'}\Big|_{x=x_2}\left(\delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\delta J = \left(F - F'_{y'} \cdot y'\right)\Big|_{x=x_2}\delta x_2 + F'_{y'}\Big|_{x=x_2}\delta y_2 = 0.$$

Если δx_2 и δy_2 независимы, то имеем

$$\begin{cases} F - y'F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0, \\ F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0. \end{cases}$$

Однако на практике часто встречаются случаи, когда один из концов движется по некоторой фиксированной кривой

$$y_2 = \varphi(x_2).$$

Так как $\delta y_2 \approx \varphi'(x_2)\delta x_2$, то

$$F + (\varphi' - y')F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0. \tag{1.17}$$

Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами экстремали и функции φ и называется *условием трансверсальности*.

Если и левая граничная точка движется вдоль кривой $y_1 = \psi(x_1)$, то аналогично получаем второе условие трансверсальности

$$F + (\psi' - y')F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0. \tag{1.18}$$

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти:

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

1) общее решение $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера;
2) из условий трансверсальности (1.17) и (1.18) и уравнений

$$\begin{aligned} y(x_1, C_1, C_2) &= \psi(x_1) \\ y(x_2, C_1, C_2) &= \varphi(x_2) \end{aligned} \qquad (1.19)$$

определить постоянные C_1, C_2 и концы отрезка $[x_1, x_2]$.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой, например, $x_2 = b$, но граничное условие в точке $x = b$ отсутствует. В этом случае $\delta x_2 = 0$ и мы получаем *естественное граничное условие*

$$\left[F'_{y'}\right]\Big|_{x=b} = 0.$$

Решение типовых задач

Пример 7. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^0 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$$

Решение.

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2yy' + y^2.$$

Найдем частные производные функции $F(x, y, y')$:

$$F'_y = 2y' + 2y, \; F'_{y'} = 2y' + 2y.$$

Уравнение Эйлера примет вид

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0,$$

т.е.

$$2y' + 2y - 2y'' - 2y' = 0 \quad \text{или} \quad y'' - y = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Определим константы C_1 и C_2 исходя из граничных условий:

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

$$\begin{cases} y(1) = C_1 e + C_2 e^{-1}, \\ y(2) = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_1 = -\frac{1e^{-2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}; \; C_2 = -\frac{1e^{2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}.$$

Тогда

$$y(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(-e^{-2+x} + e^{2-x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$$ – единственная экстремаль.

Ответ: $y(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$. ▲

Пример 8. Найти все экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Решение.

Экстремали функционала $J[y]$ являются интегральными кривыми уравнения Эйлера. Находим производные:

$$F_y^{'} = 2y - 2\sin x, \quad F_{y'}^{'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}F_{y'}^{'} = 2y''.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' - y = -\sin x.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общим решением является функция

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

Используя граничные условия, находим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Откуда $C_1\left(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}\right)=2$ или $C_1=\dfrac{2}{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}=\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}$, $C_2=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}$.

Следовательно, экстремали данного функционала имеют вид:

$$y=\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin x.$$

Ответ: $y(x)=\dfrac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}\sin x$.▲

<u>Пример 9</u>. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J[y_1,y_2]$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J[y_1,y_2]=\int_0^1\left(y_1'^2+y_2'^2\right)dx;$$

$$y_1(0)=2;\ y_2(0)=0;\ y_1(1)=2\operatorname{ch}1,\ y_2(1)=2\operatorname{sh}1;\ y_1'-y_2=0.$$

Решение.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L=y_1'^2+y_2'^2+\lambda(x)(y_1'-y_2).$$

Для определения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $\lambda(x)$ запишем систему уравнений, состоящую из уравнений Эйлера (9.8.5) и условия связи:

$$\begin{array}{l} L_{y_1}-\dfrac{d}{dx}\left(L_{y_1'}\right)=0\Rightarrow \\ L_{y_2}-\dfrac{d}{dx}\left(L_{y_2'}\right)=0\Rightarrow \end{array}\begin{cases}2y_1''+\lambda'=0,\\ 2y_2''+\lambda=0,\\ y_1'-y_2=0.\end{cases}$$

Исключая из системы сначала $\lambda(x)$, а затем $y_1(x)$, получим

$$y_2'''-y_2'=0\quad\Rightarrow\quad k^3-k=0\quad\Rightarrow\quad k_1=0,k_2=1,k_3=1.$$

Таким образом,

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\begin{cases} y_2(x) = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}, \\ y_1(x) = \int y_2(x)dx = C_1 + C_2e^x - C_3e^{-x} + C_4. \end{cases}$$

Для определения неизвестных констант используем граничные условия:

$$\left.\begin{array}{lll} y_1(0) = 2 & \Rightarrow & C_2 - C_3 + C_4 = 2, \\ y_2(0) = 0 & \Rightarrow & C_1 - C_2 + C_3 = 0, \\ y_1(1) = 2\,\mathrm{ch}1 & \Rightarrow & C_1 + C_2e - C_3e^{-1} + C_4 = 2\,\mathrm{ch}1, \\ y_2(1) = 2\,\mathrm{sh}1 & \Rightarrow & C_1 + C_2e + C_3e^{-1} = 2\,\mathrm{sh}1. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = C_4 = 0 \\ C_2 = 1, C_3 = -1 \end{array}$$

Таким образом, экстремум может достигаться на функциях

$$\begin{array}{l} y_1(x) = e^x + e^{-x} = 2chx \\ y_2(x) = e^x - e^{-x} = 2\,\mathrm{sh}\,x \end{array}.$$

ЗАДАЧИ

Найти экстремали следующих функционалов:

1.1. $J[y] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$

1.2. $J[y] = \int\limits_{1}^{2} (y'^2 + 2yy' + y^2)dx; \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$

1.3. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} (4y\cos x + y'^2 - y^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

1.4. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$

1.5. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi/2} (8y^2 + ye^{2x} + y'^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$

1.6. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (4y^2 + 3xye^{2x} + y'^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

1.7. $J[y] = \int\limits_{1}^{e} (xy'^2 + yy')dx; \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

1.8. $J[y]=\int\limits_0^1 (x+y''^2)dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1,\quad y'(0)=1,\quad y'(1)=1.$

