Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, В. И. Гойко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
к текстовым заданиям по одноименному курсу для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Гомель 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.14я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 2 от 02.12.2010 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. зав. каф. «Промышленная теплоэнергетика и экология» ГГТУ им. П. О. Сухого. *А. В. Овсянник*

Авакян, Е. З.

А18 Высшая математика : учеб.-метод. пособие к текстовым заданиям по одноим. курсу для студентов экон. специальностей заоч. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, В. И. Гойко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 205 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98
и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Изложен основной теоретический материал, необходимый для успешного решения задач из различных областей естествознания, техники и экономики.

Для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

I. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Элемент a_{ij} таблицы имеет два индекса. Первый индекс означает номер строки, в которой находится элемент, второй – номер столбца. Данная таблица имеет n строк и m столбцов, поэтому она называется *матрицей размера* $n \times m$. Пишут $A_{n\times m}$ или A_{nm}. Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ называются элементами $i-$й строки матрицы A, а элементы $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ – элементами $k-$го столбца матрицы A.

Две матрицы называются *равными*, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают буквой O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется *квадратной* матрицей, т.е. матрицей вида.

Квадратная матрица размера $n \times n$ называется *матрицей порядка* n.

Диагональ, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, называется *главной диагональю* квадратной матрицы A, а вторая диагональ, содержащая элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$, – *побочной диагональю*.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Матрица A^T, полученная из матрицы A заменой соответствующих строк столбцами, называется *транспонированной* матрицей. Сама операция замены строк столбцами называется транспонированием. Для матрицы (1.1) транспонипованная матрица имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Следует заметить, что при транспонировании элементы главной диагонали не изменяются.

Для матриц рассмотрим следующие операции:

1) сложение (вычитание) матриц,
2) умножение матрицы на число,
3) произведение матриц.

- *Сложение* матриц. Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров по правилу: каждый элемент c_{ij} матрицы C, являющейся суммой матриц A и B, равен сумме соответствующих элементов этих матриц, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 1.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+4 & -3+2 \\ 7+(-3) & 2+0 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Разность двух матриц определяется аналогичным образом.

Пример 1.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 0-4 & -3-2 \\ 7-(-3) & 2-0 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- *Умножение матрицы на число*. Чтобы *умножить* матрицу на число нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.

Пример 1.3

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 0 & 12 \\ -3 & 21 \end{pmatrix}.$$

- *Произведение* матриц. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, т.е. $A_{n\times m} \times B_{m\times l} = C_{n\times l}$, при этом элемент $i-$й строки $k-$го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов $i-$й строки матрицы A на соответствующие элементы $k-$го столбца матрицы B.

Пример 1.4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Убедитесь, что

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -11 & -16 & -2 \\ 6 & 69 & 7 \\ -20 & 8 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Из того, что матрицу A можно умножить на матрицу B, не следует, что матрицу B можно умножать на матрицу A.

Если матрицы A и B квадратные, то произведение $A \times B$ всегда существует. Следует помнить, что, вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$. Если $A \times B = B \times A$, то матрицы A, B называются *перестановочными*.

Пример 1.5

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, B \times A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Многочлены от матриц

Целой положительной степенью A^k квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A, т.е. $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ раз}}$. Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A. Нулевой степенью квадратной матрицы A $(A \neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и A, т.е. $A^0 = E$. Первой степенью матрицы A называется сама матрица A, т.е. $A^1 = A$.

Многочленом (или *полиномом*) степени k (k – целое неотрицательное число) от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 A^0,$$

где a_i $(i = 0,1,2,\ldots,k)$ – любые числа, причем $a_k \neq 0$.

Пример 1.6. *Найти многочлен* $P(A)$, *если* $P(x) = x^2 - 3x + 5$ *и* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

В соответствии с определением многочлена от матрицы получаем

$$P(A) = A^2 - 3A + 5E$$

или

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ -6 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -10 & 21\end{pmatrix}.$$

§ 1.2. Определители. Вычисление определителей

Определитель (*детерминант*) – число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A порядка n и вычисляется по определённому правилу. Обозначения: $\det A, |A|, \Delta$.

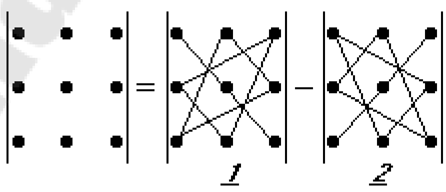
Матрица 1-го порядка – это число. Определитель такой матрицы равен этому числу. Приведем правило вычисления определителей второго и третьего порядков.

Определитель *второго порядка* равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad |A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{1.6}$$

Пример 1.7. $\begin{vmatrix}3 & -8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-1\cdot(-8)=20$.

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Саррюса*), которое символически можно записать так:



Объяснение схемы. Для вычисления определителя 3-го порядка нужно, во-первых, перемножить элементы, стоящие на главной диагонали и прибавить к ним произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали, – на схеме эта сумма обозначена цифрой 1, во-вторых, перемножить элементы, стоящие на побочной диагонали и прибавить к ним произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, – на схеме эта сумма обозначена цифрой 2 , в-третьих, от суммы 1 отнять сумму 4. Это правило отражает следующая формула:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{21}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Пример 1.8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -6 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot(-6)+4\cdot 7\cdot 5+(-2)\cdot 0\cdot(-1)-((-1)\cdot 1\cdot 5+3\cdot 7\cdot 0+$$

$$+(-2)\cdot 4\cdot(-6))=85.$$

Свойства определителей

Свойство 1. Определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с такими же номерами.

Пример 1.9. $\begin{vmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-54.$

Свойство 2. При перестановке каких-либо двух соседних строк (столбцов) абсолютное значение определителя остаётся прежним, а знак определителя меняется на противоположный.

Пример 1.10. $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}=a^2+ab$, (переставлены 2-й и 3-й столбцы).

Свойство 3. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

Пример 1.11. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Свойство 4. Определитель, у которого элементы одной строки (столбца) соответственно пропорциональны элементам другой строки (столбца), равен нулю. В частности, определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Пример 1.12. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -6 \\ d & d & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, (первый и второй столбцы одинаковы);

$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 10 \\ 2 & -16 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 0 & 72 \end{vmatrix} = 0$, (элементы 3-й строки пропорциональны элементам 1-й строки).

Свойство 5. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель;

Пример 1.13. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & -4 & 6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -48$. Прибавим к элементам первой строки элементы второй строки (умноженные на единицу). Получим определитель: $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. Этот определитель тоже равен -48.

Вычисление определителей порядка выше третьего

Для выяснения этого вопроса ведём понятия минора и алгебраического дополнения. *Минором* m_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель ($n-1$)-го порядка, полученный из исходного определителя путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент (т.е. определитель, оставшийся после вычёркивания i-й строки и j-го столбца) .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i + j$ – чётное число, и со знаком «-», если эта сумма нечётная. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Пусть, например,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & -4 & 6 \\ -11 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 66 = -66,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Разложение определителя по элементам некоторой строки (столбца).

Свойство 6. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения. Для разложения определителя лучше выбирать тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример 1.14. *Вычислить определитель:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Разложение будем проводить по элементам третьей строки.

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 9\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(2\cdot0\cdot8 - 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot2\cdot(-2) - (-2\cdot0\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot1\cdot8)) +$$

$$+ 9(2\cdot4\cdot8 - 1\cdot3\cdot1 - 3\cdot2\cdot(-2) - (1\cdot4\cdot(-2) + 2\cdot2\cdot3 - 1\cdot(-3)\cdot8)) = 406.$$

(Т.к. $a_{31} = 0, a_{34} = 0$, то 1-ое и 2-ое слагаемые в разложении равны 0. В связи с этим мы вычисляли только 2-ое и 3-е слагаемые).

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислять определители любого порядка, в том числе второго и третьего. Поэтому определитель, полученный в примере 1.14. можно вычислить вышеприведенным способом.

Вычисление определителей треугольной матрицы.

Свойство 7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{44}.$$

Пример 1.15. *Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{III + I}}{\overset{\text{II}\times(-2)+\text{I}}{=}} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -2 & 4 \\ 1(-2)+2 & -2(-2)+(-8) & -1(-2)+(-2) & 5(-2)+4 \\ -2+2 & 6+(-8) & 3+9-2) & 2+4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}\times2-\text{II}}{\overset{\text{III}\times2-\text{II}}{=}} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \end{vmatrix} =_{\text{IV + III}\times(-5)} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -84 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot (-84) = 1344 .$$

§ 1.3. Обратная матрица

Матрицей, обратной квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам $A A^{-1} = A^{-1} A = E$. Квадратная матрица называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется вырожденной или особенной.

Всякая невырожденная квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A (алгебраическое дополнение A_{ik} записывается в строку с номером k и в столбец с номером i, т.е. в так называемом транспонированном порядке).

Пример 1.16. *Найти матрицу, обратную матрице*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что $\det A = 1$. Так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$.

§ 1.4. Решение систем линейных неоднородных уравнений

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Система линейных уравнений часто записывается в матричном виде. Так, система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

эквивалентна записи $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной матрицей* системы. Матрица X – это матрица-столбец неизвестных, а матрица B – матрица-столбец свободных коэффициентов. Основная матрица системы, дополненная столбцом свободных коэффициентов, называется *расширенной матрицей* системы. Если столбец B – нулевой, т.е. все $b_i = 0$, то соответствующая система уравнений называется *однородной*. Система называется *неоднородной*, если хотя бы один $b_i \neq 0$.

Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных и состоит из двух основных этапов: 1) посредством эквивалентных преобразований привести систему к треугольному виду,

2) решить полученную треугольную систему, начиная с последнего уравнения.

Напомним, что *эквивалентными преобразованиями* системы являются следующие преобразования:

1. Умножение любого уравнения системы на любое, не равное нулю число.
2. Замена местами строк системы.
3. Прибавление к какому-либо уравнению системы какое-либо другое уравнение, умноженное на некоторое число.

В процессе эквивалентных преобразований системы могут возникнуть следующие ситуации:

1. Появятся нулевые строки, т. е. строки вида $0=0$. Такие уравнения отбрасывают. Получится система, у которой число неизвестных больше числа уравнений – такая система имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения такой системы нужно выразить одну какую-либо неизвестную (она будет *базисной*) через остальные неизвестные (они будут *свободными*) и затем через эти свободные неизвестные выразить остальные неизвестные системы.
2. Появятся строки вида $0=d$. В таком случае система несовместна

Пример 1.17. *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=2, \\ -3x_1-x_2+x_3=4, \\ -2x_1+x_2+6x_3=3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{matrix} \scriptstyle \mathrm{II}+\mathrm{I}\times 3 \\ \scriptstyle \mathrm{III}+\mathrm{I}\times 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow {\scriptstyle \mathrm{III}+\mathrm{II}\times(-1)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Получили уравнение $0=-3$. Система несовместна.

Пример 1.18. *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} 3t_1 + 2t_2 - 7t_3 \qquad = 12, \\ -2t_1 - t_2 + t_3 + 3t_4 = -6, \\ \quad -2t_2 + 2t_3 + 5t_4 = 5, \\ t_1 + t_2 - t_3 - 2t_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -7 & 0 & 12 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{I и IV строки}]{\text{поменяем местами}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -7 & 0 & 12 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{IV + I × (-3)}]{\text{II + I × 2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 6 & 9 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{IV + II}]{\text{III + II × 2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \xLeftrightarrow[\text{меняем с III}]{\text{IV строку}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Система приведена к треугольному виду. Решаем её.

Из IV уравнения: $3t_4 = -3;\ t_4 = -1.$
Из III уравнения: $-5t_3 + 5t_4 = 5; -5t_3 = 10;\ t_3 = -2.$
Из II уравнения: $t_2 - t_3 - t_4 = -4; t_2 + 2 + 1 = -4;\ t_2 = -7.$
Из I уравнения: $t_1 + t_2 - t_3 - 2t_4 = 1; t_1 - 7 + 2 + 2 = 1;\ t_1 = 4.$
Ответ: (4; -7; -2; -1).

Пример 1.19. *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 = 23. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, и будем осуществлять эквивалентные преобразования строк, чтобы привести систему к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & 11 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -9 & 23 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\text{I и III строки}}{\overset{\text{меняем местами}}{}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -9 & 23 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\text{III} + \text{I} \times (-2)}{\overset{\text{II} + \text{I} \times 3}{}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -9 & 23 \\ 0 & -14 & -28 & 70 \\ 0 & 7 & 14 & -35 \end{array}\right) \Leftrightarrow \underset{\text{III} \div 7}{\overset{\text{II} \div 14}{}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -9 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow_{\text{III} + \text{II}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -9 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получили уравнение: $0 = 0$. Отбрасываем третье уравнение. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. Выберем x_3 в качестве свободной неизвестной. Тогда система примет вид: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 9x_3 + 23 \\ 0 & -1 & 2x_3 + 5 \end{array}\right)$.

Из II уравнения получим: $x_2 = -2x_3 - 5$.

Из I уравнения: $x_1 - 5(-2x_3 - 5) = 9x_3 + 25 \Rightarrow x_1 = -x_3 - 2$.

Ответ: $\{-x_3 - 2;\ -2x_3 - 5;\ x_3, \text{где } x_3 \in R\}$.

Метод Крамера

Метод Крамера можно применять только для таких систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель основной матрицы системы не равен нулю.

Такая система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (1.8)$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i- го столбца столбцом свободных коэффициентов.

Пример 1.20. *Решить систему по формулам Крамера:*

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3=-8, \\ 5x_2+x_3=-6, \\ -x_1+x_2+4x_3=-7. \end{cases}$$

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-20+0-2-(-20-1+0)=-1\neq 0$. Система имеет единственное решение. Вычислим остальные определители.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -8 & 2 & 4 \\ -6 & 5 & 1 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & -7 & 4 \end{vmatrix}=1,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}=1.$$

Таким образом, $x_1=\dfrac{-2}{-1}=2, x_2=\dfrac{1}{-1}=-1, x_3=\dfrac{1}{-1}=-1.$

Ответ: (2; -1; -1).

Замечание: если окажется, что $\Delta=0$, то непосредственно метод Крамера к такой системе применить нельзя. В таком случае следует привести систему к треугольному виду и отбросить уравнения вида $\Delta=0$ (если таковые появятся). Здесь возможны две ситуации:

1) $\Delta=0$ и хотя бы один из Δ_i отличен от 0. Такая система является несовместной.

2) $\Delta=0$ и все Δ_i также равны нулю. В данном случае система либо имеет бесконечное множество решений либо вообще не имеет решений.

Если система имеет бесконечное множество решений, то следует выбрать свободные неизвестные и перенести их в правую часть оставшихся уравнений. Полученная система может быть решена по формулам Крамера.

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Систему (1.9) n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде $AX = B$,

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если система является невырожденной, т. е. $det A \neq 0$, то она имеет единственное решение

$$X = A^{-1}B \tag{1.10}$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Пример 1.21. *Решить систему уравнений.*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

Решение. Данную систему запишем в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A и найдем матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 39,$$

$$A_{11}=8,\ A_{12}=-11,\ A_{13}=-13,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-18,$$
$$A_{23}=-39,\ A_{31}=-1,\ A_{32}=16,\ A_{33}=26.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.10) получаем решение системы

$$X=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1=2, x_2=3, x_3=5$.

§ 1.5. Системы линейных однородных уравнений

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0. \end{cases}$$

Очевидно, что система линейных однородных уравнений всегда имеет нулевое решение, т.е. решение вида: $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Это решение не представляет интереса. Нас интересует ответ на вопрос: при каких условиях однородная система имеет ненулевое решение. На это отвечает следующая теорема: система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Последнее означает, что одно или несколько уравнений системы можно получить из оставшихся путём линейных преобразований. Говорят ещё, что такие уравнения линейно зависимы.

Ограничимся рассмотрением только двух разновидностей таких систем: 1) система двух уравнений с двумя неизвестными и 2) система трех уравнений с тремя неизвестными.

Случай 1. *Два уравнения с двумя неизвестными*.

Пример 1.22. *Решить систему линейных однородных уравнений.*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0; \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Система имеет только нулевое решение $x = y = 0$.

Пример 1.23. *Решить систему линейных однородных уравнений.*

$$\begin{cases} x - 3y = 0; \\ -2x + 6y = 0. \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Равенство нулю определителя матрицы системы означает, что одно уравнение является следствием второго. Например, разделив второе уравнение на (–2), получим первое уравнение. Значит, прямые совпадают. Система имеет бесконечное множество решений, которые можно записать в виде: $\{3y; \quad y, \quad y \in R\}$.

Случай 2. *Три уравнения с тремя неизвестными*.

Здесь возможны три ситуации. Три плоскости могут иметь одну общую точку (0, 0, 0) – т.е. это нулевое решение. Три плоскости могут совпадать – это в том случае, когда каждое из трех уравнений является следствием любого другого. Т. е. мы имеем дело с тремя одинаковыми уравнениями. Наконец, три плоскости могут пересекаться по прямой. В этом случае одно из уравнений является линейной комбинацией двух остальных уравнений.

Пример 1.24. *Решить систему линейных однородных уравнений.*

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0; \\ -x + 4y - z = 0; \\ 3x - 7y + 6z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения имеем: $y = -\frac{3}{5}z$. Из первого уравнения $x = -\frac{17}{5}z$. Положив $z = C$, получаем бесконечное число решений в виде;$\left\{-\frac{17}{5}C, -\frac{3}{5}C, C\right\}$.

Задания для самостоятельного решения.

1.1. Вычислить $4A - 5A^T + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2. Вычислить $A - 4B + 2C^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

1.3. Найти произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5. Вычислить определители первого, второго и третьего порядков:

$$\text{а) } |12|, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

1.6. Вычислить определители, используя теорему Лапласса:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.7. Вычислить определители, предварительно упростив их, используя свойства определителя:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3171 & 2161 \\ 3172 & 2162 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

1.8. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если она существует.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.9. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: 1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы (матричным методом); 3) методом Гаусса.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

1.10. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 14 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

1.11. Решить систему линейных однородных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

II. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 2.1. Уравнение прямой по угловому коэффициенту и отрезку на оси ординат

Уравнение

$$y = kx + b \tag{2.1}$$

задаёт прямую на плоскости, где $\boldsymbol{k}$ называется *угловым коэффициентом* прямой.

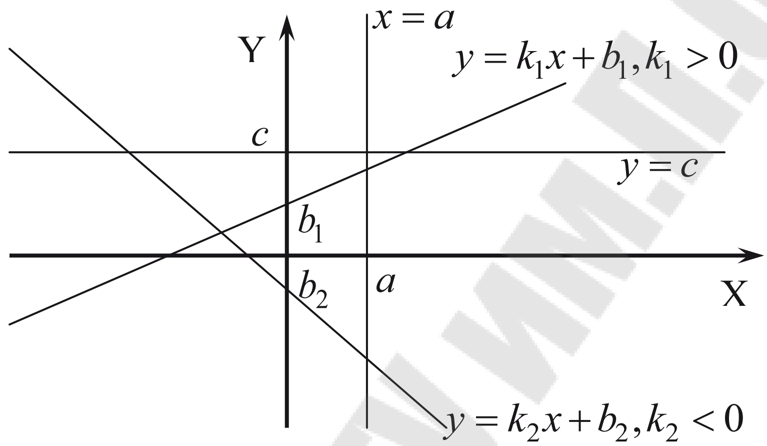


Рис. 2.1

Угловой коэффициент равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси OX (см. рис. 2.1). Отрезок b откладывается на оси OY в положительном направлении при $b > 0$ и в отрицательном при $b < 0$. Если $k = 0$, то получаем уравнение $y = b$, которое задаёт прямую, параллельную оси OX. Уравнение $x = a$ задаёт прямую, параллельную оси OY.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1; y_1)$, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{2.2}$$

§ 2.2. Уравнение прямой по двум данным точкам.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.3}$$

Угловой коэффициент прямой через координаты двух её различных точек $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ определяется формулой:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.4)$$

§ 2.3. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

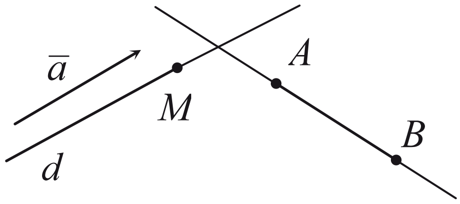


Рис. 2.2

Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим* вектором прямой d, если $\overline{a} \parallel d$. Разумеется, вектор $(-\overline{a})$ также будет направляющим вектором прямой d. Пусть заданы прямая d, вектор $\overline{a}(l;m)$, параллельный d и точка $M(x_1;y_1)$(рис. 2.2). Тогда уравнение прямой, проходящей через $M(x_1.y_1)$ и параллельной $\overline{a}(l;m)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \qquad (2.5)$$

Уравнение прямой по двум точкам можно рассматривать как частный случай уравнения по точке и направляющему вектору. Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Тогда $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ будет направляющим вектором прямой AB и оба уравнения в таком случае совпадают.

§ 2.4. Общее уравнение прямой.

Общим уравнением прямой называют уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B не равны нулю одновременно. Вектор $\overline{n}(A;B)$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$ и называется *нормалью* к этой прямой (рис. 2.3).

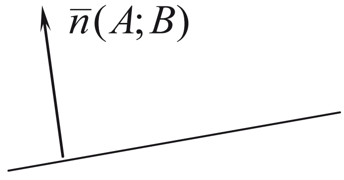


Рис. 2.3

§ 2.5. Параметрические уравнения прямой.

Если переписать уравнение (4.4) в виде $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$, где t – параметр, то получим *параметрические уравнения прямой*:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t; \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \text{ где } t \in \Re. \qquad (2.6)$$

Параметрические уравнения можно также получить из уравнения (2.5). Тогда они примут вид:

$$x = x_1 + lt; \quad y = y_1 + mt. \tag{2.7}$$

§ 2.6. Уравнение прямой в отрезках по осям

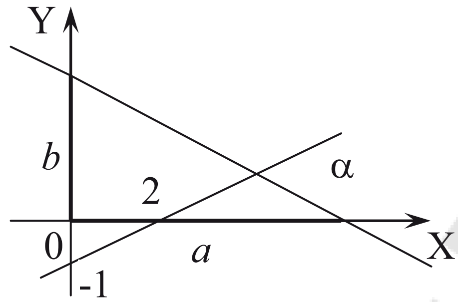


Рис. 2.4

Уравнением прямой в отрезках по осям (рис. 2.4) называют уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.8}$$

где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых соответственно на оси OX и оси OY.

§ 2.7. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

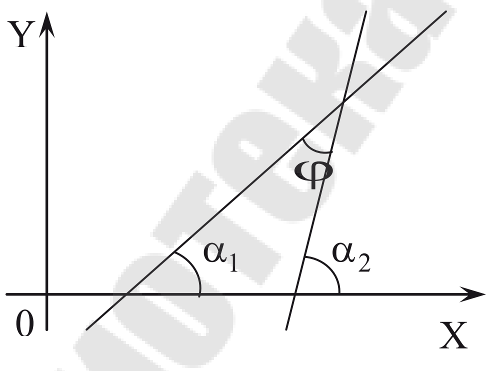


Рис. 2.5

Тангенс угла между двумя прямыми

$$y = k_1 x + b_1, \ \ y = k_2 x + b_2$$

вычисляется по формуле:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.9}$$

Если прямые заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \ \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то тангенс угла между ними определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (2.10)$$

Так как $\overline{n}_1(A_1, B_1), \overline{n}_2(A_2, B_2)$ – нормальные векторы этих двух прямых, то угол между ними можно также вычислить по формуле:

$$\cos\varphi = \cos(\overline{n}_1 \hat{,} \overline{n}_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}. \qquad (2.11)$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых выражается равенством:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (2.12)$$

(это означает, что векторы нормалей этих прямых должны быть коллинеарны),
а условие их перпендикулярности – равенством:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (2.13)$$

(это означает перпендикулярность векторов нормалей).

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями (2.1), выражается равенством

$$k_1 = k_2, \qquad (2.14)$$

а условие их перпендикулярности – равенством

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (2.15)$$

§ 2.8. Уравнение прямой в нормальном виде. Расстояние от точки до прямой

Предположим, что в уравнении прямой $A_0x + B_0y + C_0 = 0$ справедливо: $A_0^2 + B_0^2 = 1$. Тогда длина вектора $\overline{n}_0 = \{A_0, B_0\}$ равна 1. В этом случае вышеприведенное уравнение прямой называется уравнением прямой в *нормальном виде*.

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ можно привести к нормальному виду, если его левую часть умножить на нормирующий множитель $1/|\bar{n}|$. Величина $N=1/\sqrt{A^2+B^2}$ называется *нормирующим множителем*. Уравнение принимает вид:

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0. \qquad (2.16)$$

Введем обозначения: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=A_0$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=B_0$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=C_0$. Получим теперь уравнение прямой в нормальном виде: $A_0x+B_0y+C_0=0$, т.к. здесь имеет место равенство: $(A_0)^2+(B_0)^2=1$.

Расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (2.17)$$

§ 2.9. Задачи, относящиеся к прямым на плоскости

Пример 2.1. *Найти угол между прямыми, заданными уравнениями* $5x+3y+15=0$, $x+4y-7=0$.

Решение. Так как $A_1=5,\ B_1=3,\ A_2=1,\ B_2=4$, то, применяя формулу (4.10), имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{5\cdot4-1\cdot3}{5\cdot1+3\cdot4}=1,\ \varphi=45^\circ.$$

Замечание. При другой нумерации прямых ($A_1=1,\ B_1=4,$ $A_2=5,\ B_2=3$) получим $\operatorname{tg}\varphi'=-1,\ \varphi'=135^\circ$. Очевидно, что $\varphi+\varphi'=180^\circ$.

Пример 2.2. *Составить уравнение прямой, проходящей через точку* $M(4;-1)$ *и параллельно прямой:* $-3x+2y+5=0$.

Решение. Координаты вектора нормали $\bar{n}_1(A;B)$ искомой прямой должны быть пропорциональны координатам вектора нормали $\bar{n}(-3;2)$ данной прямой. Коэффициент пропорциональности можно выбрать любым, но проще выбрать его равным 1. Тогда искомое уравнение имеет вид: $-3x+2y+C=0$. Так как точка M лежит на искомой прямой, то её координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя в него координаты $x=4,\ y=-1$, получим: $-3\cdot4+2(-1)+C=0$. Отсюда: $C=14$. Итак, $-3x+2y+14=0$ – искомое уравнение.

Пример 2.3. *Составить уравнение прямой, проходящей через точку* $M(-2;5)$ *и перпендикулярно прямой* $4x-y-7=0$.

Решение. Согласно (2.13) для прямых должно быть выполнено условие $4\cdot A-1\cdot B=0$, где $\overline{n}(A;B)$ – нормаль к искомой прямой. A и B легко подобрать, например, $A=1,\ B=4$.
Тогда уравнение искомой прямой имеет вид: $x+4y+C=0$. Точка M лежит на этой прямой, поэтому координаты $x=-2, y=5$ должны удовлетворять уравнению: $-2+4\cdot5+C=0$.
Отсюда $C=-18$. Таким образом, $x+4y-18=0$ – искомая прямая.

Замечание. Задачу можно решить и так: поскольку прямые перпендикулярны, то вектор нормали $\overline{n}(4;-1)$ прямой $4x-y-7=0$ является направляющим вектором искомой прямой. Тогда (применив уравнение прямой по точке и направляющему вектору), получим: $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{-1}$. Легко заметить, что это уравнение эквивалентно полученному выше.

Пример 2.4. *Вершины треугольника находятся в точках* $A(3,4), B(-2,1), C(-3,5)$. *Написать уравнение высоты, опущенной из вершины* C.

Решение.

Способ 1. Высота перпендикулярна прямой AB. Найдём уравнение прямой AB по формуле (4.3): $\dfrac{x-3}{-2-3}=\dfrac{y-4}{1-4}, \dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-4}{-3}$ или $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-4}{3}$. Теперь можно преобразовать это уравнение в общее уравнение прямой и далее поступить как в предыдущем примере. Можно поступить и так: вектор $\bar{l}(5;3)$ является направляющим вектором прямой AB и одновременно нормалью искомой высоты. Значит уравнение высоты имеет вид: $5x+3y+C=0$. Так как точка C принадлежит высоте, то её координаты удовлетворяют уравнению $5(-3)+3\cdot5+C=0$. Отсюда $C=0$. Значит, $5x+3y=0$ – уравнение высоты.

Способ 2. Найдём угловой коэффициент прямой AB. Выбрав точку B первой, а точку A второй, получим: $k_1 = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$. Так как искомая высота и прямая AB перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением (2.15). Таким образом, $k_2 = -\frac{5}{3}$ – угловой коэффициент высоты из вершины C. Координаты точки C должны удовлетворять искомому уравнению. Подставим эти координаты и угловой коэффициент k_2 в уравнение (2.1). Получим: $y-5=-\frac{5}{3}(x+3)$. Отсюда: $5x+3y=0$ – уравнение высоты.

Пример 2.5. *Преобразовать общее уравнение прямой* $x-2y-2=0$ *в уравнение в отрезках по осям.*

Решение. $x-2y=2; \frac{x}{2}+\frac{-2y}{2}=\frac{2}{2}; \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1.$ Соответствующая прямая α изображена на рис. 4.4.

Пример 2.6. *Даны точки* $A(-2;5)$ *и* $B(3;1)$. *Написать все изложенные виды уравнения прямой* AB.

Решение. $\frac{x-(-2)}{3-(-2)}=\frac{y-5}{1-5}$; $\frac{x+2}{5}=\frac{y-5}{-4}$ – уравнение по двум точкам. Так как $\overline{AB}=(5;-4)$– направляющий вектор прямой AB, то полученное уравнение является уравнением по точке и направляющему вектору.

Запишем полученное уравнение в виде $(x+2)\cdot(-4)=(y-5)\cdot 5$. Отсюда получим общее уравнение прямой: $4x+5y-17=0$.

Из последнего уравнения имеем: $\frac{4x}{17}+\frac{5y}{17}=\frac{17}{17}$; $\frac{x}{\frac{17}{4}}+\frac{y}{\frac{17}{5}}=1$ – уравнение в отрезках по осям.

Также из общего уравнения прямой получим: $5y=-4x+17$; $y=-0{,}8x+3{,}4$ – уравнение по угловому коэффициенту и отрезку, отсекаемому на оси OY. Здесь $k=-0{,}8$.

Зная k и, взяв одну из точек, например, B, получим уравнение по угловому коэффициенту и точке: $y-1=-0{,}8(x-3)$.

Записав уравнение прямой AB по двум точкам в виде $\frac{x+2}{5}=\frac{y-5}{-4}=t$, получим параметрические уравнения: $x=5t-2$; $y=-4t+5$.

Пример 2.7. Построить прямую по точкам $M(2;5), N(2,-3)$.

Решение. По формуле (2.3) имеем $\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-5}{-3-5}; \frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{-8}$. Получили 0 в знаменателе. Здесь нужно воспользоваться следующим правилом: если в уравнении прямой по двум точкам в одном из знаменателей получен 0, то уравнение прямой получается приравниванием к 0 соответствующего числителя. Таким образом, $x-2=0$ или $x=2$ – искомое уравнение.

Пример 2.8. *Даны точки* $A(0;7)$ *и* $B(6;3)$. *Найти серединный перпендикуляр к отрезку* AB.

Решение. Уравнение прямой AB по двум точкам: $\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-7}{3-7}$; $\frac{x}{6}=\frac{y-7}{-4}$. Искомая прямая проходит через середину отрезка AB перпендикулярно прямой AB. Пусть точка $M(x;y)$ – середина отрезка AB. Тогда $x=\frac{6+0}{2}=3,\ y=\frac{7+3}{2}=5$. Направляющий вектор прямой AB (он имеет координаты (6,-4)) является нормальным вектором искомой прямой. Тогда общее уравнение искомой прямой имеет вид: $6x-4y+c=0$. Подставив в него координаты точки M, найдём c: $6\cdot 3-4\cdot 5+c=0; c=2$. Таким образом, уравнение серединного перпендикуляра имеет вид: $6x-4y+2=0$.

Задания для самостоятельного решения

2.1. Построить прямую по данному уравнению.

а) $y=4x+1$; б) $y=-2x+3$; в) $y=\frac{3}{4}x-2$;

г) $y=3x$; д) $y=3$; е) $x=-2$

2.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$; б) $A(0; 0)$, $B(2; 1)$; в) $A(1; 4)$, $B(1; 7)$.

Найти числовой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси OY.

2.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 2)$

а) параллельно вектору $\vec{a}\,(1; 3)$

б) параллельно вектору $\vec{i}\,(1; 0)$

в) перпендикулярно вектору $\vec{n}(-2; 5)$

г) перпендикулярно вектору $\vec{j}(0; 1)$

2.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 1)$ и образующей с ось абсцисс угол, равный:

а) $\dfrac{\pi}{4}$;   б) $\dfrac{2\pi}{3}$.

2.5. Составить уравнение отрезка *AB,* если:

а) $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$ б) $A(3; -2)$, $B(-1; 6)$

2.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 2)$

а) перпендикулярно прямой $3x - 2y + 4 = 4$

б) параллельно к прямой $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{-2}$.

2.7. Найти один из углов между прямыми:

а) $x + 2y - 1 = 0$ и $y = 3x + 2$

б) $2x + y + 3 = 0$ и $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{-2}$

в) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = -6t + 2 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$

2.8. Найти расстояние от точки $A(2; -1)$ до прямой $3x + 2y - 1 = 0$.

2.9. Найти расстояние между прямыми

$$2x - 3y - 2 = 0 \text{ и } -4x + 6y = 0$$

III. ПРЕДЕЛЫ

§ 3.1. Предел последовательности.

Пусть аргумент n принимает все значения из *натурального ряда*

$$1,2,3,\ldots,n,\ldots,n',\ldots. \qquad (3.1)$$

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию (т.е. большее число n' следует за меньшим n). Если каждому n по некоторому правилу или закону поставлено в соответствие x_n, то говорят, что задана последовательность $\{x_n\}$.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, x_{n'}, \dots \quad (3.2)$$

Например:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (3.3)$$

Определение 1. Число a называется пределом последовательности, если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Тот факт, что число a является пределом последовательности x_n, записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что элемент x_n находится в ε- *окрестности* числа a. ε- *окрестностью* числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать также и следующим образом:

Определение 2. Последовательность x_n имеет предел, если существует число a такое, что в любой ε- *окрестности* числа a находятся все элементы последовательности x_n, начиная с некоторого номера.

Теоремы о пределах последовательности

Теорема 1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.
Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.
Теорема 3. Предел суммы (разности) двух последовательностей равен
сумме (разности) пределов этих последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 4. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 5. Предел частного двух последовательностей равен частному пределов этих последовательностей (при условии, что знаменатель не обращается в нуль).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n};\quad \left(\lim_{n\to\infty}y_n\neq 0\right).$$

Теорема 6. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, члены последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n\geq z_n\geq y_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

Приведем несколько примеров вычисления пределов последовательности.

