Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ПРЕДЕЛЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

ПРАКТИКУМ
по курсам «Математика» и «Высшая математика»
для студентов заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.1я73
П71

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 3 от 20.12.2005 г.*)

Авторы-составители: Е. З. Авакян, Н. А. Трюхан, И. В. Иванейчик

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, доц. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого
П. А. Хило

П71 **Пределы**. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Исследование функций и построение графиков : практикум по курсам «Математика» и «Высшая математика» заоч. формы обучения / автю-сост.: Е. З. Авакян, Н. А. Трюхан, И. В. Иванейчик. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 57 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-560-1.

Практикум содержит кратко изложенный теоретический материал с разобранными типовыми примерами и контрольные задания (30 вариантов).

Для студентов заочной формы обучения.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-420-560-1

1. ПРЕДЕЛЫ

1.1. Предел последовательности

Пусть аргумент n принимает все значения из *натурального ряда*

$$1, 2, 3, ..., n, ..., n', ..., \tag{1.1}$$

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию (т. е. большее число n' следует за меньшим n). Если каждому n по некоторому правилу или закону поставлено в соответствие x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$.

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..., x_n', ..., \tag{1.2}$$

например,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \tag{1.3}$$

Определение. Число a называется пределом последовательности, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$\{x_n - a\} < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывается так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \tag{1.5}$$

Неравенство (1.4) эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что элемент x_n находится в ε-окрестности числа a. ε-окрестностью числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать также и следующим образом:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, если существует число a такое, что в любой ε-окрестности числа a находятся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера.

Теоремы о пределах последовательности

Теорема 1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Теорема 3. Предел суммы (разности) двух последовательностей равен сумме (разности) пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 4. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 5. Предел частного двух последовательностей равен частному пределов этих последовательностей (при условии, что знаменатель не обращается в нуль):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};\ \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Теорема 6. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одинаковый предел a, выполняется неравенство $x_n \geq z_n \geq y_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

- Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно малая.
- Сумма конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечной величины на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.
- Если x_n является бесконечно большой величиной, то ее обратная величина $\alpha_n = 1/x_n$ будет бесконечно малой.

Покажем несколько примеров вычисления пределов последовательностей.

Пример 1.1

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3}$.

Решение:

В данном примере последовательность представляет собой рациональную дробь. Для вычисления пределов такого типа необходимо знаменатель и числитель дроби разделить на n в наивысшей степени. В нашем примере это n^3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)}{n}\dfrac{(n-3)}{n}\dfrac{(3n+5)}{n}}{\dfrac{2n^3}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{2} = \frac{2\cdot1\cdot3}{2} = 3.$$

Так как $\dfrac{c}{n}\to 0$, если $n\to\infty$, а c – ограниченная величина.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3} = 3$.

Пример 1.2

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}$.

Решение:

Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n}}{\sqrt[3]{\dfrac{3n^3}{n^3}+\dfrac{10}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3+\dfrac{10}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Пример 1.3

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Решение:

Для вычисления подобных пределов с неопределенностью $(\infty - \infty)$ необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на его сопряженное. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность квадратов» $(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$ и, избавившись от квадратного корня, получить дробь.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

Пример 1.4

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

Решение:

Для вычисления подобных пределов необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на неполный квадрат суммы. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность кубов» $\left(a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$ и, избавившись от кубических корней, получить дробь. Неполным квадратом суммы в нашем примере является: $\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2(n-1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right)\left(\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2(n-1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\left(n^2 - n(n-1)\right)}{\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2(n-1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{n^2(n-1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{n^3}{n^4}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4}}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right) = \frac{1}{3}.$

Пример 1.5

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Решение:

Последовательность $1, 2, 3, \ldots, n$ – является арифметической прогрессией с разностью $d = 1$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии находится по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n, \tag{1.6}$$

т. е. $S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n+n^2}{2}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{2}.$

Пример 1.6

Вычислить предел последовательности $\{x_n\} = \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

Решение:

Напомним, что

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n. \tag{1.7}$$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \tag{1.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)! + (3n+1)\;3n(3n-1)!}{(3n)\;(3n-1)!\;(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1 + (3n+1)3n}{3n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+3n+1}{3n^2-3n} = 3.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)} = 3.$

1.2. Предел функции

Приведем два определения предела функции:

Определение (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется:

$$|f(x)-A| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Определение (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a, если, какую бы последовательность $\{x_n\}$ с пределом a, извлеченную из множества X, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ всегда имеет предел A.

Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A. \tag{1.10}$$

Из определения предела функции по Гейне следует, что все теоремы о пределах последовательности можно обобщить на случай предела функции. Далее приведем несколько примеров вычисления пределов функций.

Пример 1.7

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2} = \frac{1+1+1}{1-2} = -3.$$

Мы выделили множитель $x-1$, разложив на множители квадратный трехчлен и воспользовались формулой разности кубов.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} = -3.$

Пример 1.8

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

Решение:

При подстановке $x=3$ в предел мы получаем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Числитель разложим на множители: $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$; далее знаменатель и числитель нашей дроби умножим на величину, сопряженную знаменателю, т. е.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{x-2-(4-x)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2(x-3)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2} = \frac{7\left(\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}\right)}{2} = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \dfrac{7}{2}.$

1.3. Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.11}$$

Этот передел означает, что $\sin x$ эквивалентен x при $x\to 0$. Этот факт обозначается следующим образом: $\sin x \sim x$.

Следствия первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$

т. е. $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x\to 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x} = m.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx} = \dfrac{m}{n}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^\alpha x}{x^\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha>\beta \\ \infty, & \alpha<\beta. \\ 1, & \alpha=\beta \end{cases}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^\alpha (mx)}{\sin^\beta (nx)} = \begin{cases} 0, & \alpha>\beta \\ \infty, & \alpha<\beta. \\ \dfrac{m}{n}, & \alpha=\beta \end{cases}$

Для пределов, содержащих $\operatorname{tg} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x$, справедливы свойства, аналогичные 4–7.

Пример 1.9

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью $\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$ при $x\to 0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Пример 1.10

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{1-\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

Пример 1.11

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 3x}$.

Решение:

В данном примере мы не можем применить первый замечательный предел, т. к. $x\to\pi$, в подобных случаях необходимо сделать замену переменной. Причем, новая переменная должна стремиться к нулю.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 3x}=\left\{\begin{array}{l}y=x-\pi;\\ x\to\pi;\ y\to 0;\end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}3(y+\pi)}{\sin 5(y+\pi)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3y+3\pi)}{\sin(5y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}3y}{-\sin 5y}=-\lim_{y\to 0}\frac{3y}{5y}=-\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 3x}=-\frac{3}{5}$.

1.4. Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e. \qquad (1.12)$$

Следствия второго замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{m/x}=e^m$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Частный случай: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Пример 1.12

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+1-1)}{x^2}=\left\{\cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

Пример 1.13

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1-\left(3^{2x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{3x}-2\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=3\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{8}{9}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg} x}=\ln\dfrac{8}{9}$.

1.5. Вычисление предела от степенно-показательной функции

Рассмотрим теперь степенно-показательной выражение U^{υ}, где U и υ являются функциями от одной и той же переменной x.

Вычислим предел

$$\lim_{x\to a} U(x)^{\upsilon(x)}. \qquad (1.13)$$

Для этого необходимо вычислить отдельно два предела $\lim\limits_{x\to a} U(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\upsilon(x)$. Рассмотрим различные случаи, которые могут возникнуть.

1. $\lim\limits_{x\to a} U(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a}\upsilon(x)=B$, тогда

$$\lim_{x\to a} U(x)^{\upsilon(x)}=A^{B}. \qquad (1.14)$$

Пример 1.14

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\pi/2} x^{\sin x}$.

Решение:

Вычислим отдельно пределы основания и показателя степени:

$$\lim_{x\to\pi/2} x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to\pi/2}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

поэтому

$$\lim_{x\to\pi/2} x^{\sin x}=\frac{\pi}{2}^{\sin\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2} x^{\sin x}=\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to a} U(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a}\upsilon(x)=+\infty$, тогда

$$\lim_{x\to a} U(x)^{\upsilon(x)}=\begin{cases}0;\ \text{если } |A|<1;\\ \infty;\ \text{если } |A|>1.\end{cases}$$

Пример 1.15

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x+4}\right)^{x^2}$.

Решение:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x+4}=\dfrac{2}{3}<1$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x+4}\right)^{x^2}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to a} U(x)=1$; $\lim\limits_{x\to a}\upsilon(x)=\infty$.

Искомый предел будет равен

$$\lim_{x\to a} U(x)^{\upsilon(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\upsilon(x)(u(x)-1)}.$$

Пример 1.16

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2-x+1}\right)^{2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-x+1}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\frac{2x^2+3x-1-2x^2+x-1}{2x^2-x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\frac{4x-2}{2x^2-x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x}{2x^2-x+1}}=e^4.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2-x+1}\right)^{2x}=e^4$.

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Правила дифференцирования

Если $u(x)$ и $v(x)$ являются дифференцируемыми функциями аргумента x, то:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x). \qquad (2.1)$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \qquad (2.2)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \qquad (2.3)$$

$$C' = 0, (C = \mathrm{const}). \qquad (2.4)$$

$$(Cu(x))' = Cu'(x). \qquad (2.5)$$

Таблица 2.1

Таблица производных элементарных функций

№ п/п	Функция $f(x)$	Производная функции $f'(x)$
1	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
2	a^x	$a^x \ln a$
3	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
11	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Окончание табл. 2.1

№ п/п	Функция $f(x)$	Производная функции $f'(x)$
12	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
13	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
14	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
15	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

2.2. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(u(x))$ существует и равна произведению производной данной функции f по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной:

$$y'_x = f'(u)u'(x). \qquad (2.6)$$

В случае $y = f(u)$, $u = u(z)$, $z = z(x)$:

$$y'_x = f'(u)u'(z)z'(x). \qquad (2.7)$$

Аналогично во всех более сложных случаях.

Пример 2.1

Найти производную функции $y = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Решение:

Аргументом данной функции y является $u = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Используя таблицу производных, имеем:

$$y'_u = (\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + x} = \frac{(1+x)^2}{1+3x+x^2}.$$

Производную функции u по переменной x найдем, используя правило дифференцирования частного (2.3) и таблицу производных:

$$u'_x = \frac{(\sqrt{x})'(1+x) - \sqrt{x}(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} =$$

$$\frac{\frac{(1+x)}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(1+x)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}.$$

Таким образом получаем, согласно (2.6):

$$y'_x=\frac{(1+x)^2}{1+3x+x^2}\cdot\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}\left(1+3x+x^2\right)}.$$

Ответ: $y'_x=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}\left(1+3x+x^2\right)}$.

2.3. Производная функции, заданной неявно

Пусть зависимость между y и x задана в виде соотношения:

$$F(x,y)=\Phi(x,y). \qquad (2.8)$$

В этом случае говорят, что функция $y(x)$ задана неявно.

Для вычисления производной y'_x необходимо:

а) вычислить производные от обеих частей уравнения (2.8), считая при этом y функцией от x;

б) приравнять полученные производные;

в) решить полученное уравнение относительно y'_x.

Пример 2.2

Найти производную y'_x, если $\sin x+\ln y=e^{xy}$.

Решение:

а) вычисляем производные от обеих частей заданного равенства, считая y функцией от x:

$$(\sin x+\ln y)'=\cos x+\frac{1}{y}y'_x,$$

$$\left(e^{xy}\right)'=e^{xy}(xy)'=e^{xy}(y+xy'_x);$$

б) приравниваем полученные производные:

$$\cos x+\frac{1}{y}y'_x=e^{xy}\left(y+xy'_x\right);$$

в) решаем уравнение относительно y'_x:

$$y'_x\left(\frac{1}{y}-xe^{xy}\right)=ye^{xy}-\cos x,$$

$$y'_x=\frac{ye^{xy}-\cos x}{\left(\frac{1}{y}-xe^{xy}\right)}=\frac{y(ye^{xy}-\cos x)}{(1-xye^{xy})}.$$

Ответ: $y'_x=\dfrac{y(ye^{xy}-\cos x)}{(1-xye^{xy})}$.

2.4. Производная функции, заданной параметрически

Функция $y(x)$ является заданной параметрически, если y и x заданы как функции параметра t:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases} \qquad (2.9)$$

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – дифференцируемые функции и $x'_t\neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (2.10)$$

Пример 2.3

Найти производную y'_x, если $\begin{cases}x=a\,\mathrm{tg}\,t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$

Решение:

Находим x'_t, y'_t:

$$x'_t=(a\,\mathrm{tg}\,t)'=\frac{a}{\cos^2 t};$$

$$y'_t=(b\sin t)'=b\cos t.$$

Воспользовавшись формулой (2.10), получаем:

$$y'_x=\frac{b\cos t}{\frac{a}{\cos^2 t}}=\frac{b}{a}\cos^3 t.$$

Ответ: $y'_x=\dfrac{b}{a}\cos^3 t$.

2.5. Производная степенно-показательной функции

Рассмотрим степенно-показательную функцию $y=(u(x))^{v(x)}$.

Для вычисления производной y'_x предварительно прологарифмируем y:

$$\ln y=\ln(u(x))^{v(x)}=v(x)\ln(u(x)).$$

Продифференцируем обе части полученного равенства, считая при этом y функцией от x:

$$(\ln y)'=(v(x)\ln(u(x)))'=v'(x)\ln(u(x))+v(x)(\ln(u(x)))';$$

$$\frac{y'_x}{y}=v'(x)\ln(u(x))+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно y'_x, окончательно получаем:

$$y'_x=(u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln(u(x))+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \qquad (2.11)$$

Пример 2.4

Найти производную функции $y=x^{\sin x}$.

Решение:

Прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y=\ln\left(x^{\sin x}\right)=\sin x\cdot\ln x.$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по x:

$$(\ln y)'=\frac{y'_x}{y},\ (\sin x\cdot\ln x)'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}.$$

Приравниваем полученные производные:

$$\frac{y'_x}{y}=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x};\ y'_x=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Учитывая явный вид заданной функции, окончательно получаем:

$$y'_x=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Ответ: $y'_x=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

2.6. Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$:

$$y''=(f'(x))'. \qquad (2.12)$$

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и, вообще, любого n-го порядка:

$$y'''=(y'')';\quad y^{IV}=(y''')';\ldots y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'. \qquad (2.13)$$

Пример 2.5

Найти производную второго порядка от функции $y=\operatorname{tg}^2 x$.

Решение:

Найдем первую производную заданной функции:

$$y'=\left(\operatorname{tg}^2 x\right)'=2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x)'=2\operatorname{tg}x\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Найдем вторую производную согласно (2.12):

$$y''=\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)'=2\frac{\cos x\cdot\cos^3 x-\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x}=$$

$$=2\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}=2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Ответ: $y''=2\dfrac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

Если $y=y(x)$ задана параметрически в виде (2.9), то производная второго порядка может быть вычислена как

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \qquad (2.14)$$

где y'_x определена по формуле (2.10).

Для вычисления второй производной функции, заданной параметрически, можно также использовать формулу

$$y''_{xx}=\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (2.15)$$

Пример 2.6

Найти производную второго порядка y''_{xx}, если $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$

Решение:

Найдем x'_t, y'_t:

$$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t,\ y'_t = (b\sin t)' = b\cos t.$$

Воспользовавшись формулой (2.10), получаем y'_x:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Найдем $(y'_x)'_t$:

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)' = -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{b}{a\sin^2 t};$$

y''_{xx} найдем по формуле (2.14):

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{b}{a\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Ответ: $y''_{xx} = -\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$.

2.7. Правило Лопиталя – Бернулли

2.7.1. Раскрытие неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции, причем $g'(x) \neq 0$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.16}$$

при условии, что предел отношения производных существует. При необходимости формула (2.16) может быть применена к полученным отношениям несколько раз.

Пример 2.7

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение:

В данном случае $f(x) = \ln x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$. При $x \to 0$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя – Бернулли, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = 0$.

2.7.2. Раскрытие неопределенностей типа $(0\cdot\infty)$

Для раскрытия неопределенности типа $(0\cdot\infty)$ преобразуем произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ в частное:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right), \tag{2.17}$$

и далее воспользуемся правилом Лопиталя – Бернулли (2.16).

Пример 2.8

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Решение:

В данном случае $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = x$. При $x \to +\infty$ имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем произведение xe^{-x} в частное

$$xe^{-x} = \frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}} = \frac{x}{e^x}.$$

В результате получили неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Применяя правило Лопиталя – Бернулли получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$.

2.7.3. Раскрытие неопределенностей типа $(\infty - \infty)$

Для раскрытия неопределенности типа $(\infty - \infty)$ разность $f_1(x) - f_2(x)$ преобразуем в произведение:

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]. \qquad (2.18)$$

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, то произведение (2.18) может быть преобразовано в частное:

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] = \frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}. \qquad (2.19)$$

Предел (2.19) представляет собой неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и может быть вычислен с помощью правила Лопиталя – Бернулли (2.16).

Пример 2.9

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Решение:

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, согласно изложенной схеме:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}\right).$$

Для упрощения вычислений воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых:

$$\sin x \sim x;\ x^2 \sin^2 x \sim x^4 \text{ при } x \to 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} =$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{(x^2 - \sin^2 x)'}{(x^4)'} = \lim_{x \to 0}\frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{2x - \sin 2x}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{(2x - \sin 2x)'}{(x^3)'} = \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{2(1 - \cos 2x)}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\frac{4\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x \to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$.

2.7.4. Раскрытие неопределенностей типа (0^0), (1^∞) и (∞^0)

Неопределенности указанного типа раскрываются с помощью предварительного логарифмирования:

$$\ln\left(\lim_{x \to a}(f_1(x))^{f_2(x)}\right) = \lim_{x \to a}\ln\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)} = \lim_{x \to a} f_2(x)\ln\left(f_1(x)\right). \quad (2.20)$$

В результате получаем неопределенность типа $(0 \cdot \infty)$ (см. п. 2.7.2).

Пример 2.10

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

В данном случае

$$f_1(x) = \sin x,\ \lim_{x \to 0}\sin x = 0,\ f_2(x) = \operatorname{tg} x,\ \lim_{x \to 0}\operatorname{tg} x = 0,$$

т. е. имеем неопределенность вида (0^0).

Прологарифмируем функцию, стоящую под знаком предела и преобразуем полученное выражение в частное:

$$\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}.$$

Получили неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим полученный предел, используя правило Лопиталя – Бернулли (2.16):

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0}\frac{(\ln(\sin x))'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0}(\sin x \cdot \cos x) = 0.$$

Таким образом, получаем $\ln\left(\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right) = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$.

Ответ: $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

3.1. Промежутки монотонности функции

Условие монотонности функции:

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не возрастала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$, ее производная была неположительна.

$$f'(x) \le 0. \qquad (3.1)$$

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не убывала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$, ее производная была неотрицательна:

$$f'(x) \ge 0. \qquad (3.2)$$

Промежутки, на которых производная функции сохраняет определенный знак, называются промежутками монотонности функции $f(x)$.

Пример 3.1

Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

Решение:

Найдем производную функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 14)' = 3x^2 - 6x - 9.$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной. Для этого разложим полученный квадратный трехчлен на множители:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

Исследуем знак полученного выражения, используя метод интервалов (рис. 3.1).

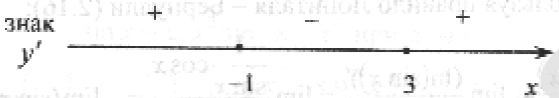

Рис. 3.1

Таким образом, получаем согласно (3.1), (3.2), что заданная функция возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

Ответ: заданная функция $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

3.2. Экстремумы функции

Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, что для всех $x \in (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ выполняется условие $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Локальный минимум или максимум функции $f(x)$ называется локальным экстремумом.

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если точка x_0 является экстремумом функции $f(x)$, то производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Достаточные условия наличия экстремума в критической точке x_0.

Пусть точка x_0 является критической.

Первое достаточное условие экстремума.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ точки x_0 и дифференцируема в каждой точке $x \in (x_0 - \Delta x, x_0) \cup (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Точка x_0 является локальным максимумом, если при переходе через x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус.

Точка x_0 является локальным минимумом, если при переходе через x_0 производная функции меняет знак с минуса на плюс.

Пример 3.2

Найти экстремумы функции $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

Решение:

Найдем производную заданной функции

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}\right)' = \frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7} + x^2\frac{1}{3}(6x-7)^{-2/3}\cdot 6\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7} + \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{x(6x-7)+x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}} = \frac{28}{3}\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}.$$

Приравнивая к нулю числитель и знаменатель полученной дроби, найдем критические точки:

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0;\ x=1;$$

$$6x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{6}.$$

Исследуем знак производной, используя метод интервалов.

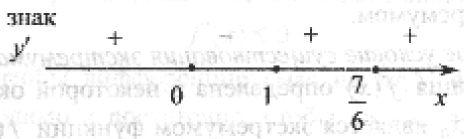

Рис. 3.2

Из рис. 3.2 видно, что при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x=0$ – локальный максимум.

При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, $x=1$ – локальный минимум.

При переходе через точку $x=\frac{7}{6}$ производная не меняет знак. Следовательно, критическая точка $x=\frac{7}{6}$ не является экстремумом заданной функции.

Ответ: Точка $x=0$ – локальный максимум, точка $x=1$ – локальный минимум.

Второе достаточное условие экстремума.

Если первые $2n-1$ производные функции $f(x)$ в точке x_0 равны нулю, а $2n$-я производная функции $f(x)$ в точке x_0 отлична от нуля, то точка x_0 является экстремумом функции $f(x)$, причем, если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0,\ f^{(2n)}(x)>0, \tag{3.3}$$

то x_0 – локальный минимум, если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0,\ f^{(2n)}(x)<0, \tag{3.4}$$

то x_0 – локальный максимум.

Пример 3.3

Найти экстремумы функции, пользуясь второй производной $y=x+\sqrt{1-x}$.

Решение:

Найдем первую производную заданной функции

$$y'=(x+\sqrt{1-x})'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Найдем критические точки функции:

$$2\sqrt{1-x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{1-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{4},$$

$$2\sqrt{1-x}=0 \Rightarrow x=1.$$

Точку $x=1$ мы не рассматриваем, так как функция определена только в левой окрестности $x=1$.

Найдем вторую производную

$$y''=\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)=-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

Находим $y''\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4\left(1-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=-2<0$.

Таким образом, на основании (3.4) делаем вывод о том, что $x=\frac{3}{4}$ – локальный максимум.

Ответ: $x=\frac{3}{4}$ – локальный максимум.

3.3. Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y=f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вниз на интервале (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз – вогнутой.

Условие выпуклости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т. е.

$$f''(x) < 0, \tag{3.5}$$

то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале.

Условие вогнутости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т. е.

$$f''(x) > 0, \tag{3.6}$$

то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале.

Пример 3.4

Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

Решение:

Найдем вторую производную заданной функции

$$y'' = (x^3 - 5x^2 + 3x - 5)'' = (3x^2 - 10x + 3)' = 6x - 10.$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной (рис. 3.3)

$$6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

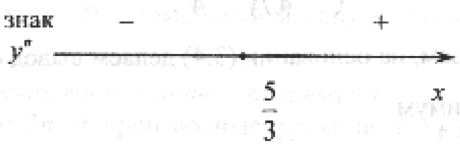

Рис. 3.3

Таким образом, на основании (3.5) и (3.6) делаем вывод о том, что кривая вогнута на $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$; кривая выпукла на $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: промежуток выпуклости кривой – $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$; промежуток вогнутости – $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$.

Точка, отделяющая промежутки выпуклости и вогнутости кривой друг от друга называется *точкой перегиба.*

Достаточное условие точки перегиба.

Пусть кривая определена уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ есть точка перегиба.

Пример 3.5

Найти точки перегиба кривой, заданной уравнением $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Решение:

Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = (x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50)'' = (4x^3 - 36x^2 + 96x)' = 12x^2 - 72x + 96.$$

Найдем значения x, при которых полученная вторая производная обращается в нуль:

$$12x^2 - 72x + 96 = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 4.$$

Исследуем знак второй производной (рис. 3.4):

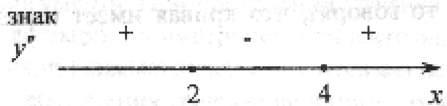

Рис. 3.4

При переходе через полученные точки вторая производная меняет знак, следовательно, точки $x_1 = 2;\ x_2 = 4$ являются точками перегиба.

Ответ: точки перегиба функции $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ – точки с абсциссами $x_1 = 2;\ x_2 = 4$.

3.4. Асимптоты

Определение. Прямая A называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

• Вертикальные асимптоты.

Из определения следует, что если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty, \tag{3.7}$$

или

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty, \tag{3.8}$$

или

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \tag{3.9}$$

то прямая $$x = a \qquad (3.10)$$
есть вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$.

Справедливо обратное утверждение: если прямая $x = a$ является асимптотой кривой $y = f(x)$, то выполняется одно из равенств (3.7)–(3.9).

• Наклонные асимптоты.

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид:
$$y = kx + b. \qquad (3.11)$$

Угловой коэффициент асимптоты (3.11) может быть найден по формуле:
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right). \qquad (3.12)$$

Зная k, находим постоянную b следующим образом:
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right). \qquad (3.13)$$

Если хотя бы один из пределов (3.12), (3.13) не существует или равен $\pm\infty$, то это означает, что у заданной кривой наклонных асимптот нет.

Если $k = 0$, то говорят, что кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$.

Пример 3.6

Найти асимптоты кривой, заданной уравнением $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение:

1. Найдем вертикальную асимптоту, приравняв знаменатель заданной функции к нулю.
$$x = 0.$$

Исследуем поведение функции в окрестности $x = 0$.
$$\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}\right) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}\right) = -\infty.$$

Таким образом, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

2. Найдем наклонную асимптоту, используя (3.12), (3.13):
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\frac{x^2+2x-1}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = 2.$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой заданной кривой.

Ответ: вертикальная асимптота $x = 0$; наклонная асимптота $y = x + 2$.

3.5. Общая схема исследования функций и построения графиков

Общее исследование функции следует проводить по приведенной ниже схеме:

1. Определить область существования функции, область непрерывности, точки разрыва.
2. Найти асимптоты функции.
3. Выяснить вопрос о периодичности.
4. Выяснить вопрос о четности или нечетности.

В случае, если функция окажется четной $f(-x) = f(x)$ или нечетной $f(-x) = -f(x)$ достаточно исследовать функцию только при положительных значениях аргумента. При построении графика следует учесть, что график четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат:

– с осью абсцисс – точка $(x_0, 0)$, где x_0 – решение уравнения $f(x) = 0$;

– с осью ординат – точка $(0, y_0)$, где $y_0 = f(0)$.

6. Найти промежутки монотонности и локальные экстремумы.
7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
8. Составить таблицу:

Таблица 3.1

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	…	x_n	$(x_n, +\infty)$
y	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_1)$	Возрастает или убывает Выпукла или вогнута	$y(x_2)$	Возрастает или убывает Выпукла или вогнута	$y(x_n)$	Возрастает или убывает Выпукла или вогнута
y'	знак y'	$y'(x_1)$	знак y'	$y'(x_2)$	знак y'	$y'(x_n)$	знак y'
y''	знак y''	$y''(x_1)$	знак y''	$y''(x_2)$	знак y''	$y''(x_n)$	знак y''

Точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – все найденные в п. 6–7 точки, в которых производные обращаются в нуль или не существуют.

9. На основании проведенного исследования построить график заданной функции.

Пример 3.7

Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Решение:

1. Область определения функции

$$x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Точка разрыва функции , функция непрерывна на $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$.

2. Асимптоты.

Найдем вертикальную асимптоту, приравняв знаменатель к нулю.

Исследуем поведение функции в окрестности $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)=+\infty.$$

Таким образом, $x=1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x(x-1)^2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-(x^3-2x^2+x)}{2(x-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}\right)=1.$$

Прямая $y=\frac{1}{2}x+1$ является наклонной асимптотой заданной кривой.

3. Функция не является периодической.

4. Четность функции

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{2(x+1)^2}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}.$$

Условие четности или нечетности не выполнено. Заданная функция – функция общего вида.

5. Точки пересечения с осями.

$$y(0)=0.$$

График функции проходит через начало координат.

6. Промежутки монотонности, локальные экстремумы.

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{1}{2}\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}.$$

Найдем критические точки:

$$x^3-3x^2=0,\ x_1=0,\ x_2=3;$$

$$(x-1)^3=0,\ x_3=1.$$

Исследуем знак производной методом интервалов (рис. 3.5):

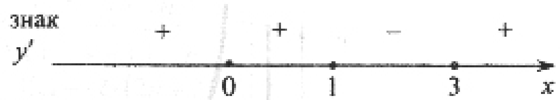

Рис. 3.5

7. Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)''=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{x^3-x^2-2x^2+2x-x^3+3x^2}{(x-1)^4}=\frac{3x}{(x-1)^4}.$$

Точки, в которых y'' равна нулю или не существует: $x=0, x=1$.

Исследуем знак второй производной методом интервалов (рис. 3.6):

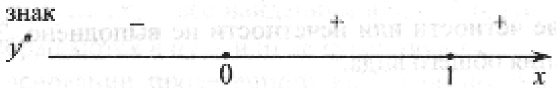

Рис. 3.6

8. Составляем таблицу:

Таблица 3.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	$\uparrow$ $\cap$	0	$\uparrow$ $\cup$	$\nexists$	$\downarrow$ $\cup$	$\frac{27}{8}$	$\uparrow$ $\cup$
y'	+	0	+	$\nexists$	-	0	+
y''	-	0	+	$\nexists$	+	$\frac{1}{9}$	+
		перегиб		Макс.		Мин.	

9. На основании приведенного исследования строим график заданной функции (рис. 3.7).

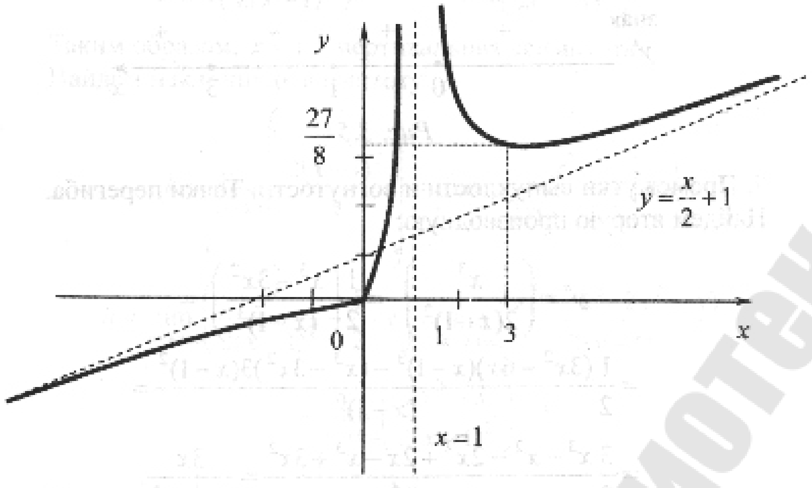

Рис. 3.7

ЗАДАНИЯ (ПРЕДЕЛЫ)

Задание 1. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})(\sqrt{7-n+n^2})}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

в) $\lim\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^2-3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$; б) ;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(8n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[6]{n}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\left(n^2+5\right)}}{\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-3n+2}-n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$; б) ;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[6]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[8]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$;

в) $\lim\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^2}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

26. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{7/n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{\left(n-\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{11+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

27. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

28. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+16}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

29. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

30. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

Задание 2. Вычислить пределы функций (не используя правило Лопиталя):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[8]{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

$4\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x+1}{1+2x-x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{-3x-9x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; г) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-\frac{1}{2}}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}-2}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{2x^3+3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; г) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Задание 3. Вычислить предел функции, применяя первый замечательный предел:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{3x^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{5x}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos5x}{2x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos10x}{x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin2x}{x^2}$. 10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2x}{x\operatorname{tg}x}$.

11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. 12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^23x-\sin^2x}{x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x+\sin3x}{x\sin x}$. 14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{2x^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos4x}{3x^2}$. 16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin3x}{2x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin2x}{\pi-4x}$. 18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-\cos^34x}{3x^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}$. 20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{4x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2x-\cos^22x}{x^2}$. 22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{\cos7x-\cos3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos x}{1-\cos x}$. 24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos x}{4x^2}$. 26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos2x)}$.

27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$. 28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

Задание 4. **Найти предел функции, применяя второй замечательный предел:**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{1+2x}\right)^{5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x12}{2x-1}\right)^{x+2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+4}\right)^{-x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

Задание 5. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}\left(2\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin x^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)^{-1}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^3-5x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

25. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$.

26. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

27. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

28. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(e^{3x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

29. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3\,\mathrm{arctg}\,x}$.

30. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$.

ЗАДАНИЯ (ПРОИЗВОДНЫЕ)

Задание 1. Найти производные функций:

1. а) $y=\sqrt[3]{(x-5)^2}+\frac{3}{2x^2+4x+1}$; в) $y=\frac{\mathrm{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$;
б) $y=\cos^5(6x+1)$; г) $y=(\sin 2x)^{\arccos x}$.

2. а) $y=\frac{5}{(x+4)^2}+\sqrt[5]{x^2+1}$; в) $y=\frac{5\,\mathrm{arctg}(x+2)}{(x-3)^2}$;
б) $y=\mathrm{arctg}(e^x-e^{-x})$; г) $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

3. а) $y=\sqrt{(x+3)^3}-\frac{5}{3x^2+4x-3}$; в) $y=\frac{e^{-\mathrm{tg}\,x}}{4x^2+3x+1}$;
б) $y=\ln^2(x+\cos x)$; г) $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$.

4. а) $y=\frac{3}{(x-1)^5}+\sqrt[4]{5-3x-x^2}$; в) $y=\frac{\ln^3 x}{\mathrm{ctg}(x-3)}$;
б) $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$; г) $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.

5. а) $y=\sqrt[3]{(x+2)^3}+\frac{8}{7x^2+x-2}$; в) $y=\frac{\arccos 3x^4}{\mathrm{tg}^2 x}$;
б) $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; г) $y=(\cos\sqrt{x})^x$.

6. а) $y=\frac{4}{x-7}+\sqrt[3]{x^2+6x+8}$; в) $y=\frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$;
б) $y=\mathrm{ctg}^2x^2+\mathrm{tg}^2x$; г) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$.

7. а) $y=\sqrt[4]{(3x-1)^3}-\frac{5}{3x^2+6}$; в) $y=\frac{\arcsin(2x+1)}{(x-2)^2}$;
б) $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$; г) $y=(\cos x)^{\ln x}$.

8. а) $y=\frac{7}{(x-6)^5}+\sqrt[5]{x^2-7x+2}$; в) $y=\frac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^2}$;
б) $y=5^{\mathrm{arctg}\,x^2}$; г) $y=(x^3+x)^x$.

9. а) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}+(x+7)^5$; в) $y=\frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$;
б) $y=\ln\ln^2\ln x$; г) $y=(\arcsin 5x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

10. а) $y=\frac{3}{x+5}-\sqrt[7]{x^2+3x+1}$; в) $y=\frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\sin^2 x}$;
б) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$; г) $y=(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x}$.

11. а) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\frac{5}{x^2-6x+1}$; в) $y=\frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$;
б) $y=\cos(\cos x^2)$; г) $y=(\arccos 2x)^{\ln x}$.

12. а) $y=\frac{3}{x-3}+\sqrt[6]{4x^2-6x+1}$; в) $y=\frac{\sin^2x+\cos x}{\sin^2x-\cos x}$;
б) $y=x^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; г) $y=x^{\sin\sqrt{x}}$.

13. а) $y=\sqrt[5]{(x+4)^3}+\frac{2}{3x^2+x-4}$; в) $y=\frac{\arcsin(3x+1)}{(x-2)^3}$;
б) $y=\sin^3(\ln x)$; г) $y=(\mathrm{arctg}\,x)^{x^2}$.

14. а) $y=\frac{5}{4-x}+\sqrt[3]{3x^2-3x+1}$; в) $y=\frac{\ln(3x-10)}{(x+5)^3}$;
б) $y=\mathrm{arctg}(1+\sqrt{x})$; г) $y=(\mathrm{ctg}\,x)^{\sqrt{x}}$.

15. а) $y=\sqrt[3]{5x^4+3x-2}+\frac{3}{(x-1)^3}$; в) $y=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$;
б) $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y=(\sin x)^{\sqrt[3]{x}}$.

16. а) $y=\frac{3}{(x+3)^3}-\sqrt{1+5x-2x^2}$; в) $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
б) $y=\ln\ln\mathrm{ctg}\,x$; г) $y=(\cos x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

17. а) $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\frac{5}{(x-5)^3}$; в) $y=\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\,x-1}$;
б) $y=x^5\arcsin\sqrt{x}$; г) $y=(x^2+4x)^x$.

18. а) $y=\dfrac{8}{6x^2+3x-2}-\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$; в) $y=\dfrac{\ln(x+4)}{\cos^5 x}$;

б) $y=\ln\left(\dfrac{\cos x}{\sin\sqrt{x}}\right)$; г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

19. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+4}}-(5-x)^3$; в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$;

б) $y=\cos^5(\ln x)$; г) $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^x$.

20. а) $y=\dfrac{5}{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x^2-6x+5}$; в) $y=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$;

б) $y=\operatorname{arctg}\left(\cos x^2\right)$; г) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$.

21. а) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2+4x-1}}+(2-x)^5$; в) $y=\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin 2x+1}$;

б) $y=\ln(\arcsin\sqrt{1-x^2})$; г) $y=(\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

22. а) $y=\dfrac{3}{(x-4)^3}-\sqrt[5]{2x^2+6x+6}$; в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\ln(x+3)}$;

б) $y=\sin^2\left(x^3+1\right)+\ln^2 3x$; г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$.

23. а) $y=\sqrt{(2x+1)^3}-\dfrac{4}{5x^2-3x+2}$; в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin\sqrt{x}}$;

б) $y=\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)$; г) $y=(\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

24. а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{5x^4+3x}}+(x-5)^3$; в) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{x^2+4x+1}$;

б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$; г) $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

25. а) $y=\sqrt[5]{2-6x+x^3}-\dfrac{5}{3-x}$; в) $y=\dfrac{(5x+1)^2}{e^{3x}}$;

б) $y=\arcsin(e^{-x})$; г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln x}$.

26. а) $y=\dfrac{2}{(x+6)^2}+\sqrt{x^3-6x+7}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{\operatorname{tg} x}$;

б) $y=\ln(e^x+\sqrt{x})$; г) $y=(x^2+6)^{\ln x}$.

27. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5-x-x^2}}+(3-2x)^2$; в) $y=\dfrac{5\ln(x^2+4)}{(x-2)^2}$;

б) $y=\ln\ln(\operatorname{tg} x)$; г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arccos x}$.

28. а) $y=\sqrt[5]{(x+2)^4}+\dfrac{3}{x^2-7x+5}$; в) $y=\dfrac{\arcsin(3x+2)}{(x-3)^2}$;

б) $y=\ln\left(\cos\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; г) $y=x^{\arcsin\sqrt{x}}$.

29. а) $y=\dfrac{2}{(3-x)^3}+\sqrt[4]{x^2+5}$; в) $y=\dfrac{\arccos x^3}{\operatorname{tg} x}$;

б) $y=\sin^3\left(x^2+5\right)$; г) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

30. а) $y=\sqrt[4]{(x-5)^3}+\dfrac{1}{\sqrt{2-3x-5x^2}}$; в) $y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$;

б) $y=\ln\dfrac{\cos x}{\sin\frac{1}{x}}$; г) $y=(\cos 5x)^{\sqrt{x}}$.

Задание 2. Найти производные функций, заданных неявно:

1. $\sin y=xy^2+4$.
2. $y=x+\operatorname{arctg} y$.
3. $x^2-7xy+5y^2-3=0$.
4. $y=e^{3y}+3x$.
5. $3xy+4y=\cos y$.
6. $y^2=x-\ln\dfrac{y}{x}$.
7. $xy=\operatorname{ctg} y$.
8. $y\ln y=5x^2$.
9. $5x+\sin y=6y$.
10. $x^3+y^3=5x-y^2$.
11. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=y$.
12. $e^y\cos x+e^x\sin y=0$.
13. $\operatorname{ctg} xy=\dfrac{x}{y}$.
14. $5xy^2+6\cos y=3x$.
15. $y^2-3x=\ln\dfrac{x}{y}$.
16. $\ln\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y}=0$.
17. $x^3+5y^2-6xy=0$.
18. $\sin y-5x^2y^3-3x=0$.
19. $y=e^{\frac{x}{y}}+4x$.
20. $\operatorname{arcctg} y=2x-3y$.
21. $\arcsin\dfrac{x}{y}-x^2y=5$.
22. $5x^4-3xy^3+2y^2=4$.

23. $4xy^2-6\cos y=4x-5$. 24. $\operatorname{tg} y=4x-2y$.

25. $e^y+e^x=5xy$. 26. $x^2+y^2=\ln xy$.

27. $y^2+3xy+\sin y=0$. 28. $5y^2=5x+\ln\dfrac{y}{x}$.

29. $x^4-y^4+x^2-y^3=10$. 30. $\operatorname{tg}^2(x+y)=2x$.

Задание 3. Найти производные функций, заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{ctg} t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=6\sin^2 t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^{t/2} \\ y=\sqrt{e^t+1} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=4(2+\cos t) \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\ln^2 t \\ y=t+\ln t \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ y=\arccos^2 t \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x=te^t \\ y=\dfrac{t}{e^t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \ln(1-t^2) \\ \sin t \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos^2 t} \\ y=\ln\operatorname{ctg} t \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{1}{t} \\ y=1+\sqrt{t} \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{1-t^2} \\ y=\ln(1-t^2) \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{1+t} \\ y=\operatorname{arctg} t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t} \\ y=t\ln t \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=1-t^2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin^2 t} \\ y=\ln\operatorname{tg} t \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^t \\ y=e^t+1 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x=\arcsin^2 t \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1} \\ y=\ln t \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x=\arcsin(\sqrt{1-t^2}) \\ y=\arccos^2 t \end{cases}$

28. $\begin{cases} x=\sin t-t\cos t \\ y=\cos t+t\sin t \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2} \\ y=\dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x=\ln(1-t^2) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциал функции:

1. $y=\ln(\arcsin\sqrt{1-x^2})$. 2. $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$. 4. $y=\ln^2(x+\cos x)$.

5. $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$. 6. $y=\operatorname{tg}^5 2x\cdot\sin 5x^2$.

7. $y=-\dfrac{1}{3\cos^2 x}$. 8. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

9. $y=\cos^2(\operatorname{tg} x^2)$. 10.

11. $y=\cos^5 2x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 12. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

13. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+x}$.

15. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$. 16. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.

17. $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$. 18. $y=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x}$.

19. $y=\ln(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2})$. 20. $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

21. $y=\sqrt{(x+2)^3}\cdot\arcsin^4 x$. 22. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

23. $y=5^{-x^2}\cos 3x$. 24. $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$.

25. $y=\dfrac{1}{5\sin^3 x}$. 26. $y=\cos x\ln(\operatorname{tg} x)$.

27. $y=(1+x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$. 28. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

29. $y=2^{-x}\cdot\operatorname{arctg}^3 5x$.   30. $y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x$.

Задание 5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

1. $\sqrt[3]{8{,}24}$.
2. $\sin 31^\circ$.
3. $(3{,}01)^2+(1{,}99)^3$.
4. $\operatorname{tg}59^\circ$.
5. $\sqrt[4]{15{,}8}$.
6. $\ln(e^3-0{,}2)$.
7. $\sqrt[3]{7{,}64}$.
8. $\operatorname{arctg}1{,}05$.
9. $\cos 61^\circ$.
10. $\sqrt[3]{65}$.
11. $\operatorname{arctg}\sqrt{3{,}1}$.
12. $e^{0{,}25}$.
13. $\sqrt[3]{26{,}46}$.
14. $\operatorname{tg}44^\circ$.
15. $\sin 29^\circ$.
16. $\sqrt{80{,}9}$.
17. $\ln\operatorname{tg}46^\circ$.
18. $\operatorname{arctg}0{,}98$.
19. $\sqrt[3]{27{,}3}$.
20. $\sin 92^\circ$.
21. $\operatorname{arctg}1{,}01$.
22. $\sqrt[3]{1{,}02}$.
23. $\ln(e+0{,}2)$.
24. $(2{,}01)^3+(0{,}99)^4$.
25. $\sqrt[5]{31}$.
26. $\operatorname{arctg}\sqrt{2{,}9}$.
27. $(5{,}03)^3$.
28. $\sqrt[3]{0{,}98}$.
29. $\cos 59^\circ$.
30. $\sqrt{17}$.

Задание 6. Вычислить пределы функций, применяя правило Лопиталя:

1. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin 5x\cdot\operatorname{ctg}x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$;   б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

3. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\cdot\ln x$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{5x^3}$;   б) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\ln x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$;   б) $\lim\limits_{x\to1/3}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$;   б) $\lim\limits_{x\to1/2}\ln 2x\cdot\ln(2x-1)$.

11. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{4}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}3x)^{1/\ln x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\ln x}$;   б) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}2x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt{x-3}}$;   б) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{4}}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

16. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{e^x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{5}{x}\right)^x$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$.

18. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 4x}$;   б) $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{1/x-3}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos 4x)\cdot\operatorname{ctg}2x$.

20. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to1/2}\left(\dfrac{x}{2x-1}-\dfrac{1}{\ln 2x}\right)$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^{5x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5\operatorname{arctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\ln\left(1+5x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}3x$.

28. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}\right)$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию:

1. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 2. $y=x^3+2x+5$.

3. $y=\dfrac{2x}{\ln x}$. 4. $y=x^2\cdot e^{-x}$.

5. $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. 6. $y=x-\operatorname{arctg}2x$.

7. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$. 8. $y=-x^2\cdot\sqrt{x^2+2}$.

9. $y=x-\ln(1+x)$. 10. $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$.

11. $y=x\sqrt{4-x^2}$. 12. $y=\ln(x^2+1)$.

13. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-5}$. 14. $y=e^{-x}+e^{2x}$.

15. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}$. 16. $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

17. $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$. 18. $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x^2}$.

19. $y=\dfrac{(x-3)(5-x)}{x^2}$. 20. $y=x\ln^2 x$.

21. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$. 22. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

23. $y=e^x+5x$. 24. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

25. $y=x^2(x-4)$. 26. $y=\dfrac{5x}{x^2+1}$.

27. $x=x^3(x-5)^2$. 28. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

29. $y=-x^2\cdot\sqrt{x^2+1}$. 30. $y=3-2\sqrt[3]{x^2}$.

Задание 8. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции:

1. $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$. 2. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

3. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. 4. $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$.

5. $y=xe^{2x}+1$. 6. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

7. $y=x^3\ln x+1$. 8. $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$.

9. $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$. 10. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

11. $y=x+\dfrac{4}{x+2}$. 12. $y=xe^x$.

13. $y=(x-4)^5+4x+4$. 14. $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

15. $y=x^4-8x^3+24x^2$. 16. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$.

17. $y=x+36x^2-2x^3-x4$. 18. $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$.

19. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$. 20. $y=5-\sqrt[3]{x-1}$.

21. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$.

22. $y=(1+x^2)e^x$.

23. $y=\ln(1+x^2)$.

24. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

25. $y=\dfrac{1}{x^2-25}$.

26. $y=1-\ln(x^2-4)$.

27. $y=\dfrac{1}{(x+2)^3}$.

28. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

29. $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$.

30. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Задание 9. Провести полное исследование функции и построить ее график:

1. $y=(x-1)e^{3x+1}$.
2. $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$.
3. $y=x^3\cdot e^{-x^2/2}$.
4. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.
5. $y=x-\ln(x+1)$.
6. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.
7. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
8. $y=(x+1)e^{2x}$.
9. $y=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$.
10. $y=x^3e^{-x}$.
11. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$.
12. $y=\dfrac{1}{x}+4x$.
13. $y=\ln(x^2-2x+2)$.
14. $y=x+\operatorname{arctg}x$.
15. $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$.
16. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.
17. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$.
18. $y=x^2\cdot e^{-x}$.
19. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.
20. $y=x^2-2\ln x$.
21. $y=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.
22. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.
23. $y=e^{-\frac{1}{5+x}}$.
24. $y=1-\ln^3 x$.
25. $y=x\cdot e^{-x^2}$.
26. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.
27. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.
28. $y=e^{2x-x^2}$.
29. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$.
30. $y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ПРЕДЕЛЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Практикум
по курсам «Математика» и «Высшая математика» для студентов заочной формы обучения

Авторы-составители: **Авакян** Елена Зиновьевна,
Трюхан Нина Александровна,
Иванейчик Ирина Владимировна

Редактор *Н. И. Жукова*

Компьютерная верстка *М. В. Лапицкий*

Подписано в печать 01.06.07.

Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,3.
Тираж 900 экз. Заказ № 308/17.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.