1.9. $J[y]=\int\limits_0^{\pi/2} (x^2-y^2+y''^2)dx;\quad y(0)=1,\ y(\pi/2)=0,\ y'(0)=0,\ y'(\pi/2)=-1.$

1.10. $J[y]=\int\limits_{-1}^{0} (240y-y'''^2)dx;\quad y(-1)=1,\quad y(0)=0,\quad y'(-1)=-4.5,$

$y'(0)=0,\quad y''(-1)=16,\quad y''(0)=0.$

1.11. $J[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2} (y'^2+z'^2-2yz)dx;\quad y(0)=0,\ y(\pi/2)=1,\ z(0)=0,\ z(\pi/2)=1.$

1.12. $J[y,z]=\int\limits_{-1}^{1} (2xy-y'^2+\frac{z'^3}{3})dx;\quad y(1)=0,\ y(-1)=2,\ z(1)=1,\ z(-1)=-1.$

1.13. $J[y,z]=\int\limits_{1/2}^{1} (y'^2-2xyz')dx;\quad y(1/2)=2,\ y(1)=1,\ z(1/2)=15,\ z(1)=1.$

1.14. Найти минимум интеграла $J[y]=\int\limits_0^{\pi} y'^2(x)dx$ при условии

$\int\limits_0^{\pi} y^2(x)dx=1,\quad y(0)=y(\pi)=0.$

1.15. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,0,-1)$ и $B(1,0,1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=0$.

1.16. Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

1.17. Найти расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y=\frac{2}{x}\ (x>0)$.

1.18. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

1.19. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $y^2=x$.

1.20. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(0,0,3)$ до поверхности $z=x^2+y^2$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Глава 2
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Метод интегральных преобразований является одним из мощных методов математической физики, применяющийся для решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных).

6. Интеграл Фурье

При всем удобстве применения рядов Фурье, следует обратить внимание на ограничения, с которыми мы сталкиваемся. В частности, раскладываемая в ряд Фурье функция должна быть периодической, или ее поведение за пределами некоторого отрезка не является важным для нас.

Если мы не можем пренебречь поведением функции на всей числовой прямой, на помощь приходит «*интеграл Фурье*».

Пусть функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье на $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{2.1}$$

при этом

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt, \qquad (n = 0,1,\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt, \qquad (n = 0,1,\ldots). \end{aligned} \tag{2.2}$$

В курсе математического анализа были рассмотрены условия, при которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т.е. представлена как суперпозиция гармонических колебаний. Напомним достаточный признак сходимости.

ТЕОРЕМА 2.1. Если для интегрируемой функции $f(x)$ при фиксируемом x и некотором $\delta > 0$ интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty \tag{2.3}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

существует, то частичные суммы

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}$$

ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся в этой точке x к $f(x)$.

Условие сходимости интеграла (2.3) называется *условием Дини*. Оно, в частности, выполнено, если в данной точке x функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную, или хотя бы левую и правую производные.

Перенесем этот результат на *непериодические* функции.

Пусть функция $f(x)$ на каждом конечном интервале удовлетворяет условиям **теоремы 2.1** рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$.

Подставляя коэффициенты (2.2) в разложение (2.1) получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi t}{l}dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{k\pi t}{l}dt\right],$$

т.е.

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt\,. \qquad (2.4)$$

Дополним условие теоремы 2.1. еще одним требованием, а именно, пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной оси, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dt<\infty\,. \qquad (2.5)$$

Перейдем в (2.4) к пределу $l\to\infty$. Тогда первое слагаемое стремиться к 0. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму, распространенную на бесконечный промежуток для интеграла

$$\int_0^\infty F(\lambda)d\lambda ,$$

где $F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt$, если полный период $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$, $\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$.

Таким образом, предельный переход дает

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \qquad (2.6)$$

Далее введем обозначения

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \qquad (2.7)$$

Тогда равенство (2.6) можно записать в виде

$$f(x)=\int_0^\infty (a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\, d\lambda. \qquad (2.8)$$

Равенство (2.8) называется *интегралом Фурье*. Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ можно рассматривать как непрерывные аналоги коэффициентов ряда Фурье a_λ и b_λ.

Если $f(x)$ четная: $a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda)=0$.

Если $f(x)$ нечетная: $a(\lambda)=0, \quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$

7. Преобразование Фурье

Заметим, что в интегральной формуле Фурье (2.6) подынтегральная функция является четной по λ. Это позволяет переписать (2.6) в симметричной форме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)\cos\lambda(t-x). \qquad (2.9)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Далее, из абсолютной интегрируемости функции f следует, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$ существует и представляет собой нечетную функцию по λ. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt = 0. \qquad (2.10)$$

Умножим (2.10) на $-i$ и сложим с (2.9), получим формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt. \qquad (2.11)$$

Если ввести обозначение

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \qquad (2.12)$$

то (2.11) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}dx. \qquad (2.13)$$

Формула (2.12) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции. Таким образом, каждой функции $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ мы сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную опять же на всей прямой.

<u>Опр. 2.1.</u> Функция $g(\lambda)$ (2.12) называется *преобразованием Фурье* исходной функции $f(x)$. Формула (2.13), выражающая $f(x)$ через ее преобразование Фурье называется *формулой обращения* для преобразования Фурье.

Таким образом, если к функции $f(x)$ применить преобразование Фурье, а затем обратное преобразование Фурье, то получим исходную функцию.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Замечание. Иногда коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ разбивают на два множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и формулы (2.12) и (2.13) записывают в симметричной форме:

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} dx.$$

Однако при всем внешнем сходстве эти формулы различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле, т.к. $f(x) \in L_1(-\infty,+\infty)$; во второй интеграл существует только в смысле главного значения как $\lim\limits_{A\to\infty} \int_{-A}^{A}$ (!).

Если функция $f(x)$ чётная, то

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx$$

-косинус-преобразование Фурье.

Если функция $f(x)$ нечётная, то

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = -2i\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$

– ***синус-преобразование Фурье***.

8. Свойства преобразования Фурье

Удобно обозначать преобразование Фурье как $\mathrm{F}[f(x)]$. По-существу F представляет собой линейный оператор, определенный на пространстве функций $L_1(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим основные свойства этого оператора.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

I. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(-\infty,+\infty)$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty,+\infty)$, то последовательность их образов $\{\mathrm{F}\,[f_n]\}$ (преобразований Фурье) сходится на прямой равномерно.