Пример 3.1

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3}$.

Решение:

В данном примере последовательность представляет собой рациональную дробь, для вычисления пределов такого вида необходимо знаменатель и числитель дроби разделить на n в наивысшей степени. В нашем примере это n^3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+1)}{n}\dfrac{(n-3)}{n}\dfrac{(3n+5)}{n}}{\dfrac{2n^3}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{5}{n}\right)}{2}=\frac{2\cdot 1\cdot 3}{2}=3$$

Так как $\dfrac{c}{n}\to 0$, если $n\to\infty$, а c - ограниченная величина.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(n-3)(3n+5)}{2n^3}=3$

Пример 3.2

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}$.

Решение:

Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[3]{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{10}{n^3}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3+\frac{10}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{3n^3+10}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

Пример 3.3

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Решение:

Для вычисления подобных пределов с неопределенностью $(\infty-\infty)$, необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на его сопряженное. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность квадратов» $\left(a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right)$ и, избавившись от квадратного корня, получить дробь.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

Пример 3. 4

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right).$

Решение:

Для вычисления подобных пределов необходимо умножить и разделить $\{x_n\}$ на неполный квадрат суммы. Это необходимо для того, чтобы воспользоваться формулой «разность кубов» $\left(a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$ и, избавившись от кубических корней, получить дробь. Неполным квадратом суммы в нашем примере является: $\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\,\frac{\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)\left(\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\left(n^2-n(n-1)\right)}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{n^2(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{n^3}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{2n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}}=\frac{1}{3}.$$

<u>Ответ: </u> $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)=\frac{1}{3}.$

Пример 3.5

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

<u>Решение:</u>

Последовательность $1,2,3,\ldots,n$ - является арифметической прогрессией с разностью $d=1$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии находится по формуле:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n. \tag{3.6}$$

Т.е. $S_n=\dfrac{1+n}{2}\cdot n=\dfrac{n+n^2}{2}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

<u>Ответ: </u> $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 3.6

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

<u>Решение:</u>

Напомним, что

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n \tag{3.7}$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{3.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!\ (n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)\ 3n(3n-1)!}{(3n)\ (3n-1)!\ (n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (3n+1)3n}{3n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2 + 3n + 1}{3n^2 - 3n} = 3.$$

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)} = 3.$

§ 3.2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

- Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
- Произведение конечной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно малая.
- Сумма конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечного числа бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.
- Произведение конечной величины на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.
- Если x_n является бесконечно большой величиной, то ее обратная величина $\alpha_n = 1/x_n$ будет бесконечно малой.

§ 3.3. Предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Число e

Предел данной последовательности равен

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{3.9}$$

где число $e = 2{,}7182\cdots$-основание натурального логарифма.

При вычислении пределов типа (3.9) следует использовать следующие свойства:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=e^{k}$ (3.10)

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}=e^{\alpha}$ (3.11)

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n}=e$ (3.12)

4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b}=e$ (3.13)

Пример 3.7

Вычислить предел последовательности $\{x_n\}=\left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}$.

Решение:

Для вычисления предела преобразуем $\{x_n\}$ к виду (3.9). С этой целью выделим в числителе выражение, стоящее в знаменателе и почленно разделим, а затем воспользуемся свойствами (3.10)-(3.13):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3+2}{n+3}\right)^{3n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{3n+1}=e^{2\cdot 3}=e^{6}.$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{3n+1}=e^{6}$.

§ 3.4. Предел функции

Приведем два определения предела функции:

Определение 4 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ выполняется:

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \quad (3.14)$$

Определение 5 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$, при стремлении x к a, если какую бы последовательность $\{x_n\}$ с пределом a, извлеченную из множества X, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,…, $f(x_n)$,... всегда имеет предел A.

Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A. \qquad (3.15)$$

Из определения предела функции по Гейне следует, что все теоремы о пределах последовательности можно обобщить на случай предела функции.

Далее приведем несколько примеров вычисления предела функции.

Пример 3.8

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

Решение:

При подстановке в числитель и знаменатель $x = 1$ мы получаем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Выделяем критический множитель $x - 1$, разложив на множители квадратный трехчлен в знаменателе и воспользовавшись формулой разности кубов в числителе. Затем сократим полученное выражение на $x - 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \frac{1+1+1}{1-2} = -3.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -3$

Пример 3.9

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$.

Решение:

При подстановке $x = 3$ в предел мы получаем неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Числитель разложим на множители: $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$; далее знаменатель и числитель нашей дроби умножим на величину сопряженную знаменателю, т.е.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)}{x - 2 - (4-x)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)}{2(x-3)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+4)\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)}{2} = \frac{7\left(\sqrt{3-2} + \sqrt{4-3}\right)}{2} = 7.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}=7.$

§ 3.5. Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (3.16)$$

Следствия первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}=m$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\dfrac{m}{n}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{\alpha} x}{x^{\beta}}=\begin{cases}0, \alpha>\beta\\ \infty, \alpha<\beta\\ 1, \alpha=\beta\end{cases}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{\alpha}(mx)}{\sin^{\beta}(nx)}=\begin{cases}0, \alpha>\beta\\ \infty, \alpha<\beta\\ \dfrac{m}{n}, \alpha=\beta\end{cases}$

Для пределов, содержащих $tgx, \arcsin x, arctgx$, справедливы свойства, аналогичные 4 – 7.

Определение 6. Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \qquad (3.17)$$

Определение 7. Если отношение бесконечно малых $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ стремится к единице при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \quad (3.18)$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *называются эквивалентными бесконечно малыми,* и пишут

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a.$$

На основании приведенных определений и первого замечательного предела (3.16) можно записать следующие соотношения эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \sin kx \sim kx, \sin^m x \sim x^m \quad (3.19)$$

$$tgx \sim x, tgkx \sim kx, tg^m x \sim x^m \quad (3.20)$$

$$\arcsin x \sim x, \arcsin kx \sim kx, \arcsin^m x \sim x^m \quad (3.21)$$

$$arctgx \sim x, arctgkx \sim kx, arctg^m x \sim x^m \quad (3.22)$$

Пример 3.10 *Вычислить предел функции* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Решение:

При подстановке $x = 0$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью (3.19) $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ при $x \to 0$.

Ответ: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Пример 3.1 *Вычислить предел функции* $\lim_{x \to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$

Решение:

При подстановке $x = 0$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{1-\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$

Пример 3.12 *Вычислить предел функции* $\lim_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}$.

Решение:

При подстановке $x=\pi$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$.

В данном примере мы не можем применить первый замечательный предел, так как $x\to\pi$, в подобных случаях необходимо сделать замену переменной. Причем, новая переменная должна стремиться к нулю.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}=\left\{\begin{array}{l}y=x-\pi;\\ x\to\pi;y\to 0;\end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{tg3(y+\pi)}{\sin 5(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{tg(3y+3\pi)}{\sin(5y+5\pi)}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{tg3y}{-\sin 5y}=-\lim_{y\to 0}\frac{3y}{5y}=-\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\sin 5x}=-\frac{3}{5}$.

§ 3.6. Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называют предел вида:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e, \tag{3.23}$$

или эквивалентное выражение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{3.24}$$

Следствия второго замечательного предела

1. $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$
2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{m/x}=e^m$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

Частный случай $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

Частный случай: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

На основании перечисленных следствий 1-4 и определения эквивалентности бесконечно малых (3.18) можно записать следующие соотношения эквивалентности при $x\to 0$:

$$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a} \tag{3.25}$$

$$\ln(1+x)\sim x \tag{3.26}$$

$$e^x-1\sim x \tag{3.27}$$

$$a^x-1\sim x\ln a \tag{3.28}$$

Пример 3.13 *Вычислить предел функции* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

<u>Решение:</u>

При подстановке $x=0$ имеем неопределенность типа (1^{∞}).

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

При решении мы воспользовались соотношением эквивалентности (3.19) и следствием 1 из второго замечательного предела.

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=e^3$

Пример 3.14 *Вычислить предел функции* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

<u>Решение:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+1-1)}{x^2}=\left\{\cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Мы воспользовались соотношениями эквивалентности (3.19) и (3.25).

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

Пример 3.15 *Вычислить предел функции* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1-\left(3^{2x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{3x}-2\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}=3\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{8}{9}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tgx}=\ln\dfrac{8}{9}$

Задания для самостоятельного решения

Задание 3.1 Вычислить предел числовой последовательности

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n+3}{2n^3+4}$ 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+6}{7n^2+4}$ 3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+n+3}{7n^2+1}$

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{5n^3}$

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+1)\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{\sqrt[4]{9n^8+3n+2}}$

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+3}+\sqrt{n^3+1}}{\left(\sqrt{n^2+1}+2n\right)^2}$

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n+1}-n}$

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n^2-2n}\right)$

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!}{n\big((2n+1)!+(2n+2)!\big)}$

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+2}\right)^{5n}$

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$

Задание 3.2 Вычислить предел функции

3.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{5x-10}$

3.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x-10}$

3.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$

3.21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

3.22. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-6x^3+5x^2-4x+2}{5x^3-8x^2+x+2}$

3.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-4x^2+4x}$

3.25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2}{x^4-3x^2+1}$

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x^3+x^2}{5x^3+x^2+3}$

3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

3.29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-2x-8}$

3.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

3.31. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

3.32. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$

3.33. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$

3.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}}$

$$3.35.\ \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$$

<u>Задание 3.3</u> Вычислить предел функции, используя первый замечательный предел и его следствия.

$3.36.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$ $\quad 3.37.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}$ $\quad 3.38.\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\ 2x}{tg\ 5x}$

$3.39.\ \lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin 6x}{3x}$ $\quad 3.40.\ \lim_{x\to 0}\frac{arctg\ 3x}{arctg 2x}$ $\quad 3.41.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

$3.42.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 5x}{5x\sin 2x}$ $\quad 3.43.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$ $\quad 3.44.\ \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-25}$

$3.45.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ $\quad 3.46.\ \lim_{x\to 1}(1-x)\ tg\frac{\pi x}{2}$ $\quad 3.47.\ \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{ctg\frac{\pi x}{2a}}$

$3.48.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sqrt[3]{x-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$ $\quad 3.49.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ $\quad 3.50.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$

$3.51.\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$ $\quad 3.54.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$

$$3.53.\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$$

Задание 3.4 Вычислить предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых величин

3.60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+sin^2x)}{x\ sin4x}$ 3.61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4arctg3x}{9ln(1-2x)}$ 3.64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg^2x}-1}{xarcsin5x}$

3.63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{e^{x^2}-1}$ 3.64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin2x}{\ln(e-x)-1}$ 3.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{tg6x}$

3.66. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{lnx}$ 3.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{sin\big(\pi(x+2)\big)}$ 3.68. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ln(9-2x^2)}{sin2\pi x}$

3.69. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{ln(tgx)}{cos2x}$ 3.70. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{tg(cosx-1)}$ 3.71. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{sin2x}-e^{tg2x}}{ln2x-ln\pi}$

IV. ДИФФЕРНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 4.1. Правила дифференцирования

Если $u(x)$ и $v(x)$ являются дифференцируемыми функциями аргумента x, то:

$$\big(u(x)\pm v(x)\big)'=u'(x)\pm v'(x) \tag{4.1}$$

$$\big(u(x)v(x)\big)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \tag{4.3}$$

$$C'=0,\ (C=const) \tag{4.4}$$

$$\big(Cu(x)\big)'=Cu'(x) \tag{4.5}$$

Таблица производных элементарных функций:

	Функция $f(x)$	Производная функции $f'(x)$
1.	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
2.	a^x e^x	$a^x \ln a$ e^x
3.	$\log_a x$ $\ln x$	$\frac{1}{x\ln a}$ $\frac{1}{x}$
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
11.	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
14.	shx	chx
13.	chx	shx
14.	thx	$\frac{1}{ch^2 x}$
15.	$cthx$	$-\frac{1}{sh^2 x}$

§ 4.2. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(u(x))$ существует и равна произведению производной данной функции f по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной :

$$y'_x = f'(u)u'(x) \tag{4.6}$$

В случае $y = f(u)$, $u = u(z)$, $z = z(x)$:

$$y'_x = f'(u)u'(z)z'(x) \tag{4.7}$$

Аналогично во всех более сложных случаях.

Пример 4.1 *Найти производную функции* $y = arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Решение:

Аргументом данной функции y является $u = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Используя таблицу производных, имеем:

$$y'_u = (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + x} = \frac{(1+x)^2}{1+3x+x^2}.$$

Производную функции u по переменной x найдем, используя правило дифференцирования частного (4.3) и таблицу производных:

$$u'_x = \frac{(\sqrt{x})'(1+x) - \sqrt{x}(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{\frac{(1+x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

Таким образом, получаем, согласно (4.6):

$$y'_x = \frac{(1+x^2)^2}{1+3x+x^2} \cdot \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+3x+x^2)}$$

Ответ: $y'_x = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+3x+x^2)}$

§ 4.3. Производная функции, заданной неявно

Пусть зависимость между y и x задана в виде соотношения:

$$F(x, y) = \Phi(x, y) \tag{4.8}$$

В этом случае говорят, что функция $y(x)$ задана неявно.

Для вычисления производной y'_x необходимо:

а) вычислить производные от обеих частей уравнения (4.8), считая при этом y функцией от x;

б) приравнять полученные производные;

в) решить полученное уравнение относительно y'_x.

Пример 4.2

Найти производную y'_x, *если* $\sin x + \ln y = e^{xy}$

Решение:

а) вычисляем производные от обеих частей заданного равенства, считая y функцией от x:

$$\left(\sin x + \ln y\right)' = \cos x + \frac{1}{y} y'_x,$$

$$\left(e^{xy}\right)' = e^{xy}\left(xy\right)' = e^{xy}\left(y + xy'_x\right)$$

б) приравниваем полученные производные:

$$\cos x + \frac{1}{y} y'_x = e^{xy}\left(y + xy'_x\right)$$

в) решаем уравнение относительно y'_x:

$$y'_x\left(\frac{1}{y} - xe^{xy}\right) = ye^{xy} - \cos x,$$

$$y'_x = \frac{ye^{xy} - \cos x}{\left(\frac{1}{y} - xe^{xy}\right)} = \frac{y\left(ye^{xy} - \cos x\right)}{\left(1 - xye^{xy}\right)}$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{y\left(ye^{xy} - \cos x\right)}{\left(1 - xye^{xy}\right)}$

§ 4.4. Производная функции, заданной параметрически

Функция $y(x)$ является заданной параметрически, если y и x заданы как функции параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

Если $\varphi(t), \psi(t)$ - дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{4.10}$$

Пример 4.3

Найти производную y'_x, *если*

$$\begin{cases} x = a\,tgt \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Решение:

Находим x'_t, y'_t:

$$x'_t = (a\,tgt)' = \frac{a}{\cos^2 t};$$

$$y'_t = (b\sin t)' = b\cos t$$

Воспользовавшись формулой (4.10), получаем:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{\dfrac{a}{\cos^2 t}} = \frac{b}{a}\cos^3 t$$

Ответ: $y'_x = \frac{b}{a}\cos^3 t$

§ 4.5. Производная степенно-показательной функции

Рассмотрим степенно-показательную функцию $y = (u(x))^{v(x)}$.

Для вычисления производной y'_x предварительно прологарифмируем y :

$$\ln y = \ln(u(x))^{v(x)} = v(x)\ln(u(x))$$

Продифференцируем обе части полученного равенства, считая при этом y функцией от x:

$$(\ln y)' = (v(x)\ln(u(x)))' = v'(x)\ln(u(x)) + v(x)(\ln(u(x)))'$$

$$\frac{y'_x}{y} = v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Разрешая полученное уравнение относительно y'_x, окончательно получаем:

$$y'_x = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \qquad (4.11)$$

Пример 4.4

Найти производную функции $y = x^{\sin x}$

Решение:

Прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) = \sin x \cdot \ln x$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по x:

$$(\ln y)' = \frac{y'_x}{y}$$

$$(\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

Приравниваем полученные производные:

$$\frac{y'_x}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x};$$

$$y'_x = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Учитывая явный вид заданной функции, окончательно получаем:

$$y'_x = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

<u>Ответ:</u> $y'_x = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

§ 4.6. Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$:

$$y'' = \left(f'(x)\right)' \tag{4.12}$$

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и, вообще, любого n-го порядка:

$$y''' = \left(y''\right)'; \quad y^{IV} = \left(y'''\right)'; \ldots y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \tag{4.13}$$

Пример 4.5

Найти производную второго порядка от функции $y = tg^2 x$.

<u>Решение:</u>

Найдем первую производную заданной функции:

$$y' = \left(tg^2 x\right)' = 2tgx\left(tgx\right)' = 2tgx\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Найдем вторую производную согласно (4.12):

$$y'' = \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2\frac{\cos x \cdot \cos^3 x - \sin x \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} =$$

$$= 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

<u>Ответ:</u> $y'' = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

Если $y = y(x)$ задана параметрически в виде (4.9), то производная второго порядка может быть вычислена как

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \tag{4.14}$$

где y'_x определена по формуле (4.10).

Для вычисления второй производной функции, заданной параметрически, можно также использовать формулу

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} \tag{4.15}$$

Пример 4.6

Найти производную второго порядка y''_{xx}, *если*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

Найдем x'_t, y'_t:

$$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t,\ y'_t = (b\sin t)' = b\cos t$$

Воспользовавшись формулой (4.10), получаем y'_x:

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt$$

Найдем $(y'_x)'_t$:

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{b}{a}ctgt\right)' = -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \frac{b}{a\sin^2 t}$$

y''_{xx} найдем по формуле (4.14):

$$y''_{xx} = \frac{\frac{b}{a\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

<u>Ответ:</u> $y''_{xx} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$

§ 4.7. Дифференциал функции

4.7.1. Вычисление дифференциала

Приращение Δy функции $y = f(x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0 \tag{4.16}$$

Произведение $f'(x)\Delta x$, представляющее собой , так называемую главную часть приращения, линейную относительно Δx, называют *дифференциалом*

функции и обозначается следующим образом:

$$dy = f'(x)dx \tag{4.17}$$

Правила вычисления дифференциала имеют вид:

$$d\big(c\,u(x)\big) = c \cdot du(x) \tag{4.18}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv \tag{4.19}$$

$$d(u\,v) = vdu + udv \tag{4.20}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \tag{4.21}$$

Пример 4.7

Найти дифференциал функции

$$y = \sqrt{1 + x^2}arctgx.$$

Решение:

Для того, чтобы вычислить дифференциал по формуле (4.17), найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\sqrt{1+x^2}arctgx\right)' = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' arctgx + \sqrt{1+x^2}(arctgx)'$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}arctgx + \sqrt{1+x^2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{xarctgx + 1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Тогда,согласно (4.17) получаем:

$$dy = y' dx = \frac{xarctgx + 1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Ответ: $dy = \frac{xarctgx\ +1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Пример 4.8

Найти дифференциал функции, заданной неявно:

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\frac{y}{x}.$$

Решение:

Для того, чтобы вычислить дифференциал по формуле (4.17), найдем y'_x.

Воспользуемся правилом вычисления производной, приведенным в 3.

а) вычисляем производные от обеих частей заданного уравнения, считая при этом y функцией от x:

$$\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2+y^2)'}{2(x^2+y^2)} = \frac{2x + 2yy'_x}{2(x^2+y^2)} = \frac{x + yy'_x}{x^2+y^2}$$

$$\left(arctg\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'_x x - y}{x^2} = \frac{y'_x x - y}{x^2+y^2}$$

б) приравниваем полученные производные:

$$\frac{x + yy_x'}{x^2 + y^2} = \frac{y'_x x - y}{x^2 + y^2}$$

$$x + yy'_x = y'_x x - y$$

в) решаем полученное уравнение относительно y_x':

$$x + y = y'_x (x - y)$$

$$y'_x = \frac{x + y}{x - y}$$

Тогда,согласно (4.17) получаем:

$$dy = y'_x dx = \frac{x + y}{x - y} dx$$

Ответ: $dy = \frac{x+y}{x-y} dx.$

4.7.2. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Согласно формуле (4.16) в случае, когда $\Delta x \to 0$, приращение функции Δy в точке x_0 можно считать приближенно равным ее дифференциалу ($dx = \Delta x$)

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x \tag{4.22}$$

Учитывая, что

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

Получаем формулу, для приближенного вычисления значения функции в точке x, близкой к точке x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{4.23}$$

Пример 4.9

Насколько приблизительно изменилась сторона квадрата, если его площадь увеличилась от 9 м^2 до 9,1м^2?

Решение:

Обозначим через x площадь квадрата, а через y - его сторону.
Тогда

$$y = \sqrt{x}.$$

По условию $x_0 = 9$; $\Delta x = 9{,}1 - 9 = 0{,}1.$

Приращение Δy стороны квадрата найдем согласно (4.23).

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Тогда

$$\Delta y \approx \frac{1}{6} 0{,}1 \approx 0{,}016 .$$

Ответ: Сторона квадрата увеличилась приблизительно на 0,016 м.

Пример 4.10

Найти приближенное значение $\sqrt[3]{67}$.

Решение:

Воспользуемся формулой (4.23). В данном случае $f(x) = \sqrt[3]{x}$. В качестве x_0 выберем $x_0 = 64$. Тогда $\Delta x = 67 - 64 = 3$, $f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$.

Найдем $f'(x_0)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{48}.$$

Тогда, согласно (4.23) получаем:

$$\sqrt[3]{67} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot 3 = 4 + \frac{1}{16} = 4{,}0625$$

Ответ: $\sqrt[3]{67} \approx 4{,}0625$.

§ 4.8. Правило Лопиталя – Бернулли

4.8.1. Раскрытие неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ -дифференцируемые функции.

Если $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (4.24)$$

при условии, что предел отношения производных существует. При необходимости формула (4.24) может быть применена к полученным отношениям несколько раз.

Пример 4.11

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$.

Решение:

В данном случае $f(x) = \ln x, g(x) = ctgx$. При $x \to 0$ имеем неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя - Бернулли, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}=0$

4.8.2. Раскрытие неопределенности типа $(0\cdot\infty)$

Для раскрытия неопределенности типа $(0\cdot\infty)$ преобразуем произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, в частное:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ или }\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \tag{4.25}$$

и далее воспользуемся правилом Лопиталя – Бернулли (4.24).

Пример 4.12

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Решение:

В данном случае $f_1(x)=e^{-x}, f_2(x)=x$. При $x\to+\infty$ имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем произведение xe^{-x} в частное

$$xe^{-x}=\frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}}=\frac{x}{e^x}$$

В результате получили неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Применяя правило Лопиталя - Бернулли, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

4.8.3. Раскрытие неопределенности типа $(\infty-\infty)$

Для раскрытия неопределенности типа $(\infty-\infty)$ разность $f_1(x)-f_2(x)$ преобразуем в произведение:

$$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] \qquad (4.26)$$

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, то произведение (4.26) может быть преобразовано в частное:

$$f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]=\frac{1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}} \qquad (4.27)$$

Предел (4.27) представляет собой неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и может быть вычислен с помощью правила Лопиталя – Бернулли (4.24).

Пример 4.13

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Решение:

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, согласно изложенной схеме:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

Для упрощения вычислений воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x;\quad x^2\sin^2 x\sim x^4$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{3x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{3}$

4.8.4. Раскрытие неопределенностей типа $(0^0),(1^\infty),(\infty^0)$

Неопределенности указанного типа раскрываются с помощью предварительного логарифмирования:

$$\ln(\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)})=\lim_{x\to a}\ln\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)}=\lim_{x\to a} f_2(x)\ln\left(f_1(x)\right) \qquad (4.28)$$

В результате получаем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$(см. пункт 4.8.2).

Пример 4.14

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,2x}$.

Решение:

В данном случае

$$f_1(x)=\sin x,\ \lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$$f_2(x)=tg2x,\ \lim_{x\to 0}tg2x=0$$

т.е. имеем неопределенность типа (0^0).

Прологарифмируем функцию, стоящую под знаком предела и преобразуем полученное выражение в частное:

$$\ln(\sin x)^{tg\,2x}=tg2x\cdot\ln(\sin x)=\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{tg2x}}=\frac{\ln(\sin x)}{ctgx}.$$

Получили неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**.** Вычислим полученный предел, используя правило Лопиталя – Бернулли (4.24):

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(sin\ x)}{ctg\ 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(ln(sin\ x)\right)'}{(ctg\ 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{sin\ x}cos\ x}{-\frac{2}{sin^2 2x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 2x\ cos\ x}{sin\ x}$$

$$=0.$$

Таким образом, получаем

$$\ln(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,2x})=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,2x}=e^0=1$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,2x}=1$

§ 4.9. Промежутки монотонности функции. Экстремумы функции

Условие монотонности функции:

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не возрастала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$ ее производная была неположительна .

$$f'(x) \le 0 \qquad (4.29)$$

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ не убывала, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках, принадлежащих $(a;b)$ ее производная была неотрицательна.

$$f'(x) \ge 0 \qquad (4.30)$$

Промежутки, на которых производная функции сохраняет определенный знак, называются промежутками *монотонности* функции $f(x)$.

Пример 4.15

Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

Решение:

Найдем производную функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$.

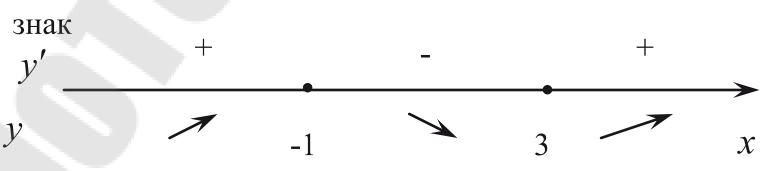
$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 14)' = 3x^2 - 6x - 9$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной. Для этого

разложим полученный квадратный трехчлен на множители:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

Исследуем знак полученного выражения, используя метод интервалов.



Таким образом, получаем согласно (4.29), (4.30),что заданная функция возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

Ответ: Заданная функция $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;\infty)$ и убывает на $(-1;3)$.

Определение Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)$, что для всех $x\in(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)$ выполняется условие $f(x)\le f(x_0)$ ($f(x)\ge f(x_0)$).

Локальный минимум или максимум функции $f(x)$ называется *локальным экстремумом.*

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремумом, то производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Достаточные условия наличия экстремума в критической точке x_0.

Пусть точка x_0 является критической.

Первое достаточное условие экстремума:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)$ точки x_0 и дифференцируема в каждой точке $x\in(x_0-\Delta x, x_0)\cup(x_0, x_0+\Delta x)$.

Точка x_0 является локальным максимумом, если при переходе через x_0

производная функции меняет знак с плюса на минус.

Точка x_0 является локальным минимумом, если при переходе через x_0 производная функции меняет знак с минуса на плюс.

Пример 4.16

Найти экстремумы функции $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

Решение:

Найдем производную заданной функции

$$y'=\left(\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}\right)'=\frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7}+x^2\frac{1}{3}(6x-7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6\right)=$$

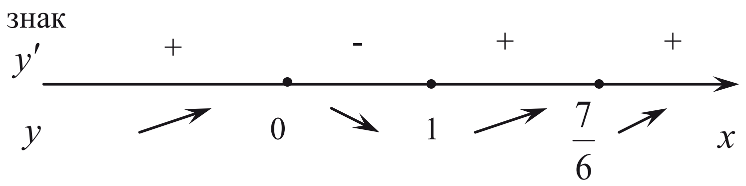
$$=\frac{2}{3}\left(2x\sqrt[3]{6x-7}+\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(6x-7)+x^2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}=\frac{28}{3}\frac{x(x-1)}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}$$

Приравнивая полученную производную нулю числитель и знаменатель полученной дроби, найдем критические точки:

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0; x=1$$

$$6x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{6}$$

Исследуем знак производной, используя метод интервалов.



Из рисунка видно, что при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x=0$- локальный максимум.

При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с минуса на плюс.

Следовательно, в точке $x=1$- локальный минимум.

При переходе через точку $x=\frac{7}{6}$ производная не меняет знак.

Следовательно, критическая точка $x=\frac{7}{6}$ не является экстремумом заданной функции.

<u>Ответ:</u> $y(0)=0$ - локальный максимум, $y(1)=-\frac{2}{3}$ - локальный минимум.

Второе достаточное условие экстремума:

Если первые $2n-1$ производные функции $f(x)$ в точке x_0 равны нулю, а $2n$-ная производная функции $f(x)$ в точке x_0 отлична от нуля, то точка x_0 является экстремумом функции $f(x)$, причем,

если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0, f^{(2n)}(x)>0, \tag{4.31}$$

то x_0-локальный минимум

если

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\ldots f^{(2n-1)}(x)=0, f^{(2n)}(x)<0, \tag{4.32}$$

то x_0-локальный максимум.

Пример 4.17

Найти экстремумы функции, пользуясь второй производной

$$y=x+\sqrt{1-x}.$$

<u>Решение:</u>

Найдем первую производную заданной функции

$$y'=(x+\sqrt{1-x})'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$$

Найдем критические точки функции:

$$2\sqrt{1-x}-1=0, \sqrt{1-x}=\frac{1}{2}, x=\frac{3}{4}$$

Точку $x=1$ мы не рассматриваем, так как функция определена только в левой окрестности $x=1$.

Найдем вторую производную

$$y''==\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)=-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

Находим $y''\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4\left(1-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=-2<0$

Таким образом, на основании (4.31) делаем вывод о том, что при $x=\frac{3}{4}$ $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$ - локальный максимум.

<u>Ответ:</u> $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$ - локальный максимум.

§ 4.10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a;b]$ надо:

- Найти все критические точки функции на заданном отрезке и вычислить значения функции в найденных точках;
- Вычислить значения функции на концах промежутка $f(a)$ и $f(b)$;
- Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее или наименьшее; оно и будет представлять собой наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке $[a;b]$.

Пример 4.18

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-3x^4+6x^2-1$ *на отрезке* $-2\le x\le 2$.

<u>Решение:</u>

1.Найдем критические точки функции, принадлежащие данному отрезку:

$$y'=(-3x^4+6x^2-1)'=-12x^3+12x=-12x(x^2-1)$$
$$=-12x(x-1)(x+1)=0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1$$

Все найденные точки принадлежат заданному отрезку.Найде значения заданной функции в найденных точках:

$$y(0) = -1; y(-1) = 2; y(1) = 2$$

2. Найдем значения функции на концах промежутка :

$$y(-2) = -25;\ y(2) = -25$$

3.Среди всех найденных значений у выберем наименьшее и наибольшее:

$$y_{min} = y(-2) = y(2) = -25;\ y_{max} = y(-1) = y(1) = 2$$

Ответ: наименьшее значение функции $y_{min} = -25$; наибольшее значение-$y_{max} = 2$

§ 4.11. Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком однозначной дифференцируемой функции $f(x)$.

Говорят, что кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a,b), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Говорят, что кривая обращена *выпуклостью вниз* на интервале (a,b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть *выпуклой*, а обращенную выпуклостью вниз – *вогнутой.*

Условие выпуклости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е.

$$f''(x) < 0, \tag{4.33}$$

то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале.

Условие вогнутости кривой.

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е.

$$f''(x) > 0, \tag{4.34}$$

то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале.

Пример 4.19

Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, заданной уравнением $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

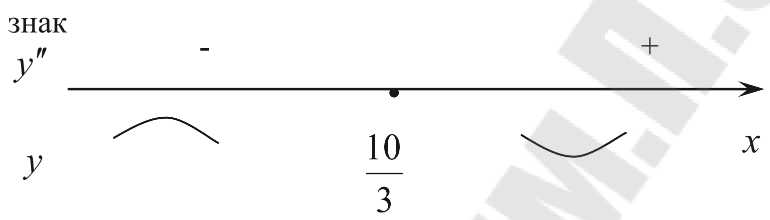
Решение:

Найдем вторую производную заданной функции

$$y'' = \left(x^3 - 5x^2 + 3x - 5\right)'' = \left(3x^2 - 10x + 3\right)' = 6x - 20$$

Найдем промежутки знакопостоянства полученной производной

$$6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$



Таким образом, на основании (4.31) и (4.32) делаем вывод о том, что кривая вогнута на $\left(\frac{10}{3}, \infty\right)$; кривая выпукла на $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$.

Ответ: промежуток выпуклости кривой - $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$; промежуток вогнутости- $\left(\frac{10}{3}, \infty\right)$.

Точка, отделяющая промежутки выпуклости и вогнутости кривой друг от друга называется *точкой перегиба.*

Достаточное условие точки перегиба:

Пусть кривая определена уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак , то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ есть точка перегиба.

Пример 4.20

Найти точки перегиба кривой , заданной уравнением $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Решение:

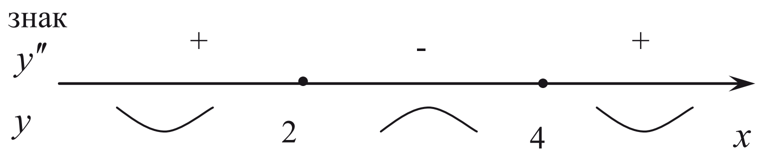
Найдем вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50\right)'' = \left(4x^3 - 36x^2 + 96x\right)' = 12x^2 - 72x + 96$$

Найдем значения x, при которых полученная вторая производная обращается в нуль:

$$12x^2 - 72x + 96 = 0, \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 4$$

Исследуем знак второй производной :



При переходе через полученные точки вторая производная меняет знак, следовательно, точки $x_1 = 2; x_2 = 4$ являются точками перегиба.

Ответ: точки перегиба функции $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$- точки с абсциссами $x_1 = 2\ y(2) = 62; x_2 = 4\ y(4) = -274$.

§ 4.12. Общая схема исследования функций и построения графиков

Общее исследование функции следует проводить по приведенной ниже схеме:

1.Определить область существования функции, область непрерывности, точки разрыва.

2. Найти асимптоты функции.

3. Выяснить вопрос о периодичности.

4. Выяснить вопрос о четности или нечетности.

В случае, если функция окажется четной $f(-x) = f(x)$ или нечетной $f(-x) = -f(x)$достаточно исследовать функцию только при положительных значениях аргумента. При построении графика следует учесть, что график четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5.Найти точки пересечения графика функции с осями координат:
с осью абсцисс - точки $(x_0, 0)$, где x_0 -решение уравнения $f(x) = 0$;
с осью ординат- точки $(0, y_0)$, где $y_0 = f(0)$.

6. Найти промежутки монотонности и локальные экстремумы.

7.Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

8. Составить таблицу

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$\ldots$	x_n	$(x_n, +\infty)$
y	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_1)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_2)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута	$y(x_n)$	Возрастает или убывает, Выпукла или вогнута

y'	знак y'	$y'(x_1)$	знак y'	$y'(x_2)$	знак y'	$y'(x_n)$	знак y'
y''	знак y''	$y''(x_1)$	знак y''	$y''(x_2)$	знак y''	$y''(x_n)$	знак y''

Точки $x_{1,}x_2\ldots,x_n$ -все найденные в п.6-7 точки, в которых производные обращаются в нуль или несуществуют.

