ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ НА КОНКУРЕНЦИЮ ИСТОЧНИКА И СТОКА ИМПУЛЬСА ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Хорт

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель Д. Г. Кроль

Плоское двумерное стационарное течение несжимаемой сплошной среды определяется уравнениями:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i; \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0; \qquad (1)$$

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \Phi + q_\upsilon; \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad i,k = 1,2; \;\; \rho, c_p, \lambda, \mu - \text{const}. \tag{2}$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла возьмем следующей формы записи:

$$\tau_{ij} + \gamma \left[v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + m(\tau_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}\tau_{kj}) \right] = 2\mu e_{ij}; \tag{3}$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$ – декартовы прямоугольные координаты; $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ – вектор скорости; ρ – плотность; p – давление; $\mathbf{F}(F_1, F_2)$ – вектор массовой силы; T – температура; $\mathbf{q}(q_1, q_2)$ – вектор удельного теплового потока; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; q_υ – объемная мощность внутренних источников энергии; τ_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений; e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации; μ – коэффициент динамической вязкости; γ – время релаксации вязких напряжений; Φ – диссипативная функция. Дважды повторяющийся индекс k означает суммирование. Дифференциальный оператор в (3) при $m = 1$ есть конвективная производная Яуманна, при $m = 0$ – обычная субстанциональная производная. При $\gamma = 0$ формула (3) описывает свойства вязкой ньютоновской жидкости.

Производство энтропии подсчитываем по формулам:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i, \; \sigma_e = q_\upsilon / T; \; \sigma_i = \mathbf{q}^2 \big/ (\lambda T^2),$$

где σ_e – производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой; σ_i – производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

Аналитическое решение, которое изучается в данной работе, получено при $\mu \equiv \text{const}$, $\partial\zeta / \partial T \neq 0$. Поэтому естественно считать, что температурная зависимость коэффициента сопротивления коррелирует с термовязкими свойствами жидкости. Вариант $\partial\zeta / \partial T < 0$ соответствует вязкости l-типа, $\partial\mu / \partial T < 0$. Вариант $\partial\zeta / \partial T > 0$ соответствует вязкости g-типа, $\partial\mu / \partial T > 0$. Эти термины и обозначения (g – gas, l – liquid) применяются в теории тепловой конвекции. Далее при обсуждении знака производной $\partial\zeta / \partial T$ будем говорить о g- и l-типах сопротивления.

Объемный источник энергии $q_\upsilon(\mathbf{v}^2, T)$ моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для диссипативной функции Φ принимаем оценку $\Phi << |q_v|$, т. е. рассматриваем процессы, для которых можно пренебречь выделением тепла за счет вязкой диссипации энергии.

Данная работа продолжает исследования [1], [2] и имеет следующую цель: проанализировать влияние внешней силы сопротивления на конкуренцию источника и стока импульса при течении несжимаемой вязкой жидкости.

Точное аналитическое решение уравнений гидродинамики вязкоупругой жидкости Максвелла имеет вид [1], [2]:

$$\overline{u} \equiv u / u_1 = 2\varepsilon[\sin(2\overline{y})] / \delta; \quad \overline{\tau} \equiv \tau / u_1 = (1-\varepsilon^2) / \delta; \quad \delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos(2\overline{y}); \tag{4}$$

$$\overline{\zeta} \equiv \zeta y_1^2 / \nu = D_1 D_2; \; D_1 = (1-4\Gamma)/(1+4\Gamma)^2; \tag{5}$$

$$D_2 = 4\overline{\tau}(\overline{\tau}_1 - 2\overline{\tau}); \quad \Gamma = (\overline{\gamma} m \overline{\omega})^2; \tag{6}$$

$$d\overline{u} / d\overline{y} = -2\overline{\omega} = 2\overline{\tau}(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}); \; \overline{y} = y / y_1; \; y_1 > 0; \; u_1 > 0; \; \overline{\nu} = \nu / (u_1 y_1);$$

$$\overline{q}_\upsilon \equiv q_\upsilon c_1 y_1^2 / (\lambda u_1^2) = 4\overline{\tau}(-3\overline{\tau}_1\overline{\tau} + 2\overline{\tau}^2 + 1); \; \overline{\tau}_1 = (1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2); \tag{7}$$

$$\overline{p} = -\overline{\gamma}\overline{\tau}_{12} d\overline{u} / d\overline{y}; \quad \overline{\tau}_{12} = \overline{\nu}(d\overline{u} / d\overline{y})\left[1 + \left(\overline{\gamma} d\overline{u} / d\overline{y}\right)^2\right]^{-1};$$

$$\tau = (c_1 / u_1)(T - T_0); \; c_1, \; y_1, \; T_0 - \text{const};$$

$$\overline{\sigma}_e = \overline{q}_\upsilon / \overline{T}; \; \overline{\sigma}_i = \left(u_{11}\overline{q} / \overline{T}\right)^2; \quad \overline{\sigma} = \overline{\sigma}_e + \overline{\sigma}_i,$$

где ε – параметр решения; $\delta > 0$ при $\varepsilon^2 \neq 1$. Изотермический режим $(\varepsilon = 1)$ был изучен в [1]. Если $\varepsilon^2 < 1$, то $\tau > 0$, течение происходит в «горячей» области, $T > T_0$. Если $\varepsilon^2 > 1$, то $\tau < 0$, имеем «холодную» область, $0 < T < T_0$. Безразмерные величины отмечены чертой сверху.