II. Преобразование Фурье $g(\lambda)=\mathrm{F}\,[f(x)]$ абсолютно интегрируемой функции f есть ограниченная непрерывная функция, которая стремиться к нулю при $|\lambda|\to\infty$.

III. Если f абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$, то справедливо равенство

$$\mathrm{F}\,[f'(x)]=i\lambda\mathrm{F}\,[f(x)]. \tag{2.14}$$

Если $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $f(x),...,f^{(k)}(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$, то

$$\mathrm{F}\,[f^{(k)}(x)]=(i\lambda)^k\,\mathrm{F}\,[f(x)]. \tag{2.15}$$

IV. Если $f^{(k)}(x)$ абсолютно интегрируема, то

$$|\mathrm{F}\,[f(x)]|=\frac{|\mathrm{F}\,[f^{(k)}(x)]|}{|\lambda|^k}\underset{\lambda\to\infty}{\to}0,$$

т.е. $\mathrm{F}\,[f(x)]$ убывает на ∞ быстрее, чем $\dfrac{1}{|\lambda|^k}$. *Чем больше производных имеет функция f(x) в L, тем быстрее на ∞ убывает ее преобразование Фурье.*

V. Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы. Тогда функция $g=\mathrm{F}\,[f]$ дифференцируема, и имеет место равенство

$$g'(\lambda)=\mathrm{F}\,[-ixf(x)]. \tag{2.16}$$

Если абсолютно интегрируемы $f, xf(x),..., x^p f(x)$, то

$$g^{(k)}(\lambda)=\mathrm{F}\,[(-ix)^k f(x)],\quad k=0,1,...,p. \tag{2.17}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

VI. Пусть f_1 и f_2 – интегрируемые на всей прямой функции. Тогда для их свёртки

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\,d\xi. \tag{2.18}$$

Справедливо равенство

$$\mathrm{F}\left[f_1 * f_2\right] = \mathrm{F}\left[f_1\right] \cdot \mathrm{F}\left[f_2\right]. \tag{2.19}$$

Решение типовых задач

Пример 1. Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Решение.

Так как функция $f(x)$ – четная, то

$$b(\lambda) = 0, \qquad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^2 (2 - t) \cos \lambda t\,dt.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2-t}{\lambda} \sin \lambda t \Big|_0^2 + \frac{1}{\lambda} \int_0^2 \sin \lambda t\,dt \right] = \frac{-2}{\pi \lambda^2} \cos \lambda t \Big|_0^2 =$$
$$= -\frac{2}{\pi \lambda^2} (\cos 2\lambda - 1) = \frac{2(1 - \cos 2\lambda)}{\pi \lambda^2}.$$

Интеграл Фурье примет вид:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2(1 - \cos 2\lambda)}{\pi \lambda^2} \cos \lambda x\,d\lambda.$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 \frac{1 - \cos 2\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x\,d\lambda$. ▲

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Пример 2. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

Решение.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}e^{-i\lambda x}dx.$$

При вычислении интеграла нам понадобится лемма Жордана:

Если $f(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию: $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$ и $m>0$, то при $R\to+\infty$

$$\int\limits_{C_R}f(z)e^{imz}dz\to 0,$$

где C_R есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом R, находящаяся в верхней полуплоскости.

Тогда $\lambda=-|\lambda|$ – должно быть отрицательным и

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{C_R\to 0}=\oint\limits_{C}\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+2}dz,$$

где C – замкнутый контур в верхней полуплоскости.

Функция $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка $z_0=-1-i$. Тогда

$$g(\lambda)=2\pi i\operatorname*{res}_{z=z}\left[\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+z}\right]=2\pi i\left.\frac{e^{i|\lambda|z}}{2z+2}\right|_{z=-1+i}=$$

$$=2\pi i\frac{e^{i|\lambda|(-1+i)}}{-2+2i+2}=\pi e^{-i|\lambda|-|\lambda|}=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Ответ: $\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

Пример 3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

Решение.

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-1}^{1} e^{2x}e^{-i\lambda x}dx=\int_{-1}^{1} e^{(2-i\lambda)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2-i\lambda}e^{(2-i\lambda)x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2-i\lambda}\left(e^{2-i\lambda}-e^{-(2-i\lambda)}\right)=\frac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}.$$

Ответ: $\frac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}$. ▲

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right).$$

Решение.

По свойству II

$$F\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)\right]=i\lambda F\left[\frac{1}{x^2+2x+2}\right]=i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Здесь был использован результат примера 2: $F\left[\frac{1}{x^2+2x+2}\right]=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$.

Ответ: $i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

Пример 5. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=e^{-\gamma|x|},\quad \gamma>0.$$

Решение.

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|}e^{-i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx=$$

$$=2\int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x dx=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$ ▲

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

Ответ: $\dfrac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}$ ▲

Пример 6. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } |x|\le a,\\ 0 \text{ при } |x|>a.\end{cases}$$

Решение.

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}\notin L_1(-\infty,+\infty).$$ ▲

Пример 7. Найти преобразование Фурье для функции

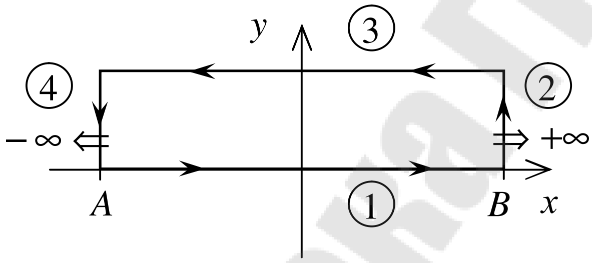
$$f(x)=e^{-ax^2}.$$

Решение.

Имеем

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx.$$

Под интегралом стоит аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости и стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой, параллельной действительной оси.