9.На основании проведенного исследования построить график заданной функции.

Пример 4.21

Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Решение:

Область определения функции

$$x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

Точка разрыва функции $x=1$, функция непрерывна на $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$.

2. Асимптоты.

Вертикальная асимптота $x=1$.

Поведение функции в окрестности $x=1$:

$$\lim_{x\to1-0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)=+\infty$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x(x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-(x^3-2x^2+x)}{2(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}\right)=1$$

Прямая $y=\dfrac{1}{2}x+1$ является наклонной асимптотой заданной кривой.

3. Функция не является периодической.

4. Четность функции

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{2(x+1)^2}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}$$

Условие четности или нечетности не выполнено. Заданная функция – функция общего вида.

5. Точки пересечения с осями.

$$y(0)=0$$

График функции проходит через начало координат.

6. Промежутки монотонности, локальные экстремумы.

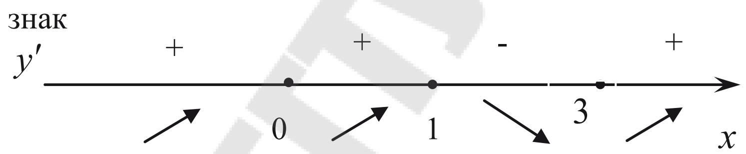
$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{1}{2}\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{1}{2}\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

Найдем критические точки:

$$x^3-3x^2=0,\ x_1=0, x_2=3$$

$$(x-1)^3=0,\ x_3=1$$

Исследуем знак производной методом интервалов:



Найдем значения функции в критических точках:

$$y(0)=0;\ y(3)=\frac{27}{8}$$

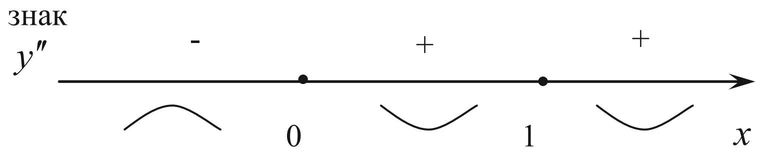
7.Промежутки выпуклости и вогнутости. Точки перегиба.
Найдем вторую производную.

$$y''=\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right)^{\prime\prime\prime}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}\right)'=\frac{1}{2}\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{x^3-x^2-2x^2+2x-x^3+3x^2}{(x-1)^4}=\frac{3x}{(x-1)^4}$$

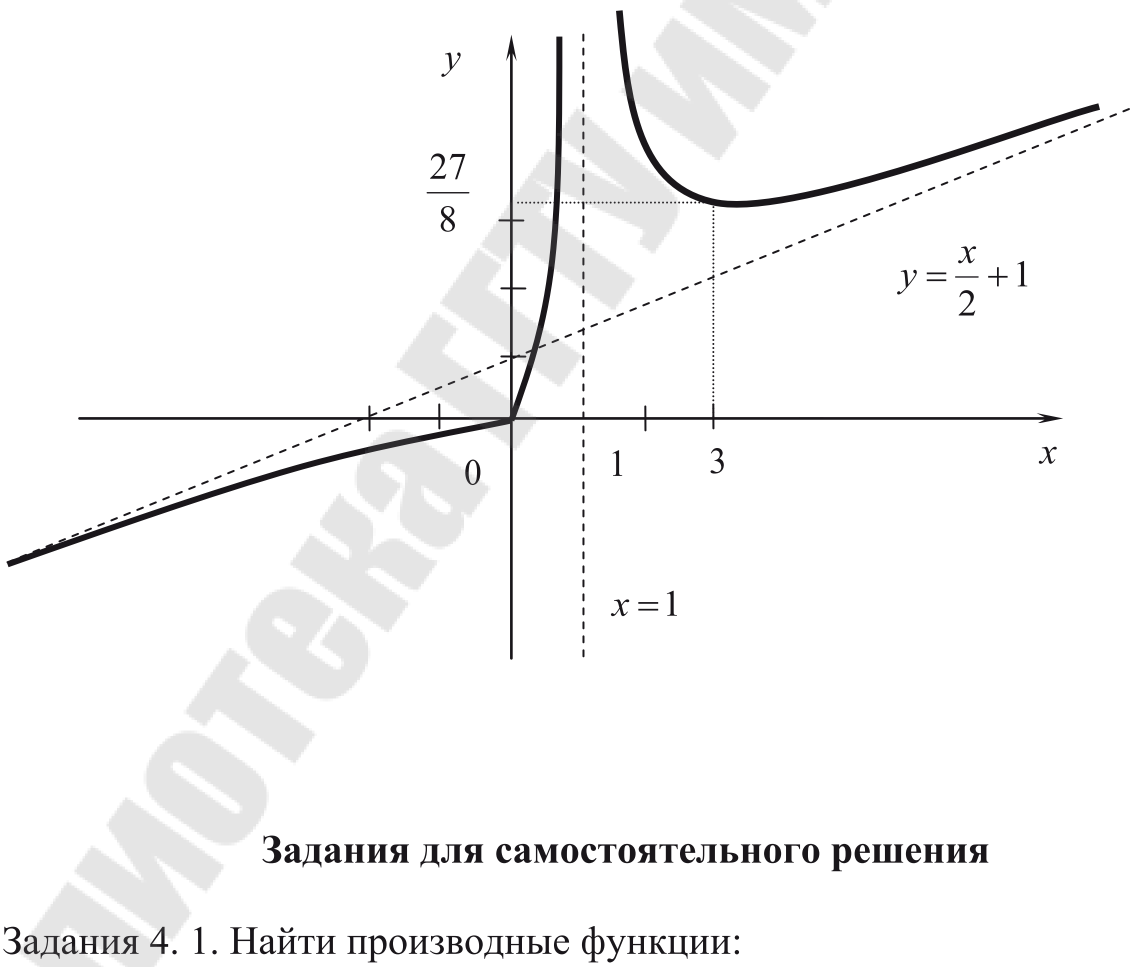
Точки, в которых y'' равна нулю или несуществует: $x=0, x=1$

Исследуем знак второй производной методом интервалов:



8. Составляем таблицу.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	$\uparrow$ $\cap$	0	$\uparrow$ $\cup$	-	$\downarrow$ $\cup$	$\frac{27}{8}$	$\uparrow$ $\cup$
y'	+	0	+	-	-	0	+
y''	-	0	+	-	+	$\frac{1}{9}$	+
		перегиб		разрыв		мин.	



Задания для самостоятельного решения

Задания 4. 1. Найти производные функции:

4.1. $y = 5x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ 4.2. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{5}$.

4.3. $y = \sqrt{x}\left(x^2 - 3\sqrt{x} + 2\right)$. 4.4. $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

4.5. $y = \frac{(x^2+2)^2}{\sqrt[3]{x}}$.

4.6. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

4.7. $y = \sqrt{tg\frac{x}{2}}$.

4.8. $y = sin^2(\cos 3x)$.

4.9. $y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.10. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$

4.11. $y = arctg^2\frac{1}{x}$.

4.12. $y = \sqrt{1+ln^2x}$.

Задания 4.2. Найти производные неявных функции:

4.13. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

4.14. $y = x + arctgy$.

4.15. $2y\ lny = x$.

4.16. $y^2 + x^2 = ln(xy)$.

4 .17 $e^y cosx + e^x sinyx = 0$.

4.18 $y^x = x^y$.

Задания 4.3. Найти производные функций, заданных парамеирически:

4.19 $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$

4.20 $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

4.21 $\begin{cases} x = e^t\ sint \\ y = e^t\ cost \end{cases}$

4.22 $\begin{cases} x = 5(t - sint) \\ y = 5(t - cost) \end{cases}$

4.23 $\begin{cases} x = arccos\sqrt{1-t^2} \\ y = ln(1-t^2) \end{cases}$

4.24 $\begin{cases} x = arcsin^2t \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

Задания 4.4. Найти производные функций, используя предварительное логорифмирование:

4.25 $y = x^{1/x}$.

4.26 $y = (lnx)^x$.

4.27 $y = (sinx)^{cosx}$.

4.28 $y = x^{x^x}$.

4.29 $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^4}$.

4.30 $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Задания 4.5. Найти производные функций указанного порядка :

4.31. $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 5,\ y'' = ?$

4.32. $y = (x^2+1)^3,\ y'' = ?$

4.33. $y = ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ y'' = ?$

4.344. $y = \cos^2 x,\ y''' = ?$

4.35. $y = (1+x^2)\ arctgx,\ y'' = ?$

4.36. $y = \frac{1}{1-x},\ y^{IV} = ?$

Задания 4.6. Найти производные 2-го порядка y''_{xx} функций заданных параметрически:

4.37 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^2 \end{cases}$ 4.38 $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$

4.39 $\begin{cases} x = ln\, t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ 4.40 $\begin{cases} x = arcsin\, t \\ y = ln(1 - t^2) \end{cases}$

Задания 4.7. Найти дифференциалы функции:

4.41. $y = arctg\,\frac{x}{a}$. 4.42. $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$.

4.43. $y = ln\left(arcsin\sqrt{1 - x^2}\right)$. 4.44. $y = cos^2(tg\, x^2)$.

4.45. $y = \frac{arccos\ x}{\sqrt{1-x^2}}$. 4.46. $y = x^2 arctg\sqrt{x}$.

Задания 4.8. Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

4.47. $\sqrt{80{,}9}$. 4.48. $arctg\ 1{,}02$. 4.49 $sin\ 31°$. 4.50 $\sqrt[5]{31}$.

Задания 4.9. Найти пределы, используя правило Лопиталя – Бернулли:

4.51. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$ 4.52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{sin\, x}$

4.53. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - cosax}{1 - cosbx}$ 4.54. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}$

4.55. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sqrt{tg\ x} - 1}{2sin^2\, x - 1}$ 4.56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{sin\ x\ cos\ x}$

4.58. $\lim\limits_{x\to \pi/2} cos3x\ tg5x$ 4.59. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx\ \ ln(x + e^x)$

4.60. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{ln\ x} - \frac{x}{x - 1}\right)$ 4.61. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin\ x} - \frac{1}{x}\right)$

4.62 $\lim\limits_{x\to +\infty}(ln\ x)^{\frac{1}{x}}$ 4.63. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tg\ x)^{2x-\pi}$

Задания 4.10. Исследовать на возростание и убывание функции:

4.64. $y = x^3 - 3x + 5$ 4.63. $y = e^{kx}$ 4.65. $y = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$

4.66. $y = x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)$ 4.67. $y = ln(1 - x^2)$ 4.68. $y = x|x|$

Задания 4.11. Исследовать на экстремумы функции:

4.69. $y = (1 - x^2)^3$ 4.70. $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$

4.71. $y = x\sqrt{1-x^2}$ 4.72. $y = sin^2x$

Задания 4.12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

4.73. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ *на* $[-4,4]$

4.74. $y = x^2 lnx$ *на* $[1, e]$

4.75. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ *на* $[0,3]$

4.76. $y = x - 2lnx$ *на* $[1, e]$

Задания 4.12. Установить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, найти точки перегиба.

4.77. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

4.78. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

4.79. $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$

4.80. $y = 1 - ln(x^2 - 4)$

4.81 $y = \frac{1}{(x+1)^3}$

4.82 $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$

Задания 4.13. Провести полное исследование и построить график функции:

4.83. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$ 4.84. $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$ 4.85. $y = \frac{(x+1)^3}{x-2}$

4.86. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ 4.87. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ 4.88. $y = (x-3)\sqrt{x}$

4.89. $y = x^2e^{1/x}$ 4.90. $y = x + 2arctgx$ 4.91. $y = e^x sinx$

V. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 5.1. Понятие функции нескольких переменных

При решении различных практических задач мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда исследуемая величина зависит не от одной, а сразу от нескольких независимых величин. Например, объем цилиндра, как известно, определяемый формулой $V = \pi R^2 H$, зависит как от радиуса основания R, так и от высоты H.

Давление, температура и объем газа связаны формулой Клайперона $PV = RT$ поэтому, можно сказать, что давление $P = R\dfrac{T}{V}$ зависит как от температуры, так и от объема газа.

Введем общие определения функции двух переменных.

<u>Определение:</u> Пусть нам задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Говорят, что на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$, если известен закон, по которому каждой паре (x, y), принадлежащей D, поставлено в соответствие некоторое число z.

Множество D называется областью определения функции $z = f(x, y)$.

Множество всех вещественных значений, которые может принимать z называется множеством значений функции $f(x, y)$.

Графически область определения функции представляет собой некоторую область на плоскости XOY. Множество значений $f(x, y)$ представляет собой поверхность $z = f(x, y)$ в трехмерном пространстве.

Пример 5.1. *Найти и изобразить область определения функции* $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. *Указать, что является множеством ее значений.*

Решение: Область допустимых значений (x, y) определим из условия, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным
$R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Следовательно, областью определения указанной функции является круг $x^2 + y^2 \leq R$.

Чтобы указать вид области значений z, возведем обе части равенства, задающего z в квадрат, учитывая условие $z \geq 0$. Получаем $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$ или $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$.

Таким образом мы видим, что все значения функции лежат на верхней полусфере радиусом R с центром в начале координат.

Область определения функции может не совпадать (быть уже) с естественной областью определения. Например, в приведенном выше примере, связанном с объемом цилиндра естественной областью определения функции $V(R, H) = \pi R^2 H$ является вся плоскость (R, H). Однако, исходя из смысла переменных R и H (радиус и высота), областью определения переменных R и H является часть плоскости
$$\begin{cases} R > 0 \\ H > 0 \end{cases}.$$

Функция большего числа переменных определена аналогично.

Пример 5.2. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$.

Здесь w - функция четырех независимых переменных (x, y, z, u), определенная при значениях этих переменных, удовлетворяющих соотношению

$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geq 0$.

§ 5.2. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть в некоторой области D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем некоторую произвольную точку (x_0, y_0). Придадим переменной x некоторое приращение Δx, оставляя y постоянным. При этом значение z функции $z = f(x, y)$ измениться на величину

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{5.1}$$

Изменение функции $f(x, y)$, связанное с изменением переменной x при фиксированном значении y, определенное формулой (5.1) называется частным приращением функции z по x.

Определение: Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x в точке (x_0, y_0) называется предел отношения частного приращения функции по x к приращению переменной x, если он существует и конечен:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \tag{5.2}$$

Предел (5.2) характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной x.

Помимо обозначения, приведенного в (5.2) для частной производной, также используются обозначения $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$.

Частное приращение и частная производная по переменной y определяются аналогичным образом:

$$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) \tag{5.3}$$

и

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \qquad (5.4)$$

Из отношений (5.2) и (5.4) следует, что при нахождении частной производной по одной из переменных пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все остальные переменные постоянными.

Пример 5.3. *Найти частные производные функций*

а) $z = \ln\left(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)$

б) $u = \operatorname{tg}(xyz) \cdot y^{xz}$.

Решение:

а) Считая y постоянной, а следовательно, и $\sqrt{y} = const$ находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\right)'_x = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)'_x = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cdot \cos\frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)'_x =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Считая x постоянной, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\right)'_y = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}\right)'_y = \frac{1}{\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}} \cdot \cos\frac{x+a}{\sqrt{y}} \cdot \left((x+a)^{y^{-1/2}}\right)'_y =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}(x+a)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{y^{3/2}} = -\frac{(x+a)}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$$

б) Считая y и z постоянными, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\mathrm{tg}(xyz)y^{xz}\right)'_x=\left(\mathrm{tg}(xyz)\right)'_x\cdot y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)\left(y^{xz}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(xyz)}(xyz)'_x\cdot y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)\cdot y^{xz}\ln y(xz)'_x=$$

$$=\frac{yz}{\cos^2(xyz)}y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)z\cdot y^{xz}\ln y=y^{xz}z\left(\frac{y}{\cos^2(xyz)}+\mathrm{tg}(xyz)\ln y\right)$$

Считая x и z постоянными, находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\mathrm{tg}(xyz)y^{xz}\right)'_y=\left(\mathrm{tg}(xyz)\right)'_y\cdot y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)\left(y^{xz}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(xyz)}(xyz)'_y\cdot y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)\cdot xzy^{xz-1}=xzy^{xz}\left(\frac{1}{\cos^2(xyz)}+\frac{1}{y}\mathrm{tg}(xyz)\right)$$

Считая x, y постоянными, находим

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\mathrm{tg}(xyz)y^{xz}\right)'_x=\frac{1}{\cos^2(xyz)}(xyz)'_z\,y^{xz}+\mathrm{tg}(xyz)y^{xz}\ln y\cdot(xz)'_z=$$

$$=xy^{xz}\left(\frac{y}{\cos^2(xyz)}+\mathrm{tg}(xyz)\ln y\right)$$

Ответ: а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{ctg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{(x+a)}{2y\sqrt{y}}\mathrm{ctg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=zy^{xz}\left(\dfrac{y}{\cos^2(xyz)}+\mathrm{tg}(xyz)\ln y\right)$;

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xzy^{xz}\left(\dfrac{1}{\cos^2(xyz)}+\dfrac{1}{y}\mathrm{tg}(xyz)\right)$;

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy^{xz}\left(\dfrac{y}{\cos^2(xyz)}+\mathrm{tg}(xyz)\ln y\right)$.

§ 5.3. Дифференциальная функция нескольких переменных

Определение: Полным приращением функции двух переменных $z=f(x,y)$ в точке $P(x,y)$ называется разность

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{5.5}$$

где $\Delta x, \Delta y$ - произвольные приращения переменных x и y.
Если функция $z = f(x, y)$ является дифференцируемой в точке $P(x, y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \qquad (5.6)$$

где α_1, α_2 - бесконечно малые при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Определение: Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений Δx и Δy.

Из определения следует, что полный дифференциал dz может быть найден по формуле

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \qquad (5.7)$$

Пример 5.4. *Найти полный дифференциал функции* $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

Решение: Найдем сначала частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)'_y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Таким образом, согласно (5.7) получаем

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

Ответ: $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}dy$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на приближенном равенстве $\Delta z \approx dz$ или

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_x(x_0, y_0)\Delta y \qquad (5.8)$$

Пример 5.5. *Вычислить приближенно* $(1{,}04)^{2{,}02}$.

Решение:

Рассмотрим функцию двух переменных

$z(x, y) = x^y$.

Заметим, что $(1{,}04)^{2{,}02}$ есть частное значение функции z в точке $P_1(1{,}04; 2{,}02)$. Приняв за начальную точку $P_0(1; 2)$, имеем $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$; $\Delta y = 2{,}02 - 2 = 0{,}02$.

Найдем частные производные

z'_x и z'_y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy)'_x = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xy)'_y = x^y \ln x$$

Найдем частные значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $P_0(1; 2)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = 1^2 \ln 1 = 0$$

Воспользовавшись формулой (5.8), окончательно получаем:

$(1{,}04)^{2{,}02} \approx 1^2 + 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}02 = 1{,}08$

Ответ: $(1{,}04)^{2{,}02} \approx 1{,}08$.

§ 5.4. Производные сложных функций

Пусть задана $z = f(x, y)$, где x и y, в свою очередь, являются функциями от переменной t. Тогда $z(x, y) = z(x(t), y(t))$ и ее производная по t может быть найдена по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{5.9}$$

В частном случае, пусть $y=y(x)$, тогда полная производная $\frac{dz}{dx}$ равна

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{5.10}$$

Пример 5.6. *Найти* $\frac{dz}{dt}$*, если* $z=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$*, где* $x=3t^2$*,* $y=\sqrt{t^2+1}$.

Решение:

Для вычисления $\frac{dz}{dt}$ необходимо воспользоваться формулой (5.9). Вычислим, предварительно, необходимые производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)_x^{/}=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)_x^{/}=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)_x^{/}=\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)_y^{/}=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\left(\sin\frac{x}{\sqrt{y}}\right)_y^{/}=\frac{1}{\sin\frac{x}{\sqrt{y}}}\cos\frac{x}{\sqrt{y}}\left(xy^{-1/2}\right)_y^{/}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot x\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-3/2}=-\frac{x}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(3t^2\right)'=6t\,;\ \ \frac{dy}{dt}=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\left(t^2+1\right)'=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

В соответствии с (5.9) получаем:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot 6t+\frac{-x}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Подставив в полученное выражение вместо x и y соответственно $3t^2$ и $\sqrt{t^2+1}$, окончательно получаем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6t}{\sqrt[4]{t^2+1}}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}} - \frac{3t^2}{2\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt[4]{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}} =$$
$$= \frac{3t\left(3t^2+4\right)}{2\cdot\sqrt[4]{t^2+1}\left(t^2+1\right)}\operatorname{ctg}\frac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}$$

<u>Ответ:</u> $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3t\left(3t^2+4\right)}{2\cdot\sqrt[4]{t^2+1}\left(t^2+1\right)}\operatorname{ctg}\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}$.

В общем случае, переменные x и y могут являться функциями от нескольких новых переменных, например, $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$. Тогда $z = f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v))$ является сложной функцией от переменных u и v. В этом случае ее частные производные по u и v находят по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (5.11)$$

Пример 5.7. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, *где* $x = u\sin v$; $y = v\cos u$. *Найти частные производные* $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Решение:

Найдем предварительно $\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}; \dfrac{\partial x}{\partial u}; \dfrac{\partial x}{\partial v}; \dfrac{\partial y}{\partial u}; \dfrac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u\sin v)'_u = \sin v \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = (u\sin v)'_v = u\cos v$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\left(v\cos u\right)'_u=-v\sin u \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\left(v\cos u\right)'_v=\cos u$$

Тогда согласно (5.11) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\sin v+\frac{-x}{x^2+y^2}(-v)\sin u=\frac{v\sin v\cos u+v\cdot u\sin v\sin u}{u^2\sin^2 v+v^2\sin^2 u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot u\cos v+\frac{-x}{x^2+y^2}\cos u=\frac{uv\cos u\cos v-u\sin v\cos u}{u^2\sin^2 v+v^2\sin^2 u}$$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{v\sin v\cos u+v\cdot u\sin v\sin u}{u^2\sin^2 v+v^2\sin^2 u}$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{uv\cos u\cos v-u\sin v\cos u}{u^2\sin^2 v+v^2\sin^2 u}$

§ 5.5. Производная функции заданной неявно

Функция $z=z(x,y)$ независимых переменных x и y называется заданной неявно, если она задана уравнением $F(x,y,z)=0$, не разрешенным относительно z.

В этом случае ее частные производные находят по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z} \qquad (5.12)$$

Если функция одной переменной $y=y(x)$ задана неявным уравнением $F(x,y)=0$, то справедлива формула:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (5.13)$$

Пример 5.8. *Найти* y'_x, *если* $(xy-\alpha)^2+(xy-\beta)^2=\gamma^2$.

Решение:

Рассмотрим $F(x,y)=(xy-\alpha)^2+(xy-\beta)^2-\gamma^2=0$

Тогда $F'_x=2(xy-\alpha)\cdot y+2(xy-\beta)\cdot y=2y(2xy-\alpha-\beta)$

$F'_y=2(xy-\alpha)\cdot x+2(xy-\beta)\cdot x=2x(2xy-\alpha-\beta)$

Тогда, согласно (2.13)

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} - \frac{2y(2xy-\alpha-\beta)}{2x(2xy-\alpha-\beta)} = -\frac{y}{x}.$$

Ответ: $\quad y'_x = -\dfrac{y}{x}.$

§ 5.6. Частные производные высших порядков

Определение: Частными производными второго порядка от функции двух переменных $z = f(x, y)$, заданной в некоторой области D, называется производная от ее частных производных первого порядка (если они существуют).

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy}
\end{gathered} \qquad (5.14)$$

Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным называются смешанными производными. Таковыми, в частности, являются последние две производные (5.14).

Справедлива теорема: Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет смешанные производные $z''_{xy}(x, y)$ и $z''_{yx}(x, y)$ и эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0), в этой точке смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} равны между собой.

Если функция $z = f(x, y)$ в рассматриваемой точке (x_0, y_0) имеет непрерывные частные производные второго порядка, причем x и y - независимые переменные, то дифференциал второго порядка $d^2 z$ находят по формуле:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{5.15}$$

Пример 5.9. *Показать, что функция* $z = e^{-kx}\sin y$ *удовлетворяет уравнению* $\frac{\partial z}{\partial x} = k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{-kx}\sin y\right)'_x = \left(e^{-kx}\right)'_x \sin y = -ke^{-kx}\sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{-kx}\sin y\right)'_y = e^{-kx}(\sin y)' = e^{-kx}\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(e^{-kx}\sin y\right)'_y = e^{-kx}(\cos y)' = -e^{-kx}\sin y$$

Подставив найденные выражения для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в заданное уравнение, получаем

$$-ke^{-kx}\sin y = k\left(-e^{-kx}\sin y\right).$$

Таким образом, мы показали функция $z = e^{-kx}\sin y$ удовлетворяет указанному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

§ 5.7. Экстремумы функции двух переменных

Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D. Точка $(x_0, y_0) \in D$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если для любых (x, y) в некоторой окрестности (x_0, y_0) выполняется неравенство

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \tag{5.16}$$

Точка $(x_0, y_0) \in D$ называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$, если для любых (x, y) из некоторой окрестности (x_0, y_0) выполняется неравенство

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0) \tag{5.17}$$

Необходимое условие экстремума функции двух переменных: Если $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные обращаются в ноль, либо хотя бы одна из них не существует.

Точки, в которых обе частные производные одновременно равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются критическими.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Сформулируем достаточные условия экстремума.

Пусть $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$; $f''_{yy}(x_0,y_0)=B$; $f''_{xy}(x_0,y_0)=C$.

Тогда, если

1) $AB-C^2<0$, то в точке (x_0,y_0) $f(x,y)$ экстремума не имеет.
2) $AB-C^2>0$, причем $A>0$, то точка (x_0,y_0) - точка минимума функции $f(x,y)$.
3) $AB-C^2>0$, причем $A<0$, то точка (x_0,y_0) - точка максимума функции $f(x,y)$.

Таким образом, исследование функции $f(x,y)$ на экстремум следует проводить по следующей схеме:

1) Найти первые частные производные f'_x и f'_y.

   Решить систему

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \tag{5.18}$$

   Все полученные решения системы являются критическими точками для $f(x,y)$ и только в них может быть экстремум.

2) Для каждого решения системы находим

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2};\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \tag{5.19}$$

   и строим

$$\boldsymbol{\Delta = AB - C^2} \tag{5.20}$$

Если Δ окажется <0, то в исследуемой точке экстремума нет.

Если $\Delta>0$, при этом $A<0$, то исследуемая точка – точка максимума для $f(x,y)$.

Если $\Delta>0$, $A>0$, то исследуемая точка – точка минимума для $f(x,y)$.

Пример 5.10. *Исследовать на локальный экстремум функцию*

$$z=-\frac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1.$$

Решение: 1) Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1 \right)'_x = -2x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1 \right)'_y = 2x - 2y$$

Найдем критические точки, приравняв полученные частные производные нулю

$$\begin{cases} -2x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Решая систему, находим критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

2) Исследуем каждую точку.

Найдем вторые производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-2x^2 + 2y\right)'_x = -4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x - 2y\right)'_y = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-2x^2 + 2y\right)'_y = 2$$

Рассмотрим точку $M_1(0;0)$

Для нее

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0;0)} = 0$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0;0)} = -2$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0;0)} = 2$$

Найдем значение Δ по формуле (5.20)

$$\Delta = 0 \cdot (-2) - 2^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

Рассмотрим точку $M_2(1;1)$.

Найдем

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;1)} = -4 \qquad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1;1)} = -2 \qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1;1)} = 2$$

Тогда
$\Delta = (-4)\cdot(-2) - 2^2 = 4 > 0$.

В точке $M_2(1;1)$ экстремум есть. Число $A = -4 < 0$, следовательно, в данной точке функция достигает локального максимума
$z_{\max} = z(1;1) = -\dfrac{2}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1\cdot 1 - 1^2 - 1 = -\dfrac{2}{3}$.

Ответ: локальный максимум функции $z_{\max} = -\dfrac{2}{3}$ достигается в точке $(1;1)$.

§ 5.8. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

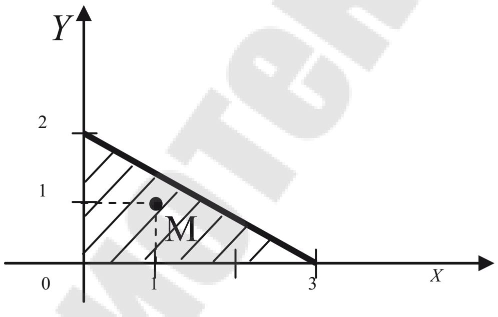
Своего наибольшего и наименьшего значения функция двух переменных может достигнуть либо в точках экстремума внутри области, либо на границе области. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции необходимо:

а) Найти все критические точки, лежащие внутри данной области и вычислить значение в них исследуемой функции.

б) Исследовать поведение функции на границе области. Для этого уравнения границ области необходимо подставить в функцию и исследовать полученные функции одной переменной. Найти численные значения z в найденных точках экстремума.

в) Сравнивая все полученные численные значения z выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 2.11. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции*
$$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$$
в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.



Решение:

Заданная область изображена на рисунке. Найдем критические точки, лежащие внутри области. Для этого найдем частные производные
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y)'_x = 2x + 4y - 6,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y)'_y = 4x - 2y - 2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Получаем единственное решение $M(1;1)$. Точка M лежит внутри заданной области

$z_1(1;1) = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -4$

Исследуем поведение функции на границах

а) $x = 0 \quad z = -y^2 - 2y \quad z' = -2y - 2 \quad z' = 0$ при $y = -1$

Точка $(0;-1)$ не лежит на границе области.

б) $y = 0 \quad z = x^2 - 6x \quad z' = 2x - 6 \quad z' = 0$ при $x = 3$

$z_2(3;0) = 9 - 18 = -9$

в) $2x + 3y - 6 = 0 \quad y = 2 - \dfrac{2}{3x}$

$$z = x^2 + 4x\left(2 - \frac{3}{2}x\right) - \left(2 - \frac{2}{3}x\right)^2 - 6x - 2\left(2 - \frac{2}{3}x\right) \qquad z = -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8$$

$$z' = -\frac{38}{9}x + 6 \qquad z' = 0 \text{ при } x = \frac{27}{19}$$

$$z_3\left(\frac{27}{19}; 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{19}\right) = -\frac{19}{9}\left(\frac{27}{19}\right)^2 + 6 \cdot \frac{27}{19} - 8 = -\frac{71}{19}.$$

Кроме того найдем значение z на границах отрезков в точках $(0;0)$ и $(0;2)$.

$z_4(0;0) = 0 \qquad z_5(0;2) = -8$

Сравнивая числа z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 приходим к выводу, что наибольшее значение функции достигается в точке $(0;0)$ $z_{max} = 0$, а наименьшее в точке $(3;0)$ $z_{\min} = -9$.

<u>Ответ:</u> $z_{\max} = z(0;0) = 0$; $z_{\min} = z(3;0) = -9$.

Задания для самостоятельного решения

Задания 5.1. Найти производные функции:

5.1 $z = ln(y^2 - e^{-x})$ 5.2 $z = arctg(xy^2)$ 5.3 $z = sin\left(\frac{x}{y}\right)$

5.4 $z = cos\left(\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)$ 5.5 $z = \log_2 \frac{y+x}{x}$ 5.6 $tg\left(yx^2 - \sqrt[3]{y}\right)$

Задания 5.2. Найти полный дифференциал функции:

5.7 $z = ctg\left(x - \sqrt{xy}\right)$ 5.8 $z = 3^{\sqrt[3]{2x-3y}}$ 5.9 $z = 2^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

5.10 $z = 4x^2y^3 - 3xy$ 5.11 $z = \sqrt[3]{xy^2 - 3yx^3}$ 5.12 $z = \sqrt[5]{ln\frac{y}{x}}$

Задания 5.3. Найти производные сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$:

5.13 $u = e^{x-2y}$, $x = sin\, t$, $y = t^3$.
5.14 $u = ln(e^x + e^{-y})$, $x = t^2$, $y = t^3$.
5.15 $u = y^x$, $x = ln(t-1)$, $y = e^{t/2}$.

Задания 5.4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$, ограниченной заданными линиями.

5.16 $z = 3x + y - xy$, $y = x, y = 4, x = 0$.
5.17 $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
5.18 $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $x = 0, x + y = -2, y = 0$.
5.19 $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 6.1. Непосредственное интегрирование

<u>Определение:</u> Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если

a) $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$

b) $F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a;b)$.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то и любая функция $F_1(x) = F(x) + C$, также является первообразной для $f(x)$ на $(a;b)$.

<u>*Определение:*</u> Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом интервале.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$. Приведенное выше определение неопределенного интеграла обычно записывают в виде формулы:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.1}$$

где $F(x)$ - любая из первообразных для функции $f(x)$ на $(a;b)$;

C - произвольная постоянная.

Операция нахождения всех первообразных функций $f(x)$ называется интегрированием этой функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$.

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Операция интегрирования является обратной по отношению к операции дифференцирования. Поэтому, используя таблицу производных элементарных функций, составим таблицу интегралов.

Таблица основных неопределенных интегралов:

I. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$.

III. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

IV. $\int e^x dx = e^x + C$.

V. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

VI. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VII. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$.

VIII. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$.

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x) + C$.

XII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

Метод непосредственного интегрирования состоит в сведении заданного интеграла к сумме или разности табличных интегралов путем тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример 6.1. *Найти интеграл* $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx$.

Решение: Возведем числитель подынтегральной функции в квадрат: $\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2 = 4 - 4\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. Разделим полученное выражение на x^3:

$$\frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} = \frac{4 - 4\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3} = 4x^{-3} - 4x^{-8/3} + x^{-7/3}.$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = \int\left(4x^{-3} - 4x^{-8/3} + x^{-7/3}\right)dx.$$

Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\int\left(4x^{-3} - 4x^{-8/3} + x^{-7/3}\right)dx = 4\int x^{-3}dx - 4\int x^{-8/3}dx + \int x^{-7/3}dx.$$

Полученные интегралы являются табличными (интеграл I), поэтому, получаем:

$$4\int x^{-3}dx - 4\int x^{-8/3}dx + \int x^{-7/3}dx = 4\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - 4\frac{x^{-8/3+1}}{-8/3+1} + \frac{x^{-7/3+1}}{-7/3+1} + C =$$

$$= -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x^{5/3}} - \frac{3}{4}\frac{1}{x^{4/3}} + C = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C$$

Таким образом:

$$\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C.$$

Правильность наших вычислений может быть проверена путем дифференцирования результата:

$$\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C\right)' = -2\left(\frac{1}{x^2}\right)' + \frac{12}{5}\left(\frac{1}{x^{5/3}}\right)' - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right)' =$$

$$= \frac{4}{x^3} + \frac{12}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-5/3-1} - \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-4/3-1} = \frac{4}{x^3} - 4x^{-8/3} + x^{-7/3} = \frac{4-4x^{1/3}+x^{2/3}}{x^3} =$$

$$= \frac{\left(2-x^{1/3}\right)^2}{x^3} = \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}$$

В результате дифференцирования получили подынтегральное выражение. Следовательно, заданный интеграл вычислен верно.

<u>Ответ:</u> $$\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{12}{5x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[3]{x}} + C.$$

§ 6.2. Метод занесения под знак дифференциала

Метод занесения под знак дифференциала основан на определении дифференциала функции одной переменной:

$$f'(x)dx = df(x) \tag{6.2}$$

и свойстве инвариантности дифференциала первого порядка: если $y = f(x)$, а $x = g(z)$, то

$$dy = f'(x)dx = f'(g(z))g'(z)dz \tag{6.3}$$

В силу этого свойства, таблица интегралов оказывается справедливой, независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Существуют стандартные ситуации, в которых рекомендуется использовать метод занесения под знак дифференциала. Некоторые из них приведены ниже:

$$\int f(x^n)x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int f(x^n)dx^n \qquad (6.4)$$

$$\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x \qquad (6.5)$$

$$\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d\sin x \qquad (6.6)$$

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d\ln x \qquad (6.7)$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(\arcsin x)d\arcsin x \qquad (6.8)$$

$$\int f(\mathrm{arctg}x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(\mathrm{arctg}x)d\,\mathrm{arctg}x \qquad (6.9)$$

$$\int f(\mathrm{tg}\,x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\mathrm{tg}\,x)d\,\mathrm{tg}\,x \qquad (6.10)$$

$$\int f(\mathrm{ctg}x)\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int f(\mathrm{ctg}x)d\,\mathrm{ctg}x \qquad (6.11)$$

Полезно заметить, что $d(ax+b) = adx$, поэтому

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) \qquad (6.12)$$

Пример 6.2. *Найти* $\int x^2\cos(x^3+6)dx$.

Решение: Применим метод занесения под знак дифференциала, воспользовавшись формулой (6.4):

$$\int \cos(x^3+6)x^2dx = \frac{1}{3}\int\cos(x^3+6)d(x^3) = \{d(x^3) = d(x^3+6)\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\cos(x^3+6)d(x^3+6) = \{\text{табличный интеграл V}\} = \frac{1}{3}\sin(x^3+6)+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}\sin(x^3+6)+C\right)' = \frac{1}{3}(\sin(x^3+6))' = \frac{1}{3}\cos(x^3+6)(x^3+6)' = \frac{1}{3}\cos(x^3+6)\cdot 3x^2 =$$

$$= x^2\cos(x^3+6)$$

Ответ: $\int x^2\cos(x^3+6)dx = \frac{1}{3}\sin(x^3+6)+C$

§ 6.3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной заключается в том, что в интеграле $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную *t*, связанную с прежней переменной соотношением

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \end{aligned} \qquad (6.13)$$

При этом соотношение (6.13) подбирают таким образом, чтобы полученный интеграл $\int f_1(t)dt$ стал табличным или, по крайней мере, был бы ясен способ его нахождения. После вычисления $\int f_1(t)dt$ следует вернуться к исходной переменной, используя соотношение (1.13) или обратное к нему.

Следует помнить, что функция $\varphi(t)$ в (1.13) должна быть строго монотонной, имеющей непрерывную первую производную функцией переменной *t* на некотором промежутке изменения аргумента *t*.

Пример 6.3. *Найти* $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение: Ведем новую переменную *t*: $x = -\ln t$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \left\{ \begin{aligned} x &= -\ln t \\ dx &= -\frac{1}{t}dt \end{aligned} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{e^{-\ln t}+1} = -\int \frac{dt}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)} = -\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= -\int \frac{d(t+1)}{(t+1)} = \{\text{табличный интеграл II}\} = -\ln|t+1| + C = \{t = e^{-x}\} =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{e^{-x}+1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C = x - \ln\left|e^x+1\right| + C$$

<u>Ответ:</u> $\int \frac{dx}{e^x+1} = x - \ln\left|e^x+1\right| + C$

Следует заметить, что часто удобно вводить не замену переменной по формуле (6.13), а делать замену вида

$$t = \psi(x) \qquad (6.14)$$

При этом для нахождения *dx* необходимо выразить *x* через *t* и далее действовать согласно приведенной выше схеме.

Пример 6.4. *Найти* $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение: Для вычисления данного интеграла необходимо ввести новую переменную таким образом, чтобы избавиться от иррациональности в подынтегральной функции. Поэтому вводим новую переменную

$$t=\sqrt{x+1},\quad \text{тогда}\ x=t^2-1,\quad dx=2tdt.$$

Таким образом:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int \frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t}=2\int\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{2t}{3}\left(t^2-3\right)+C=$$

$$=\frac{2\sqrt{x+1}}{3}(x+1-3)+C=\frac{2\sqrt{x+1}}{3}(x-2)+C$$

<u>Ответ:</u> $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2)+C$

<u>Тригонометрические и гиперболические подстановки.</u>

Часто для вычисления интегралов, содержащих радикалы вида $\sqrt{a^2\pm x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ применяются тригонометрические и гиперболические подстановки.

1) Если интеграл содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, то во многих случаях нахождение его существенно упрощается заменой:

$$x=a\sin t \tag{6.15}$$

Пример 6.5. *Найти* $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение: Сделаем тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$, тогда

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left\{\begin{matrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right\}=\int \frac{a^2\sin^2 ta\cos tdt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=a^3\int \frac{\sin^2 t\cos tdt}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}=$$

$$=a^2\int \frac{\sin^2 t\cos tdt}{\cos t}=a^2\int \sin^2 tdt$$

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся формулой понижения степени:

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$$

Тогда

$$a^2\int \sin^2 t dt = a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt - \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

Для того, чтобы вернуться к исходной переменной, необходимо провести следующие преобразования:

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\,.$$

Учитывая, что $x = a\sin t$; $\sin t = \frac{x}{a}$; $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$, окончательно получаем:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

<u>Ответ:</u> $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагают

$$x = \frac{a}{\cos t} \tag{6.16}$$

Следует отметить, что часто, полученный в результате указанной подстановки интеграл, в свою очередь, оказывается довольно сложным. В таком случае можно вместо подстановки (6.16) воспользоваться гиперболической подстановкой

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t \tag{6.17}$$

При использовании гиперболических подстановок надлежит помнить, что

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 \tag{6.18}$$

$$(\mathrm{ch}\,t)' = \mathrm{sh}\,t \qquad (\mathrm{sh}\,t)' = \mathrm{ch}\,t \tag{6.19}$$

3) Интеграл, содержащий радикал $\sqrt{x^2+a^2}$ может быть упрощен путем замен

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t \tag{6.20}$$

или

$$x = a\,\mathrm{sh}\,t \tag{6.21}$$

§ 6.4. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \qquad (6.22)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции.

Формула (6.22), называемая формулой интегрирования по частям, позволяет перейти от более сложного интеграла $\int u dv$ к более простому $\int v du$.

К интегралам, которые находят методом интегрирования по частям, относятся интегралы следующих видов:

1) $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, где $P_n(x)$ - полином n-ой степени от x.

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $P_n(x)$, а за $dv(x)$ - $\cos\alpha x dx$ или $\sin\alpha x dx$.

Тогда $du = (P_n(x))' dx = P_{n-1}(x)dx$, $P_{n-1}(x)dx$ - полином степени на единицу меньшей, чем исходный.

Таким образом,

$$\int P_n(x)\cos\alpha x dx = \left\{ \begin{matrix} u = P_n(x) & du = P_{n-1}(x)dx \\ dv = \cos\alpha x dx & v = \dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha x dx \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} P_n(x)\sin\alpha x - \frac{1}{\alpha}\int P_{n-1}(x)\cos\alpha x dx$$

Таким образом, в результате применения формулы (6.22) мы пришли к интегралу более простому по отношению к исходному. Следует подчеркнуть, что формула интегрирования по частям может быть применена несколько раз, до тех пор, пока мы не придем к $P_0(x)$, т.е. не придем к интегралу $\int \sin\alpha x dx$ или $\int \cos\alpha x dx$.

2) $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$, где $P_n(x)$ - полином степени n от x.

В данном случае за $u(x)$ обозначают $P_n(x)$, за $dv(x)$- $e^{\alpha x} dx$. Формула интегрирования по частям применяется до тех пор, пока не останется $\int e^{\alpha x} dx$.

3) $\int P_n(x)\ln x dx$; $\int P_n(x)\mathrm{arctg} x dx$; $\int P_n(x)\arcsin x dx$

В данном случае за $u(x)$ следует выбирать $\ln x$; $\operatorname{arctg} x$; $\arcsin x$, за $dv(x)$- $P_n(x)dx$.

Тогда $du = \frac{1}{x}dx,\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ du = \frac{dx}{1+x^2}dx,\ v = P_{n+1}(x)$ и в результате применения формулы интегрирования по частям мы приходим к интегралам, содержащим только рациональные функции и радикалы.

4) Интегралы вида $\int \sin \alpha x e^{ax} dx,\quad \int \cos \alpha x e^{bx} dx$ вычисляются с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям и последующего решения полученного уравнения относительно исходного интеграла. Следует отметить, что в данном случае безразлично, что изначально принимать за $u(x)$, а что за $dv(x)$.

Пример 6.6. *Найти* $\int (x^2+3x-2)\cos 3x dx$

Решение

$$\int (x^2+3x-2)\cos 3x dx = \left\{ \begin{matrix} u = (x^2+3x-2) & du = (2x+3)dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right\} =$$

$$= (x^2+3x-2)\frac{1}{3}\sin 3x - \int (2x+3)\frac{1}{3}\sin 3x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \frac{1}{3}(2x+3) & du = \frac{2}{3}dx \\ dv = \sin 3x dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+3x-2)\sin 3x - \left(-\frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x - \int \left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3x \frac{2}{3}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+3x-2)\sin 3x + \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x - \frac{2}{9}\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}(x^2+3x-2)\sin 3x +$$

$$+ \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C = \frac{1}{27}(9x^2+27x-18-2)\sin 3x +$$

$$+ \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x + C = \frac{1}{27}(9x^2+27x-20)\sin 3x + \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x + C$$

Ответ:

$$\int (x^2+3x-2)\cos 3x dx = \frac{1}{27}(9x^2+27x-20)\sin 3x + \frac{1}{9}(2x+3)\cos 3x + C$$

Пример 6.7. *Найти* $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{\frac{x^2}{2} dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$$

Для вычисления полученного интеграла, преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Таким образом,

$$\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

<u>Ответ:</u> $\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$.

§ 6.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Вычисление интегралов вида

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \tag{6.23}$$

состоит в сведении данного интеграла к одному из табличных интегралов вида I, II или VII в зависимости от соотношения коэффициентов p и q.

Возможны следующие случаи:

I. $p^2 - 4q > 0$

В этом случае квадратный трехчлен имеет два действительных корня

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{6.24}$$

и $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Подынтегральную функцию в (6.23) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_2)} \tag{6.25}$$

Числа A и B должны быть подобраны таким образом, чтобы выражение (6.25) было тождеством.

Чтобы найти A и B приведем правую часть равенства (6.25) к общему знаменателю

$$\frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Приравняем числитель полученной дроби к 1.

$$A(x - x_2) + B(x - x_1) = 1 \tag{6.26}$$

Т.к. выражение должно быть тождественным (т.е. справедливым для всех x) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях (6.26)

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A + B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2} \qquad B = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{-1}{x_2 - x_1} \int \frac{dx}{x - x_1} + \frac{1}{x_2 - x_1} \int \frac{dx}{x - x_2}$$

Полученные интегралы - табличные типа II, поэтому получаем

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x - x_2}{x - x_1} + C \qquad (6.27)$$

где $x_{1,2}$ - корни квадратного трехчлена, входящего в искомый интеграл.

II. $p^2 - 4q = 0$

В этом случае $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ и искомый интеграл представляет собой табличный интеграл типа I с $\alpha = -2$.

Таким образом, в случае $p^2 = 4q$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + px = q} = -\frac{1}{x + p/2} + C \qquad (6.28)$$

III. $p^2 - 4q < 0$

В данном случае квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Преобразуем его, выделив полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

т.к. $p^2 - 4q < 0$, то $a^2 = \frac{4q - p^2}{4} > 0$, поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q^2} = \{\text{согласно } (6.4\} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} =$$

$$\{\text{табличный интеграл VII }\} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C$$

Таким образом, в случае $p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \qquad (6.29)$$

Пример 6.8. *Найти* $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$.

Решение: Найдем $p^2 - 4q = 25 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$.

Найдем корни $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$ $\quad x_1 = -3; \quad x_2 = -2$, поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x+3)(x+2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+3)}{(x+3)(x+2)}$$

Приравняем числитель полученной дроби числителю исходной:

$$A(x+2) + B(x+2) = 1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases}$$

Решаем данную систему:

$A = -1 \quad B = 1$

Таким образом:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$$

<u>Ответ:</u> $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$

Для вычисления интеграла вида

$$I = \int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx \tag{6.30}$$

необходимо выделить производную знаменателя в числителе подынтегральной функции:

$$\left(x^2 + px + q\right)' = 2x + p$$

$$mx+n=\frac{m}{2}(2x+p)-\frac{mp}{2}+n$$

Тогда интеграл (6.30) преобразуется в сумму двух интегралов

$$I=\frac{m}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=I_1+I_2 \qquad (6.31)$$

Интеграл I_1 найдем методом занесения под знак дифференциала $(2x+p)dx=d\left(x^2+px+q\right)$, интеграл I_2 найдем по одной из формул (6.27)-(6.29) в зависимости от соотношения коэффициентов p и q.

Таким образом,

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} \qquad (6.32)$$

Пример 6.9. *Найти* $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

Решение: Найдем $\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$. Выделим $2x-4$ в числителе подынтегральной функции: $3x-2=\frac{3}{2}(2x-4)+6-2=\frac{3}{2}(2x-4)+4$.

Таким образом

$$\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+4\int\frac{dx}{x^2-4x+5}=\frac{3}{2}I_1+4I_2$$

$$I_1=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{d\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5}=\ln\left|x^2-4x+5\right|+C_1$$

$I_2=\int\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int\frac{dx}{x^2-4x+4+1}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=$ {табличный интеграл типа VII} $=\operatorname{arctg}(x-2)+C_2$

<u>Ответ:</u> $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+4\operatorname{arctg}(x-2)+C$

§ 6.6. Интегрирование рациональных функций

Функция, заданная в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(m)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + .. + a_{m-1}x + b_m} \qquad \begin{matrix} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0 \end{matrix} \tag{6.33}$$

называется рациональной функцией.

Если $n < m$, то дробь правильная, при $n \geq m$ - дробь неправильная.

I. Метод интегрирования правильной рациональной дроби состоит в разложении этой дроби на простейшие. При этом следует пользоваться следующим правилом:

а) каждому простому действительному корню a знаменателя $Q_m(x)$ соответствует одно слагаемое в разложении:

$$\frac{A}{x-a} \tag{6.34}$$

б) каждому действительному корню b кратности k знаменателя $Q_m(x)$ соответствует сумма k - слагаемых:

$$\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} \tag{6.35}$$

в) каждой паре простых комплексных корней $(\alpha \pm i\beta)$ знаменателя $Q_m(x)$ соответствует слагаемое:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad \left(a \pm ib \text{ - корни } x^2+px+q\right) \tag{6.36}$$

г) каждой паре комплексных корней $(\gamma \pm i\tau)$ кратности l знаменателя $Q_m(x)$ соответствует сумма слагаемых:

$$\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{C_lx+D_l}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^l} \tag{6.37}$$

$$\left(\gamma \pm i\tau \text{ - корни } x^2+p_1x+q_1\right)$$

Таким образом

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)^k\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+p_1x+q_1\right)^l}=\frac{A}{x-a}+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+ \qquad (6.38)$$

$$+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{C_lx+D_l}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^l}$$

Числа $A, B_1, B_2, \ldots, B_k, M, N, C_1, \ldots, C_l, D_1, \ldots, D_l$ могут быть найдены с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо:

1) привести к общему знаменателю сумму дробей, стоящую в правой части (6.38);
2) приравнять числитель полученной дроби к $P_n(x)$;
3) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в полученном в п.2 равенстве;
4) решить полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных $A, B_1, B_2\ldots$

Из (6.38) видно, что вычисление интеграла от правильной рациональной функции сводится к вычислению одного из интегралов вида:

а) $\int\frac{dx}{x-a}$;

б) $\int\frac{dx}{(x-b)^k}$;

в) $\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$;

г) $\int\frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)^l}dx$.

Интегралы вида а) и б) являются табличными (с учетом (6.14)) - интегралы типа II и I. Вычисление интеграла вида в) рассмотрено в параграфе 6.5. (формула (6.32)). Интеграл вида г) может быть вычислен с помощью формулы:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{(2k-2)a^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right) \qquad (6.39)$$

позволяющей свести его после k шагов к табличному интегралу типа VII.

II. Интегрирование неправильной рациональной дроби начинается с представления ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби путем деления числителя на знаменатель.

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 6.10. *Найти интеграл* $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

Решение: Подынтегральная функция не является правильной, поэтому предварительно необходимо выделить в ней целую часть

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=\frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int dx+\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=x+\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби, согласно (6.34) и (6.35):

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}$$

Найдем A, B_1, B_2 методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}=\frac{Ax^2+B_1x(x-1)+B_2(x-1)}{x^2(x-1)}$$

Приравниваем числители:

$$x^2+1=Ax^2+B_1x^2-B_1x+B_2x-B_2$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1 = A + B_1 \\ x^1 & 0 = -B_1 + B_2 \\ x^0 & 1 = -B_2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\0\\1\end{array}}\right\}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} A + B_1 = 1 \\ \quad - B_1 + B_2 = 0 \\ \qquad\quad - B_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2 \\ B_1 = -1 \\ B_2 = -1 \end{cases}$$

Подставляем полученные значения A, B_1 и B_2 в разложение:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

<u>Ответ:</u>

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}\,dx = x + \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = x + 2\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C =$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$$

§ 6.7. Интегрирование иррациональных выражений

I. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_l]{x^{m_l}}\right) dx \tag{6.40}$$

сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью замены

$$x = t^k \tag{6.41}$$

где k - наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, ..., n_l.

Пример 6.11. *Найти* $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Решение: Сделаем замену согласно (1.42) $x = t^6$, $dx = 5t^5\,dt$.

Тогда

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \int \frac{t^3}{t^3 - t^2} 6t^5\,dt = \int \frac{t^3}{t^2(t-1)} 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^6}{t-1}\,dt.$$

Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{t^6}{t-1}=\frac{t^6-1+1}{t-1}=\frac{t^6-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}=\frac{(t-1)\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)}{t-1}+\frac{1}{t-1}=$$
$$=t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}$$

Таким образом

$$6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$
$$6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C$$

Возвращаясь к исходной переменной x получаем:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=x+\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{3}{2}x^{2/3}+2x^{1/2}+3x^{1/3}+6x^{1/6}+\ln\left|x^{1/6}-1\right|+C=$$
$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

Ответ: $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$

II. Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\ \sqrt[n_l]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (6.42)$$

рационализируется подстановкой:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k \qquad (6.43)$$

где k - наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2, ..., n_l.

Пример 6.12. *Найти интеграл* $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

Решение: Сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2$.

Найдем $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad dx=\dfrac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$

Тогда

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int\frac{-4t^2dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}$$

Найдем полученный интеграл, разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Mt+N}{1+t^2}=$$
$$=\frac{A\left(t^3+t^2+t+1\right)+B\left(-t^3+t^2-t+1\right)+M\left(t-t^3\right)+N\left(1-t^2\right)}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числителей, получаем:

$$\left|\begin{array}{ll} x^3 & 0=A-B-M \\ x^2 & 1=A+B-N \\ x^1 & 0=A-B+M \\ x^0 & 0=A+B+M \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} M=0 \\ N=-1/2 \\ A=1/4 \\ B=1/4 \end{array}\right.$$

Таким образом

$$-4\int\frac{t^2dt}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}=-4\int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$
$$=\ln|1-t|-\ln|1+t|+2\operatorname{arctg}t+C=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+2\operatorname{arctg}t+C$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем :

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

<u>Ответ:</u> $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

§ 6.8. Интегрирование дифференциального бинома

Выражение

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{6.44}$$

называется дифференциальным биномом.

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \tag{6.45}$$

может быть найден в элементарных функциях только в следующих случаях:

1) p - целое, m, n - произвольные числа;

2) p - нецелое, $\frac{m+1}{n}$ - целое число;

3) p - нецелое, $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число.

Для нахождения интеграла (6.45) в перечисленных выше случаях применяются подстановки, известные как подстановки Чебышева.

1) p - целое. В данном случае интеграл (6.45) является частным случаем $\int R\left(x^m, x^n\right)dx$, нахождение которого рассмотрено в п.1.8. Согласно (1.41) необходимо сделать подстановку

$$x=t^s \tag{6.46}$$

где s - наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n.

2) p - нецелое, пусть $p=\frac{k}{s}$, $\frac{m+1}{n}$ - целое.

Подынтегральная функция в (6.45) рационализируется с помощью подстановки:

$$a+bx^n=t^s \tag{6.47}$$

3) p - нецелое, $p=\frac{k}{s}$, $\frac{m+1}{n}+p$ - целое.

Подынтегральная функция в (6.45) рационализируется с помощью подстановки:

$$ax^{-n}+b=t^s \tag{6.48}$$

Пример 6.13. *Найти* $\int x^5 \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx$.

Решение: Запишем данный интеграл в виде (6.45):

$$\int x^5 \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx = \int x^5 \left(1+x^3\right)^{2/3} dx$$

По условию $p=\dfrac{2}{3}$, $m=5$, $n=3$.

$\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{5+1}{3}=2$ - целое, поэтому для нахождения заданного интеграла сделаем подстановку согласно (6.47): $1+x^3=t^3$

Тогда $x=\left(t^3-1\right)^{1/3}$; $dx=\left(t^3-1\right)^{-2/3} t^2 dt$

Таким образом

$$\int x^5\left(1+x^3\right)^{2/3} dx = \int \left(t^3-1\right)^{5/3}\cdot t^2\left(t^3-1\right)^{-2/3} t^2 dt = \int \left(t^3-1\right)t^4 dt =$$

$$= \int \left(t^7 - t^4\right)dt = \frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{40}\left(5t^3-8\right)+C=\frac{\left(1+x^3\right)^{5/3}}{40}\left(5x^3-3\right)+C$$

Ответ: $\int x^5\left(1+x^3\right)^{2/3} dx = \dfrac{\left(1+x^3\right)^{5/3}}{40}\left(5x^3-3\right)+C$

Пример 6.14. *Найти* $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

Решение: Запишем данный интеграл в виде (6.45)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{1/3} dx$$

Таким образом, видно, что $m=-2$, $n=3$, $p=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3} \qquad \frac{m+1}{n}+p=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0,$$

поэтому сделаем замену согласно (6.48)

$$x^{-3}+1=t^3$$

Тогда $$x=\left(t^3-1\right)^{-1/3}$$

$$dx=-\left(t^3-1\right)^{-4/3}t^2dt$$

$$1+x^3=\frac{t^3}{t^3-1}$$

Подставляя полученные выражения в интеграл, получаем:

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{1/3}dx=-\int\left(t^3-1\right)^{2/3}\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{1/3}\left(t^3-1\right)^{-4/3}t^2dt=-\int\frac{t^3}{t^3-1}dt=$$

$$=-\int\frac{t^3-1+1}{t^3-1}dt=-\int dt-\int\frac{dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=-t-\int\frac{dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Mt+N}{t^2+t+1}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+M\left(t^2-t\right)+N(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых *x* в числителях, получаем

$$\left.\begin{array}{l|l} t^2 & A+M=0 \\ t^1 & A-M+N=0 \\ t^0 & A-N=0 \end{array}\right\}\qquad \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{3} \\ M=-\dfrac{1}{3} \\ N=-\dfrac{2}{3} \end{array}$$

Таким образом

$$\int\frac{dt}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt=\left\{\left(t^2+t+1\right)'=2t+1\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{1}{2}+2}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(t^2+t+1\right)}{t^2+t+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Возвращаясь к исходной переменной *x*, окончательно получаем:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+1}+x}{\sqrt{3}x}+C$$

Ответ:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3+1}+x}{\sqrt{3}x}+C$$

§ 6.9. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегралы вида

$$\int\sin^m x\cos^n x dx \qquad (6.49)$$

находят, применяя различные тригонометрические формулы в зависимости от значений m и n.

1) Хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно. Пусть $n=2l+1$, тогда интеграл (1.49) можно преобразовать следующим образом:

$$\int\sin^m x\cos^n x dx=\int\sin^m x\cos^{2l}x\cos x dx=$$
$$=\int\sin^m x\left(\cos^2 x\right)^l d(\sin x)=\left\{\begin{matrix}\cos^2 x=1-\sin^2 x\\ \sin x=t\end{matrix}\right\}= \qquad (6.50)$$
$$=\int t^m\left(1-t^2\right)^l dt$$

Аналогично поступают в случае $m=2l+1$.

2) Оба числа m и n - четные и положительные (или нуль). В этом случае степени в подынтегральной функции понижаются с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (6.51)$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

3) $m+n=-2k \quad (k \in N)$.

В этом случае подынтегральная функция записывается в виде дроби. В знаменателе этой дроби выделяется множитель $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$). Выражение $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\left(\dfrac{dx}{\sin^2 x}\right)$ заменяется на $d(\mathrm{tg}x)$ $\left(-d(\mathrm{ctg}x)\right)$ и делается замена $\mathrm{tg}x = t$.

Пример 6.15. *Найти* $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Решение: По условию одна из степеней нечетная, поэтому можно записать

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x d\cos x =$$
$$= \begin{cases} \cos x = t \\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-t^2 \end{cases} = -\int (1-t^2)t^2 dt = \int (t^4 - t^2) dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Пример 6.16. *Найти* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение: Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x, \qquad \text{т.е.} \quad m=2 \quad n=0$$

Применим формулу понижения степени (1.51)

$$\frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

Тогда

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

<u>Ответ:</u> $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

Пример 6.17. *Найти* $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Решение: $m + n = 4 - 8 = -4$, поэтому поступим согласно схеме п.3:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} d\,\mathrm{tg}\, x = \int \mathrm{tg}^4 x \frac{1}{\cos^2 x} d\,\mathrm{tg}\, x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2 \end{array} \right\} = \int t^4 (1+t^2) dt = \int (t^4 + t^6) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + \frac{\mathrm{tg}^7}{7} + C$$

II. Интегралы вида

$$\begin{array}{l} \int \cos(a_1 x + b_1)\cos(a_2 x + b_2)dx \\ \int \cos(a_1 x + b_1)\sin(a_2 x + b_2)dx \\ \int \sin(a_1 x + b_1)\sin(a_2 x + b_2)dx \end{array} \qquad (6.52)$$

преобразуются с помощью тригонометрических формул

$$\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right] \end{array} \qquad (6.53)$$

Пример 6.18. *Найти* $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3} dx$.

Решение:

Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул (6.53):

$$\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\sin x\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{6}-\cos\frac{5x}{6}\right]=\frac{1}{2}\sin x\cos\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\sin x\cos\frac{5x}{6}=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\sin\frac{7x}{6}+\sin\frac{5x}{6}\right]-\frac{1}{4}\left[\sin\frac{11x}{6}+\sin\frac{x}{6}\right]$$

Тогда

$$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{7x}{6}+\sin\frac{5x}{6}-\sin\frac{11x}{6}-\sin\frac{x}{6}\right)dx=$$
$$\frac{1}{4}\left[-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{6}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}+6\cos\frac{x}{6}\right]+C$$

Ответ:

$$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{4}\left[-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{6}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}+6\cos\frac{x}{6}\right]+C$$

III. Интегралы вида: $\int\mathrm{tg}^m xdx$; $\int\mathrm{ctg}^m xdx$, где m - целое положительное число, преобразующиеся с помощью тригонометрических формул:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha-1};$$
$$\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha-1}$$

При применении этих формул последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

Пример 6.19. *Найти* $\int\mathrm{tg}^5 xdx$.

Решение:

$$\int\mathrm{tg}^5 xdx=\int\mathrm{tg}^3 x\cdot\mathrm{tg}^2 xdx=\int\mathrm{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\mathrm{tg}^3 xd(\mathrm{tg}\,x)-\int\mathrm{tg}^3 xdx=$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\int\mathrm{tg}\,x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\int\mathrm{tg}\,xd(\mathrm{tg}\,x)+\int\mathrm{tg}\,xdx=$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$$

Ответ: $\int\mathrm{tg}^5 xdx=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$

§ 6.10. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\cos x, \sin x)dx \tag{6.54}$$

Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции аргумента t с помощью замены переменной, называемой универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \tag{6.55}$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,x \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{6.56}$$

Тогда, воспользовавшись тригонометрическими формулами:

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{6.57}$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{6.58}$$

получаем:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt \tag{6.59}$$

Пример 6.20. *Найти интеграл* $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$.

Решение: Сделаем универсальную тригонометрическую подстановку (6.57). Тогда, воспользовавшись формулами (6.56) - (6.58), получаем:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{-at^2 + 2bt + a}$$

Разложим знаменатель полученного выражения на множители:

$$-at^2 + 2bt + a = -a(t - t_1)(t - t_2),$$

где $t_{1,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2}}{a}$ - корни соответствующего квадратного уравнения.

Таким образом

$$\int \frac{2dt}{-at^2 + 2b + a} = \frac{-2}{a}\int \frac{dt}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие

$$\frac{1}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2} = \frac{(A + B)t - At_2 - Bt_1}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *t*, получаем:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -At_2 - Bt_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ B(t_2 - t_1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{t_1 - t_2} \\ B = \dfrac{1}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} - \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Таким образом,

$$\frac{-2}{a}\int \frac{dt}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{-2}{a} \cdot \frac{a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \int \left[\frac{1}{t - \dfrac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}} - \frac{1}{t - \dfrac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{a}} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\ln\left| t - \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right| - \ln\left| t - \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln\left| \frac{at - b + \sqrt{a^2 + b^2}}{at - b - \sqrt{a^2 + b^2}} \right| + C$$

Возвращаясь к исходной переменной x $\left(t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ получаем

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C$$

<u>Ответ:</u> $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C$

Следует заметить, что в случае, если подынтегральная функция $R(\cos x,\sin x)$ является четной по обоим аргументам, т.е. $R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$, то нахождение интеграла (6.54) заметно упрощается, если вместо замены (6.55) сделать подстановку

$$\operatorname{tg}x=t \tag{6.60}$$

Пример 6.21. *Найти* $\int\frac{dx}{4-\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Решение: Подынтегральная функция является четной по обоим аргументам:

$$\frac{1}{4-(-\cos x)^2+5(-\sin x)^2}=\frac{1}{4-\cos^2 x+5\sin^2 x}$$

Сделаем замену: $t=\operatorname{tg}x$. Тогда $x=\operatorname{arctg}t$ $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Используя тригонометрические функции, получаем:

$$\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}$$

Подставляем $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, dx в искомый интеграл:

$$\int \frac{dx}{4-\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4-\frac{1}{1+t^2}+\frac{5t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{3+9t^2}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\sqrt{3}\cdot t\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}t+C=\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{arctg}x\right)+C$$

<u>Ответ:</u> $\int \frac{dx}{4-\cos^2 x+5\sin^2 x}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{arctg}x\right)+C$

Задания для самостоятельного решения

Задание 6.1. Найти интегралы и сделать проверку.

6.1 $\int x\sqrt{x}dx$ 6.2 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ 6.3 $\int \frac{4-5x\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x^3}}dx$

6.4 $\int \left(2+5^x\right)^2 dx$ 6.5 $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 6.6 $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

6.7 $\int e^x\cdot 3^{2x}dx$ 6.8 $\int \frac{x^2+4}{3x^2-3}dx$ 6.9 $\int \frac{x^2}{4+x^2}dx$

6.10 $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ 6.11 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$ 6.12 $\int (\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2 dx$

Задание 6.2. Найти интегралы, используя метод занесения под знак дифференциала.

6.13 $\int \sqrt[3]{2+x^2}\cdot xdx$ 6.14 $\int \frac{\cos xdx}{(5+\sin x)^3}$ 6.15 $\int \frac{x^2dx}{2x^3+3}$

6.16 $\int \frac{\sin 2xdx}{1+\sin^2 x}$ 6.17 $\int \frac{xdx}{4+x^2}$ 6.18 $\int \frac{xdx}{4+x^4}$

6.19 $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{5^x-1}}$ 6.20 $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{25^x-1}}$ 6.21 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

6.22 $\int \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$ 6.23 $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 6.24 $\int \frac{\left(x\ln\left(x^3+1\right)\right)^2}{x^3+1}dx$

Задание 6.3. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

6.25 $\int \ln 5xdx$ 6.26 $\int 2x\sin x\cdot\cos xdx$ 6.27 $\int \arccos xdx$

6.28 $\int \left(x^2+1\right)\sin xdx$ 6.29 $\int \left(3x^2+5\right)\cdot e^{2x}dx$ 6.30 $\int x^2\operatorname{arctg}xdx$

6.31 $\int e^{2x}\cos x dx$ 6.32 $\int \cos(\ln x)dx$ 6.33 $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

6.34 $\int \sin\sqrt{x}dx$ 6.35 $\int x^5 e^{x^2}dx$ 6.36 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

Задание 6.4. Найти интегралы.

6.37 $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$ 6.38 $\int \frac{dx}{x^2-10x+25}$ 6.39 $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

6.40 $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$ 6.41 $\int \frac{xdx}{x^2-6x+5}$ 6.42 $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$

6.43 $\int \frac{x+3}{-x^2-2x+3}dx$ 6.44 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-7e^x+12}$ 6.45 $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$

6.46 $\int \frac{4x^3-5x}{x^4+2x^2-3}dx$

Указания:

в задании 6.44 воспользоваться подстановкой $e^x = t$;
в заданиях 6.45 и 6.46 воспользоваться подстановкой $x^2 = t$.

Задание 6.5. Найти интегралы.

6.47 $\int \frac{3x^2+3x+12}{x^3+x^2-2x}dx$ 6.48 $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$ 6.49 $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

6.50 $\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$ 6.51 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$ 6.52 $\int \frac{(x^4-6x^3+12x^2+6)dx}{x^3-6x^2+12x-8}$

6.53 $\int \frac{(x+1)^2dx}{(x^2+1)^2}$ 6.54 $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$ 6.55 $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}$

Указание: в задании 6.54 воспользоваться подстановкой $x^2+3=t$, в задании 6.55 $x-1=t$

Задание 6.7. Найти интегралы.

6.66 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$ 6.67 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 6.68 $\int \frac{x^3}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}}dx$

6.69 $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}$ 6.70 $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx$

Задание 6.8. Найти интегралы.

6.71 $\int \cos^3 x dx$ 6.72 $\int \sin^5 x \cos^{2/3} x dx$ 6.73 $\int \sin^4 x dx$

6.74 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ 6.75 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^7 x}} dx$ 6.76 $\int \cos 2x \cos 6x dx$

6.77 $\int \sin 3x \cos 5x dx$ 6.78 $\int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} dx$ 6.79 $\int \mathrm{tg}^4 x dx$

6.80 $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$

Задание 6.9. Найти интегралы.

6.81 $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ 6.82 $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ 6.83 $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

6.84 $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$ 6.85 $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$ 6.86 $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$

6.87 $\int \frac{dx}{5 - \cos^2 x - 9\sin^2 x}$ 6.88 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 7.1. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем внутри каждого частичного отрезка точку ξ_i: $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ (рис.7.1.). Найдем значение функции $y = f(x)$ в точках ξ_i.

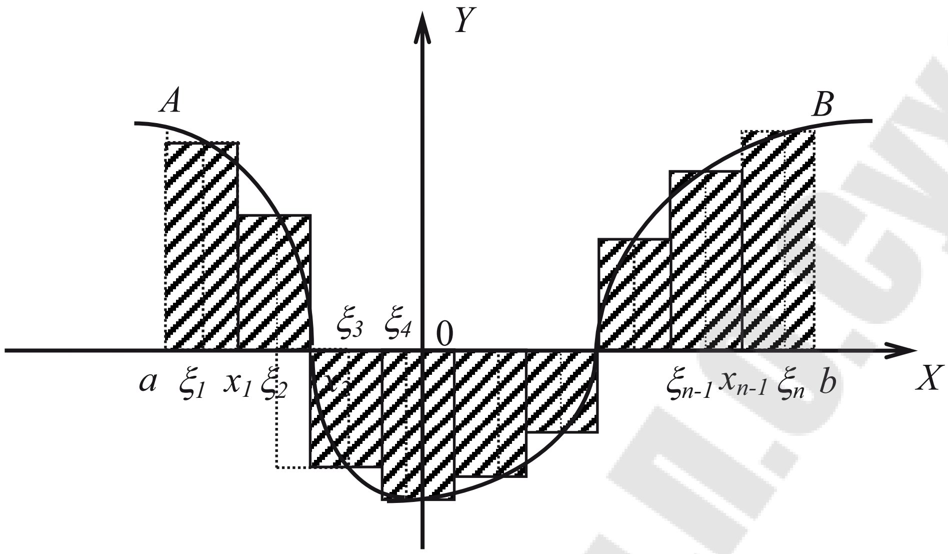


Рис. 7.1

Интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется сумма вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{7.1}$$

Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, в основаниях которых лежат частичные отрезки Δx_i, а высоты равны $f(\xi_i)$ (рис. 7.1).

Определение: Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы (7.1), найденный при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков стремится к нулю:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \tag{7.2}$$

Справедлива следующая теорема:

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$; т.е. предел интегральной суммы (7.1) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$.

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ (7.3)

2) $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$ (7.4)

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (7.5)

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (7.6)

5) Если $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a;b]$ и $a < b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{7.7}$$

6) Если $g(x) \leq f(x) \ \ \forall x \in [a;b]$ и $a < b$

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \tag{7.8}$$

7) Если $m = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x), \ \ M = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{7.9}$$

8) Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c$, $a \leq c \leq b$, такая, что верно равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \ \ (b-a) \tag{7.10}$$

9) Если $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство

$$\Phi'(x) = f(x) \tag{7.11}$$

10) Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \tag{7.12}$$

Формула (7.12) называется формулой Ньютона-Лейбница.

11) Если $f(x)$ - четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx \tag{7.13}$$

12) Если $f(x)$ - нечетная функция, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0 \tag{7.14}$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу - отрезком оси *0X*, справа и слева - прямыми $x = a$ и $x = b$.

Если $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху отрезком оси *0X*, снизу - графиком функции $y = f(x)$, слева и справа - прямыми $x = a$ и $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть вычислен по определению как предел интегральных сумм. Однако, в большинстве случаев, целесообразно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница (7.12).

Алгоритм применения формулы (7.12) при вычислении $\int\limits_a^b f(x)dx$:

1) Находим неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.
2) Вычисляем значение полученного выражения при $x = b$ и $x = a$.
3) Вычисляем разность полученных значений.

Пример 7.1. *Вычислить определенный интеграл:* $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Решение:

Найдем $F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{d(\ln x + 1)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x}$

$$F(e^3) = 2\sqrt{1+\ln e^3} = 4$$

$$F(1) = 2\sqrt{1+\ln 1} = 2$$

Окончательно получаем:

$$\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3} = 4 - 2 = 2$$

<u>Ответ:</u> $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2$

При вычислении определенного интеграла применяются те же приемы, что и при нахождении неопределенного интеграла, а именно, замена переменной и метод интегрирования по частям.

Замена переменной в определенном интеграл.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной и монотонна на $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и сложная функция $f(\varphi(t))$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то справедлива формула замены переменной для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (7.15)$$

Пример 7.2. *Вычислить* $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Решение: Сделаем замену $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$.
Найдем пределы интегрирования для новой переменной *t*.

$$x=4\Rightarrow t=\sqrt{x}=2$$
$$x=9\Rightarrow t=\sqrt{x}=3$$

Таким образом получаем:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=\int_2^3 \frac{t}{t-1}2tdt=2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt=2\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt=2\int_2^3 \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt=$$

$$=\{\text{–”‹‘€–’”}(2.3)\}=2\int_2^3 (t+1)dt+2\int_2^3 \frac{dt}{t-1}=2\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_2^3+2\ln|t-1|\Bigg|_2^3=$$

$$=2\left(\frac{9}{2}+3-\frac{4}{2}-2+\ln|3-1|-\ln|2-1|\right)=2\left(\frac{7}{2}+\ln 2\right)=7+2\ln 2$$

<u>Ответ:</u> $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=7+2\ln 2$

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a;b]$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (7.16)$$

Пример 7.3. *Вычислить* $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & v = -\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right\} = -x \operatorname{ctg} x \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{ctg} x dx =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x} = -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln|\sin x| \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \frac{1}{2}\ln 1{,}5$$

<u>Ответ:</u> $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \frac{1}{2}\ln 1{,}5$

§ 7.2. Геометрические приложения определенного интеграла

а) *Вычисление площади плоской фигуры.*

Приложение определенных интегралов к вычислению площади плоской фигуры основано на геометрическом смысле определенного интеграла.

Если данная фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall x \in [a; b]$ (рис. 2), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \qquad (7.17)$$

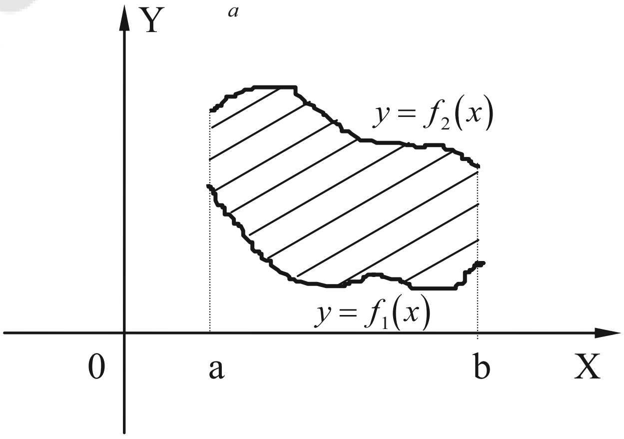


Рис. 7.2

Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(x)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (7.18)$$

где α и β определяются из условий $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, $\psi(t) \geq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора $0M_1M_2$ (рис.3), ограниченного дугой кривой и полярными радиусами, соответствующими углам φ_1 и φ_2, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi \qquad (7.19)$$

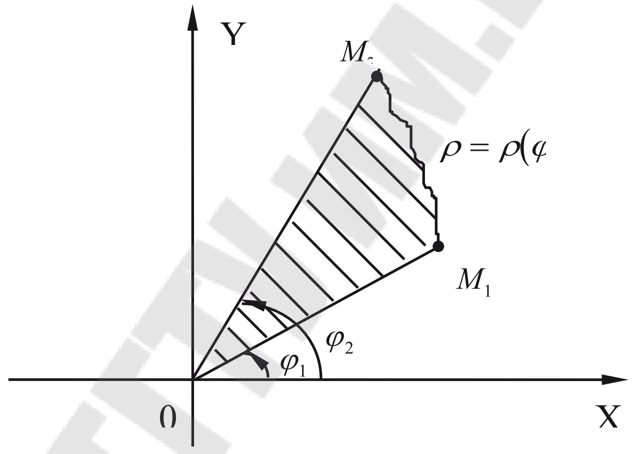


Рис. 7.3

Пример 7.4. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*
$y^2 = 9x, \quad y = 3x$.

Решение: Изобразим заданную фигуру (рис.7.4)

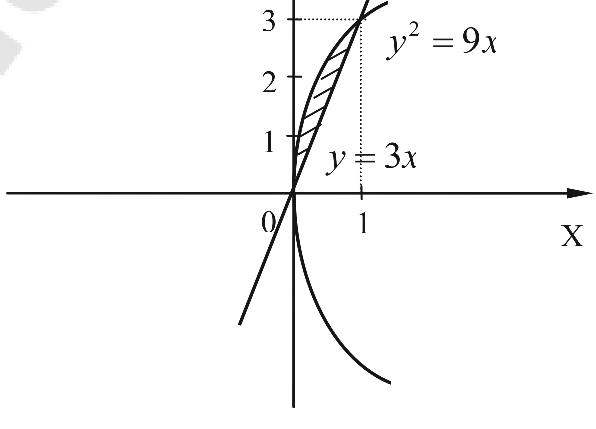


Рис. 7.4

Найдем абсциссы точек пересечения заданных кривых:

$$\begin{cases} y^2 = 9x \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow (3x)^2 = 9x \Rightarrow 9x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

Тогда площадь заштрихованной фигуры, согласно (7.17), равна:

$$S = \int_0^1 \left(3\sqrt{x} - 3x\right)dx = \left(2(x)^{3/2} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ \left(\text{ед.}^2\right)$$

Ответ: $S = \frac{1}{2} \ \left(\text{ед.}^2\right)$

Пример 7.5 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды* $y = a(1-\cos t)$ $x = a(t - \sin t)$ *и осью* oX.

Решение: Первая арка циклоиды определяется из условия

$$y = 0 \quad a(1-\cos t) = 0 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 2\pi$$

$$x'(t) = a(1-\cos t)$$

Таким образом, площадь найдем по формуле (7.18)

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 3a^2\pi \ \left(\text{ед.}^2\right)$$

Ответ: $S = 3\pi a^2 \ \left(\text{ед.}^2\right)$

Пример 7.6. *Вычислить площадь фигуры, заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда* $\rho = a\varphi \quad (a > 0)$.

Решение: Область между первым и вторым витками спирали соответствует $\varphi_1 = 2\pi, \quad \varphi_2 = 4\pi$.

Площадь найдем по формуле (7.19):

$$S=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}(a\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\,\Bigg|_{2\pi}^{4\pi}=$$

$$=\frac{a^2}{6}\left((4\pi)^3-(2\pi)^3\right)=\frac{28a^2\pi^3}{3}\quad\left(\text{ед.}^2\right)$$

Ответ: $$S=\frac{28}{3}\pi^3a^2\quad\left(\text{ед.}^2\right)$$

б) *Вычисление длины дуги кривой.*

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, причем абсциссы точек A и B равны соответственно $x=a$ и $x=b$. Тогда длина дуги $\overset{\cup}{AB}$ может быть найдена по формуле:

$$L_{\overset{\cup}{AB}}=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \tag{7.20}$$

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, причем точке A соответствует значение $t=\alpha$, а точке B - $t=\beta$. Тогда длина дуги $\overset{\cup}{AB}$ кривой вычисляется по формуле:

$$L_{\overset{\cup}{AB}}=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt \tag{7.21}$$

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$. Причем, точке A соответствует значение φ_1 полярного угла, точке B - значение φ_2.

Тогда длина дуги $\overset{\cup}{AB}$ может быть найдена по формуле:

$$L_{\overset{\cup}{AB}}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi \tag{7.22}$$

Пример 7.7. *Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ между точками с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=1$.*

Решение: Кривая задана явным уравнением, поэтому для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (7.20). Вычисляем $y'(x)$: $y'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Таким образом:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$$

Сделаем замену $t^2 = 1 + \dfrac{1}{x} \quad x = \dfrac{1}{t^2 - 1} \quad dx = \dfrac{-2tdt}{\left(t^2 - 1\right)^2}$.

$x = 0 \Rightarrow t = \infty$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

Таким образом

$$L = \int_{\infty}^{\sqrt{2}} t \frac{-2tdt}{\left(t^2 - 1\right)^2} = \lim_{b \to \infty} \int_{\sqrt{2}}^{b} \frac{2t^2 dt}{\left(t^2 - 1\right)^2}$$

Найдем $\displaystyle\int \frac{2t^2 dt}{\left(t^2 - 1\right)^2}$, разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{2t^2 dt}{\left(t^2 - 1\right)^2} = \frac{2t^2}{\left(t - 1\right)^2 \left(t + 1\right)^2} = \frac{A_1}{t - 1} + \frac{A_2}{\left(t - 1\right)^2} + \frac{B_1}{t + 1} + \frac{B_2}{\left(t + 1\right)^2}$$

$$2t^2 = A_1\left(t^3 + t^2 - t - 1\right) + A_2\left(t^2 + 2t + 1\right) + B_1\left(t^3 - t^2 - t + 1\right) + B_2\left(t^2 - 2t + 1\right)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему из 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + B_1 = 0 \\ x^2 & A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = 2 \\ x^1 & -A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2 = 0 \\ x^0 & -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}}\right\}$$

Решая полученную систему, получаем:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2} \\ A_2 = \dfrac{1}{2} \\ B_1 = -\dfrac{1}{2} \\ B_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом

$$\int \frac{2t^2dt}{\left(t^2-1\right)^2} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}-\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}\right]+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{t}{t^2-1}+C$$

Воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница (7.12), получаем:

$$L = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|-\frac{b}{b^2-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{b+1}\right|-\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b^2-1}+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

Переходя к пределу при $b\to\infty$, окончательно получаем:

$$L = \sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{1} \quad (\text{ед.})$$

Ответ: $\quad L = \sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ед.

Пример 7.8. *Вычислить длину астроиды*

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

Решение: Кривая задана параметрическими уравнениями, поэтому для вычисления ее длины воспользуемся формулой (7.21)

Вычислим предварительно x'_t и y'_t:

$$x'_t = 3a\cos^2 t(-\sin t)$$
$$y'_t = 3a\sin^2 t(\cos t)$$

Тогда, согласно (7.21), получаем, учитывая симметрию кривой:

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(3a\cos^2 t(-\sin t)\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt = 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t dt =$$

$$= 6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt = -3a\cos 2t\,\Big|_0^{\pi/2} = 6a \ (\text{ед.})$$

Ответ: $L = 6a$ (ед.)

Пример 7.9. *Вычислить длину кардиоиды* $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Решение: Кривая задана уравнением в полярных координатах, поэтому для вычисления ее длины воспользуемся формулой (7.22).

Найдем $\rho'_\varphi = \left(a(1-\cos\varphi)\right)' = a\sin\varphi$.

Найдем

$$\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$

$$= a^2(2 - 2\cos\varphi) = 2a^2(1-\cos\varphi) = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Подставив найденное выражение для $\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2$ в (7.22), получаем:

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a \ \text{(ед.)}$$

Ответ: $L = 8a$ (ед.)

в) Вычисление объемов тел вращения.

Пусть в пространстве задано тело, образованное вращением вокруг оси $0X$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью $0X$ (рис. 7.5).

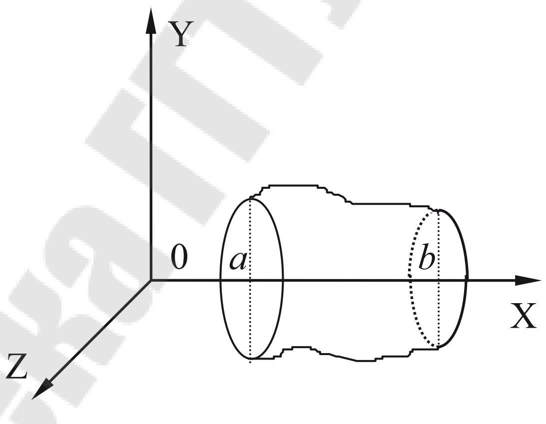


Рис. 7.5

Объем этого тела можно найти по формуле:

$$V = \pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx \qquad (7.23)$$

Аналогично, объем тела, полученный вращением криволинейной трапеции вокруг оси $0Y$, равен

$$V = \pi\int_c^d\left(x(y)\right)^2 dy \qquad (7.24)$$

Пример 7.10. *Вычислить объем тела, полученного при вращении плоской фигуры, ограниченной линиями*

$$(y-3)^2+3x=0$$

$$x=-3$$

вокруг оси $0X$.

Решение: Изобразим заданную плоскую фигуру (рис. 7.6) и полученное тело (рис.7. 7)

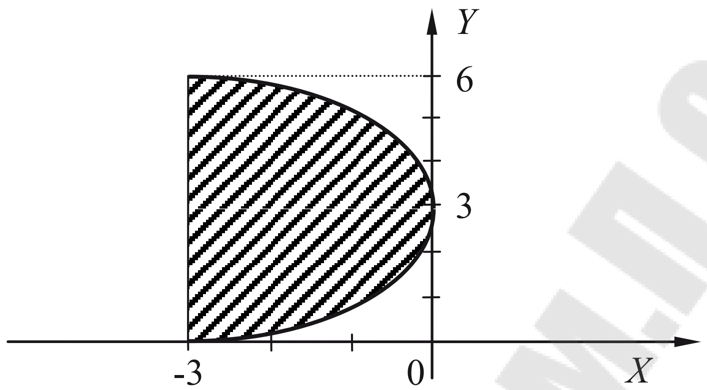


Рис. 7.6

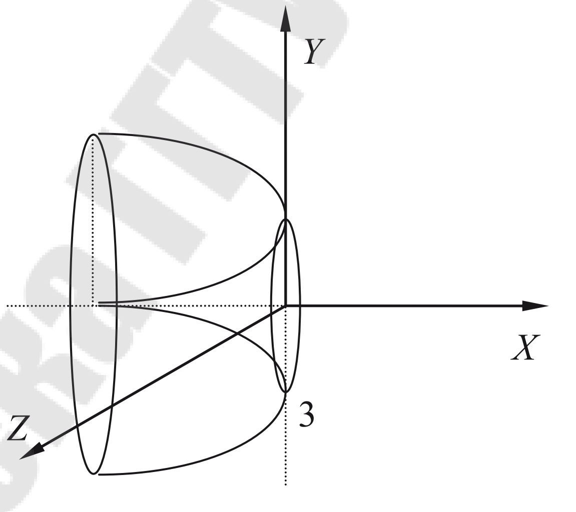


Рис. 7.7

Заданный объем представляет собой разность объемов тел, полученных при вращении верхней ветви параболы $y=3+\sqrt{-3x}$ и при вращении нижней ветви параболы $y=3-\sqrt{-3x}$.

$$V=V_1-V_2$$

$$V_1=\pi\int_{-3}^{0}\left(3+\sqrt{-3x}\right)^2dx=\pi\int_{-3}^{0}\left(9+2\sqrt{-3x}-3x\right)dx=$$

$$=\pi\left(9x+2\frac{1}{-3}\frac{(-3x)^{3/2}}{3/2}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=\pi\left(27+12+\frac{27}{2}\right)=\frac{105}{2}\pi$$

$$V_2=\pi\int_{-3}^{0}\left(3-\sqrt{-3x}\right)^2dx=\pi\int_{-3}^{0}\left(9-2\sqrt{-3x}-3x\right)dx=$$

$$=\pi\left(9x+\frac{4}{9}(-3x)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=\pi\left(27-12+\frac{27}{2}\right)=\frac{57}{2}\pi$$

Таким образом, искомый объем

$$V=\frac{105}{2}\pi-\frac{57}{2}\pi=\frac{48}{2}\pi=24\pi\ \left(\text{ед.}^3\right)$$

Ответ: $V=24\pi\ \left(\text{ед.}^3\right)$

Задания для самостоятельного решения

Задание 7.1. Вычислить определенные интегралы.

7.1 $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x}$

7.2 $\int_{0}^{\pi/4}\sin^3x\cos x dx$

7.3 $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$

7.4 $\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$

7.5 $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

7.6 $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

7.7 $\int_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

7.8 $\int_{0}^{1}(x-1)e^{-x}dx$

7.9 $\int_{0}^{\pi/2}x\cos x dx$

7.10 $\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)dx$

7.11 $\int_{0}^{\pi/2}e^{2x}\cos x dx$

7.12 $\int_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Задание 7.2. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

7.13 параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=4$.

7.14 $\begin{cases}x=12\cos t+5\sin t\\ y=5\cos t-12\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

7.15 лемнискатой $\rho^2=2\cos 2\varphi$.

7.16 четырехлепестковой розой $\rho=a\sin 2\varphi$

Задание 7.3 Найти длину дуги кривой

7.18 $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geq 0)$.
7.19 окружности $x = a\cos t;\ y = a\sin t$.
7.20 $\rho = \sin^3\left(\varphi/3\right)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

VIII. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 8.1. Двойной интеграл и его вычисление

Пусть в некоторой замкнутой области D плоскости xOy определена ограниченная функция $z = f(x,y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n элементарных ячеек $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек. Площадь i-й ячейки обозначим $\Delta\sigma_i$, а диаметр - d_i. Внутри каждой ячейки выберем произвольную точку $\mathrm{M}_i(x_i, y_i)$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x,y)$, по области D называется

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{M}_i)\Delta\sigma_i \tag{8.1}$$

Определение 2. Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел интегральной суммы (8.1.) при $d \to 0$, $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ $(n \to \infty)$ и обозначается

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Таким образом, согласно определению 2, справедливо равенство:

$$\lim_{\substack{d\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{M}_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{8.2}$$

Свойства двойного интеграла:

- Двойной интеграл от суммы двух функций $f(x,y)+g(x,y)$ по области D равен сумме двойных интегралов от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D \left(f(x,y)+g(x,y)\right)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy \tag{8.3}$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: если $c = \text{const}$, то

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy \tag{8.4}$$

- Если область D разбита на две области D_1 и D_2, не имеющие общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \tag{8.5}$$

- Теорема о среднем. Для непрерывной функции $f(x,y)$ в области D, площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $\mathrm{M}(\zeta,\eta) \in D$, такая, что

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\zeta,\eta)S_D \tag{8.6}$$

Число $f(\zeta,\eta)$ называется средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

- Если в области D для непрерывных функций $f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)$ выполняется неравенство

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y) \le f_3(x,y), \text{ то}$$

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \le \iint_D f_2(x,y)dxdy \le \iint_D f_3(x,y)dxdy \tag{8.7}$$

- Если функция $f(x,y) \ne const$ непрерывна в области D, $\mathrm{M} = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, то

$$mS_D < \iint_D f(x,y)dxdy < \mathrm{M}S_D \tag{8.8}$$

Вычисление двойного интеграла

Пусть область D ограничена сверху и снизу соответственно линиями $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$, а справа и слева прямыми $x = b$ и $x = a$ (рис. 8.1.),

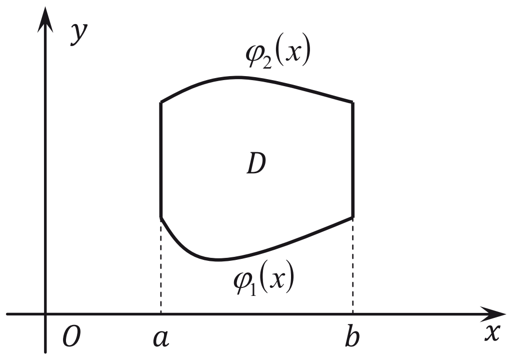


Рис. 8.1

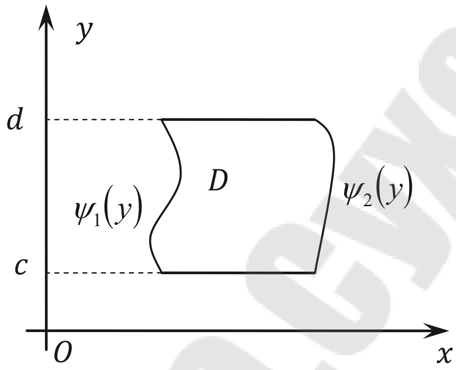


Рис. 8.2

причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $a < b$. Такую область назовем правильной в направлении Oy.

Пусть область D ограничена справа и слева линиями $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, а снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ (рис. 8.2), причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $c < d$. Такую область назовем правильной в направлении Ox.

Если область D является правильной в направлении Oy, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (8.9)$$

Правую часть в формуле (8.9.) называют повторным или двукратным интегралом от функции $f(x,y)$. Интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ - внутренним интегралом.

Если область D является правильной в направлении Ox, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (8.10)$$

Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называется приведением двойного интеграла к повторному.

Переход от формулы (8.9) к (8.10) (или наоборот) называется изменением порядка интегрирования.

Если область D не является правильной ни в одном из направлений, то ее необходимо разбить на конечное число правильных областей $D_1, D_2, \ldots D_n$, а затем воспользоваться свойством 3 двойного интеграла:

Пример разбиения приведен на рис.8.3.

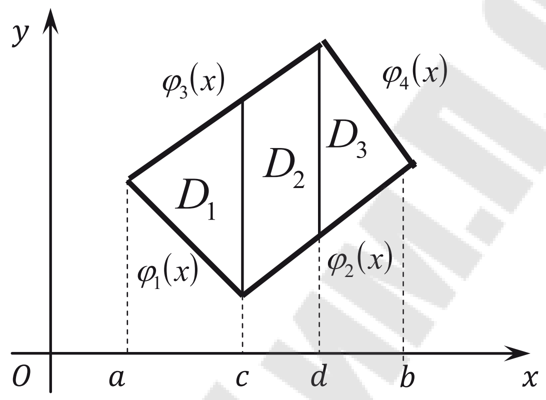


Рис. 8.3

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int\limits_{a}^{c} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{c}^{d} dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{d}^{b} dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dy$$

Таким образом, процесс вычисления двойного интеграла состоит из следующих этапов:

- ❖ Построить область интегрирования D.
- ❖ Выбрать порядок интегрирования. При этом следует руководствоваться либо соображениями краткости, т.е. выбрать такой порядок, при котором нет необходимости разбивать область D на части, либо соображениями простоты вычисления внутреннего интеграла. В случае необходимости произвести разбиение области D на конечное число правильных областей. Записать двойной интеграл в виде повторного.
- ❖ Вычислить внутренний интеграл. В случае (8.9) переменную x, а в случае (8.10) переменную y при интегрировании принять за

постоянную величину. Результатом интегрирования в случае (8.9) будет функция $\Phi(x)$, в случае (8.10) - функция $\Phi(y)$.

- ❖ Вычислить определенный интеграл по отрезку $[a;b]$ или $[c;d]$ от функции, полученной на предыдущем этапе. Результатом вычислений будет постоянное число.

Пример 8.1

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

Решение: Изобразим область D, по которой производится интегрирование: слева она ограничена прямой $x=0$, справа - прямой $x=1$, снизу кубической параболой $y=x^3$, сверху параболой $y=\sqrt{x}$. Область D изображена на рисунке 4.

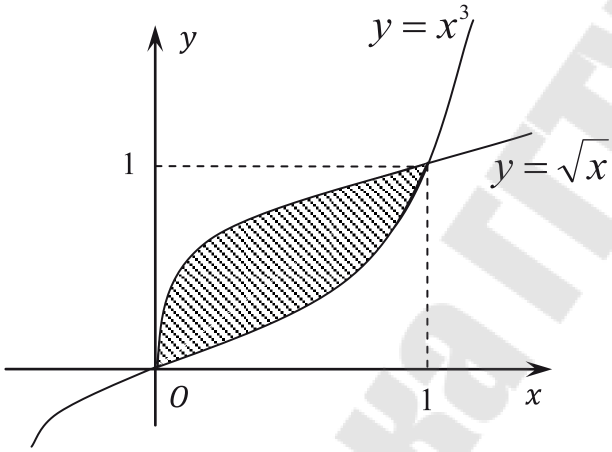


Рис. 8.4

Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, запишем уравнения кривых, ограничивающих область D как функции $x(y)$.

Если $y = x^3$, то $x = y^{1/3}$

Если $y=\sqrt{x}$, то $x = y^2$.

Переменная y меняется от 0 до 1. На отрезке [0; 1] $y^2 < y^{1/3}$, поэтому

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)dx.$$

Задача решена.

Пример 8.2

Изобразить область D и свести $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами; если D:$\{x=1;\ x=4;\ 3x-2y+4=0;\ 3x-2y-1=0\}$.

Решение: Область D приведена на рисунке 8.5.

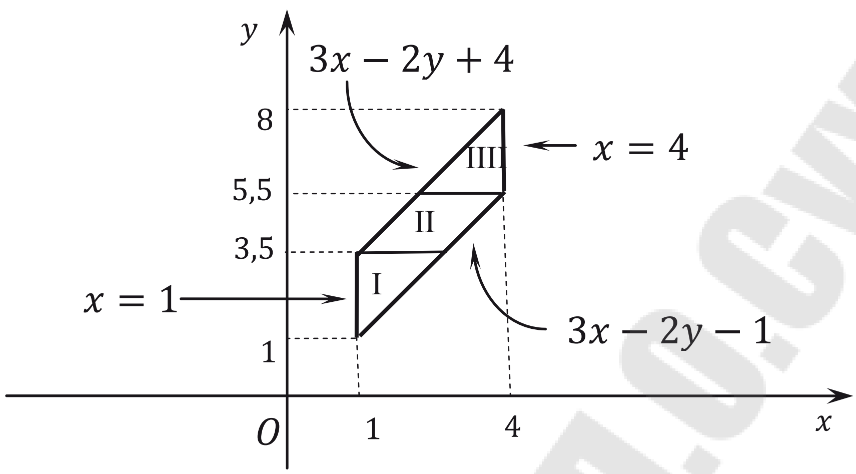


Рис. 8.5

1-й способ. Внешний интеграл по x, внутренний по y. Область слева ограничена прямой x=1, справа - прямой x=4, снизу - прямой 3x-2y-1=0, $y=\dfrac{3x-1}{2}$, сверху - прямой $3x-2y+4=0$, $y=\dfrac{3x+4}{2}$. Область является правильной в направлении Oy. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_{\frac{3x-1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy$$

2-й способ. Область D не является правильной в направлении Ox, т.к. при $y\in[0;3{,}5]$ она слева ограничена прямой $x=1$, справа - прямой $3x-2y-1=0$; $x=\dfrac{2y+1}{3}$; при $y\in[3{,}5;5{,}5]$ область слева ограничена прямой $3x-2y+4=0$, $x=\dfrac{2y-4}{3}$, справа - прямой $x=\dfrac{2y+1}{3;}$;при $x\in[5{,}5;8]$ область слева ограничена прямой $x=\dfrac{2y-4}{3}$, справа - прямой $x=4$. Проведем прямые $y=3{,}5$ и $y=5{,}5$. Они разобьют область D на три правильные в направлении Ox области. Таким образом

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int_0^{3,5} dy \int_1^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int_{3,5}^{5,5} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int_{5,5}^{8} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{4} f(x,y)dx.$$

Пример 8.3. *Вычислить двойной интеграл по области* D *от функции* $f(x,y)$, *если* D: $\{y = x^2, x = y^2\}$, $f(x,y) = x^2 + y$.

Решение: Область D изображена на рисунке 8.6.

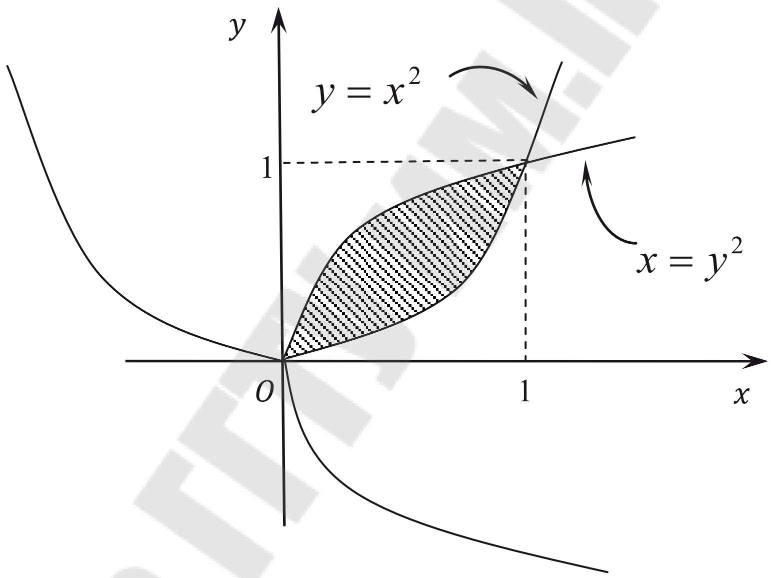


Рис. 8.6

Найдем координаты точек пересечения кривых

$y = x^2$ и $x = y^2$ $\quad x^2 = \left(x^2\right)^2 \quad x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$$\iint_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\Phi(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} -$$

$$-\left(x^2 \cdot x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right) = x^{5/2} + \frac{x}{2} - \left(x^4 + \frac{x^4}{2}\right) = x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4.$$

Подставим $\Phi(x)$ в повторный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4\right)dx = \left(\frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10}x^5\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

<u>Ответ</u>: $\frac{33}{140}$.

§ 8.2. Замена переменной в двойном интеграле

Пусть прямоугольные координаты x, y преобразуются к новым (криволинейным) координатам u и v, которые связаны с x и y соотношениями:

$$x = x(u, \upsilon),\ y = y(u, \upsilon), \tag{8.11}$$

где $x(u, \upsilon)$и $y(u, \upsilon)$ - непрерывные и дифференцируемые функции.

Функциональный определитель

$$J(u, \upsilon) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}. \tag{8.12}$$

называется якобианом преобразования (8.11.)

Если функции $x(u, \upsilon)$и $y(u, \upsilon)$ осуществляют однозначное отображение области D, лежащей в плоскости xOy, на область D', лежащую в плоскости $uO\upsilon$, что равносильно условию $J(u,\upsilon)\neq 0$, то имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f\left(x(u,\upsilon);y(u,\upsilon)\right)\left|J(u,\upsilon)\right|dud\upsilon. \qquad (8.13)$$

Таким образом для замены переменных в двойном интеграле необходимо сделать следующее:

Используя выражения $x=x(u,\upsilon)$, $y=y(u,\upsilon)$найти границы области D' в плоскости $uO\upsilon$. Изобразить область D' на плоскости $uO\upsilon$.

Вычислить якобиан преобразования по формуле (8.12)

Подставить D', $x(u,\upsilon)$, $y(u,\upsilon)$ $\left|J(u,\upsilon)\right|$ в формулу (8.13)

Вычислить получившийся в правой части равенства двойной интеграл по переменным u и v.

Пример 8.4. *Вычислить двойной интеграл*

$\iint\limits_D \left(x^2-y^2\right)\sin 2\pi(x+y)^2dxdy$, *где* D *- параллелограмм с вершинами в точках* $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; $B(2;0)$; $C(3;1)$; $E\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Решение: Построим область D (рис.8.7а)

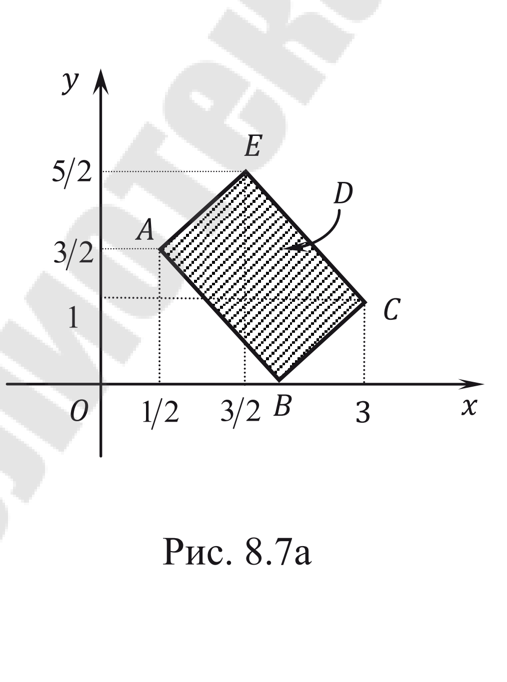


Рис. 8.7а

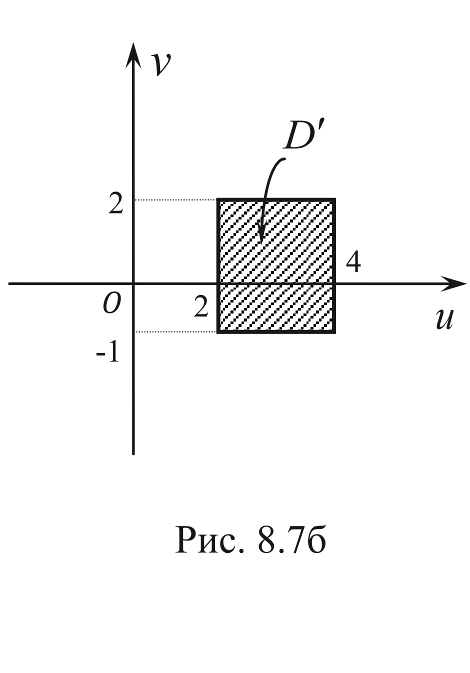


Рис. 8.7б

Непосредственное вычисление интеграла громоздко, поскольку область интегрирования не является правильной ни в направлении Ox, ни в направлении Oy и, следовательно, для вычисления интеграла ее придется разбить на три правильные области. Однако, вычисления заметно упростятся, если сделать подходящую замену переменных.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат стороны параллелограмма:

Отрезок AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$; $\quad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}$; $\quad x+y=2$.

Отрезок AE : $\dfrac{x-x_A}{x_D-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_D-y_A}$; $\quad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}$; $\quad x-y=-1$.

Отрезок BC: $\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$; $\quad \dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-0}{1-0}$; $\quad x-y=2$.

Отрезок CE: $\dfrac{x-x_C}{x_D-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_D-y_C}$; $\quad \dfrac{x-3}{\frac{3}{2}-3}=\dfrac{y-1}{\frac{5}{2}-1}$; $\quad x+y=4$.

Таким образом, область D ограничена линиями $x+y=2;\ x+y=4;\ x-y=-1;\ \ x-y=2$.

Введем новые переменные: $\begin{cases} u=x+y \\ \upsilon=x-y \end{cases}$

Тогда область D плоскости xOy отобразится в область D' плоскости $uO\upsilon$, которая представляет собой прямоугольник $2<u<4,\ -1<\upsilon<2$. (рис.8.7б).

Выразим x и y через u и υ:

$$x=\frac{u+\upsilon}{2};\quad y=\frac{u-\upsilon}{2}.$$

Вычислим якобиан преобразования по формуле (8.12)

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left|J(u,\upsilon)\right|=\frac{1}{2}.$$

Тогда, по формуле (8.13.) заданный интеграл преобразуется к виду:

$$\iint\limits_D\left(x^2-y^2\right)\sin 2\pi(x+y)^2\,dxdy=\iint\limits_{D'}u\cdot\upsilon\sin 2\pi u^2\,\frac{1}{2}\,dud\upsilon=$$

$$=\int\limits_{-1}^{2}d\upsilon\int\limits_{2}^{4}u\upsilon\sin 2\pi u^2\,\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}\upsilon\,d\upsilon\int\limits_{2}^{4}\left(\sin 2\pi u^2\right)udu=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{2}\bigg|_{-1}^{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(-\cos 2\pi u^2\right)\bigg|_{2}^{4}=\frac{1}{4}(4-1)\cdot\frac{1}{4\pi}\left(-\cos 32\pi+\cos 8\pi\right)=0.$$

Ответ: 0.

Переход к полярным координатам

Переход к полярным координатам осуществляется по следующим формулам:

$$\underset{\rho\ge 0}{x=\rho\cos\varphi}\quad \underset{0\le\varphi<2\pi}{y=\rho\sin\varphi}. \tag{8.14}$$

Тогда по формулам (1.12.) находим якобиан преобразования $|J|=\rho$

Таким образом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi. \tag{8.15}$$

При переходе к повторному интегралу в правой части формулы (8.15.) следует руководствоваться следующими правилами.

- Если полюс O (начало координат) находится вне области D (рис.8.8а), а область D ограничена лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, $\varphi_1<\varphi_2$ кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$и $\rho=\rho_2(\varphi)$ $\rho_1<\rho_2$, то

$$\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \quad (8.16)$$

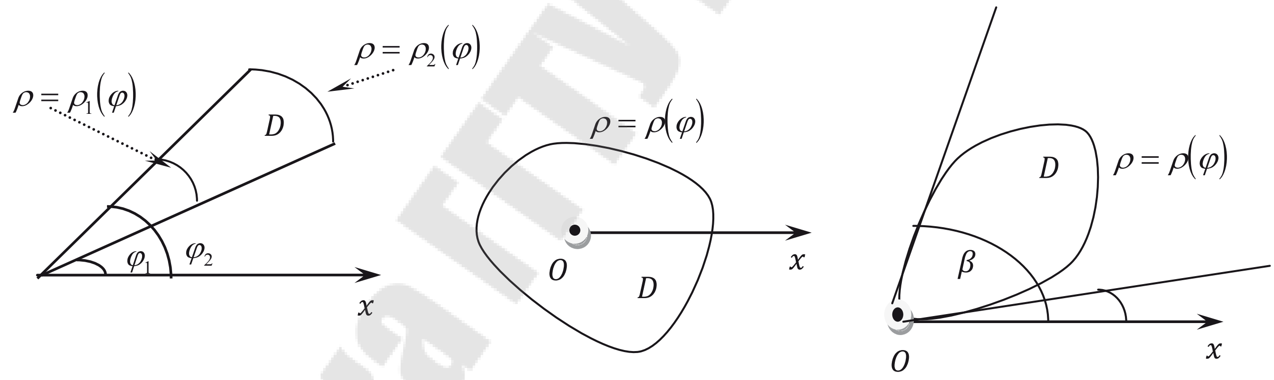
- Если полюс O находится внутри области интегрирования D' (рис. 8.8б), а уравнение ее границы имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, тогда

$$\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \quad (8.17)$$

- Если полюс O лежит на границе области D' (рис.8.8в) и уравнение ее границы имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то интеграл

$$\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho, \quad (8.18)$$

где значения α и β определяются непосредственно из вида D'.



а) б) в)

Рис. 8.8

Переход к полярным координатам удобно использовать, если D есть круг или часть круга.

Пример 8.5. *Вычислить* $\iint_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, *где* D *- часть кольца, ограниченного линиями* $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$; $y = \sqrt{3}x$

Решение: Изобразим область D (рис.8.9)

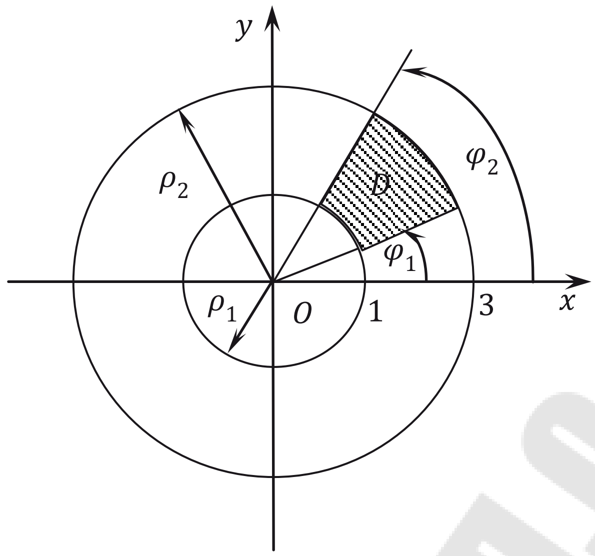


Рис. 8.9

Перейдем к полярным координатам по формулам (8.14)

$$x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\sin\varphi$$

Запишем границы области D в полярных координатах

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 1 \quad \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho_1 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 9 \quad \Rightarrow \rho^2 = 9 \Rightarrow \rho_2 = 3$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \Rightarrow \rho\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\varphi \quad \Rightarrow tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \sqrt{3}x \quad \Rightarrow \rho\sin\varphi = \sqrt{3}\rho\cos\varphi \quad \Rightarrow tg\varphi = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

Полюс О лежит вне области D, поэтому, согласно (8.15.) и (8.16.) имеем:

$$\iint_D arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint_{D'} arctg\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi\, \rho d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi \int_1^3 \rho\, d\rho = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right][9-1] = \frac{\pi^2}{6}.$$

§ 8.3. Геометрические приложения двойного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры D вычисляется по формуле

$$S_D = \iint_D dxdy \tag{8.19}$$

Пример 8.6. *Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:*

$x + y = 4;\ x - 3y = 0;\ x + y = 8;\ 3x - y = 0$

Решение: Построим область (рис.8.10), площадь которой необходимо вычислить.

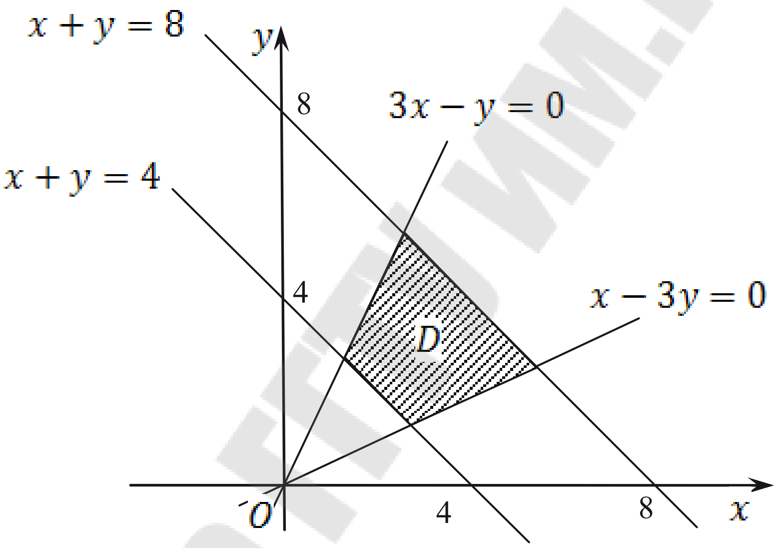


Рис. 8.10

Согласно (8.19) искомая площадь $S_D = \iint_D dxdy$.Для вычисления двойного интеграла сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x + y = u \\ \dfrac{y}{x} = \upsilon \end{cases}, \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u}{1+\upsilon} \\ y = \dfrac{u\upsilon}{1+\upsilon} \end{cases}$$

Область D' на плоскости $uO\upsilon$ примет вид: $4 \le u \le 8$, $\dfrac{1}{3} \le \upsilon \le 3$ - прямоугольник.Якобиан преобразования вычислим по формуле (8.12)

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\upsilon} & -\dfrac{u}{(1+\upsilon)^2}\\ \dfrac{\upsilon}{1+\upsilon} & \dfrac{u}{(1+\upsilon)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+\upsilon)^3}+\frac{u\upsilon}{(1+\upsilon)^3}=\frac{u}{(1+\upsilon)^2}.$$

Таким образом:

$$S_D=\iint_{D'}\frac{u}{(1+\upsilon)^2}dud\upsilon=\int_4^8 udu\int_{1/3}^3\frac{d\upsilon}{(1+\upsilon)^2}=\frac{u^2}{2}\bigg|_4^8\left(-\frac{1}{1+\upsilon}\right)\bigg|_{1/3}^3=$$

$$=\frac{64-16}{2}\cdot\left[-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]=\frac{48}{2}\cdot\frac{1}{2}=12.$$

Ответ: $S_D=12\ ed^2$.

Пример 8.7. *Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией:* $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

Решение: Согласно (8.19) $S_D=\iint_D dxdy$,

перейдем к полярным координатам по формулам (8.14) $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$, тогда уравнение границы имеет вид:

$$\left(\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\right)^2=2a^2\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^4=2a^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\rho^2=a^2\sin 2\varphi,\qquad \rho=a\sqrt{\sin 2\varphi},$$

$$\rho^2\ge 0,\Rightarrow\sin 2\varphi\ge 0\quad 2\pi n\le 2\varphi\le\pi+2\pi n,$$

$$\pi n\le\varphi\le\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \text{при } n=0\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad \text{при } n=1\quad \pi\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, область D, представляет собой две симметричные области, лежащие в I и III четвертях (рис.8. 11).

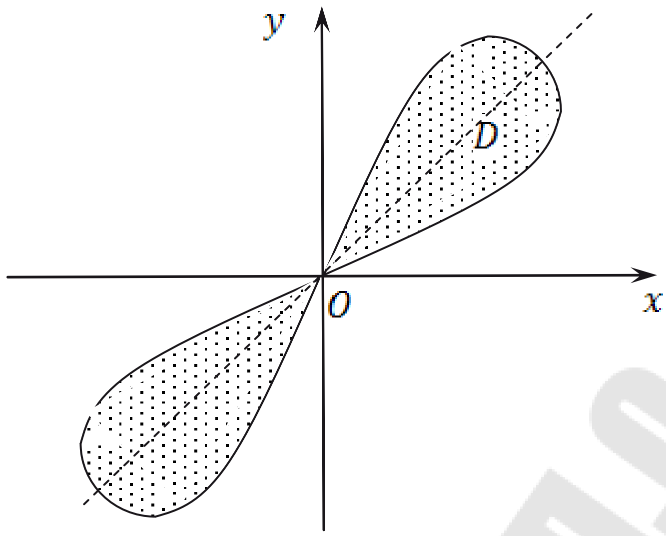


Рис. 8.11

Таким образом искомая площадь равна:

$$S = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \int\limits_0^{\pi/2} a^2 \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = a^2.$$

Ответ: $S = a^2\left(ед\right)^2$.

§ 8.4. Физические приложения двойного интеграла.

Вычисление массы плоской фигуры

Пусть D - область (пластинка) на плоскости xOy, на которой распределена масса с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma\left(x, y\right)$. Тогда масса пластинки m_D определяется формулой:

$$m_D = \iint\limits_D \gamma\left(x, y\right) dxdy. \qquad (8.20)$$

Пример 8.8. *Найти массу пластинки, ограниченной линиями* $xy = 9$, $xy = 16$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, *если в каждой точке* *поверхностная плотность пропорциональна среднему геометрическому ее координат.*

Решение: Изобразим область D, ограниченную линиями на плоскости xOy (рис.8.12):

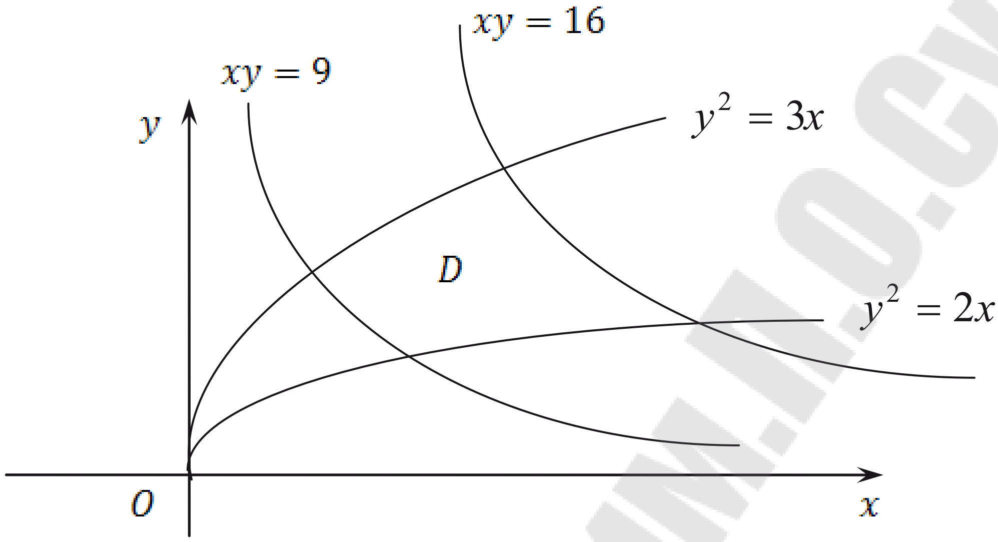


Рис. 8.12

По условию $\gamma(x,y)=\sqrt{xy}$, тогда, согласно (8.20) масса пластинки равна:

$m=\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy$. Для вычисления интеграла сделаем замену переменных

$$\begin{cases} yx = u \\ \dfrac{y^2}{x} = \upsilon \end{cases}$$

тогда область D плоскости xOy перейдет в область D' плоскости uOv. D' представляет собой прямоугольник $9 \le u \le 16;\quad 2 \le \upsilon \le 3$. Выразим x и y через u и υ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}} \\ y = u^{1/3}\upsilon^{1/3} \end{cases}.$$

Якобиан преобразования вычислим по формуле (8.12)

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}\frac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}} & -\frac{1}{3}\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}}\\ \frac{1}{3}\frac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}} & \frac{1}{3}\frac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}}\end{vmatrix}=\frac{2}{9}\frac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}}\frac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}}+\frac{1}{9}\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}}\frac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{9}\frac{1}{\upsilon}=\frac{1}{3\upsilon}.$$

Таким образом, с учетом формулы (8.13), получаем

$$m=\iint\limits_{D'}\sqrt{\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}}\cdot u^{1/3}\cdot\upsilon^{1/3}}\,\frac{1}{3\upsilon}dud\upsilon=\frac{1}{3}\int_9^{16}\sqrt{u}du\int_2^3\frac{d\upsilon}{\upsilon}=\frac{2}{9}u^{3/2}\Big|_9^{16}\cdot\ln\upsilon\Big|_2^3=$$

$$=\frac{2}{9}\left(16^{3/2}-9^{3/2}\right)(\ln 3-\ln 2)=\frac{2}{9}\cdot 37\cdot\ln\frac{3}{2}=\frac{74}{9}\ln\frac{3}{2}.$$

Ответ: масса пластинки $m=\frac{74}{9}\ln\frac{3}{2}$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 8.1. Вычислить повторные интегралы:

8.1 $\int_0^1 dx\int_3^5\left(x^2y+xy\right)dy$; 8.2 $\int_0^{\pi/2} dx\int_0^x \cos y\,dy$; 8.3 $\int_0^1 dy\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xydx$;

Задание 8.2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

8.4 $\int_{-1}^2 dx\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$. 8.5 $\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

8.6 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$. 8.7 $\int_0^3 dx\int_0^{x/3} f(x,y)dy+\int_3^4 dx\int_0^{4-x} f(x,y)dy$.

Задание 8.3. Изобразить область интегрирования D и свести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если:

8.8 $D:\{x^2+y^2=4, y=2x-x^2, x\geq 0\}$.

8.9 $D:\left\{y=x^2,\ y=5x^2,\ x+y-6=0,\ x>0,\ y>0\right\}$.

8.10 D - треугольник ABC с вершинами A(-2;-2); B(1;2); C(6;2).

8.11 $D\colon \left\{x^2 + y^2 \geq 1; \quad x^2 + y^2 \leq 2;\right\}$.

Задание 8.4. Вычислить $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, если

8.12 $D\colon \{0 \leq y \leq \pi; \quad 0 \leq x \leq \sin y\} \quad f(x,y) = x + y$;

8.13 $D\colon \left\{y = 4x + 6, y = \frac{1}{2}x - 1, x = -1\right\} \quad f(x,y) = x + 2y$;

8.14 D - треугольник с вершинами $O(0,0), A(10,1), B(1,1)$

$$f(x,y) = \sqrt{xy - y^2};$$

8.15 $D\colon \left\{y = \sqrt{x}; y = x\right\} \quad f(x,y) = e^{x/y}$

Задание 8.5. Вычислить двойной интеграл по указанной области:

8.16 $\iint\limits_S \sin 2\varphi d\rho d\varphi$; S определена неравенствами

$\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2; \quad 3 \leq \rho \leq 5$.

8.17 $\iint\limits_S \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi$; S - ограничена линиями:

$\rho = 1; \quad \rho = 2 + \cos\varphi$, полярной осью и расположена выше этой оси.

8.18 $\iint_S \rho\cos\varphi\, d\rho d\varphi$, где S - круговой сектор, ограниченный линиями $\rho = R, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

8.19 $\iint\limits_S \rho^3 \sin\varphi d\rho d\varphi$; S - область ограничена полярной осью, линией $\rho = 1 + \cos\varphi$ и расположенная выше полярной оси.

Задания 8.6. Переходя к полярным координатам вычислить интегралы:

8.20 $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy; \quad S\colon x^2 + y^2 = 2ax$.

8.21 $\iint\limits_S xydxdy; S$ – ограничена линиями

$y=-x,\ y=\sqrt{3}x,\ x^2+y^2=ax;\ x^2+y^2=bx,\ (b>a).$

8.22 $\iint\limits_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy;$ S ограничена лемнискатой:

$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right).$

Задание 8.7. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями:

8.23 D: $y=\sqrt{x};\quad y=2\sqrt{x};\quad x=4.$

8.24 D: $y^2=10x+25;\quad y^2=-6x+9$

8.25 $D: x^2+y^2=4; y=2x-x^2; (x\ge 0, y\ge 0)$

.8.26 $D: y=\dfrac{a}{x^3}; y=\dfrac{b}{x^3}; (0<a<b), y^2=cx, y^2=dx (0<c<d).$

Задание 8.8. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

8.27 D: $x^2+y^2=2ax;\ x^2+y^2=2ay.$

8.28 D: $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2).$

8.29 D: $\rho=(2-\cos\varphi);\ \rho=2$ (вне кардиоиды).

8.30 D: $(x^2+y^2)^3=16x^4$

8.31 Задание 8.9. Вычислить массу плоской фигуры D, поверхностная плотность которой равна γ:

8.31 D: $x+y=1;\quad x+y=2;\quad 2x-y=0;\quad 4x-y=0;\quad \gamma(x,y)=1.$

8.32 D: $x^2+y^2\ge 9;\quad x^2+y^2\le 16;\quad x\ge 0;\quad y\le 0;\quad \gamma=xy$

IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 9.1. Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, которое содержит независимую переменную, искомую функцию и ее производные вплоть до n – порядка.

Если искомая функция - функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, и в уравнение входят частные производные, то уравнение называется уравнением в частных производных.

Обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{9.1}$$

Обыкновенное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\phi(x, y, y') = 0,\ y' = f(x, y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Функция $\varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения первого порядка, если при подстановке $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ в уравнение оно обращается в тождество относительно x. Задача нахождения решения дифференциального уравнения называется задачей интегрирования дифференциального уравнения. В простейшем случае рассмотрим уравнения

$$y' = f(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x) \text{ или } dy = f(x)dx = dF(x),$$

где $F(x)$ - одна из первообразных $f(x)$, тогда

$$y = F(x) + C = \int f(x)dx + C,$$

где C – произвольная постоянная. Таким образом, решением дифференциального уравнения является семейство кривых $y = \varphi(x, C)$.

Решение дифференциального уравнения, полученное в виде: $y = \varphi(x, C)$, *называется общим решением дифференциального уравнения.*

Решение дифференциального уравнения, полученное в виде: $\phi(x, y) = C$, *называется общим интегралом дифференциального уравнения.*

Придавая C различные численные значения, мы будем получать различные частные решения дифференциального уравнения.

§ 9.1. Уравнение с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y), \qquad (9.2)$$

Дифференциальное уравнение (9.2) является уравнением с *разделяющимися переменными.* Разделив обе части уравнения (9.2) на $f(y)$ и умножив на dx, получим уравнение с *разделенными переменными*:

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx. \qquad (9.3)$$

Воспользовавшись свойствами дифференциала первого порядка, можно

записать

$$dF(y) = \frac{dy}{f(y)}, \quad dG(x) = g(x)dx \Rightarrow dF = dG \Rightarrow F(y) = G(x) + C,$$

где $F(y)$ и $G(x)$ - первообразные функций $f(y)$ и $g(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, записанное в виде:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (9.4)$$

Уравнение (9.4) также является уравнением с *разделяющимися переменными*

Перенесем второе слагаемое в левую часть равенства. Разделим обе части равенства на $N_1(y)M_2(x)$. Получим уравнение с *разделенными переменными*:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy. \qquad (9.5)$$

Проинтегрировав правую часть уравнения (9.5) по y, а левую – по x, получаем

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \int \frac{N_2(x)}{N_1(x)}dy \qquad (9.6)$$

Пример 9.1. *Решить дифференциальное уравнение* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $(x \neq 0, y \neq 0)$

Решение: Разделим переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ и вычислим интегралы от левой и правой частей уравнения $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$. Получим следующее равенство:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x} \text{ или } xy = C.$$

<u>*Ответ:*</u> $xy = C$.

§ 9.2. Однородные уравнения

<u>*Определение 9.2.*</u> Функция $f(x,y)$ называется однородной порядка n, если при любом λ выполняется условие:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y). \qquad (9.7)$$

Определение 9.3. Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется *однородным*, если функция $f(x,y)$, стоящая в правой части равенства является однородной функцией нулевого порядка.

Для решения однородных уравнений применяют следующий метод.

Сделаем замену переменной

$$u=\frac{y}{x},\ y=ux,\ \frac{dy}{dx}=u'x+u. \qquad (9.8)$$

Тогда уравнение (9.7) примет вид:

$$u'x+u=f(x,ux). \qquad (9.9)$$

Учитывая, что $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, получим $f(x,ux)=f(1,u)$. Таким образом, уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x=f(1,u)-u. \qquad (9.10)$$

Решая его, получим:

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{du}{f_1(u)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\qquad\int\frac{du}{f_1(u)}=\ln|x|+C.$$

Пример 9.2. *Решить дифференциальное уравнение* $(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$.

Решение: Преобразуем заданное уравнение: $(2x+y)dx=-(x-2y)dy\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x-2y}$.

Сделаем замену (1.8): $u=\frac{y}{x}\Rightarrow\ y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u'x+u$.

Тогда

$$u'x+u=-\frac{2x+ux}{x-2ux}\Rightarrow\qquad u'x=-\frac{2+u}{1-2u}-u\Rightarrow u'x=-\frac{2+u+u-2u^2}{1-2u},$$

$\frac{du}{dx}x=-\frac{2+2u-2u^2}{1-2u}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим $\frac{(2u-1)du}{-2(u^2-u-1)}=\frac{dx}{x}$.

Проинтегрируем полученное уравнение

$$\int \frac{(2u-1)du}{-2(u^2-u-1)} = \left\{ (u^2-u-1)' = 2u-1 \right\} =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2-u-1)}{u^2-u-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u-1\right|.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Таким образом, получаем:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u-1\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Умножим обе части полученного равенства на -2 и, учитывая произвольность константы C, имеем:

$$\ln\left|u^2-u-1\right| = -2\ln|x| + \ln C,$$

$$\ln\left|u^2-u-1\right| + \ln x^2 = \ln C,$$

$$\ln\left|x^2u^2 - x^2u - x^2\right| = \ln C,$$

$$x^2u^2 - x^2u - x^2 = C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем:

$$y^2 - xy - x^2 = C.$$

Ответ: $y^2 - xy - x^2 = C$.

§ 9.3. Уравнения, приводящиеся к однородным

Уравнения, приводящиеся к однородным, имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+k}\right). \tag{9.11}$$

Для приведения уравнения (9.11) к однородному введем новые переменные

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta. \end{cases} \tag{9.12}$$

Тогда

$$\frac{ax_1 + a\alpha + by_1 + \beta b + c}{mx_1 + m\alpha + ny_1 + n\beta + k} = \frac{ax_1 + by_1 + \alpha a + \beta b + c}{mx_1 + ny_1 + \alpha m + \beta n + k}.$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ m\alpha + n\beta + k = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Определитель системы (9.13) $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}$.

1. Если $\delta \neq 0$, система (9.13) имеет единственное решение. В этом случае уравнение (9.11) превращается в однородное уравнение:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{mx_1 + ny_1}\right). \quad (9.14)$$

2. Если $\delta = 0$, то $an = bm$ или $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \lambda \Rightarrow a = \lambda m, b = \lambda n$.

Тогда $ax + by + c = \lambda(mx + ny) + c$. Введем новую переменную

$$z = mx + ny. \quad (9.15)$$

При этом $z' = m + ny'$ и уравнение (9.11) превращается в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{n}z' - \frac{m}{n} = f\left(\frac{\lambda z + c}{z + k}\right). \quad (9.16)$$

Пример 9.3. *Решить дифференциальное уравнение* $y' = \frac{x + 2y + 1}{3x - y - 4}$.

Решение: введем новые переменные

$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta, \end{cases}$ тогда $y_1' = \frac{x_1 + \alpha + 2y_1 + 2\beta + 1}{3x_1 + 3\alpha - y_1 - \beta - 4}$, $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 3\alpha - \beta - 4 = 0. \end{cases}$

Решая систему, найдем α и β. $\alpha = 1, \beta = -1$. Уравнение принимает вид

$$y_1' = \frac{x_1 + 2y_1}{3x_1 - y_1},$$

т.е. становится однородным. Сделаем замену $y_1 = ux_1$.

$u'x_1 + u = \frac{x_1 + 2ux_1}{3x_1 - ux_1}$, сокращая на x_1, получаем $u'x_1 = \frac{1 + 2u}{3 - u} - u \Rightarrow$

$\frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{1 + 2u - 3u + u^2}{3 - u} \Rightarrow \frac{3 - u}{u^2 - u + 1}du = \frac{dx_1}{x_1}$.

Интегрируя, находим

$$\int\frac{3-u}{u^2-u+1}du=\left\{(u^2-u+1)'=2u-1\right\}=-\frac{1}{2}\int\frac{2u-1-5}{u^2-u+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(u^2-u+1)'du}{u^2-u+1}+\frac{5}{2}\int\frac{du}{u^2-u+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right|+\frac{5}{2}\int\frac{d(u-\frac{1}{2})}{(u-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u-1}{\sqrt{3}};$$

$$\int\frac{dx_1}{x_1}=\ln\left|x_1\right|+C;$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u-1}{\sqrt{3}}=\ln\left|x_1\right|+C.$$

Возвращаясь к переменным x_1 и y_1, получим.

$-\ln\left|x_1\sqrt{y_1^2-x_1y_1+x_1^2}\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2y_1-x_1}{x_1\sqrt{3}}=C$, учитывая что $x_1=x-1$, $y_1=y+1$, окончательно получаем:

$$-\ln\left|(x-1)\sqrt{(y+1)^2-(x-1)(y+1)+(x-1)^2}\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2y-x+3}{(x-1)\sqrt{3}}=C.$$

**Ответ:** $-\ln\left|(x-1)\sqrt{(y+1)^2-(x-1)(y+1)+(x-1)^2}\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2y-x+3}{(x-1)\sqrt{3}}=C.$

§ 9.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (9.17)$$

Опишем два способа решения уравнения (9.17).

Первый способ.

Будем искать решение в виде

$$y(x)=u(x)v(x). \qquad (9.18)$$

Тогда $y'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Подставим y и y' в (9.17) получим

$$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)+P(x)u(x)v(x)=Q(x) \qquad (9.19)$$

Сгруппируем слагаемые в (9.19)

$$u'(x)v(x)+u(x)(v'(x)+P(x)v(x))=Q(x).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению:

$$v'(x)+P(x)v(x)=0. \qquad (9.20)$$

Решаем (9.20) методом разделения переменных

$$\frac{dv(x)}{dx}=-P(x)v,\quad \frac{dv(x)}{v}=-P(x)dx\Rightarrow \ln\bigl(v(x)\bigr)=-\int P(x)dx+\ln C.$$

В силу произвольности выбора функций $u(x)$ и $v(x)$, можно положить $C=1$.

$$v=e^{-\int P(x)dx}. \tag{9.21}$$

Поставим $v(x)$ в (9.19)

$u'e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\ \Rightarrow\ u'=Q(x)e^{\int P(x)dx}$, тогда

$$u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C. \tag{9.22}$$

Зная $u(x)$ и $v(x)$, найдем решение.

$$y(x)=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)e^{-\int P(x)dx} \tag{9.23}$$

Пример 9.4. *Решить дифференциальное уравнение* $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$

Решение: Сделаем замену (9.18): $y=uv,\ y'=u'v+uv'$.

$u'v+uv'-\frac{2uv}{x+1}=(x+1)^3$, $u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x+1}\right)=(x+1)^3$

Потребуем: $v'-\frac{2v}{x+1}=0$, $\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1}$, тогда $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}\Rightarrow \ln|v|=2\ln|x+1|$.

Отсюда

$$v=(x+1)^2.$$

Тогда: $u'(x+1)^2=(x+1)^3$ или $u'=x+1\Rightarrow u=\frac{(x+1)^2}{2}+C$.

Окончательно получаем: $y=\left(\frac{(x+1)^2}{2}+C\right)(x+1)^2$.

<u>*Ответ:*</u> $y=\left(\frac{(x+1)^2}{2}+C\right)(x+1)^2$.

<u>Второй способ.</u> Метод вариации произвольной постоянной.

Если в уравнении (9.17) правая часть равна 0, то такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$y'+P(x)y=0. \tag{9.24}$$

Найдем решение однородного уравнения (9.24):

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y .$$

Разделяя переменные, получаем уравнение $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$. Интегрируя

полученное уравнение, находим: $\ln y = -\int P(x)dx + \ln|C|$ или

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} . \qquad (9.25)$$

Для получения решения исходного неоднородного уравнения (9.17) заменим константу C в (1.25) функцией $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} , \qquad (9.26)$$

$$y' = (C(x)e^{-\int P(x)dx})' = C'(x)\ e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)\ e^{-\int P(x)dx} .$$

Поставим y и y' в исходное уравнение (9.17).

$$C'(x) \quad e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)\ e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)\ e^{-\int P(x)dx} = Q(x) .$$

Получим $C'(x)\ e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$ или $C'(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$. Решая полученное уравнение, находим $C(x)$.

$$C(x) = \int\left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + C_0 . \qquad (9.27)$$

Подставляя (9.27) в (9.26), окончательно получаем:

$$y(x) = \left(\int\left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + C_0\right)e^{-\int P(x)dx} . \qquad (9.28)$$

Очевидно, что решения (9.23) и (9.28) совпадают.

Пример 9.5. *Решить дифференциальное уравнение* $y' - \frac{y}{x} = \ln x$.

Решение: Решим однородное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$.

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ $\quad$ или $\quad y = xC(x)$, $\quad$ тогда $\quad y' = C'(x)x + C(x)$.

Подставим y и y' в исходное уравнение.

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = \ln x .$$

$C'(x)x = \ln x$ или $dC = \frac{\ln x}{x}dx$.

$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_0$,т.е. $C(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C_0$. Тогда окончательно имеем

$$y = x\left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_0\right).$$

<u>*Ответ:*</u> $y = x\left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_0\right)$.

§ 9.5. *Уравнение Бернулли*

Уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}. \tag{9.29}$$

Разделим обе части уравнения (9.29) на y^{α}.

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{9.30}$$

Введем новую переменную

$$z = y^{1-\alpha}, \tag{9.31}$$

тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}$. Подставив $\frac{y'}{y^{\alpha}}$ в (9.30) приходим к линейному относительно z уравнению

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x). \tag{9.32}$$

Пример 9.6. *Решить дифференциальное уравнение* $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$.

Решение: Разделим обе части уравнения на y^3: $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y^2} = x^3$, введем новую переменную, $z = y^{-2}$ тогда $z' = -2y^{-3}y'$ или $-\frac{1}{2}z' = y^{-3}y'$.

$-\frac{1}{2}z' + zx = x^3$, умножая обе части уравнения на -2, приходим к линейному (относительно z) уравнению:

$$z' - 2zx = -2x^3.$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной.

$z' - 2zx = 0$, тогда $z' = 2zx \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2xdx$, интегрируя обе части уравнения, получим.

$\ln z = x^2 + \ln C$ или $z = Ce^{x^2}$. Заменим константу $\boldsymbol{C}$ функцией $\boldsymbol{C(x)}$.

$z = C(x)e^{x^2}$, $z' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$. Подставим z и z' в уравнение.

$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = -2x^3$,

$C'(x)e^{x^2} = -2x^3$ или $C'(x) = -2x^3e^{-x^2}$.

$$C(x) = -2\int x^3e^{-x^2}dx = -\int x^2e^{-x^2}d(x^2) = \left\{-x^2 = t\right\} = -\int te^t dt = \left\{\begin{matrix} u = t, & du = dt, \\ dv = e^t, & v = e^t. \end{matrix}\right\} =$$

$$= -te^t + \int e^t dt = e^t(1-t) + C = (1+x^2)e^{-x^2} + C.$$

Тогда $z = Ce^{x^2} + x^2 + 1$, но так как $z = y^{-2}$, то окончательно получаем:

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{x2} + x^2 + 1}}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{\sqrt{Ce^{x2} + x^2 + 1}}$.

Уравнение Бернулли можно так же решать, применяя замену $y = uv$.

§ 9.6. *Уравнение в полных дифференциалах*

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (9.33)$$

если выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (9.34)$$

Пусть задана функция двух переменных $u(x,y)$, тогда ее полный дифференциал имеет следующий вид:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (9.35)$$

причем если функция $u(x,y)$ непрерывна в некоторой области, то ее смешанные производные второго порядка всегда равны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \qquad (9.36)$$

Условие (9.36) равносильно условию (9.34), если

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x},\ N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (9.37)$$

т.е. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du$. Тогда, так как $du = 0$, то $u(x,y) = C$.

Решаем любое (например, первое) из двух дифференциальных уравнений (9.37), находим:

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=C. \qquad (9.38)$$

Из (9.37) находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx)+\varphi'(y)=N(x,y). \qquad (9.39)$$

Равенство (9.39) дает возможность определить функцию $\varphi(y)$. Подставив $\varphi(y)$ в (9.38), получим решение.

Пример 1.7. *Решить дифференциальное уравнение* $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Решение: $M(x,y)=\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$,

$N(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}$, т. е. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}\Rightarrow\ u=\int\frac{2x}{y^3}dx=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}\Rightarrow\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}$, тогда $u=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}$, но так как $u=C$, то окончательно получаем: $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.

§ 9.7. Интегрирующий множитель

Если в уравнении (9.33) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (9.40)$$

то уравнение уже не является уравнением в полных дифференциалах. Попытаемся найти множитель μ, такой что

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}, \qquad (9.41)$$

где $M_1=\mu(x,y)M,\ N_1=\mu(x,y)N$,

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0. \qquad (9.42)$$

$$\frac{\partial(\mu M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial y}M(x,y)+\mu\frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial(\mu N(x,y))}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N(x,y)+\mu\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Тогда согласно (9.41)

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M(x,y)+\mu\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N(x,y)+\mu\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial\mu}{\partial x}N(x,y)=\mu\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Пусть $\mu=\mu(x)$, тогда $\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=0$.

$$-\frac{d(\ln\mu)}{dx}N(x,y)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{d(\ln\mu)}{dx}=-\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right),$$

т.е.

$$\frac{d(\ln\mu)}{dx}=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=F_1(x).$$

Если $\mu=\mu(y)$, тогда $\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=0$.

$$\frac{d(\ln\mu)}{dy}M(x,y)=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{d(\ln\mu)}{dy}=\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right), \text{ т.е.}$$

$$\frac{d(\ln\mu)}{dy}=\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)=F_2(y).$$

Таким образом, если

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=F_1(x), \tag{9.43}$$

то можно найти $\mu(x)$.

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)=F_2(y), \tag{9.44}$$

то можно найти $\mu(y)$.

Пример 9.8. *Решить дифференциальное уравнение:* $\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0$.

Решение: $M(x,y)=y+xy^2$, тогда $\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy$. $N(x,y)=-x$, тогда $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$.

Отсюда видно, что $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{1}{y+xy^2}\left(-1-1-2xy\right)=-2\frac{1+xy}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}=F(y).$$

$\frac{d(\ln\mu)}{dy}=-\frac{2}{y}$, $d(\ln\mu)=-2\frac{dy}{y}$ или $\ln\mu=-2\ln y\Rightarrow\mu(y)=\frac{1}{y^2}$. Итак, интегрирующий множитель найден. Умножим исходное уравнение на $\frac{1}{y^2}$.

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$$

$M_1 = \frac{1}{y} + x$, тогда $\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$,

$N_1 = -\frac{x}{y^2}$, тогда $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$.

Таким образом $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ или $u(x, y) = -\int \frac{x}{y^2} dy = \frac{x}{y} + \varphi(x)$.

Определим неизвестную функцию $\varphi(x)$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \varphi'(x) = M_1(x, y) = \frac{1}{y} + x$.

Отсюда $\varphi'(x) = x$ или $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$. Тогда $u(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}$. Окончательно получаем

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

Ответ: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

§ 9.8. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В общем виде линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выглядят следующим образом.

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9.45}$$

где p, q - постоянные.

Будем искать частные решения в виде:

$$y = e^{kx}. \tag{9.46}$$

Тогда $y' = ke^{kx}$, а $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим y, y' и y'' в уравнение (9.45).

$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$, сокращая на $e^{kx} \neq 0$, получим *характеристическое* уравнение.

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{9.47}$$

Характеристическое уравнение является обычным квадратным уравнением. Найдем его дискриминант $D = p^2 - 4q$.

Возможны три случая:

- $D = p^2 - 4q > 0$. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня кратности один.

$$k_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (9.48)$$

Тогда двумя частными решениями будут $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$.

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const \Rightarrow$ решения y_1, y_2 - линейно независимы. Тогда общее решение
уравнения (9.45) y_o примет вид:

$$y_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (9.49)$$

Пример 9.9. *Решить дифференциальное уравнение:* $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение: Получим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + k - 2 = 0$.

$D = 1 + 8 = 9 > 0$, тогда

$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ или $k_1 = -2, k_2 = 1$.

Окончательно получаем решение дифференциального уравнения

$$y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

<u>*Ответ:*</u> $y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

- $D = p^2 - 4q < 0$. Характеристическое уравнение имеет два различных комплексных корня кратности один.

$$k_{1,2} = \frac{p \pm i\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (9.50)$$

Введем обозначения $\alpha = -\frac{p}{2}$ и $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Тогда $k_{1,2}$ являются комплексно сопряженными числами $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}. \qquad (9.51)$$

$$y = u + iv,\ y' + iv',\ y'' = u'' + iv''.$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

u и v - являются решениями того же уравнения.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (9.52)$$

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}\left(cos(\pm\beta x) + isin(\pm\beta x)\right) =$$

$$= e^{\alpha x}(cos\beta x \pm isin\beta x).$$

$$y_1 = e^{\alpha x} cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x} sin\beta x.$$

Тогда

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} cos\beta x}{e^{\alpha x} sin\beta x} = ctg\beta x \neq const. \qquad .$$

Т.е. y_1 и y_2 - линейно независимы.
Тогда общее решение уравнения (9.45) y_o примет вид:
$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x). \tag{9.53}$$

Пример 9.10. *Решить дифференциальное уравнение:* $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Решение: Получим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$.
$D = 4 - 20 = -16 < 0$.
$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$ или $\alpha = -1, \beta = 2$.
Окончательно, согласно (9.53), получаем решение дифференциального уравнения
$y_o = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.
<u>*Ответ:*</u> $y_o = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

- $D = p^2 - 4q = 0$. Характеристическое уравнение имеет только один действительный корень кратности два $k = -\dfrac{p}{2}$.

Тогда двумя частными решениями будут $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$.
$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \dfrac{1}{x} \neq const \Rightarrow$ решения y_1, y_2 - линейно независимы. Тогда общее решение
уравнения (9.45) y_o примет вид:
$$y_o = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{9.54}$$

Пример 9.11. *Решить дифференциальное уравнение:* $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Решение: Получим и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$.
$D = 16 - 16 = 0$. $k = 2$.
Окончательно, согласно (9.54), получаем решение дифференциального уравнения
$y_o = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.
<u>*Ответ:*</u> $y_o = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

§ 9.9. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В общем виде линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выглядят следующим образом.
$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9.55}$$
где p, q - постоянные, $f(x)$ - некоторая функция.

Решение уравнения (9.55) представляется в виде

$$\boldsymbol{y = y_o + Y}, \qquad (9.56)$$

где y_o - общее решение однородного уравнения (9.45), а Y - частное решение неоднородного уравнения (9.55).

Рассмотрим два случая:

1. $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n.

а) a не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (9.55) выбираем в виде:

$$Y = Q_n(x)e^{ax}, \qquad (9.57)$$

где $Q_n(x)$ многочлен n-го порядка, записанный в общем виде:

$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$.

Из (9.57) найдем Y', Y'' и, подставив в уравнение (9.55), определим константы $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$.

Пример 9.12. *Решить дифференциальное уравнение:*

$y'' - 4y' + 3y = (x+1)e^{2x}$.

Решение: Решение данного уравнения представляется в виде $y = y_o + Y$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения y_o.

Выпишем и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 3 = 0$.

$D = 16 - 12 = 4 > 0$, тогда

$k_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ или $k_1 = 3, k_2 = 1.$

Итак, получаем общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y_o = C_1e^{3x} + C_2e^x.$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения Y.

$$Y = (Ax + B)e^{2x},$$

тогда $Y' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = e^{2x}(2Ax + A + 2B)$,

а $Y'' = 2e^{2x}(2Ax + A + 2B) + 2Ae^{2x} = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B)$. Подставим Y, Y' и Y'' в исходное уравнение.

$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - 4e^{2x}(2Ax + A + 2B) + 3(Ax + B)e^{2x} = (x+1)e^{2x}$,

$4Ax + 4A + 4B - 8Ax - 4A - 8B + 3Ax + 3B = x + 1$,

$-Ax - B = x + 1$, отсюда $A = -1, B = -1$. Т.е. $Y = -(x+1)e^{2x}$.

Окончательно получаем: $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - (x+1)e^{2x}$.

<u>*Ответ:*</u> $y = C_1e^{3x} + C_2e^x - (x+1)e^{2x}$.

б) a является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (9.55) выбираем в виде:

$$Y=x^r Q_n(x)e^{ax}, \qquad (9.58)$$

где $Q_n(x)$ многочлен n- го порядка, записанный в общем виде, r кратность корня a характеристического уравнения.

Пример 9.13. *Решить дифференциальное уравнение:* $y''-3y'+2y=3e^x$.

Решение: Решение данного уравнения представляется в виде $y=y_o+Y$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения y_o.

Выпишем и решим характеристическое уравнение: $k^2-3k+2=0$.

$D=9-8=1>0$, тогда

$k_{1,2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$ или $k_1=2, k_2=1$.

Итак, получаем общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y_o=C_1e^{2x}+C_2e^x.$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения Y.

$Y=xAe^x$, тогда $Y'=Ae^x+Axe^x=Ae^x(x+1)$, а $Y''=Ae^x(x+1)+Ae^x=e^x(Ax+2A)$.

Подставим Y, Y' и Y'' в исходное уравнение.

$e^x(Ax+2A)-3Ae^x(x+1)+2xAe^x=3e^x$,

$Ax+2A-3Ax-3A+2Ax=3$,

$A=-3$. Т.е. $Y=-3xe^x$. Окончательно получаем: $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-3xe^x$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-3xe^x$.

2. $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$.

а) $a\pm ib$ не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (9.55) выбираем в виде:

$$Y=e^{ax}(R_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx), \qquad (9.59)$$

где $R_N(x)$ и $T_N(x)$ многочлены N- го порядка, записанные в общем виде. Причем $N=\max\{n,m\}$.

Пример 9.14. *Решить дифференциальное уравнение:*

$y''-4y'+8y=2e^{3x}\sin x$.

Решение: Решение данного уравнения представляется в виде $y=y_o+Y$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения y_o.

Выпишем и решим характеристическое уравнение: $k^2-4k+8=0$.

$D=16-32=-16<0$.

$k_{1,2} = \dfrac{4 \pm 4i}{2}$ или $\alpha = 2, \beta = 2$.

Итак, согласно (9.53), получаем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y_o = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения Y. Согласно (9.59), получаем

$Y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)$, тогда

$$Y' = e^{3x}(3A\cos x + 3B\sin x - A\sin x + B\cos x) = e^{3x}((3A+B)\cos x + (3B-A)\sin x),$$

$$Y'' = e^{3x}((9A+3B)\cos x + (9B-3A)\sin x - (3A+B)\sin x + (3B-A)\cos x) =$$

$$= e^{3x}((8A+6B)\cos x + (8B-6A)\sin x).$$

Подставим Y, Y' и Y'' в исходное уравнение.

$$e^{3x}((8A+6B)\cos x + (8B-6A)\sin x) - 4e^{3x}((3A+B)\cos x + (3B-A)\sin x) +$$

$$+ 8e^{3x}(A\cos x + B\sin x) = 2e^{3x}\sin x,$$

$$(8A + 6B - 12A - 4B + 8A)\cos x + (8B - 6A - 12B + 4A + 8B)\sin x = 2\sin x,$$

$$(4A + 2B)\cos x + (4B - 2A)\sin x = 2\sin x.$$

Итак, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4A + 2B = 0, \\ 4B - 2A = 2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2A + B = 0, \\ 4B - 2A = 2. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим A и B:

$A = -\dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{2}{5}$. Т.е. $Y = e^{3x}(-\dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x)$. Окончательно получаем:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{3x}(\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x).$$

Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{3x}(\dfrac{2}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x)$.

б) $a \pm ib$ является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (9.55) выбираем в виде:

$$Y = xe^{ax}(R_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx), \tag{9.60}$$

где $R_N(x)$ и $T_N(x)$ многочлены N - го порядка, записанные в общем виде. Причем $N = \max\{n, m\}$.

§ 9.10. Системы дифференциальных уравнений. Метод исключения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \qquad (9.61)$$

Система называется нормальной, если в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а справа функции, не содержащие производных.

Проинтегрировать систему означает найти $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ обращающие все уравнения системы в тождества одновременно.

Продифференцируем первое из уравнений системы по x:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\dfrac{dy_2}{dx} + \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \qquad (9.62)$$

Подставим в первое уравнение $\dfrac{dy_2}{dx}, \dfrac{dy_3}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}$, используя остальные уравнения системы (9.60).

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \qquad (9.63)$$

Введем обозначения: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Дифференцируем вновь полученное уравнение по x и подставим $\dfrac{dy_2}{dx}, \dfrac{dy_3}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}$, используя уравнения исходной системы:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n.$$

Произведя этот процесс n – раз, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{9.64}$$

Из первых $n-1$ уравнений выразим $y_2, \cdots, y_n$ через $x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \dots, \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ и поставим в последнее уравнение. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'' \cdots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'' \cdots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'' \cdots, y_1^{(n-1)}), \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', y_1'' \cdots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{9.65}$$

Последнее из уравнений системы зависит только от y_1 и его производных. Решая его, находим: $y_1 = Y_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Подставим $y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ в выражение для $y_2, y_3, \dots, y_n$. Окончательно получаем решение:

$$\begin{cases} y_1 = Y_1(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ y_2 = Y_2(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = Y_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases} \tag{9.66}$$

Пример 9.15. *Решить систему дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = 2x - 4y - 3z. \end{cases}$$

Решение: Продифференцируем первое из уравнений системы по x: $y'' = 1 + y' + z'$.

Подставим y' и z' из системы:

$$\begin{cases} y' = x + y + z, \\ y'' = 1 + x + y + z + 2x - 4y - 3z. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y' = x + y + z, \\ y'' = 1 + 3x - 3y - 2z. \end{cases}$$

Выразим z из первого уравнения $z = y' - x - y$ и подставим во второе. $y'' = 1 + 3x - 3y - 2(y' - x - y)$ или $y'' + 2y' + y = 1 + 5x$. Решаем полученное уравнение относительно y.

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение представляется в виде (9.56): $y = y_o + Y$, где y_o - общее решение однородного уравнения, а Y - частное решение неоднородного уравнения. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения y_o. Выпишем и решим характеристическое уравнение: $k^2+2k+1=0$.

$D=0$, тогда $k=-1$.

Итак, получаем общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y_o=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения Y будем искать в виде:

$$Y=Ax+B,\quad Y'=A,\quad Y''=0.$$

Подставим Y, Y' и Y'' в исходное уравнение.

$2A+Ax+B=1+5x$, тогда

$$\begin{cases} A=5, \\ 2A+B=1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A=5, \\ B=-9. \end{cases} \Rightarrow Y=5x-9.$$

Т.е. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9$. Остается найти z. Для этого найдем y' и подставим y и y' в выражение $z=y'-x-y$.

$y'=-(C_1+C_2x)e^{-x}+C_2e^{-x}+5=e^{-x}(C_2-C_1-C_2x)+5$.

$z=e^{-x}(C_2-C_1-C_2x)+5-(C_1+C_2x)e^{-x}-5x+9-x=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14$.

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9, \\ z=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9, \\ z=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14. \end{cases}$

§ 9.11. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{9.67}$$

где a_{ij} - постоянные.

Система называется системой дифференциальных уравнений с

постоянными коэффициентами. Будем искать решение системы в виде.

$$x_1 = \lambda_1 e^{kt}, \quad x_2 = \lambda_2 e^{kt}, \ \ldots, x_n = \lambda_n e^{kt}. \qquad (9.68)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = k\lambda_1 e^{kt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = k\lambda_2 e^{kt}, \ \ldots, \frac{dx_n}{dt} = k\lambda_n e^{kt}.$$

Тогда, вместо системы дифференциальных уравнений (9.67) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} k\lambda_1 e^{kt} = a_{11}\lambda_1 e^{kt} + a_{12}\lambda_2 e^{kt} + \cdots + a_{1n}\lambda_n e^{kt}, \\ k\lambda_2 e^{kt} = a_{21}\lambda_1 e^{kt} + a_{22}\lambda_2 e^{kt} + \cdots + a_{2n}\lambda_n e^{kt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k\lambda_n e^{kt} = a_{n1}\lambda_1 e^{kt} + a_{n2}\lambda_2 e^{kt} + \cdots + a_{nn}\lambda_n e^{kt}. \end{cases} \qquad (9.69)$$

Сокращая на $e^{kt} \neq 0$, имеем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n = 0, \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22} - k)\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\lambda_n = 0. \end{cases} \qquad (9.70)$$

Однородная система имеет отличное от нуля решение, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - k) \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & (a_{nn} - k) \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.71)$$

Получили уравнение n порядка относительно k. Это уравнение называется *характеристическим* уравнением системы.

1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Для каждого k_i получаем свои значения $\lambda_j^{(i)}$ и $x_j = \lambda_j^{(i)} e^{k_i t}$.
Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1\lambda_1^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\lambda_1^{(2)}e^{k_2 t} + \cdots + C_n\lambda_1^{(n)}e^{k_n t}, \\ x_2 = C_1\lambda_2^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\lambda_2^{(2)}e^{k_2 t} + \cdots + C_n\lambda_2^{(n)}e^{k_n t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1\lambda_n^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\lambda_n^{(2)}e^{k_2 t} + \cdots + C_n\lambda_n^{(n)}e^{k_n t}. \end{cases} \qquad (9.72)$$

Пример 9.16. *Решить систему дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Решение: Будем искать решение системы в виде $x_1 = \lambda_1 e^{kt}$, $x_2 = \lambda_2 e^{kt}$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} (2-k)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + (3-k)\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-k)(3-k) - 2 = 0$ или $k^2 - 5k + 4 = 0$. Решая характеристическое уравнение, получаем: $k_1 = 1, k_2 = 4$.

Найдем $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)}$ и $\lambda_2^{(2)}$.

а. $k_1 = 1,$ тогда $(2-1)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$, пусть $\lambda_2 = 1$, тогда $\lambda_1 = -2$.

$x_1^{(1)} = -2e^t$, $x_2^{(1)} = e^t$.

б. $k_2 = 4$, тогда $(2-4)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, пусть $\lambda_2 = 1$, тогда $\lambda_1 = 1$.

$x_1^{(2)} = e^{4t}$, $x_2^{(2)} = e^{4t}$.

Таким образом: $\begin{cases} x_1 = -2C_1e^t + C_2e^{4t}, \\ x_2 = C_1e^t + C_2e^{4t}. \end{cases}$

<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} x_1 = -2C_1e^t + C_2e^{4t}, \\ x_2 = C_1e^t + C_2e^{4t}. \end{cases}$

2. *Корни характеристического уравнения различны, и среди них есть комплексные.*

$$k_1 = \alpha + i\beta \qquad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Находим $\lambda_{1,2}^{(1,2)}$, подставив корни характеристического уравнения в систему.

Воспользовавшись формулой Эйлера, решение можно выписать в виде:

$$x_i = e^{\alpha t}(C_1\lambda_i^1 \cos\beta t + C_2\lambda_i^2 \sin\beta).$$

Пример 9.17. *Решить систему дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} x_1' = -7x_1 + x_2, \\ x_2' = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Решение: Будем искать решение системы в виде $x_1 = \lambda_1 e^{kt}$, $x_2 = \lambda_2 e^{kt}$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} (-7-k)\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -2\lambda_1 + (-5-k)\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-7-k)(-5-k) + 2 = 0$ или $k^2 + 12k + 37 = 0$. Решая характеристическое уравнение, получаем: $D = 144 - 148 = -4$, $k_{1,2} = -6 \pm 2i$.

Таким образом $\alpha = -6, \beta = 2$.

Найдем λ_1 и λ_2.

а. Подставим $k_1 = -6 + 2i$ в систему

$$\begin{cases} (-7+6-2i)\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -2\lambda_1 + (-5+6-2i)\lambda_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow (-1-2i)\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Получаем: $\lambda_2 = (1+2i)\lambda_1$ при $\lambda_1^{(1)} = 1, \lambda_2^{(1)} = 1 + 2i$.

б. Подставим $k_2 = -6 - 2i$ в систему

$$\begin{cases} (-7+6+2i)\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -2\lambda_1 + (-5+6+2i)\lambda_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow (-1+2i)\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Получаем: $\lambda_2 = (1-2i)\lambda_1$ при $\lambda_1^{(2)} = 1, \lambda_2^{(2)} = 1 - 2i$.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{(-6+2i)t} + C_2 e^{(-6-2i)t}, \\ x_2 = C_1(1+2i)e^{(-6+2i)t} + C_2(1-2i)e^{(-6-2i)t}. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой Эйлера (9.52), получим

$$x_1 = e^{-6t}(C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(\cos 2t - i\sin 2t)) = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos 2t + i(C_1 - C_2)\sin 2t),$$

$$x_2 = e^{-6t}(C_1(1+2i)(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(1-2i)(\cos 2t - i\sin 2t)) =$$

$$= e^{-6t}((C_1 + C_2 + 2i(C_1 - C_2))\cos 2t + (i(C_1 - C_2) - 2(C_1 + C_2))\sin 2t).$$

Введя новые обозначения:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A_1, \\ i(C_1 - C_2) = A_2, \end{cases}$$

окончательно получаем:

$$\begin{cases} x_1 = e^{-6t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t), \\ x_2 = e^{-6t}((A_1 + 2A_2)\cos 2t + (A_2 - 2A_1)\sin 2t). \end{cases}$$

<u>*Ответ:*</u> $\begin{cases} x_1 = e^{-6t}(A_1\cos 2t + A_2\sin 2t), \\ x_2 = e^{-6t}((A_1+2A_2)\cos 2t + (A_2-2A_1)\sin 2t). \end{cases}$

3. Случай кратного корня.

Пусть среди решений характеристического уравнения имеется корень k кратности p.

Соответствующее ему решение будем искать в виде:

$$x_i = (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}t + \cdots + \lambda_i^{(p)}t^{p-1})e^{kt}. \tag{9.73}$$

Все константы λ_i^p найдем, подставив x_i в систему и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t.

Пример 9.18. *Решить систему дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u> Будем искать решение системы в виде $x_1 = \lambda_1 e^{kt}$, $x_2 = \lambda_2 e^{kt}$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} (1-k)\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + (3-k)\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-k)(3-k)+1 = 0$ или $k^2 - 4k + 4 = 0$. Решая характеристическое уравнение, получаем: $D = 16 - 16 = 0$. Уравнение имеет корень $k = 2$ кратности $p = 2$. Решение системы будем искать в виде (9.73):

$$\begin{cases} x_1 = e^{2t}(\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}t), \\ x_2 = e^{2t}(\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)}t). \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = e^{2t}(2\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} + 2\lambda_1^{(2)}t), \\ x_2' = e^{2t}(2\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + 2\lambda_2^{(2)}t). \end{cases}$$

Подставим x_1, x_2 и их производные в заданную систему. Сокращая на $e^{2t} \neq 0$, получаем:

$$\begin{cases} 2\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} + 2\lambda_1^{(2)}t = \lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}t - \lambda_2^{(1)} - \lambda_2^{(2)}t, \\ 2\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + 2\lambda_2^{(2)}t = \lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}t + 3\lambda_2^{(1)} + 3\lambda_2^{(2)}t. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} = -\lambda_2^{(1)}, \\ \lambda_1^{(2)} = -\lambda_2^{(2)}, \\ -\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} = \lambda_1^{(1)}, \\ -\lambda_2^{(2)} = \lambda_1^{(2)}. \end{cases}$$

Положив $\lambda_1^{(1)} = 1, \lambda_2^{(1)} = 1$, получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} = 1, \\ \lambda_1^{(2)} = -2, \\ \lambda_2^{(1)} = 1, \\ \lambda_2^{(2)} = 2. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = e^{2t}(C_1 - 2C_2 t), \\ x_2 = e^{2t}(C_1 + 2C_2 t). \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = e^{2t}(C_1 - 2C_2 t), \\ x_2 = e^{2t}(C_1 + 2C_2 t). \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.1. $y' = -\dfrac{y \ln y}{x \ln x}$; 9.2. $y' = 2xy + xy^2$; 9.3. $x' = t \sin t$;

9.4. $x^2 z' + z = 0$; 9.5. $y' = 2x \cos(x^2) \cos^2 y$; 9.6. $y' = (8x + 2y + 1)^2$;

9.7. $e^y (1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0$; 9.8. $x' - x \operatorname{tg} t = 0$;

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

9.9. $xydx + (x+1)dy = 0, \ y(0) = 1$; 9.10. $y' \sin x = y \ln y, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$;

9.11. $y' = 2\sqrt{y}\, lnx, \ y(e) = 1$; 9.12. $x^4 dy - y^2 dx = 0, \ y(0) = 1$;

9.13. $(y-2)dx + \operatorname{ctg} x\, dy = 0, \ y(0) = 1$; 9.14. $y' \operatorname{tg} x - y = 1, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$;

Найти общие решения (интегралы) дифференциальных уравнений:

9.15. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$; 9.16. $(x + y)dx + xdy = 0$;

9.17. $(\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx - xdy = 0$; 9.18. $(x^3 + y^3)dx - xy^2 dy = 0$;

9.19. $(y^2 - 2xy)dx = x^2 dy$; 9.20. $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$;

9.21. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.22. $y' - \frac{y}{x} = x$; 9.23. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$; 9.24. $y' - y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$;

9.25. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$; 9.26. $y' + y\,ctgx = x$; 9.27. $y' - \frac{y}{x} = x + \ln x$;

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.28. $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$; 9.29. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$;

9.30. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$; 9.31. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.32 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$ 9.33. $y'' - y = x^2 - x + 1$;

9.34. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$; 9.35. $y'' + 5y' + 6y = 3$;

9.36. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$; 9.37. $y'' - y' + y = -13\sin 2x$;

9.38. $y'' + y = e^x + \cos x$;

Проинтегрировать системы последовательным интегрированием или методом исключения

9.39. $\begin{cases} y' = z + 1, \\ z' = y - 2. \end{cases}$ 9.40. $\begin{cases} y' = z + \cos x, \\ z' = 3y - 4z + 4\cos x - \sin x. \end{cases}$

9.41. $\begin{cases} y' = y + x, \\ z' = -2y + z. \end{cases}$ 9.42. $\begin{cases} y' = -2y, \\ z' = z. \end{cases}$

Проинтегрировать системы методом Эйлера

9.43. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y - z. \end{cases}$ 9.44. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y. \end{cases}$ 9.45. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y. \end{cases}$

X. РЯДЫ

§ 10.1. Числовые ряды с положительными членами

Определение 10.1. Пусть задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. *Числовым рядом* называется сумма всех ее членов:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (10.1)$$

<u>*Определение 10.2*</u> Сумма первых n членов числового ряда называется n *-й частичной суммой.*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (10.2) \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

<u>*Определение 10.3*</u> *Суммой* ряда называется предел последовательности n-х частичных сумм.

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n \qquad (10.3)$$

Числовой ряд (10.1) называется *сходящимся*, если предел (10.3) существует и конечен.
В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Свойства сходящихся числовых рядов:

1. Если числовой ряд сходится, то сходится и ряд, полученный отбрасыванием из него k первых членов.
2. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то сходится и ряд, полученный умножением каждого члена на постоянную $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$.
3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд, полученный почленным сложением или вычитанием их членов $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.

- Необходимый признак сходимости :

Если числовой ряд сходится, то предел его n-го члена равен нулю.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad (10.4)$$

Обратное утверждение неверно.

Пример 10.1

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$

Решение

Проверим выполнение необходимого признака сходимости. $a_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$.

Вычислим предел n-го члена: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+2} = \dfrac{2}{3} \neq 0$.

Необходимый признак сходимости не выполняется.

Ответ: Ряд расходится.

- Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.

1.Первый признак сравнения.

Пусть имеется два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots \qquad (B)$$

Если члены ряда (А) не больше соответствующих членов ряда (В) $a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$, то из сходимости ряда (В) следует сходимость ряда (А).

Если члены ряда (А) не меньше соответствующих членов ряда (В) $a_n \ge b_n, \forall n \ge n_0$, то из расходимости ряда (В) следует расходимость ряда (А).

10. Второй признак сравнения

Пусть имеются два ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если предел отношения их n-ых членов $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ конечен и отличен от нуля, то ряды ведут себя одинаково: либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Для применения указанных признаков необходимо заранее знать поведение одного из рядов. Часто в качестве «пробных» используют следующие ряды:

Гармонический ряд :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. \qquad (10.5)$$

Данный ряд является расходящимся.

Ряд Дирихле :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots. \qquad (10.6)$$

Ряд Дирихле сходится, когда $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=q+q^2+q^3+\ldots \qquad (10.7)$$

Данный ряд сходится при $0<q<1$ и расходится, когда $q\ge 1$.

Пример 10.2

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

Решение

Воспользуемся первым признаком сравнения. Сравним заданный ряд с гармоническим рядом (10.5). Известно, что $\ln n<n$, поэтому $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, т.е. каждый член заданного ряда больше соответствующего члена расходящегося ряда. Таким образом, на основании первого признака сравнения делаем вывод о том, что заданный ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится.

Пример 10.3

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

Решение:

Воспользуемся вторым признаком сравнения. Сравним заданный ряд с рядом Дирихле (10.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},(p=2)$. Обозначим $a_n=\sin\frac{1}{n^2};b_n=\frac{1}{n^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\{t=\frac{1}{n^2},t\to 0\}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\ne 0,\ne\infty$$

На основании второго признака сравнения делаем вывод о том, что заданный ряд ведет себя так же как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Показатель степени

$p = 2 > 1$, поэтому ряд Дирихле сходится и, следовательно, заданный ряд сходится.
Ответ: Ряд сходится.

3.Признак сходимости Д'Аламбера.

Рассмотрим числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \qquad (10.8)$$

Заданный ряд сходится, если $l < 1$
Заданный ряд расходится, если $l > 1$.
В случае $l = 1$ данный признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 10.4

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение:
Воспользуемся признаком Д'Аламбера.

$a_n = \frac{n^n}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{(n+1) n! n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Вычислим предел отношения последующего члена к предыдущему, воспользовавшись вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Таким образом, делаем вывод о том, что заданный ряд расходится.
Ответ: Ряд расходится.

4. Радикальный признак Коши.

Рассмотрим числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если для ряда с положительными членами

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l, \qquad (10.9)$$

то

заданный ряд сходится, если $l < 1$

заданный ряд расходится, если $l > 1$.

В случае $l = 1$ данный признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 10.5

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{3n+5}\right)^{2n}$.

Решение:

Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$a_n = \left(\frac{2n+4}{3n+5}\right)^{2n}; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{3n+5}\right)^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{3n+5}\right)^{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9} < 1$$

Таким образом, на основании радикального признака Коши, делаем вывод о том, что заданный ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

5. Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают. Рассмотрим непрерывную убывающую функцию $f(x)$, такую что $f(n) = a_n$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ведут себя одинаково: либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример 10.6

Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение:

Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ и вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=$$

$$=\{\ln(x+1)=t, t_н=\ln 2, t_в=\ln(b+1)\}=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln(b+1)}\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln t\,\Big|_{\ln 2}^{\ln(b+1)}=\lim_{b\to\infty}(\ln\ln(b+1)-\ln\ln 2)=\infty$$

Несобственный интеграл расходится, следовательно, и заданный ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится.

§ 10.2. Знакочередующиеся ряды

Определение 10.4 Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Определение 10.5 Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Определение 10.6 Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся,* сам ряд сходится, а ряд, составленный из модулей – расходится.

Определение 10.7 Числовой ряд называется знакочередующимся, если любые два его соседние члены имеют разные знаки:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, a_n\ge 0 \qquad (10.10)$$

Теорема Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, a_n\ge 0$ удовлетворяют следующим условиям:

1). $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots$ (10.11)

2). $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (10.12)

То

а) заданный ряд сходится;

б) его сумма имеет знак первого члена;

в) его сумма не превосходит первого члена.

Пример 10.7

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение:

Проверим выполнение условий теоремы Лейбница (10.11) и (10.12).

$a_n = \frac{1}{n}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

1) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ для любых n. Таким образом , $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Оба условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно, заданный ряд сходится.

Выясним, сходится данный ряд абсолютно или условно.

Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Полученный ряд является гармоническим, следовательно, он расходится.

Итак, заданный ряд сходится по теореме Лейбница, а ряд, составленный из модулей, расходится. Согласно определению10.6 такой ряд называется условно сходящимся.

Ответ: Ряд сходится условно.

§ 10.3. Функциональные ряды

Определение 10.8 . Пусть задана бесконечная последовательность функций $\{u_n(x)\}$.*Функциональным рядом* называется сумма всех ее членов:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{10.13}$$

Определение 10.9 Точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ является сходящимся.

Определение 10.9 *Областью сходимости* функционального ряда называется совокупность всех его точек сходимости.

Сумма ряда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x))$ в области сходимости функционального ряда является функцией от x.

Определение 10.10 *Степенным* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n . \tag{10.14}$$

Числа c_n-называются коэффициентами степенного ряда.

<u>Теорема Абеля</u>: Если степенной ряд сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится в некоторой точке x_0', то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_0'|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число R, называемое *радиусом сходимости,* что степенной ряд сходится для любых x, таких что $|x| < R$ и расходится при любых $x : |x| > R$. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R; R)$. При $R = 0$ ряд сходится в единственной точке $x = 0$; при $R = \infty$ областью сходимости ряда является вся числовая ось.

<u>Определение 10.11</u> *Степенным рядом общего вида* называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n . \tag{10.15}$$

Степенной ряд (10.15) всегда сходится при $x = a$. Число a называют *центром сходимости.*

Областью сходимости степенного ряда (10.15) является открытый промежуток $(a-R; a+R)$

Если среди коэффициентов степенных рядов (10.14) и (10.15) нет равных нулю, то радиус сходимости может быть найден с помощью одной из формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \tag{10.16}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} \tag{10.17}$$

Если же среди c_n есть равные нулю, то область сходимости находят из неравенств (положив $u_n(x) = c_n (x-a)^n$):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \tag{10.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{u_n(x)} \right| < 1 \tag{10.19}$$

Вопрос о сходимости степенных рядов (10.14) и (10.15) на концах промежутка в точках $x_0 = \pm R$ и $x_0 = \pm R + a$ решается непосредственным исследованием числовых рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\pm R)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\pm R - a)^n$.

Пример 10.8

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$

Решение:

Коэффициенты степенного ряда $c_n = \frac{1}{2n+3} \neq 0$. Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой (10.16)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2(n+1)+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{2n+3} = 1$$

Тогда интервал сходимости ряда есть $(-1+2;1+2) = (1;2)$

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

а) $x_0 = 1$

Получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{2n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$ - знакочередующийся ряд с $a_n = \frac{1}{2n+3}$

Проверим выполнение условий Лейбница.

$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+3} = \frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3} = a_n$ -первое условие выполнено.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ -второе условие выполнено.

Условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно, полученный знакопеременный ряд сходится.

Составим ряд из модулей $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$. Сравним полученный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Воспользуемся вторым признаком сравнения .

Обозначим $a_n = \frac{1}{2n+3}, b_n = \frac{1}{n}$ и вычислим предел отношения a_n к b_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}<\infty,\neq 0$$

Гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, поэтому, согласно второму признаку сравнения, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ расходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n+3}$ сходится в точке $x_0=1$ условно.

б) $x_0=3$

Получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$. Полученный ряд исследован нами выше и установлено, что он расходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n+3}$ в точке $x_0=3$ расходится.

Ответ: Область сходимости заданного ряда $[1;3)$, причем в точке $x_0=1$ ряд сходится условно.

Пример 10.9

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{9^n}$

Решение:

Коэффициенты степенного ряда $c_{2n}=\frac{1}{3^n}, c_{2n+1}=0$, поэтому для нахождения области сходимости необходимо решить неравенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{(x-1)^{2n}}{9^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^2}{9}\right|=\frac{(x-1)^2}{9}<1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2<9\Rightarrow |x-1|<3\Rightarrow -2<x<4$$

Исследуем ряд на концах промежутка.

а) $x_0=-2$

Получаем $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2-1)^{2n}}{9^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{2n}}{9^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1$

$a_n=1; \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$-необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, полученный ряд расходится.

б) $x_0 = 4$

Получаем $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4-1)^{2n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3)^{2n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty}1$ - ряд расходится.

Ответ: Область сходимости заданного ряда $(-2;4)$.

§ 10.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Определение 10.11. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = a$.

Рядом Тейлора называют ряд :

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (10.20)$$

Если в области сходимости ряд (10.20) сходится к $f(x)$, то имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \qquad (10.21)$$

называемое разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a.

Если в разложении функции в ряд Тейлора (10.21) взять $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, называемый *рядом Маклорена:*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (10.22)$$

Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

1. $f(x) = e^x$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (10.23)$$

Область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$

2. $f(x)=\sin x$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (10.24)$$

Область сходимости: $x\in(-\infty;\infty)$

3. $f(x)=\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (10.25)$$

Область сходимости: $x \in (-\infty; \infty)$

4. $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad (10.26)$$

Область сходимости: $x \in (-1;1]$

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
$$+ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad (10.27)$$

Область сходимости: $x \in (-1;1)$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (10.28)$$

Область сходимости: $x \in (-1;1)$

Применение приведенных выше разложений элементарных функций в ряд Маклорена (10.23)-(10.28) позволяют во многих случаях разложить заданную функцию в ряд Маклорена или Тейлора не используя формул (10.21) - (10.22), требующих вычисления n-й производной.

Пример 10.10

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

Решение:

Преобразуем заданную функцию, разложив ее на простейшие дроби:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = f_1(x) - f_2(x)$$

Разложим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряд Маклорена, используя формулу (10.28):

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} = \{t = -x\} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \{t = -\frac{x}{2}\} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

Таким образом, получаем:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n$$

Ответ: Разложение $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n$$

Пример 10.11

Разложить функцию $f(x)=x\cos 2x$ *в ряд Тейлора в точке* $a=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение:

Преобразуем заданную функцию таким образом, чтобы применить формулу разложения $\cos x$ в ряд Маклорена (10.25).

$$f(x)=x\cos 2x=(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\cos 2(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=$$

$$((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2})\cos(2(x-\frac{\pi}{2})+\pi)=\{t=x-\frac{\pi}{2}\}=$$

$$=(t+\frac{\pi}{2})\cos(t+\pi)=-t\cos t-\frac{\pi}{2}\cos t=$$

$$-t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}+\frac{\pi}{2}t^{2n}}{(2n)!}$$

Учитывая сделанную замену $t=x-\dfrac{\pi}{2}$, окончательно получаем:

$$f(x)=x\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}+\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\right)$$

Ответ: Разложение функции $f(x)=x\cos 2x$ в ряд Тейлора в точке $a=\dfrac{\pi}{2}$ имеет вид:

$$f(x)=x\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}+\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\right).$$

<u>Применение степенных рядов при приближенных вычислениях.</u>

Разложение функции в степенной ряд позволяет вычислить ее приближенное значение как сумму первых n -членов ряда. Погрешность вычислений всегда можно оценить, используя, например, теорему Лейбница или явное выражение для остатка.

Пример 10.12

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{28}$ *с точностью* $\delta = 0{,}001$.

Решение:

Преобразуем заданное выражение:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{1+27} = \sqrt[3]{27(1+\frac{1}{27})} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $(1+x)^{\alpha}$ - формулой (10.27). В данном случае $\alpha = \dfrac{1}{3}, x = \dfrac{1}{27}$. Поэтому можем записать

$$\sqrt[3]{28} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{1}{27}\right)^{n} =$$

$$= 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{-(3n-4)}{3}}{n!}\cdot\frac{1}{3^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3^{4n-1}n!}$$

Полученный ряд является знакопеременным. Остаток ряда, полученный после отбрасывания первых n членов, также является знакопеременным, поэтому, согласно теореме Лейбница его сумма не превосходит первого члена. Таким образом, для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью необходимо взять сумму слагаемых по модулю превышающих заданную точность δ.

Итак,

$$a_0 = \frac{1}{3^{4\cdot 0-1}0!} = 3 > \delta = 0{,}001$$

$$a_1 = \frac{1}{3^{4\cdot 1-1}1!} = \frac{1}{27} > \delta = 0{,}001$$

$$a_2 = \frac{1}{3^{4\cdot 2-1}2!} = \frac{1}{4374} < \delta = 0{,}001$$

Таким образом, для вычисления с заданной точностью достаточно взять два первых члена ряда:

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27} \approx 3{,}037$$

Ответ: $\sqrt[3]{28} \approx 3{,}037$ с точностью до 0,001.

Степенные ряды внутри их области сходимости могут быть почленно проинтегрированы. Это свойство степенных рядов позволяет приближенно вычислять определенные интегралы, предварительно разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

Пример 10.13

Вычислить приближенно $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ *с точностью* $\delta = 0{,}1$.

Решение:

Разложим подынтегральную функцию $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ в ряд Маклорена, используя разложение (10.26):

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x^2) = \{t = x^2\} = \frac{1}{x}\ln(1+t) =$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{n}$$

Подставим полученное разложение в интеграл и поменяем местами операции суммирования и интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{n}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^1 x^{2n-1}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^{2n}}{2n}\bigg|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$$

Для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью необходимо взять сумму слагаемых по модулю превышающих заданную точность δ.

$$a_1 = \frac{1}{2\cdot 1^2} = \frac{1}{2} > \delta = 0{,}01$$

$$a_2 = \frac{1}{2\cdot 2^2} = \frac{1}{8} > \delta = 0{,}01$$

$$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3^2} = \frac{1}{18} > \delta = 0{,}01$$

$$a_4 = \frac{1}{2\cdot 4^2} = \frac{1}{32} > \delta = 0{,}01$$

$$a_5 = \frac{1}{2\cdot 5^2} = \frac{1}{50} > \delta = 0{,}01$$

$$a_6 = \frac{1}{2\cdot 6^2} = \frac{1}{72} > \delta = 0{,}01$$

$$a_7 = \frac{1}{2\cdot 7^2} = \frac{1}{98} > \delta = 0{,}01$$

$$a_8 = \frac{1}{2\cdot 8^2} = \frac{1}{128} < \delta = 0{,}01$$

Таким образом, для вычисления заданного интеграла с заданной точностью $\delta = 0{,}1$ необходимо взять семь первых членов полученного ряда:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{18} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} - \frac{1}{72} + \frac{1}{98} \approx 0{,}42$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx \approx 0{,}42$ с точностью до 0,01.

§ 10.5. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье

Определение 10.13. Пусть задана периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π.

На отрезке $[-\pi;\pi]$ рассмотрим функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \ , \qquad (10.29)$$

коэффициенты которого определены формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad (10.30)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \qquad (10.31)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \qquad (10.32)$$

Функциональный ряд (10.29) называется *тригонометрическим рядом Фурье* для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Числа a_0, a_n, b_n, вычисленные по формулам (10.30) - (10.32), называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$.

Пример 10.14

Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x) = 2x - x^2; x \in [-\pi;\pi]$.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье по формулам (10.30)-(10.32).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x - x^2)dx \frac{1}{\pi}(x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - (-\pi)^2 - \frac{\pi^3}{3} + \frac{(-\pi)^3}{3} = -\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x-x^2)\cos nxdx=\begin{Bmatrix} u=2x-x^2 & du=(2-2x)dx \\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{Bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[(2x-x^2)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x)\sin nxdx\right]=-\frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x)\sin nxdx=$$

$$\begin{Bmatrix} u=1-x & du=-dx \\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{Bmatrix}=-\frac{2}{\pi n}\left[(1-x)\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$-\frac{2}{\pi n}\left[\frac{(\pi-1)\cos\pi n-(-\pi-1)\cos(-\pi n)}{n}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]==-\frac{2}{\pi n}\frac{2\pi\cos\pi n}{n}=4\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x-x^2)\sin nxdx=\begin{Bmatrix} u=2x-x^2 & du=(2-2x)dx \\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{Bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-(2x-x^2)\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2-(-\pi)^2-2\pi+2(-\pi)}{n}\cos\pi n+\frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x)\cos nxdx\right]=$$

$$=\begin{Bmatrix} u=1-x & du=-dx \\ dv=\cos nx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left[4\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{2}{n}\left[(1-x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]\right]$$

$$=4\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (10.29), получаем искомое разложение:

$$f(x)=-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right)$$

Ответ: Разложение в ряд Фурье функции $f(x)=2x-x^2; x\in[-\pi;\pi]$ имеет вид:

$$f(x)=-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right).$$

<u>Ряды Фурье для четных и нечетных функций.</u>

Пусть $f(x)$-четная функция. Тогда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx \qquad (10.33)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (10.34)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \qquad (10.35)$$

Разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (10.36)$$

Пусть $f(x)$-нечетная функция. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \qquad (10.37)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \qquad (10.38)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (10.39)$$

Разложение в ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (10.40)$$

<u>Разложение в ряд Фурье функций, имеющих период $2l$.</u>

Пусть задана периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$.

На отрезке $[-l;l]$ ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (10.41)$$

Коэффициенты Фурье определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad (10.42)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l} dx, \qquad (10.43)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l} dx. \qquad (10.44)$$

Пример 10.15

Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l = 2$ функцию $f(x) = 2x - 1; x \in [-1;1]$.

Решение:

Найдем коэффициенты Фурье по формулам (10.42)-(10.44).

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x-1)dx = x^2 - x\Big|_{-1}^{1} = -2$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x-1)\cos\pi nx dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x-1 & du = 2dx \\ dv = \cos\pi nx & v = \dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= (2x-1)\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1}\sin\pi nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(\sin\pi n + 3\sin(-\pi n)) + \frac{2}{(\pi n)^2}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(2x-1)\sin\pi nx dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x-1 & du = 2dx \\ dv = \sin\pi nx & v = -\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{matrix}\right\} =$$

$$= -(2x-1)\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\pi n}\int_{-1}^{1}\cos\pi nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(\cos\pi n + 3\cos(-\pi n)) + \frac{2}{(\pi n)^2}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1} = -\frac{4\cos\pi n}{\pi n} = 4\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Подставляя найденные коэффициенты в разложение (10.41), получаем

$$f(x) = -1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx$$

Ответ: Разложение в ряд Фурье функции $f(x) = 2x-1; x \in [-1;1]$ имеет вид:

$$f(x) = -1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nx.$$

Задания для самостоятельного решения.

ЗАДАНИЕ 10.1. Исследовать на сходимость числовые ряды с положительными членами.

10.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$

10.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

10.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$

10.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+5n+7}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$

10.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdots(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)^n$

10.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{1}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}(n^2+1)}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

ЗАДАНИЕ 10.2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды.

10.7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$ 10.8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^n}$ 10.9 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+2)}$

10.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 10.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$ 10.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n(n+2)}$

10.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{8^n}$ 10.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^4}$ 10.15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$

ЗАДАНИЕ 10.3. Найти область сходимости ряда.

10.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{\ln n}$ 10.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ 10.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

10.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n^2}$ 10.20 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x+3)^n$ 10.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{n^2+2}{n(n+3)}}(x-5)^n$

10.22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^{2n}}{(2n+1)^3}$ 10.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 5^n}$ 10.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$

ЗАДАНИЕ 10.4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки x_0. Найти область сходимости полученного ряда к заданной функции.

10.25 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}, x_0=2$ 10.26 $f(x)=\sin^2\pi x, x_0=\frac{1}{2}$

10.27 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}, x_0=3$ 10.28 $f(x)=\ln(x^2+4x-5), x_0=2$

ЗАДАНИЕ 10.5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $0{,}001$.

10.29 $\int_0^{0,1}\frac{e^{2x}-1}{x}dx$ 10.30 $\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ 10.31 $\int_0^{0,5}\frac{\cos 3x-1}{x^2}dx$

ЗАДАНИЕ 10.6. Разложите в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$.

10.32 $f(x) = x^3,\ (-\pi, \pi)$ 10.33 $f(x) = 2x + 3,\ (-\pi, \pi)$

10.34 $f(x) = x^2,\ (-1,1)$ 10.35 $f(x) = \begin{cases} -1, \text{при } -1 \le x < 0 \\ 1, \text{при } 0 \le x < 1 \end{cases},\ (-1,1)$

ОТВЕТЫ

Глава I

1.1. $\begin{pmatrix} -3 & 31 \\ -32 & -2 \end{pmatrix}$; **1.2.** $\begin{pmatrix} 12 & 7 & 1 \\ 12 & -12 & 35 \\ -13 & -33 & -4 \end{pmatrix}$; **1.3.** а) $\begin{pmatrix} -4 \\ 39 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 15 \\ -14 & 6 & 32 \\ 25 & 6 & 58 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 51 & -11 \\ 32 & -2 \end{pmatrix}$; **1.4.** $\begin{pmatrix} 25 & 5 & 29 \\ 13 & 17 & -5 \\ -1 & 9 & -9 \end{pmatrix}$; **1.5.** а)12, б) 69, в)-182; **1.6.** а)-2, б)-8; **1.7.** а)1010, б)61; **1.8.** а) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ -23 & 12 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, в) $-\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ -23 & 12 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; **1.9.** а) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$, б)система несовместна; **1.10.** а) $x_1 = -\frac{12}{23};\ x_2 = \frac{76}{23};\ x_3 = 0$, б) $x_1 = 5{,}5 - 3{,}5C;\ x_2 = 1{,}5C - 1{,}5;\ x_3 = C$; **1.11.** а) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, б) $x_1 = \frac{7}{11}C;\ x_2 = \frac{9}{11}C;\ x_3 = C$.

Глава II

2.2. а) $3x - 4y + 11 = 0$, б) $x - 2y = 0$, в) $x = 1$; **2.3.** а) $3x - y + 11 = 0$, б) $y = -2$, в) $2x - 5y + 16 = 0$, г) $y = 2$; **2.4.** а) $y = x - 1$, б) $y = -\sqrt{3}x + 1 + 2\sqrt{3}$; **2.5.** а) $3x - 4y + 10 = 0$, б) $2x + y - 4 = 0$; **2.6.** а) $2x + 3y - 4 = 0$, б) $2x - 3y + 8 = 0$; **2.7.** а) $\varphi = arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$, б) $\varphi = 0$, в) $\varphi = 0$; **2.8.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$; **2.9.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Глава III

3.1. 0; **3.2.** $\frac{5}{7}$; **3.3.** ∞; **3.4.** $\frac{1}{5}$; **3.5.** 3; **3.6.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$; **3.7.** $\frac{1}{9}$;

3.8. $\frac{2}{5}$; **3.9.** $\frac{2}{3}$; **3.10.** 0; **3.11.** 1; **3.12.** 2; **3.13.** $\frac{1}{2}$; **3.14.** $\frac{3}{4}$;

3.15. e^{15}; **3.16.** $\boldsymbol{e\sqrt[3]{e}}$; **3.17.** 1.

3.18. 2; **3.19.**0; **3.20.** ∞; **3.21.** $\frac{3}{2}$; **3.22.** $-\frac{2}{5}$; **3.23.** $\frac{5}{6}$; **3.24.** ∞;
3.25. -1; **3.26.** 0; **3.27.** -1; **3.28.** $\frac{1}{4}$; **3.29.** $\frac{1}{18}$; **3.30.** $\frac{1}{3}$; **3.31.** 144;
3.32. -2; **3.33.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ **3.34.** 1; **3.35.** $\pm\frac{5}{2}$.

3.36. 1; **3.37.** $\frac{3}{7}$; **3.38.** $\boldsymbol{\frac{2}{5}}$; **3.39.** 4; **3.40.** $\frac{3}{2}$; **3.41.** $\frac{9}{2}$; **3.42.** $\frac{5}{2}$;
3.43. 0; **3.44.** $\frac{1}{10}$; **3.45.** $\frac{1}{2}$; **3.46.** $\frac{2}{\pi}$; **3.47.** $-\frac{a}{\pi}$; **3.48.** $-\sqrt[3]{4}$; **3.49.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3.50. 2; **3.51.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **3.52.** 6; **3.53.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3.54. e^2; **3.55.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$; **3.56.** 0; **3.57.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$; **3.58.** a; **3.59.** $\frac{1}{a}$;
3.60. $\frac{1}{4}$; **3.61.**$-\frac{2}{3}$ **3.62.** $\frac{1}{5}$; **3.63.** $\frac{1}{2}$; **3.64.** $-2e$; **3.65.** $\boldsymbol{\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}}$;
3.66. 2; **3.67.** $\frac{1}{2\pi}$ **3.68.**$-\frac{4}{\pi}$; **3.69.** -1; **3.70.** -2; **3.71.** -2π.

Глава IV

4.51 $\frac{16}{13}$, **4.52** 2, **4.53** $\frac{a^2}{b^2}$,**4.54** $+\infty$,**4.55** $\frac{1}{2}$, **4.56**2, **4.57** $-\frac{5}{3}$, **4.58** 2, **4.59**2, **4.60**$-\frac{1}{2}$, **4.61** 0, **4.62** 1, **4.63** 1, **4.67** $y_{max} = y(0) = 1$, **4.68**$y_{max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; $y_{min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, **4.69** $y_{max} = y(0) = 1$; $y_{min} = y(1) = -2$, **4.70** $x_k = \frac{\pi k}{2}$; $y_{min} = y\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 0$, при $k = 2n$; $y_{max} = y\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 1$, при $k = 2n-1$, **4.71**$y_{\text{наим}} = y(-4) = -41$; $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 40$, **4.72**$y_{\text{наиб}} = y(2) = 10$; $y_{\text{наим}} = y(0) = -10$, **4.7** $y_{\text{наиб}} = y(e) = e^2$; $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$, **4.74** $y_{\text{наиб}} = y(1) = 1$; $y_{\text{наим}} = y(2) = 2(1-ln2)$, **4.75** $(1;-2)$, **4.76** $(1;2)$, **4.77** $(-2;3)$, **4.78** *нет* , **4.79** *нет,* **4.80** $(0;2)$.

Глава VI

6.13 $\left(\frac{3}{8}(2+x^2)\sqrt[3]{2+x^2}+C\right)$,**6.14**$\left(-\frac{1}{2(5+\sin x)^2}+C\right)$, **6.15**$\left(\frac{1}{6}\ln\left|2x^3+3\right|+C\right)$,

6.16 $\left(\ln\left(1+\sin^2 x\right)+C\right)$, **6.17** $\left(\ln\sqrt{x^2+4}+C\right)$, **6.18** $\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x^2+C\right)$,

6.19 $\left(\frac{2}{\ln 5}\sqrt{5^x-1}+C\right)$, **6.20** $\left(\frac{\ln\left(5^x+\sqrt{25^x-1}\right)}{\ln 5}+C\right)$, **6.21** $\left(2\sin\sqrt{x}+C\right)$,

6.22 $\left(\ln\left|\ln(x+2)\right|+C\right)$,**6.23** $\left(\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+C\right)$,**6.24** $\left(\frac{1}{9}\ln^3\left(x^3+1\right)+C\right)$,

6.25 $\left(x\ln 5x-x+C\right)$, **6.26** $\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\right)$,

6.27 $\left(x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C\right)$, **6.28** $\left(\left(1-x^2\right)\cos x+2x\sin x+C\right)$,

6.29 $\left(\frac{1}{4}e^{2x}\left(6x^2-6x+13\right)+C\right)$, **6.30** $\left(\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)+C\right)$,

6.31 $\left(\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x+\sin x)+C\right)$, **6.32** $\left(\frac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C\right)$,

6.33 $\left(C-\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)\right)$,**6.34** $\left(\sqrt{x}=t;\quad 2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C\right)$,

6.35 $\left(x^2=t;\quad \frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^4-2x^2+2\right)+C\right)$, **6.36** $\left(\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)+C\right)$,

6.37 $\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C\right)$, **6.38** $\left(-\frac{1}{x-5}+C\right)$, **6.39** $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C\right)$,

6.40 $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C\right)$, **6.41** $\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+5\right|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C\right)$,

6.42 $\left(\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+5/2\right)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C\right)$,

6.43 $\left(-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C\right)$, **6.44** $\left(\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x-3}\right|+C\right)$,

6.45 $\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^4+x^2+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C\right)$,

6.46 $\left(\ln\left|x^4+2x^2-3\right|-\frac{9}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}\right|+C\right)$,

6.47 $\left(-6\ln|x|+6\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C\right)$, **6.48** $\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\right)$,

6.49 $\left(\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\\ +\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\end{array}\right)$, **6.50** $\left(\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)^2+\frac{3}{x-2}+C\right)$,

6.51 $\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C\right)$, **6.52** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}+C\right)$,

6.53 $\left(\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x^2+1}+C\right)$, **6.54** $\left(\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C\right)$, **6.55** $\left(-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+C\right)$,

6.56 $\left(\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}+C\right)$, **6.57** $\left(\ln\frac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}+C\right)$,

6.58 $\left(2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C\right)$, **6.59** $\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C\right)$,

6.60 $\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{3}{5}x-\frac{9}{10}\right)+C\right)$, **6.61** $\left(\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C\right)$,

6.62 $\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C\right)$, **6.63** $\left(-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}+C\right)$, **6.64** $\left(-\frac{1}{4}e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}}+C\right)$,

6.65 $\left(\sqrt{1-x}\cdot\left(\sqrt{x}-2\right)-\arcsin\sqrt{x}+C\right)$, **6.66** $\left(-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C\right)$,

6.67 $\left(3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\cdot\left(\frac{4}{7}\sqrt[4]{x}-\frac{3}{7}\right)+C\right)$, **6.68** $\left(\frac{50-x^2}{\sqrt{25-x^2}}+C\right)$,

6.69 $\left(-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1}+C\right)$, **6.70** $\left(-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+`1}+C\right)$,

6.71 $\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C\right)$, **6.72** $\left(-\frac{3}{5}\cos^{5/3}x+\frac{6}{11}\cos^{11/3}x-\frac{3}{17}\cos^{17/3}x+C\right)$,

6.73 $\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\right)$, **6.74** $\left(\ln\left|\operatorname{tg} x\right|-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+C\right)$,

6.75 $\left(2\operatorname{tg} x\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg}^2 x+1\right)+C\right)$, **6.76** $\left(\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x+C\right)$,

6.77 $\left(\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C\right)$, **6.78** $\left(\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C\right)$,

6.79 $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C\right)$, **6.80** $\left(-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C\right)$,

6.81 $\left(-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\ln\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C}\right)$, **6.82** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C\right)$,

6.83 $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C\right)$, **6.84** $\left(\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C\right)$, **6.85** $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{4}+C\right)$,

6.86 $\left(\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x-5}{\mathrm{tg}\,x}\right|+C\right)$,**6.87** $\left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\mathrm{tg}\,x-`1}\right|+C\right)$, **6.88** $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{2}+C\right)$.

Глава VII

7.1 (1),**7.2** $\left(\frac{1}{16}\right)$, **7.3** $\left(\frac{\pi}{2}\right)$,**7.4**$\left(\frac{7}{4}\right)$,**7.5**$\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$,**7.6** $\left(\frac{1}{4}\right)$,**7.7** $\left(5\left(1-\sqrt[5]{16}\right)\right)$,

7.8 $\left(-\frac{1}{e}\right)$,**7.9** $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$,**7.10**$(1)$,**7.11**$\left(\frac{e^{\pi}-2}{5}\right)$,**7.12** $\left(8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right)$,**7.13**$\left(4\text{ ед.}^2\right)$,

7.14 $\left(169\pi^2\text{ ед.}^2\right)$,**7.15**$\left(2\text{ ед.}^2\right)$,**7.16** $\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{a}^2\text{ ед.}^2\right)$,**7.17** $\left(\frac{40}{3}\sqrt{5}\text{ ед.}^2\right)$,

7.18 $\left(\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right)\text{ ед.}\right)$, **7.19** $(2\pi a\text{ ед.})$, **7.20**$\left(\frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\text{ ед.}\right)$.

Глава VIII

8.1 $\left(\frac{20}{3}\right)$; **8.2** (1); **8.3** $\left(\frac{1}{12}\right)$; **8.12** $\left(\frac{5}{4}\pi\right)$; **8.13** $\left(-\frac{49}{12}\right)$;**8.14** (6);**8.15**$\left(\frac{1}{2}e-1\right)$; **8.16** (1); **8.17** (6);**8.18** $\left(\frac{1}{2}R^2\right)$; **8.19**$\left(\frac{8}{3}\right)$;**8.20** $(2a^2\pi)$; **8.21**$\left(\frac{7\left(a^4-b^4\right)}{1536}\right)$; **8.22**$\left(\frac{1}{3}a^4\right)$; **8.23**$\left(\frac{16}{3}\right)$; **8.24** $\left(\frac{16\sqrt{15}}{3}\right)$; **8.25**$\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$;
8.26 $\left(\frac{7}{6}\left(b^{3/7}-a^{3/7}\right)\left(d^{2/7}-c^{2/7}\right)\right)$; **8.27** $\left(a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)$; **8.28**$(8)$; **8.29**$(8-\pi)$; **8.30**$(6\pi)$; **8.31**$\left(\frac{1}{5}\right)$; **8.32**$\left(\frac{175}{8}\right)$.

Глава IX

9.1 $\ln|\ln y|+\ln|\ln x|=C$; **9.2** $\frac{y}{y+2}=Ce^{x^2}$; **9.3** $x=sint-tcost+C$;

9.4 $z=Ce^{\frac{1}{x}}$; **9.5** $\mathrm{tg}\,y-\sin x^2=C$**;** **9.6** $8x+2y+1=2tg(4x+C)$;
9.7 $1+e^y=C(1+x^2)$; **9.8** $x=\frac{C}{\cos t}$ **;** **9.9** $y=(x+1)e^{-x}$; **9.10** $y=1$;

9.11 $\sqrt{y}=xlnx-x+1$; **9.12** $y=\frac{3x^3}{(1+2x^3)}$; **9.13** $y-2=-\cos x$;

9.14 $y=2\sin x-1$; **9.15** $y^2+2xy-x^2=C$**;** **9.16** $x^2+2xy=C$; **9.17** $1+2Cy-C^2x^2=0$; **9.18** $\left(\frac{y}{x}\right)^3-3lnx=C$**;** **9.19** $\frac{y-3x}{y}=Cx^3$;

9.20 $lny+\sqrt{\frac{x}{y}}=C$; **9.21** $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=C$; **9.22** $y=x^2+C$; **9.23** $y=\frac{1}{6}(x^4+C\frac{6}{x^2})$;

9.24 $y=\frac{x+C}{\cos x}$; **9.25** $y=\frac{e^x+C}{x}$; **9.26** $y=\frac{C}{\sin x}+1-x\,ctgx$;

9.27 $y=x^2+\frac{1}{2}x\ln^2 x+Cx$; **9.28** $\frac{y}{x}=C$; **9.29** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; **9.30** $x+ye^{\frac{x}{y}}=0$;

9.31 $x^2+y^2-xy+x-y=C$; **9.32** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}+x^2+3x+\frac{7}{2}$;

9.33 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2+x-3$; **9.34** $y=C_1+C_2e^{4x}+x^3+x$;

9.35 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{2}$; **9.36** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\sin x+2\cos x$;

9.37 $y=e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+3\sin 2x-2\cos 2x$;

9.38 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x\sin x+e^x)$;

9.39 $y=C_1e^x-C_2e^{-x}+2,\ z=C_1e^x+C_2e^{-x}-1$;

9.40 $y=C_1e^{-x}-C_2e^{-3x},\ z=C_1e^{-x}+3C_2e^{-3x}+\cos x$; **9.41** $y=C_1e^x-x-1$
$z=-2C_1xe^x+C_2e^x-2x-4$; **9.42** $y=C_1e^{-2x},\ z=C_2e^x$;

9.43 $y=(C_1+C_2)\cos x+(-C_1+C_2)\sin x,\ z=C_1\cos x+C_2\sin x$; **9.44**
$y=C_1\cos x+C_2\sin x,\ z=C_2\cos x-C_1\sin x$; **9.45** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$,
$z=2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}$.

Глава X

10.1 а) сходится, б) расходится, в) сходится; **10.2** а) расходится , б) сходится, в) сходится; **10.3** а) расходится , б) сходится, в) сходится;
10.4 а) расходится, б) сходится, в) сходится; **10.5** а) расходится , б) расходится, в) сходится; **10.6** а) сходится , б) сходится, в) сходится;
10.7 сходится условно; **10.8** сходится абсолютно; **10.9** сходится условно;
10.10 сходится условно; **10.11** сходится условно; **10.12** расходится;
10.13 сходится абсолютно;
10.14 расходится ; **10.15** сходится абсолютно; **10.16** $(-2,0]$; **10.17**(-1,5);
10.18 $(-e,e)$; **10.19** $[-1,3]$;
10.20 $\left(-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)$; **10.21**(4,6) ; **10.22** $[-4,-2]$; **10.23** (0,10]; **10.24** $(-3,-1)$;

10.25 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n$; **10.26** $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2(2n)!}$

10.27 $\frac{1}{\sqrt{e^3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^n n!}$; **10.28** $ln7+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+7^{n+1}}{(n+1)7^{n+1}}(x-2)^n$;

10.29 0,211; **10.30** 0,118; **10.31** -2,116 ; **10.32** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$;

10.33 $3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$; **10.34** $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi x}{n^2}$;

10.35 $1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$.

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович
Гойко Владимир Иосифович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие к текстовым заданиям по одноименному курсу для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 04.07.11.
Рег. № 9Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by