Решение (4)–(7) определяет течение вязкоупругой жидкости с объемным источником энергии и с двумя конкурирующими источниками импульса:

$$\overline{F}_{11} = -\overline{u}\overline{\zeta}_r, \quad \overline{\zeta}_r = 2D_1(1 + \overline{u}^2); \; \overline{F}_{12} = 6D_1\overline{\tau}^2\overline{u}, \tag{8}$$

где $\overline{\zeta}_r$ – коэффициент сопротивления; $\overline{F}_{11}$ – внешняя сила трения (сток импульса); $\overline{F}_{12}$ – источник импульса, конкурирующий с силой сопротивления. Оба эти источника мультипликативным образом зависят от $D_1 = D_1(\Gamma)$. Результирующая массовая сила $\overline{F}_1 = \overline{F}_{11} + \overline{F}_{12}$ действует в продольном (вдоль оси OX) направлении. Условие $\zeta_r \geq 0$ выполнено при $\Gamma(\overline{y}) \leq 1/4$, а это приводит к неравенству $\overline{\gamma}^2 m^2 \overline{\omega}_{\max}^2 \leq 1/4$, которое справедливо при подходящем выборе γ. В случае (8) наблюдается периодическое течение при $y \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon^2 \neq 1$.

Численные расчеты позволили подробно изучить конкурентное взаимодействие источника и стока импульса. Расчеты были проведены для «горячей» и «холодной» областей. На рис. 1 представлены результаты расчета производства энтропии при конкурентном взаимодействии источника и стока импульса. Следует обратить внимание на немонотонную зависимость производства энтропии от теплового потока и внутреннего источника энергии. Прикладные аспекты данной работы связаны с расчетами гидродинамических и тепловых параметров полупроводниковых расплавов.

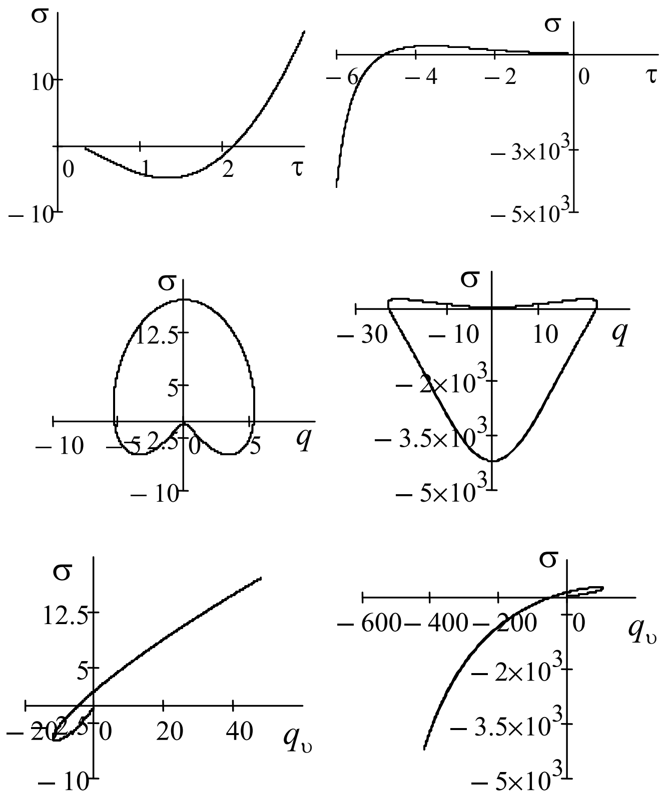

Рис. 1. Результаты расчета производства энтропии при конкуренции источника и стока импульса: левый столбец – «холодная» область; правый столбец – «горячая» область

Данная работа выполнена в рамках госпрограммы «Энергетические системы, процессы и технологии». Научный руководитель проекта – профессор О. Н. Шабловский.

Литература

1. Шабловский, О. Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О. Н. Шабловский // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математика. Механика. Физика». – № 32 (249). – Вып. 5. – С. 77–82.
2. Шабловский, О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками / О. Н. Шабловский // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. – 2011. – № 5. – С. 55–65.