$\Rightarrow$ по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} e^{-az^2}\cdot e^{-a\lambda z}dz=0.$$

Интеграл по путям 2 и 4 в пределах $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ обращается в 0, следовательно,

$$\int_1+\int_3=0 \quad\Rightarrow\quad \int_1=-\int_3$$

Поменяв направление интегрирования, мы получим: исходный интеграл равен интегралу вдоль любой прямой $z=x+iy$ параллельной оси *0x*. Таким образом

$$g[\lambda]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+iy)^2}\cdot e^{-i\lambda(x+iy)}dx=e^{ay^2+\lambda y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x}dx=$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$=e^{ay^2+\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)}dx.$$

Выберем $y=-\dfrac{\lambda}{2a}$. Тогда

$$g(\lambda)=e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2}-\frac{\lambda^2}{2a}}\cdot\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx}_{=\sqrt{\pi/a}}=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

При $a=\dfrac{1}{2}$ имеем

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},\quad g(\lambda)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Из результата последнего примера следует интересный факт: действие преобразования Фурье оставляет функцию $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ инвариантной. Другими словами, функция $f(x)$ при преобразовании Фурье переходит в себя с точностью до постоянного множителя. ▲

ЗАДАЧИ

Представить интегралом Фурье следующие функции:

2.1. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

2.2. $f(x)=\begin{cases}sign\, x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ где $sign\, x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

Здесь используется известная функция сигнум («функция знака»).

2.3. $f(x)=\begin{cases}2+|x|, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

2.4. $f(x)=\begin{cases}1-|x|/a, & если\ |x|\le a,\\ 0, & если\ |x|>a.\end{cases}$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

2.5. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

2.6. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

2.7. $f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & \text{если } |x|\le 2\pi n/\omega,\\ 0, & \text{если } |x|>2\pi n/\omega, \quad n\in N, \omega>0.\end{cases}$

2.8. $f(x)=1/(x^2+a^2), \quad a\ne 0.$

2.9. $f(x)=e^{-a|x|}, \quad a>0.$

Найти преобразование Фурье функций $f(x)$ и $f_1(x)$, если:

2.10. а) $f(x)=\begin{cases}e^{5x}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$, б) $f_1(x)=xf(x)$.

2.11. а) $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$, б) $f_1(x)=x^2 f(x)$.

2.12. а) $f(x)=\begin{cases}shx, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$, б) $f_1(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$.

2.13. а) $f(x)=\begin{cases}3x, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$, б) $f_1(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$.

2.14. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+12x+50}$, б) $f_1(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$.

2.15. а) $f(x)=\dfrac{1+x}{(x^2+2x+2)^2}$, б) $f_1(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

2.16. $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-2x}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

2.17. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & \textit{если } |x|\le 1,\\ 1, & \textit{если } 1<|x|<2,\\ 0, & \textit{если } |x|\ge 2.\end{cases}$

2.18. $f(x)=x^2e^{-\gamma|x|}, \quad \gamma>0.$

2.19. $f(x)=e^{-ax^2}.$

2.20. $f(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right).$

2.21. $f(x)=x^2e^{-|x|}.$

2.22. $f(x)=e^{-x^2/2}\cos ax.$

2.23. $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right).$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Глава 3

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

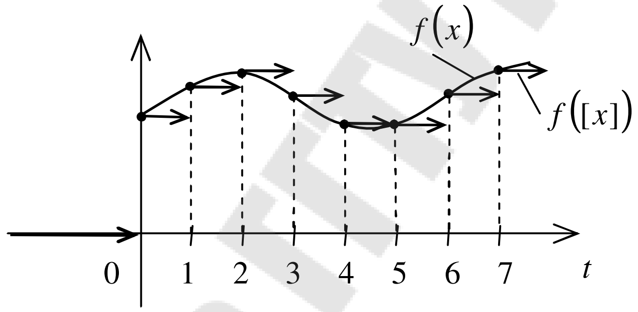
9. Дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование

Опр. 3.1. Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента *f*, определенная при $t \ge 0$. Числовая последовательность вида

$$f_n = f(n), \quad n = 1,2,... \tag{3.1}$$

называется *решетчатой функцией,* при этом $f(n) \equiv 0$ при $n < 0$. Функция $f(t)$ называется порождающей функцией.

Иногда решетчатую функцию называют *ступенчатой*, при этом $f(x) \Rightarrow f([x])$, [*x*] – целое число.



Например, $f_n = n2^n$. Тогда $f(0)=0, f(1)=2, f(2)=8, f(3)=24$.

Опр.3.2. *Изображением* функции f_n называется функция $F^*(p)$ комплексного переменного *p*, которая определяется как

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f_n \,. \tag{3.2}$$

Переход от функции f_n к функции $F^*(p)$ по формуле (3.2) называется *дискретным преобразованием Лапласа*.

Выполним замену

$$z = e^p \tag{3.3}$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Тогда ряд (3.2) перейдет в ряд вида

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{z^n}. \tag{3.4}$$

Опр. 3.3. Переход от функции f_n к функции $F^*(z)$ по формуле (3.4) называется *z-преобразованием*.

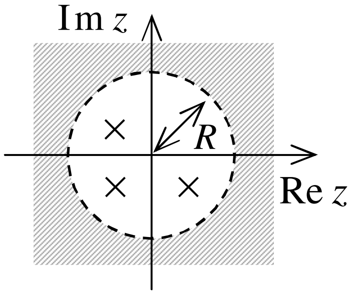
Часто используется обозначение для z-преобразования

$$f_n \mathrel{\dot{-}} F^*(z). \tag{3.5}$$

При этом сама решетчатая функция f_n называется *оригиналом*.

Правую часть равенства (3.4) можно рассматривать как ряд Лорана функции $F^*(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд (3.4) сходится вне некоторого круга в комплексной плоскости, т.е. при

$$|z| > R \geq 0.$$



Изображение F^* представляет собой при $|z| > R$ аналитическую функцию, следовательно, все особенности лежат внутри круга $|z| = R$.

Пример 1.

Найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = e^{\alpha n}$.

Решение.

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\dfrac{e^{\alpha}}{z}}=\frac{z}{z-e^{\alpha}}$$

при $|z| > e^{\operatorname{Re}\alpha}$.

$$e^{\alpha n} \mathrel{\dot{-}} \frac{z}{z-e^{\alpha}}. \blacktriangle$$

В частности при $\alpha = 0$ получаем $\quad f_n = 1 \mathrel{\dot{-}} \dfrac{z}{z-1}. \blacktriangle$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

10. Свойства z-преобразования

1) *Линейность.* Если $f_n \overset{\bullet}{-} F^*(z)$ и $g_n \overset{\bullet}{-} G^*(z)$, то имеет место равенство

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \overset{\bullet}{-} \alpha F^*(n) + \beta G^*(n). \qquad (3.6)$$

Пример 2.

Найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = \sin an$.

Решение.

Так как $f_n = \sin an = \dfrac{e^{ian} - e^{-ian}}{2i}$, то, зная, что $e^{\alpha n} \overset{\bullet}{-} \dfrac{z}{z - e^{\alpha}}$, получим

$$\sin an \overset{\bullet}{-} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - e^{ia}} - \frac{z}{z - e^{-ia}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{z(e^{ia} - e^{-ia})}{z^2 - (e^{ia} + e^{-ia}) + 1} = \frac{z \sin a}{z^2 - 2\cos a + 1}. \ ▲$$

2) *Теорема запаздывания* (первая теорема смещения).

Если $f_n \overset{\bullet}{-} F^*(z)$, то для любого целого $k > 0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \overset{\bullet}{-} z^{-k} F^*(z),\ k = 1,2,... \qquad (3.7)$$

Пример 3.

Найти z-преобразование для функции f_{n-3}, если $f_n = \sin 2n$.

Решение.

Так как $\sin an \overset{\bullet}{-} \dfrac{z \sin a}{z^2 - 2\cos a + 1}$, получим

$$\sin 2(n-3) \overset{\bullet}{-} \frac{1}{z^3}\frac{z \sin 2}{z^2 - 2\cos 2 + 1} = \frac{\sin 2}{z^2(z^2 - 2\cos 2 + 1)}. \ ▲$$

3) *Теорема опережения* (вторая теорема смещения).

Если $f_n \overset{\bullet}{-} F^*(z)$, то для любого целого $k > 0$ справедливо преобразование

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$f_{n+1} \stackrel{\bullet}{-} z\left[F^*(z) - f_0\right],$$

$$f_{n+2} \stackrel{\bullet}{-} z^2\left[F^*(z) - f_0 - f_1 z^{-1}\right], \qquad (3.8)$$

$$\ldots$$

$$f_{n+k} \stackrel{\bullet}{-} z^k\left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right]. \qquad (3.9)$$

__**Пример 4**__.

Найти z-преобразование для функции f_{n+5}, если $f_n = e^n$.

Решение.

Так как $e^n \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-e}$, получим

$$e^{n+5} \stackrel{\bullet}{-} z^5\left(\frac{z}{z-e} - 1 - ez^{-1} - e^2 z^{-2} - e^3 z^{-3} - e^4 z^{-4}\right) =$$

$$= \frac{z^6}{z-e} - (z^5 - ez^4 - e^2 z^3 - e^3 z^2 - e^4 z). \blacktriangle$$

4) _Дифференцирование изображения_.

Справедливо соотношение

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} f_n \stackrel{\bullet}{-} (-z)^k \cdot \frac{d^k}{dz^k} F^*(z), \quad k = 1,2,\ldots . \qquad (3.10)$$

В частности,

$$nf_n \stackrel{\bullet}{-} (-z)\,\left[F^*(z)\right]',$$

$$n(n+1) f_n \stackrel{\bullet}{-} z^2\left[F^*(z)\right]''.$$

__**Пример 5**__.

Найти z-преобразование для функции $f_n = n$, если $f_n = e^n$.

Решение.

Так как $1 \stackrel{\bullet}{-} \dfrac{z}{z-1}$, получим

$$n \cdot 1 \stackrel{\bullet}{-} -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = -z\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \blacktriangle$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

5) *Изображение суммы.*

Если $f_n \doteq F^*(z)$, то

$$\sum_{m=0}^{n-1} f_m \doteq \frac{1}{z-1} F^*(z). \qquad (3.11)$$

6) *Теорема подобия.*

Если $f_n \doteq F^*(z)$, то справедливо изображение

$$\alpha^{-n} f_n \doteq F^*(\alpha z), \qquad (3.12)$$

где $\alpha \neq 0$.

7) *Теорема о свертке оригиналов - последовательностей.*

Пусть $f_n \doteq F^*(z)$, $g_n \doteq G^*(z)$, тогда справедливо соотношение

$$\sum_{m=0}^{n} f_m g_{n-m} \doteq F^*(z) G^*(z). \qquad (3.13)$$

8) *Теорема о свертке изображений.*

Пусть $f_n \doteq F^*(z)$, $g_n \doteq G^*(z)$, тогда справедливо соотношение

$$f_n g_n \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_C F^*(\xi) G^*\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \qquad (3.14)$$

Здесь интеграл берется по окружности $|\xi| = r$, где r удовлетворяет неравенству $R_F < r < \frac{z}{R_G}$.

9) *Теорема о начальном значении.*

Если изображение $F^*(z) \doteq f_n$ существует, то

$$f_0 \doteq \lim_{z \to \infty} F^*(z). \qquad (3.15)$$

независимо от пути стремления к ∞.

Следствие.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$f_1 = \lim_{z\to\infty} z\left(F^*(z) - f_0\right)$$
$$f_2 = \lim_{z\to\infty} z^2\left(F^*(z) - f_0 - f_1 z^{-1}\right) \text{ и т.д.} \qquad (3.16)$$

10) *Теорема о конечном значении.*

Если изображение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1+0} (z-1)F^*(z). \qquad (3.17)$$

Пример 6.

Найти изображение $f_n = n$.

Решение.

Так как $z\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$, то используя свойство дифференцирования изображения (8.3.5) находим

$$n = n\cdot 1 \risingdotseq (-z)\cdot\left(\frac{z}{z-1}\right)' = (-z)\cdot\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \;▲$$

Приведем таблицу основных формул и z-преобразований наиболее часто встречающихся решетчатых функций:

Таблица соответствия для z-преобразований

№	f_n	$F^*(z)$
1.	1	$\dfrac{z}{z-1}$
2.	$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
3.	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
4.	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$

Библиотека БГТУ им. П.О. Сухого

6.	na^{n-1}	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
7.	C_n^k	$\dfrac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8.	$a^n \sin n\tau$	$\dfrac{az\sin\tau}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
9.	$a^n \cos n\tau$	$\dfrac{z(z-a\cos\tau)}{z^2-2az\cos\tau+a^2}$
10.	$a^n \operatorname{sh} n\tau$	$\dfrac{az\operatorname{sh}\tau}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
11.	$a^n \operatorname{ch} n\tau$	$\dfrac{z(z-a\operatorname{ch}\tau)}{z^2-2az\operatorname{ch}\tau+a^2}$
12.	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$	$\dfrac{z(z-x)}{z^2-2xz+1}$
13.	$\dfrac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$
14.	$\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$	$\dfrac{z}{z-1}F^*(z)$
15.	f_{n-k}	$\dfrac{1}{z^k}F^*(z)$
16.	f_{n+k}	$z^k\left[F^*(z)-\sum\limits_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right]$
17.	$n\,f_n$	$-z\left(F^*(z)\right)'$
18.	$n^2 f_n$	$z^2\left(F^*(z)\right)''+z\left(F^*(z)\right)'$
19.	$a^{-n} f_n$	$F^*(az)$
20.	$a^n f_n$	$F^*(z/a)$
21.	$f_n * g_n$	$F^*(z)\,G^*(z)$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Обращение z-преобразования

1) Если известно z-преобразование $F^*(z)$ решетчатой функции f_n, то сама функция f_n восстанавливается по формуле для коэффициентов ряда Лорана:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C F^*(z)\cdot z^{n-1}dz,\ n = 0,1,2,..., \tag{3.18}$$

где C - замкнутый контур, содержащий внутри себя все особые точки функции $F^*(z)$.

Интеграл (3.18) вычисляется с помощью вычетов по формуле

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C F^*(z)\cdot z^{n-1}dz = \sum_k \left(res\left(F^*(z)\cdot z^{n-1}\right)\right), \tag{3.19}$$

где z_k - особые точки функции $F^*(z)$, лежащие внутри контура C. При этом вычет функции $F^*(z)\cdot z^{n-1}$ в полюсе m-го порядка z_0 вычисляется по формуле

$$\underset{z=z_0}{res}\left(F^*(z)\cdot z^{n-1}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(F^*(z)\cdot z^{n-1}\cdot(z-z_0)^m\right) \tag{3.20}$$

Пример 7.

Найти оригинал для z-преобразования $F^*(z) = \dfrac{z^2+3z}{(z-4)^3}$.

Решение.

Используем для определения решетчатой функции f_n формулу (3.19). Особой точкой функции $F^*(z)$ является точка $z_0 = 4$ - полюс третьего порядка

$$f_n = \underset{z=4}{res}\left(X^*(z)z^{n-1}\right) = \underset{z=4}{res}\left(\frac{z^2+3z}{(z-4)^3}\cdot z^{n-1}\right) =$$

$$\frac{1}{2!}\lim_{z\to 4}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^{n+1}+3z^n}{(z-4)^3}\cdot(z-4)^3\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left((n+1)z^n + 3nz^{n-1}\right) =$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$=\frac{1}{2}\left(n(n+1)4^{n-1}+3n(n-1)\cdot 4^{n-2}\right)=\frac{1}{2}4^{n-2}(7n^2+n).$$

Ответ: $f_n=\frac{1}{2}4^{n-2}(7n^2+n)$. ▲

2) На практике функция $F^*(z)$ часто представляет собой дробно-рациональную функцию:

$$F^*(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)},\ n\le m.$$

Для того, чтобы по известному z-преобразованию $F^*(z)$ найти оригинал f_n, можно разбить дробь $F^*(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ на сумму простейших дробей (**предварительно оставив за скобками в числителе** z) и затем воспользоваться таблицей.

<u>Пример 8.</u>

Найти оригинал для z-преобразования $F^*(z)=\frac{z^2}{(z+3)(z-5)}$.

Решение.

Для определения решетчатой функции f_n разобьем дробь $F^*(z)$ на сумму простейших дробей

$$F^*(z)=\frac{z^2}{(z+3)(z-5)}=z\cdot\frac{z}{(z+3)(z-5)}=z\cdot X^*(z).$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$X^*(z)=\frac{z}{(z+3)(z-5)}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-5},$$

$$z=A(z-5)+B(z+3),$$

$$A=\frac{3}{8},\qquad B=\frac{5}{8}.$$

Тогда $F^*(z)=z\cdot X^*(z)=z\cdot\left(\frac{3}{8}\frac{1}{z+3}+\frac{5}{8}\frac{1}{z-5}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{z}{z+3}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{z-5}.$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Так как $\dfrac{z}{z+3} \risingdotseq (-3)^n$, $\quad \dfrac{z}{z-5} \risingdotseq 5^n$, то

$$f_n = \frac{3}{8}\cdot(-3)^n + \frac{5}{8}\cdot 5^n = \frac{5^{n+1}-(-3)^{n+1}}{8}.$$

Ответ: $f_n = \dfrac{5^{n+1}-(-3)^{n+1}}{8}$. ▲

3) Положим в формуле (3.18) $z = re^{i\varphi}$, получим

$$f_n = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^*\left(re^{i\varphi}\right)e^{in\varphi}\,d\varphi \qquad \text{или} \qquad \frac{f_n}{r^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^*\left(re^{i\varphi}\right)e^{in\varphi}\,d\varphi .$$

Далее, рассмотрим функцию $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right) = F^*\left(z^{-1}\right)$. Ее разложение имеет вид ряда Тейлора:

$$F^*\left(z^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots .$$

Таким образом, используя формулу для коэффициентов ряда Тейлора, получим соотношение

$$f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}F^*\left(z^{-1}\right)\bigg|_{z=0} \quad (n = 0,1,\dots). \tag{3.21}$$

На практике функция $F^*(z)$ часто представляет собой рациональную функцию:

$$F^*(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},\ n \le m. \tag{3.22}$$

Выполняя фундаментальное деление $P_n(z)$ на $Q_m(z)$ можно восстановить сколь угодно большое число значений f_n.

Пример 9.

Пусть $F^*(z) = \dfrac{z}{z-2}$. Найти f_n, $\quad n = 0,1,2\dots$.

Вычисляем

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$
\begin{array}{r|l}
-\dfrac{z}{z-2} & z-2 \\ \cline{2-2}
\overline{\quad 2 \quad} & 1+2\cdot\dfrac{1}{z}+4\cdot\dfrac{1}{z^2}+\ldots \\
-\ 4-\dfrac{4}{z} & \\
\overline{\quad \dfrac{4}{z} \quad} & \\
-\ \dfrac{4}{z}-\dfrac{8}{z^2} & \\
\overline{\quad \dfrac{8}{z^2} \quad} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{z-2}=1+2\cdot\frac{1}{z}+4\cdot\frac{1}{z^2}+8\cdot\frac{1}{z^3}+\ldots,$$

т.е. $f_0=1,\ f_1=2,\ f_2=4,\ f_3=8,\ \ldots$ ▲

11. Решение разностных уравнений

<u>Опр. 3.4.</u> *Разностью первого порядка* решетчатой функции f_n называется величина, обозначаемая как Δf_n, и равная

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n.$$

Разностью второго порядка $\Delta^2 f_n$ называется величина, определяемая как

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n.$$

Разностью k -го порядка $\Delta^k f_n$ называется величина

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

Найдем конкретные значения для $\Delta^k f_n$. Последовательно вычисляем

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - f_{n+1} + f_n = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n;$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta^2 f_{n+1} - \Delta^2 f_n = \left(f_{n+3} - 2f_{n+2} + f_{n+1}\right) - \left(f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n\right) =$$

$$= f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n.$$

$$\vdots$$

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}\text{, где } C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

<u>Пример 10.</u>

Найти разность k-го порядка ($k = 1,2,...$) для решетчатой функции $f_n = 3n^2 - n$.

Решение.

Находим

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = 3(n+1)^2 - (n+1) - 3n^2 + n = \underbrace{6n+4}_{g_n};$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = 6(n+1) + 4 - 6n - 4 = 6;$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta(\Delta^2 f_n) = 6 - 6 = 0;$$

$$\Delta^4 f_n = \Delta^5 f_n = ... = 0.$$

ТЕОРЕМА (о z-преобразовании разности).

Пусть $f_n \risingdotseq F^*(z)$. Тогда z-преобразование разностей равны

$$\Delta f_n \risingdotseq (z-1)F^*(z) - zf_0$$

$$\Delta^k f_n \risingdotseq (z-1)^k F^*(z) - z\sum_{m=0}^{k-1}(z-1)^{k-m-1}\left(\Delta^m f(0)\right)$$

<u>Следствие.</u> Если $\Delta^m f(0) = 0$, $m = 0,1,2,...,k-1$, то

$$\Delta^k f_n \risingdotseq (z-1)^k F^*(z). \qquad (3.23)$$

<u>Опр. 3.5.</u> Уравнение вида

$$F(n, f_n, \Delta f_n, ..., \Delta^k f_n) = 0, \qquad (3.24)$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция, называется *разностным уравнением k-го порядка*.

Всякое разностное уравнение можно записать как

$$F(n, f_n, f_{n+1}, ..., f_{n+k}) = 0. \qquad (3.25)$$

Уравнения в форме (3.25) называют *рекуррентными уравнениями k-го порядка*.

Решение разностных уравнений аналогично решению ДУ с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

<u>*Алгоритм решения рекуррентного уравнения:*</u>

$$a_0 f_{n+k} + a_1 f_{n+k-1} + \ldots + a_k f_n = \varphi(n). \qquad (3.26)$$

Переходя к z-преобразованиям:

$$f_n \doteq F^*(z),$$

$$f_{n+1} \doteq z\left(F^*(z) - f(0)\right), \qquad f_{n+2} \doteq z^2\left(F^*(z) - f(0) - f(1)z^{-1}\right), \ \ldots,$$

$$f_{n+k} \doteq z^k\left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m) z^{-m}\right],$$

$$\varphi(n) \doteq \Phi^*(z),$$

получим линейное уравнение относительно $F^*(z)$.

После определения $F^*(z)$ необходимо вернуться назад к оригиналу – последовательности. Общее решение будет содержать неопределенные константы $f(0)$, $f(1)$, … , $f(k-1)$, которые фиксируются после наложения начальных условий

$$f(0) = f_0\ ,\ f(1) = f_1,\ \ldots,\ f(k-1) = f_k. \qquad (3.27)$$

<u>Пример 11.</u>

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \doteq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \doteq z\left(X^*(z) - x_0\right) = z\left(X^*(z) - 1\right) = zX^*(z) - z,$$

$$x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right) = z^2 X^*(z) - z^2 + z.$$

Применяя к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$z^2X^*(z)-z^2+z-6zX^*(z)+6z+9X^*(z)=0,$$

откуда

$$(z-3)^2X^*(z)-z^2+7z=0.$$

Выразим функцию $X^*(z)$:

$$X^*(z)=\frac{z(z-3)-4z}{(z-3)^2}=\frac{z}{z-3}-4\cdot\frac{z}{(z-3)^2}.$$

Так как $\dfrac{z}{z-3}\stackrel{\bullet}{-}3^n$, $\quad\dfrac{z}{(z-3)^2}\stackrel{\bullet}{-}n3^n$; то

$$x_n=3^n-4n3^{n-1}=3^{n-1}(3-4n).$$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу (3.19):

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}\underset{z_i}{res}\left(X^*(z)z^{n-1}\right)=\underset{z=3}{res}\left(\frac{z^2-7z}{(z-3)^2}z^{n-1}\right)=\lim_{z\to3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1}-7z^n}{(z-3)^2}(z-3)^2\right)=$$

$$\lim_{z\to3}\left((n+1)z^n-7nz^{n-1}\right)=n3^n+3^n-7n3^{n-1}=3^{n-1}(3-4n).$$

Ответ: $x_n=3^{n-1}(3-4n)$. ▲

<u>Пример 12.</u>

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=5^n,\ x_0=0,\quad x_1=1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n\stackrel{\bullet}{-}X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1}\stackrel{\bullet}{-}z\left(X^*(z)-x_0\right),\qquad x_{n+2}\stackrel{\bullet}{-}z^2\left(X^*(z)-x_0-x_1z^{-1}\right),\quad 5^n\stackrel{\bullet}{-}\frac{z}{z-5}.$$

Имеем

$$z^2X^*(z)-z-4zX^*(z)+4X^*(z)=\frac{z}{z-5}\Rightarrow$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

$$\Rightarrow \quad (z-2)^2 X^*(z) - z = \frac{z}{z-5} \quad \Rightarrow X^*(z) = \frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2}.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$\frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2} = z \cdot \frac{z-4}{(z-5)(z-2)^2} = \frac{1}{9}\frac{z}{z-5} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-2} + \frac{2}{3}\frac{z}{(z-2)^2}.$$

Так как $\frac{z}{z-2} \risingdotseq 2^n$, $\frac{z}{(z-2)^2} \risingdotseq n \cdot 2^{n-1}$, $\frac{z}{z-5} \risingdotseq 5^n$, то

$$x_n = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(X^*(z) z^{n-1}\right) = \underset{z=2}{res}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) + \underset{z=5}{res}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-2)^2\right) + \lim_{z\to 5}\left(\frac{z^{n+1}-4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-5)\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{((n+1)z^n - 4nz^{n-1})(z-5) - \left(z^{n+1}-4z^n\right)}{(z-5)^2} + \frac{5^{n+1}-4\cdot 5^n}{9} =$$

$$= \frac{((n+1)2^n - 4n2^{n-1})(-3) - \left(2^{n+1} - 4\cdot 2^n\right)}{9} + \frac{5^n}{9} = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ: $x_n = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}$.▲

<u>Пример 13.</u>

Решить уравнение $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Решение.

Пусть $x_n \risingdotseq X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \risingdotseq z\left(X^*(z) - x_0\right) = z\left(X^*(z) - 1\right) = zX^*(z) - z,$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

$$x_{n+2} \stackrel{\bullet}{-} z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right) = z^2 X^*(z) - z^2 - 2z\,.$$

Изображение уравнения:

$$\left(z^2 - z + 1\right)X^*(z) = z^2 + z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X^*(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 1} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}z}{z^2 2 \cdot z \cdot \frac{1}{2} + 1} = \left[\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\right] =$$

$$= \frac{z^2 - z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1} + \sqrt{3}\,\frac{z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{z^2 - 2z \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1} \stackrel{\bullet}{-} \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} =$$

$$= 2\sin\frac{(2n+1)\pi}{6}\,.$$

Ответ: $x_n = 2\sin\frac{(2n+1)\pi}{6}$. ▲

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ЗАДАЧИ

Найти z-преобразование следующих решетчатых функций (используя определение):

3.1. $f_n = e^{-n}, \quad n = 0,1,2...$.

3.2. $f_n = 3^n, n = 0,1,2...$.

3.3. $f_n = n, \quad n = 0,1,2...$.

3.4. $f_n = n^2, n = 0,1,2...$.

Используя свойства и таблицу z-преобразования, найти изображения следующих функций:

3.5. $f_n = 2 \cdot e^{n/2} - 4 \cdot (-1)^n$.

3.6. $f_n = \operatorname{sh} 3n$.

3.7. $f_n = (n+2)^2$.

3.8. $f_n = ne^{2n}$.

3.9. $f_n = (\cos 2n)^2$.

3.10. $f_n = 3^n \sin 2n - 4^n \cos 3n$.

3.11. f_{n-3}, если $f_n = \cos 4n$.

3.12. f_{n+4}, если $f_n = 2^{3n}$.

3.13. f_{n-5}, если $f_n = 5^{3n}$.

3.14. f_{n+5}, если $f_n = a$.

Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму:

3.15. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m^2$.

3.16. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m \cos am$.

Найти оригиналы для следующих изображений:

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

3.17. $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$.

3.18. $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2 - 7z + 10}$.

3.19. $F^*(z) = \dfrac{z+5}{(z-4)^3}$.

3.20. $F^*(z) = \dfrac{2z^2 - 9z}{(z-1)(z-2^2}$.

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейные разностные уравнения:

3.21. $x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 1$.

3.22. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

3.23. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = 1$.

3.24. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 3^n, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$.

3.25. $x_{n+2} - 4x_n = 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 2.$

3.26. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$

3.27. $x_{n+2} + x_n = 1 - (-1)^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$

3.28. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 6^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$

3.29. $x_{n+2} + x_n = (-1)^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$

3.30. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$

3.31. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$

3.32. $x_{n+2} - 4x_n = 4^n, \qquad x_0 = x_1 = 1$.

Найти формулу общего члена последовательности x_n, если:

3.33. $x_0 = 1$, а каждый последующий на 2 больше удвоенного предыдущего.

3.34. $x_0 = 8$, а каждый последующий на 1 меньше предыдущего, умноженного на 4.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

3.35. $x_0 = 12$, а каждый последующий на 10 единиц меньше удвоенного предыдущего.

Решить систему разностных уравнений:

3.36. $\begin{cases} x_{n+1} + 2x_n + 10y_n = 0, & x_0 = 1, \\ y_{n+1} - 7y_n + 2x_n = 0, & y_0 = 0. \end{cases}$

3.37. $\begin{cases} x_{n+1} + 4x_n + 5y_n = 0, & x_0 = 1, \\ y_{n+1} - 3y_n - 2x_n = 0, & y_0 = 1. \end{cases}$

3.38. $\begin{cases} x_{n+1} + 4x_n + 3y_n = 0, & x_0 = -1, \\ y_{n+1} - 4y_n + 5x_n = 0, & y_0 = 1. \end{cases}$

3.39. $\begin{cases} x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n, & x_0 = 3, \\ y_{n+1} + 2x_n = -3^n, & y_0 = 0. \end{cases}$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

ЛИТЕРАТУРА

1. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования/ Г. Деч. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
2. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учеб. пособие для втузов./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - М.: Наука, 1981. – 302с.
3. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. : Учебное пособие/ Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др./ под. Ред. А.В. Ефимова. – Москва: Наука, 1990. – Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения – 304 с.
4. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями./ Л. Коллатц. – Москва: Наука, 1968. – 504 с.
5. Карпук, А.А. Сборник задач по специальным главам высшей математики: Уравнения математической физики. Разностные уравнения. Z-преобразование. Дискретное преобразование Фурье / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Минск : Харвест, 2006. – 112 с.
6. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах/ А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Урасгильдина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.
7. Методические указания к контрольным заданиям по курсу «Специальные математические методы и функции» для студентов заочной формы обучения специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника»/ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 53 с.
8. Специальные математические методы и функции: электронный учебно-методический комплекс дисциплины/ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 195 с.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Корсун Лидия Дмитриевна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Практикум
по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 20.12.19.
Рег. № 6Е.
http://www.gstu.by

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого