Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Информатика»

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

ПРАКТИКУМ
по выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 1-40 04 01
«Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2019

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73
М54

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 8 от 05.03.2018 г.*)

Составитель *В. Ф. Велесницкий*

Рецензент: доц. каф. «Информационные технологии» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *В. В. Комраков*

М54 **Методы** оптимизации и управления : практикум по выполнению лаборатор. работ для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / сост. В. Ф. Велесницкий. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 36 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-406-3.

Предлагается шесть лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации и управления» для совершенствования навыков в области линейного программирования. Особое внимание уделяется изучению линейных уравнений.

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения.

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-535-406-3

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Методы оптимизации и управления» позволяет расширить теоретические и практические знания в рамках математического программирования.

Курс направлен на изучение задач и подходов их решения в рамках теории математического программирования. Данный практикум предполагает отработку алгоритмов решения задач на практике, в том числе с использованием электронных вычислительных систем.

Ключевой задачей курса является задача линейного программирования (ЗЛП). В общем виде математическая формулировка основной задачи линейного программирования выглядит следующим образом.

Требуется найти значения действительных переменных x_1, x_2, …, x_n, при которых *целевая функция* (показатель эффективности)

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c$$

принимает экстремальное значение при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,$$

где a_{ij}, b_i, c_j, c – заданные постоянные величины, i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, …, n, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Заметим, что знак «$\le$» в ограничительных условиях выбран условно (для определенности), так как, например, неравенство $(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \ge b_i$ всегда можно заменить на эквивалентное ему неравенство $(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \le -b_i$, а уравнение $(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = b_i$ – на систему неравенств $(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \ge b_i$ и $(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) \le b_i$. Стоит отметить, что на практике сведение уравнений к неравенствам, как правило, осуществляют другим способом. Если все ограничительные условия, накладываемые на элементы решения, кроме требования $x_j \geq 0$, являются уравнениями, то в этом случае задачу линейного программирования называют *канонической задачей линейного программирования* (КЗЛП).

Точку или точки (если их несколько), удовлетворяющие системе ограничений, называют *допустимым решением* (*планом*) задачи линейного программирования и обозначают $\overline{X}$. Множество всех допустимых решений называют *областью допустимых решений* (ОДР). Допустимое решение, в котором достигается экстремальное значение целевой функции, называют *оптимальным решением* (*планом*) задачи линейного программирования и обозначают $\overline{X}_{\text{опт}}$.

Формулировку общей задачи линейного программирования (ОЗЛП) можно записать более компактно:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c \rightarrow \max(\min);$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; x_k \geq 0, \; k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Заметим, что лабораторные работы № 1, 2 выполняются вручную, остальные требуется решить с помощью ЭВМ (т. е. написать программу на любом языке программирования высокого уровня). Теорию можно найти в списке литературы. Основой для составления работ является [3].

Лабораторная работа № 1

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: изучить графический метод решения задачи линейного программирования.

Теоретические сведения

Требуется решить задачу в следующей формулировке. Найти значения действительных переменных x_1, x_2, при которых *целевая функция*

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c$$

принимает экстремальное значение при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases}$$

Прежде чем перейти к описанию указанного алгоритма, напомним одно понятие. *Линией уровня* функции $f(x_1, x_2)$ называется множество всех точек пространства R^2, в которых функция принимает некоторое постоянное значение. Согласно этому определению, для целевой функции $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c$ произвольная линия уровня L_0 – это прямая с вектором нормали $\vec{c}(c_1, c_2)$.

Теорема. *Значения целевой функции $L(X)$ в точках линии уровня L_0 возрастают, если линию уровня перемещать в направлении вектора нормали $\vec{c}$, и убывают, если линию уровня перемещать в направлении, противоположном направлению вектора нормали.*

Сформулированные теоремы позволяют представить *алгоритм решения ЗЛП графическим методом*:

Шаг 1. Находят область допустимых решений системы ограничений:

1.1. Если ОДР = ∅, то задача неразрешима. Конец.

1.2. Если ОДР = ∅, то переходят к шагу 2.

Шаг 2. Строят вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$.

Шаг 3. Проводят линию уровня L_0 так, чтобы она имела с ОДР общие точки.

Шаг 4. Перемещают линию уровня по направлению вектора $\vec{c}$ для задачи на максимум и в направлении, противоположном $\vec{c}$, для задачи на минимум. Перемещение производится до линии уровня, которая является границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР:

4.1. Если такой линии не существует, то:

4.1.1. $L_{\max} = +\infty$ при решении ЗЛП с максимизационным критерием.

4.1.2. $L_{\min} = -\infty$ при решении ЗЛП с минимизационным критерием.

В обоих случаях задачу считают неразрешимой. Конец.

4.2. Если же указанная линия уровня существует, то точка, в которой целевая функция достигает максимального (минимального) значения, находится на этой прямой, обозначаемой $L_0^+(L_0^-)$.

4.2.1. Если линия уровня не параллельна ни одной из сторон ОДР, то это – угловая точка ОДР.

4.2.2. Если линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в этом случае возможны варианты: эта точка –

а) угловая точка ОДР;

б) любая точка соответствующей стороны.

Переходят к следующему шагу.

Шаг 5. Находят координаты точек экстремума и значение целевой функции в них:

5.1. Если задача имеет единственное решение (случаи 4.2.1, 4.2.2а), то находят координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней. Конец.

5.2. Если же имеет место случай 4.2.2б, то говорят, что задача имеет альтернативный оптимум и ее общее решение находится по формуле $\overline{X}_{\text{опт}} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$, где $0 \le \lambda \le 1$, X_1, X_2 – оптимальные решения в угловых точках ОДР (если такие, конечно, имеются). Конец.

Пример. Найти значения переменных, при которых функция $L(X) = 5{,}2x_1 - x_2$ принимает экстремальные значения при условии, что:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Введем на плоскости прямоугольную систему координат OX_1X_2.

Найдем решение максимизационной задачи.

Шаг 1. Находим ОДР (область допустимых решений).

Сначала построим граничные прямые (по точкам их пересечения с координатными осями):

$$2x_1 + 5x_2 = 10 \text{ по точкам } (5;\ 0),\ (0;\ 2),$$

$$x_1 - 3x_2 = 3 \text{ по точкам } (3;\ 0),\ (0;\ -1),$$

$$-x_1 + x_2 = 1 \text{ по точкам } (-1;\ 0),\ (0;\ 1).$$

Затем, используя точку $O(0;\ 0)$, определим соответствующие полуплоскости. Пересечением полученных полуплоскостей является неограниченная многогранная область, изображенная на рис. 1.1. Это и есть искомая ОДР, так как полученная область располагается в первой четверти плоскости Ox_1x_2.

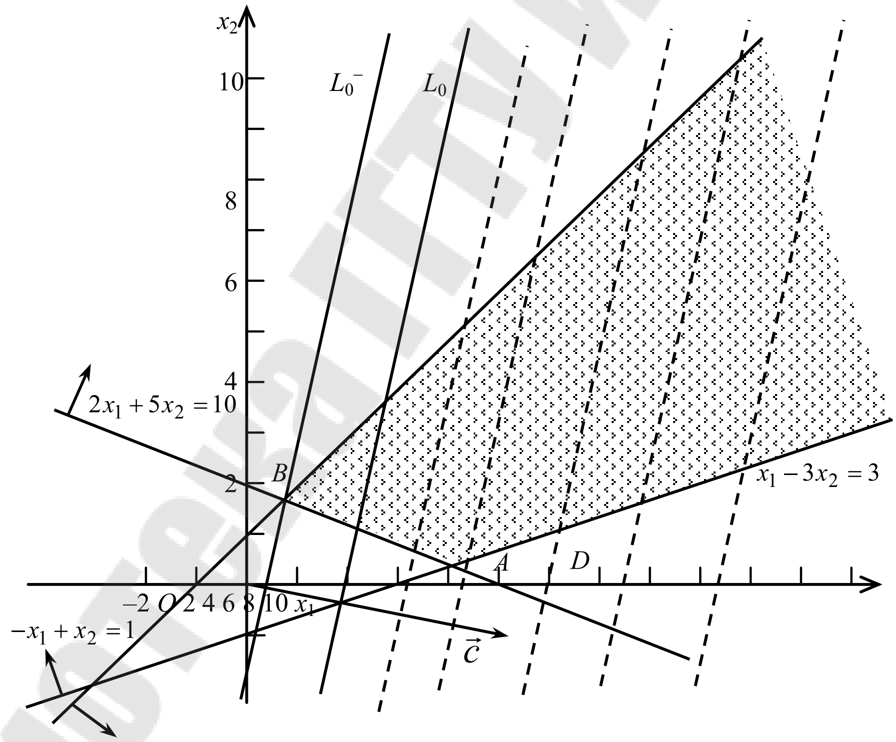

Рис. 1.1. Неограниченность области допустимых решений и целевой функции

Шаг 2. Строим вектор $\vec{c}\,(5;\ 2;\ -1)$.

Шаг 3. Проводим линию уровня L_0 таким образом, чтобы она имела с ОДР общие точки.

Шаги 4–5. Перемещаем L_0 по направлению вектора $\vec{c}$ до линии уровня, которая являлась бы границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Однако закончить указанное перемещение невозможно. Из рис. 1.1 видно, что какую бы линию уровня в направлении вектора нормали ни провести (штрихованные прямые на чертеже), любая из них пересекает ОДР. Следовательно, $L_{\max} = +\infty$. Это означает, что задача на максимум неразрешима.

Теперь найдем значения переменных, при которых целевая функция минимизируется. Шаги 1–3 точно те же, что и при решении максимизационной задачи.

Шаг 4. Перемещаем линию уровня L_0 в направлении, противоположном вектору $\vec{c}$, до линии, являющейся границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Такой линией является прямая L_0^-, проходящая через точку B. Следовательно, $L_{\min} = L(B)$.

Шаг 5. Координаты точки B определяются как пересечение прямых $2x_1 + 5x_2 = 10$ и $-x_1 + x_2 = 1$. Решая соответствующую систему уравнений, найдем координаты точки B: $x_1 = 5/7$ и $x_2 = 12/7$. Таким образом, $L_{\min} = 2$.

Варианты с заданиями

Задание. Графическим методом решить следующие задачи (письменно):

1. $z = x_1 - x_2 + x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \le 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	2. $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
3. $z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	4. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$

5. $z=-x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}-2x_1+x_2-3x_3+2x_4=2,\\ -3x_1-2x_2+x_3+x_4=3,\\ x_i\ge 0,\ i=1,3,4\end{cases}$	6. $z=x_1-2x_3+3x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=4,\\ x_1+x_2+x_3=5,\\ 2x_1+x_2-x_4\ge -7,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
7. $z=-x_1+x_2-5x_3+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1+x_3+x_4=3,\\ 2x_1-x_2-2x_3=1,\\ 2x_1-x_2+3x_3\ge 2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$	8. $z=-x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-x_4=4,\\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4=1,\\ x_i\ge 0,\ i=1,3,4\end{cases}$
9. $z=2x_1+3x_2+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1-x_2+x_4=2,\\ 2x_1+5x_2-x_3=10,\\ -2x_1+5x_2+x_5=10,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}\end{cases}$	10. $z=-x_1+x_2+3x_3+3x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}-2x_1+3x_3+2x_4=6,\\ -4x_2+x_3+4x_4=4,\\ x_1-x_2+x_3\ge 1,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
11. $z=4x_1-2x_2+x_3-x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1-x_2+11x_3-2x_4=2,\\ 3x_1+2x_2-x_3+4x_4=3,\\ -x_1-2x_2+x_4\le 2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$	12. $z=x_1-2x_2+4x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=1,\\ 3x_1+x_3-2x_4=2,\\ 4x_1+x_2+x_4\le 2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
13. $z=-4x_1+3x_2-x_5+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-1,\\ x_1-3x_2-x_4=-13,\\ 4x_1+x_2+x_5=26,\\ x_1-3x_2+x_6=0,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,6}\end{cases}$	14. $z=x_1-2x_2-x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=20,\\ x_1+x_3+3x_4=8,\\ x_1+x_5=2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}\end{cases}$
15. $z=x_1+x_2+x_3-x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=3,\\ x_1-x_2+5x_4=2,\\ x_1-2x_2-x_4\le 1,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}\end{cases}$	16. $z=3x_1-2x_3+x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=4,\\ x_2+x_3+x_4=5,\\ -x_1+2x_3+x_4\le 2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$

17. $z = 5x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	18. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
19. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$	20. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
21. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max(\min)$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \leq 13, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	22. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$
23. $z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$	24. $z = x_1 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} -x_1 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 72, \\ -3x_3 + 11x_4 - x_5 = 16, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$
25. $z = 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$, $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	26. $z = -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to \max(\min)$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_6 = 3, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Задачи линейного программирования.
2. Алгоритм решения ЗЛП графическим методом.
3. Постановка производственной задачи.

Лабораторная работа № 2

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: изучить симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

Теоретические сведения

Рассмотрим ручной вариант симплекс-метода. Приведем алгоритм, не рассматривая подробно теорию симплекс-метода.

1. Общая задача линейного программирования приводится к каноническому виду, т. е. путем введения новых дополнительных неотрицательных переменных все неравенства, входящие в математическую модель, превращаются в равенства, а все переменные, на которые не наложены требования неотрицательности, представляются в виде разности новых неотрицательных переменных. Целевая функция при этом минимизируется.

2. Определяется ранг матрицы A системы уравнений $\sum_{j=1}^{n+t} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, ..., m$; канонической задачи: пусть $rank\ A = k$. После этого базисные переменные выражаются через свободные. Как правило, базис образуют вновь введенные переменные, но это не обязательно. Допустим, базис образуют первые k переменных. Выразим их через свободные, записывая, как и при реализации алгоритма жордановых исключений, свободные переменные со знаком «–». Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = b_{10} - b_{1,k+1}x_{k+1} - b_{1,k+2}x_{k+2} - ... - b_{1,n+t}x_{n+t}, \\ x_2 = b_{20} - b_{2,k+1}x_{k+1} - b_{2,k+2}x_{k+2} - ... - b_{2,n+t}x_{n+t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = b_{k0} - b_{k,k+1}x_{k+1} - b_{k,k+2}x_{k+2} - ... - b_{k,n+t}x_{n+t}. \end{cases}$$

3. Подставим выражения для базисных переменных в целевую функцию. После этого в ней будут только свободные переменные с некоторыми коэффициентами перед ними. В целевой функции также запишем свободные переменные со знаком «–»:

$$\overline{L}(X) = \overline{c_0} + \overline{c_{k+1}}(-x_{k+1}) + \overline{c_{k+2}}(-x_{k+2}) + ... + \overline{c_{n+t}}(-x_{n+t}).$$

Для полученной системы и целевой функции составляется таблица для жордановых исключений, так называемая симплекс-таблица:

Базисные	Свободные				
	b_{i0}	x_{k+1}	x_{k+2}	…	x_{n+t}
x_1	b_{10}	$b_{1,\,k+1}$	$b_{1,\,k+2}$	…	$b_{1,\,n+t}$
x_2	b_{20}	$b_{2,\,k+1}$	$b_{2,\,k+2}$	…	$b_{2,\,n+t}$
…	…	…	…	…	…
x_k	b_{k0}	$b_{k,\,k+1}$	$b_{k,\,k+2}$	…	$b_{k,\,n+t}$
$\overline{L}(X)$	$\overline{c_0}$	$\overline{c_{k+1}}$	$\overline{c_{k+2}}$	…	$\overline{c_{n+t}}$

Выясняется, имеются ли в последней строке таблицы положительные элементы, кроме $\overline{c_0}$. Пусть, например, коэффициент $\overline{c_{k+1}} > 0$. Значит, увеличивая переменную x_{k+1}, мы уменьшаем слагаемое $\overline{c_{k+1}}(-x_{k+1})$, а значит, и целевую функцию. Следовательно, опорный план, в котором переменная x_{k+1} имеет нулевое значение, поскольку является свободной, не оптимален. Но ненулевое значение переменная x_{k+1} может принять, если будет базисной. Значит, ее надо перевести в базисные. Столбец, содержащий положительный коэффициент в последней строке, может стать разрешающим столбцом. Если столбцов с положительными элементами в последней строке несколько, то в качестве разрешающего столбца может быть выбран любой из них. Для уточнения номера разрешающего столбца надо перейти к п. 4. Если же в последней строке положительных элементов нет, то процесс вычисления завершен, и опорное решение, соответствующее последней таблице, будет оптимальным. Выписываем значение целевой функции, даем интерпретацию полученных результатов. Конец.

Пусть столбец, который может стать разрешающим, имеет номер j, т. е. $\overline{c_j} > 0$. Это означает, как уже говорилось выше, что можно уменьшить значение целевой функции путем увеличения значения x_j, оставляя все другие свободные переменные без изменений, т. е. равными нулю. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 = b_{10} - b_{1j}x_j \geq 0, \\ x_2 = b_{20} - b_{2j}x_j \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = b_{k0} - b_{kj}x_j \geq 0. \end{cases}$$

Ясно, что увеличивая x_j, надо следить за тем, чтобы $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$ оставались неотрицательными. Здесь возможны два случая:

а) Все коэффициенты $b_{i,j} < 0,\ i = 1, \ldots, k$. Тогда значение x_j можно увеличивать неограниченно, от этого произведение $-b_{ij}x_j$ будет только расти, и все переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ будут неограниченно возрастать, т. е. требование их неотрицательности не будет нарушено. Целевая функция при этом $\overline{L}(X) = \overline{c_0} + \overline{c_j}(-x_j),\ \overline{c_j} > 0,$ не будет ограничена снизу: $\overline{L}(X) \to -\infty.$

б) Среди $b_{ij},\ i = 1, \ldots, k$ имеются положительные, и таких чисел может быть несколько. Пусть $b_{rj} > 0,\ r = 1$ или $r = 2$, или …, или $r = k$. Ясно, чтобы выполнялось условие $x_r = b_{r0} - b_{rj}x_j \geq 0,$ надо потребовать выполнения равносильного неравенства $x_j \leq \dfrac{b_{r0}}{b_{rj}},$ т. е. переменную x_j можно увеличивать, но только до величины $\dfrac{b_{r0}}{b_{rj}}$. И такие неравенства должны выполняться для всех строк j-го столбца, в которых $b_{rj} > 0.$ Следовательно, надо для таких строк определить величину

$$K = \min \frac{b_{r0}}{b_{rj}},\ 1 \leq r \leq k,\ b_{rj} > 0.$$

Ясно, что x_j можно увеличивать, но не более чем до K. Значит, x_j надо менять местами с той базисной переменной, в которой строке указанный минимум достигается.

Итак, последовательность действий в п. 4 такова: просматривается столбец, соответствующий $\overline{c_j} > 0,$ выясняется, имеются ли в нем положительные элементы; если ни в одном из таких столбцов положительных элементов нет, то оптимального решения не существует, так как целевая функция не ограничена снизу, конец; если найден хотя бы один столбец, содержащий положительный элемент в последней и какой-нибудь еще строках, то этот столбец – разрешающий. Далее надо перейти к п. 5.

В разрешающем столбце j находится строка с номером i, для которой достигается $\min \frac{b_{r0}}{b_{rj}},\ 1 \le r \le k,\ b_{rj} > 0.$ Строка i – разрешающая строка.

Меняются местами переменные x_j и x_i. Для этого в последней симплекс-таблице надо выполнить жордановы исключения по соответствующему алгоритму. Вернуться к п. 3.

Продемонстрируем на примерах применение рассмотренного алгоритма симплекс-метода.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{45{,}5} + \dfrac{x_3}{29} \le 4{,}6, \\ \quad \dfrac{x_1}{23{,}5} \le 4{,}5, \\ 417{,}7x_1 + 221{,}9x_2 + 112{,}24x_3 \le 2485{,}7, \\ 1192{,}5x_1 + 675x_2 + 270x_3 \le 9738{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$$L(X) = 54{,}3x_1 + 50{,}2x_2 + 27{,}0x_3 \to \max.$$

Решение

Перейдем к КЗЛП (канонической ЗЛП), оставив для корректного выполнения алгоритма в дробях четыре знака после запятой:

$$\begin{cases} 0{,}0220x_2 + 0{,}0345x_3 + x_4 = 4{,}6, \\ 0{,}0426x_1 + x_5 = 4{,}5, \\ 417{,}7x_1 + 221{,}9x_2 + 112{,}24x_3 + x_6 = 2485{,}7, \\ 1192{,}5x_1 + 675x_2 + 270x_3 + x_7 = 9738{,}5, \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, 7, \end{cases}$$

$$\overline{L}(X) = -54{,}3x_1 - 50{,}2x_2 - 27{,}0x_3 \to \min.$$

Ясно, что базис в системе линейных уравнений образуют новые переменные x_4, x_5, x_6, x_7. Не проводя подробные рассуждения, как в предыдущем примере, укажем только симлекс-таблицы, отражающие решение. Все величины будем сохранять с четырьмя знаками после запятой. В первой таблице, в отличие от предыдущего примера, совмещены исходная и преобразованная по алгоритму жордановых исключений таблицы.

	b_{i0}	x_1	x_2	x_3
x_4	4,6 –0,2486	0 –0,0418	0,0220 –0,0001	0,0345 –0,0112
x_5	4,5 0	0,0426 0	0 0	0 0
x_6	2485,7 11,2019	417,7 1,8824	221,9 0,0045	112,24 0,5058
x_7	9738,5 –7561,2508	1192,5 –1270,6016	675 –3,0419	270 –341,4229
$\overline{L}$	0 –562,2653	54,3 –94,4837	50,2 –0,2262	27,0 –25,3887

В последней строке таблицы нет положительных элементов, следовательно, последнее опорное решение (0; 0; 22,1469; 3,8350; 4,5; 0; 3759,0449) является оптимальным.

	b_{i0}	x_1	x_6	x_3
x_4	4,3514 –0,5164	–0,0418 –0,0868	–0,0001 –0,0002	0,0233 –0,0461
x_5	4,5 0	0,0426 0	0 0	0 0
x_2	11,2019 22,1469	1,8824 3,7216	0,0045 0,0089	0,5058 1,9771
x_7	2177,2492 1581,7957	–78,1016 265,8096	–3,0419 0,6354	–71,4229 141,2078
$\overline{L}$	–562,2653 –35,6848	–40,1837 –5,9966	–0,2262 –0,0143	1,6113 –3,1856

В итоге получаем:

	b_{i0}	x_1	x_6	x_2
x_4	3,8350	–0,1286	–0,0003	–0,0461
x_5	4,5	0,0426	0	0
x_3	22,1469	3,7216	0,0089	1,9771
x_7	3759,0449	187,7080	–2,4065	141,2078
$\overline{L}$	–597,9501	–46,1803	–0,2405	–3,1856

Дадим интерпретацию полученным результатам:

$x_1^* = 0,\quad x_2^* = 0,\quad x_3^* = 22{,}1469,\quad x_4^* = 3{,}8350,\quad x_5^* = 4{,}5,\quad x_6^* = 0,$
$x_7^* = 3759{,}0449,\ \max L(X) = -\min \overline{L}(X) = 597{,}9501.$

Варианты с заданиями

Задание. Симплексным методом решить следующие задачи (вручную).

1. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 + x_3 \ge -1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$	2. $z = 3x_1 - x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4, \\ -2x_2 + x_6 = 8,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$
3. $z = x_2 - x_1 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,2} \end{cases}$	4. $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
5. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6, \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 12,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$	6. $z = 8x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 20, \\ -6x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 2,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$

7. $z=-x_1+3x_2+2x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\ge -5, \\ 2x_1-3x_2+x_3\le 3, \\ 2x_1-5x_2+6x_3\le 5,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	8. $z=-x_1+3x_2-x_3\to\min,$ $\begin{cases} -x_2+x_3\le 1, \\ x_1+x_2+x_3\le 4, \\ 2x_1+x_2\le 2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
9. $z=2x_1+x_2+10x_3-x_5\to\max,$ $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+x_5=4, \\ x_2+x_4\le 2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5} \end{cases}$	10. $z=x_1+x_2+x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1-x_4-2x_6=5, \\ x_2+x_4+3x_5+x_6=3, \\ x_3+x_4-x_5+x_6=5,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,6} \end{cases}$
11. $z=-5x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5\to\min,$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3\le 2, \\ -x_1-x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+x_5=2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5} \end{cases}$	12. $z=2x_1+4x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\le 4, \\ 2x_1+x_2\le 1, \\ x_2+4x_3\le 3,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
13. $z=-2x_1+x_2-3x_3\to\max,$ $\begin{cases} 3x_1-x_3\le 8, \\ -x_1+x_2+4x_3\le 1, \\ 2x_1+x_2-3x_3\le 6,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	14. $z=10x_1-7x_2-5x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\le 5, \\ x_1-3x_3\le 1, \\ x_2+x_3\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
15. $z=x_1-3x_2+x_3\to\min,$ $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3\le 7, \\ -2x_1+4x_2\le 12, \\ -4x_1+3x_2+8x_3\le 10,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	16. $z=2x_1-3x_2+x_3\to\min,$ $\begin{cases} -5x_1+3x_2+x_3\le 15, \\ x_1-x_2\le 4, \\ -2x_1+x_3\le 2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
17. $z=2x_1+2x_2-x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3\le 2, \\ 2x_1+x_2-3x_3\le 6, \\ x_1+x_2+x_3\le 7,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	18. $z=-8x_1+5x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3\le 10, \\ x_1+x_2-x_3\le 5, \\ 4x_1+x_2\le 7,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
19. $z=x_1+x_2-x_3\to\max,$ $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3\le 1, \\ x_1+x_3\le 2, \\ x_1+2x_2-x_3\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	20. $z=-x_1-x_2-2x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\le 3, \\ 3x_1+x_2+x_3\le 1, \\ x_1+x_2+x_3\le 5,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$
21. $z=6x_1+x_2-x_3\to\min,$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1, \\ x_1+x_2-3x_3\le 9, \\ -x_1-x_2+4x_3\le 2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$	22. $z=2x_1-x_2-x_3\to\max,$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 1, \\ -x_1+3x_2-x_3\le 6, \\ 2x_1+x_3\le 5,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3} \end{cases}$

23. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_3 \le 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,3} \end{cases}$	24. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \le 1, \\ x_2 - 2x_4 \le 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$
25. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -1, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$	26. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10, \ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,3} \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи линейного программирования в канонической форме.
2. Определение базисного плана.
3. Критерий оптимальности в симплекс-методе.
4. Достаточное условие неразрешимости задачи линейного программирования.
5. Алгоритм симплекс-метода.

Лабораторная работа № 3

ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Цель работы: изучить двойственный симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

Теоретические сведения

Для решения задачи линейного программирования (ЛП) двойственным симплекс-методом, кроме исходных данных c, b, A, на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

1) текущий базисный двойственный план y;

2) соответствующий двойственному плану y базис $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$;

3) $m \times m$-матрицу $B = A_Б^{-1}$, обратную к базисной матрице $A_Б = (A_j, \ j \in J_Б)$.

Опишем общую итерацию двойственного симплекс-метода по шагам.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана $\aleph$, соответствующего базису $J_Б$: $\aleph_Б = (\aleph_j, j \in J_Б) = Bb.$

Шаг 2. Если выполняются неравенства $\aleph_j \geq 0,\ j \in J_Б$, то STOP: вектор $\aleph = (\aleph_Б, \aleph_Н = 0)$ является оптимальным планом задачи. В противном случае перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Среди базисных индексов $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ выберем индекс j_s, для которого $\aleph_{j_s} < 0$. Подставим m-вектор Δy и числа $\mu_j,\ j \in J_Н = J / J_Б$ по правилам

$$\Delta y' = e'_s B, \quad \mu_j = \Delta y' A_j, \quad j \in J_Н.$$

Если $\mu_j \geq 0,\ \ j \in J_Н$, то STOP: ограничения исходной задачи несовместны, а целевая функция двойственной задачи ЛП не ограничена снизу на множестве ее планов. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_{Н,}\ \mu_j < 0} (c_j - A'_j y) / \mu_j$$

и выберем в качестве индекса j_0 любой элемент из множества $\{j \in J_Н : \mu_j < 0, (c_j - A'_j y) / \mu_j = \sigma_0\}$.

Шаг 5. Построим новый базисный двойственный план $\bar{y}$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y, \quad \bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, ..., j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, ..., j_m\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу $\bar{B}$, обратную к новой базисной матрице $\bar{A}_Б = (A_j, j \in \bar{J}_Б)$, по правилам, описанным на шаге 6 итерации прямого симплекс-метода.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых значений для базисного двойственного плана $\bar{y}$, базиса $\bar{J}_Б$ и матрицы $\bar{B}$.

Замечания

1. На шаге 3 выбор индекса $j_s \in J_Б$ и на шаге 4 выбор индекса $j_0 \in J_Н$ могут оказаться неоднозначными. Как и в прямом симплекс-методе, это может привести к зацикливанию алгоритма. Для предотвращения зацикливания рекомендуется использовать дополнительные

правила. Например, правило Блэнда для двойственного симплекс-метода сводится к следующему:

– на шаге 3 индекс j_s однозначно определяется условием

$$j_s = \min j_i,\ i \in \{k \in \{1,2,...,m\} : \aleph_{j_k} < 0\};$$

– на шаге 4 индекс j_0 однозначно определяется соотношением

$$j_0 = \min j,\ j \in \{j \in J_H : \mu_j < 0, (c_j - A_j' y)/\mu_j = \sigma_0\}.$$

2. Легко проверить, что если базисный двойственный план $\{y, J_Б\}$ является невырожденным, то для нового базисного плана $\{\overline{y}, \overline{J}_Б\}$ справедливо неравенство $b'\overline{y} < b'y.$ (В общем случае верно неравенство $b'\overline{y} \le b'y.$)

3. Проблема построения начального базисного двойственного плана $\{y, J_Б\}$ является нетривиальной. Для ее решения можно разработать двухфазный двойственный симплекс-метод.

Варианты с заданиями

Задание. Двойственным симплексным методом решить следующие задачи (написать программу). Для проверки можно использовать онлайн-калькулятор.

1. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	2. $z = 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 16, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
3. $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	4. $z = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 4, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$
5. $z = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	6. $z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$

7. $z=2x_1+x_2+x_3-x_4\to\max,$ $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\ -x_1+6x_2+x_3+2x_4=4,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$	8. $z=2x_1+x_2+x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=1,\\ x_1-x_2-3x_3-2x_4=2,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
9. $z=x_1+x_2-x_3+x_6\to\max,$ $\begin{cases} x_1+x_3-2x_5+x_6=4,\\ x_2-2x_5-x_6=5,\\ -x_3+3x_5-x_6=7,\\ -x_3+x_4+4x_5-4x_6=3,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,6}\end{cases}$	10. $z=x_1+3x_2-x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases} 6x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ x_1+2x_2+2x_4=1,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
11. $z=-3x_1+x_2+2x_3\to\max,$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3\ge 7,\\ -x_1+3x_3\le 2,\\ 4x_1+x_2-2x_3\ge 4,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}\end{cases}$	12. $z=8x_1+5x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3\ge 10,\\ x_1+x_2-x_3\le 5,\\ 4x_1+x_2-2x_3\le 1,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}\end{cases}$
13. $z=x_1+2x_2-x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+x_4=3,\\ x_1+2x_3-x_4=3,\\ 3x_1+x_2+x_3=8,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$	14. $z=-1{,}5x_1+2x_2+3x_3-2x_4\to\max,$ $\begin{cases} 3x_1-4x_2-3x_3+x_4\ge 3,\\ -2x_1-x_2+x_3+2x_4\ge 1,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}\end{cases}$
15. $z=2x_1+x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\ge 9,\\ x_2+x_3\le 9,\\ x_1+x_2+x_3\le 10,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}\end{cases}$	16. $z=x_1+3x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3\ge 6,\\ 4x_1-x_2+x_3\le 12,\\ x_1+3x_2-2x_3\le 6,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}\end{cases}$
17. $z=2x_1+3x_2\to\max,$ $\begin{cases} 2x_1-x_2\ge 5,\\ -x_1+3x_3\le 3,\\ x_1+x_2\ge 8,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,2}\end{cases}$	18. $z=-x_1+4x_2\to\max,$ $\begin{cases} x_1-3x_2\ge 3,\\ x_1+x_2\le 10,\\ 3x_1+x_2\ge 9,\\ -x_1+x_2\le 4,\\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,2}\end{cases}$

19. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	20. $z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
21. $z = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	22. $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
23. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	24. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$
25. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$	26. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Первая фаза двойственного симплекс-метода.
2. Вторая фаза двойственного симплекс-метода.

Лабораторная работа № 4

МАТРИЧНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы: изучить метод потенциалов на примере транспортной задачи.

Теоретические сведения

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны c_{ij}, i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, …, n – стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице ниже.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$, вектора запросов потребителей $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ и матрицы стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т. д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т. п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой.* Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. *Если допустимое решение* $X = (x_{ij})$, *i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, ..., n транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков* u_i, *i = 1, 2, ..., m и потребителей* v_j, *j = 1, 2, ..., n, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$
$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал v_j, и $v_j = c_{ij} - u_i$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал u_i.

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{lk} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те оценки, которые

больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «–», в которой достигается $\min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$. Далее возвращаемся к п. 3 алгоритма.

Варианты с заданиями

Задание. Решить транспортную задачу методом потенциалов (начальный базисный план перевозок построить с помощью метода минимального элемента, написать программу). Для проверки можно использовать онлайн-калькулятор.

1.

a_i \ b_j	40	20	20	20
25	6	8	14	4
30	5	2	2	8
35	7	6	7	5
10	4	5	12	7

2.

a_i \ b_j	10	40	20	30
10	12	9	14	7
15	11	13	10	8
25	4	2	3	5
50	2	6	13	3

3.

a_i \ b_j	10	40	40	10
15	2	7	8	4
25	3	8	5	1
30	5	10	3	9
30	1	4	4	10

4.

a_i \ b_j	60	65	75	50
70	4	7	15	5
80	7	6	2	3
80	3	4	8	5
20	8	2	4	7

5.

b_j / a_i	30	750	50	100
70	7	5	1	6
120	5	3	4	9
20	6	8	7	7
40	4	3	5	5

6.

b_j / a_i	75	125	60	140
80	4	5	2	11
40	7	3	2	4
160	3	4	3	5
120	5	7	9	6

7.

b_j / a_i	45	40	5	10
30	7	9	9	5
15	2	5	8	9
35	5	6	4	2
20	3	4	3	3

8.

b_j / a_i	25	35	45	35
50	6	8	2	4
30	7	2	5	4
40	8	1	7	2
20	1	2	8	12

9.

b_j / a_i	60	40	35	65
45	5	4	2	3
30	8	7	5	7
50	4	2	6	8
75	2	5	1	3

10.

b_j / a_i	200	100	80	120
60	6	3	3	8
140	3	2	7	6
150	5	4	2	12
140	2	5	8	7

11.

b_j / a_i	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	16	26	12	20

12.

b_j / a_i	180	140	190	120	170
300	12	21	9	10	16
280	13	15	11	13	21
220	19	26	12	17	22

13.

b_j / a_i	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	16	26	17	20

14.

b_j / a_i	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

15.

b_j / a_i	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

16.

b_j / a_i	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

17.

a_i \ b_j	180	120	90	105	105
150	14	6	4	4	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	15	3

18.

a_i \ b_j	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

19.

a_i \ b_j	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

20.

a_i \ b_j	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	48

21.

a_i \ b_j	120	180	105	90	105
200	9	6	17	11	8
250	13	4	9	5	7
150	6	7	14	10	6

22.

a_i \ b_j	175	225	230	170	200
350	5	13	18	17	8
400	6	10	15	6	3
250	24	21	9	16	17

3.

a_i \ b_j	120	110	85	195	190
250	15	7	16	4	11
250	20	9	6	10	9
200	2	4	7	3	6

24.

a_i \ b_j	160	120	100	150	170
250	14	11	9	13	18
180	6	5	14	4	14
270	7	19	11	6	13

25.

a_i \ b_j	160	160	180	220	280
350	6	11	10	14	19
300	17	6	4	11	9
350	12	8	19	10	13

26.

a_i \ b_j	40	30	80	40	20
70	1	3	2	3	1
50	4	7	5	4	2
90	8	2	3	3	3

Контрольные вопросы

1. Транспортная задача.
2. Метод северо-западного угла.
3. Метод минимальной стоимости.
4. Метод потенциалов.

Лабораторная работа № 5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Цель работы: изучить методы решения задачи безусловной оптимизации.

Теоретические сведения

Пусть дана задача на безусловный минимум $f(x) \to \min$, $x \in R^n$ и известно начальное приближение x^1. Требуется построить приближенное (улучшить план x^1) или точное решение задачи. Последовательные приближения строим по формуле $x^{k+1} = x^k + \theta_k \ell^k$, $k = 1, 2, ...,$ где ℓ^k – направление, а θ_k – шаг на k-й итерации.

Метод наискорейшего спуска (МНС). Применим в случае $f(x) \in C^{(1)}$. В этом методе в качестве ℓ^k выбирают направление антиградиента $\ell^k = -\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x}$, $k = 1, 2, ...,$ а шаг θ_k на итерации находят как решение задачи одномерной оптимизации $\varphi(\theta) = f\left(x^k - \theta \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x}\right) \to \min,\ \theta \ge 0,\ k = 1,\cdots 2, ...$.

Метод Ньютона (МН) в основном применяется при условии $f(x) \in C^2$, $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0.$ В методе полагают $\theta_k = 1,$ $\ell^k = -\left(\dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}\right)^{-1} \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x},\ k = 1, 2, ...$.

Анализ решения. Если на k-й итерации для плана $x^* = x^k$ выполняется условие $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0,$ то дальнейшее улучшение планов по МНС и МН невозможно. План удовлетворяет необходимому условию оптимальности 1-го порядка, и, следовательно, может существовать решение. Он может быть подвергнут исследованию на оптимальность с помощью известных для задачи более сильных (необходимых и достаточных) условий оптимальности.

Например, если $f(x) \in C^{(2)}$, то условие $\dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \geq 0$ является необходимым, а условие $\dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x} > 0$ достаточным для локальной оптимальности плана x^*. Если $f(x), x \in R^n$ выпуклая функция, то условие является критерием оптимальности плана x^*.

Варианты с заданиями

Задание. Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации), а затем применить метод Ньютона к задаче (требуется написать программу на любом языке программирования):

$$f(x) \to \min,\ x \in R^n,$$

сравнить полученный план по целевой функции согласно варианту.

1. $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \to \min,\ x^1 = (0{,}0)$.
2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \to \min,\ x^1 = (1{,}0)$.
3. $f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \to \min,\ x^1 = (5{,}3)$.
4. $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \to \max,\ x^1 = (0{,}0)$.
5. $f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max, x^1 = (7{,}4)$.
6. $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min,\ x^1 = (8{,}9)$.
7. $f(x) = 5(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 \to \min,\ x^1 = (4{,}5)$.
8. $f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 2(x_2 - 3)^2 \to \max,\ x^1 = (6{,}4)$.
9. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2) \to \max,\ x^1 = (3{,}-1)$.
10. $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \to \max,\ x^1 = (2{,}3)$.
11. $f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \to \max,\ x^1 = (5{,}2)$.
12. $f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \to \max,\ x^1 = (3{,}10)$.
13. $f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \to \max,\ x^1 = (2{,}7)$.
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \to \min,\ x^1 = (2{,}2)$.
15. $f(x) = -20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \to \max,\ x^1 = (2{,}3)$.
16. $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \to \max,\ x^1 = (3{,}5)$.

17. $f(x)=2x_1^2+x_2^2-30x_1+6x_2 \to \min,\ x^1=(2{,}6)$.
18. $f(x)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2 \to \min,\ x^1=(4{,}2{,}1)$.
19. $f(x)=3x_1-0{,}2x_1^2+x_2-0{,}5x_2^2 \to \max,\ x^1=(1{,}2)$.
20. $f(x)=2x_1-0{,}1x_1^2+3x_2-3x_2^2 \to \max,\ x^1=(3{,}1)$.
21. $f(x)=3x_1-(x_1-2)^2-(2x_2+1)^2 \to \max,\ x^1=(5{,}4)$.
22. $f(x)=9x_1^2+4x_2^2-(x_1-3)^2-(x_2+0{,}1)^2 \to \min,\ x^1=(0{,}5)$.
23. $f(x)=-6x_1+4x_2^2+x_1^2-18 \to \min,\ x^1=(3{,}2)$.
24. $f(x)=(x_1-3)^2+2(x_2-11)^2 \to \min,\ x^1=(7{,}0)$.
25. $f(x)=10-2x_1+x_2-x_1^2-3x_2^2-x_3^2 \to \max,\ x^1=(0{,}1{,}2)$.
26. $f(x)=(9x_1-10)^2+(0{,}1x_2+10)^2 \to \min,\ x^1=(0{,}5)$.

Контрольные вопросы

1. Метод наименьшего спуска.
2. Метод Ньютона.

Лабораторная работа № 6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Цель работы: изучить метод ветвей и границ.

Теоретические сведения

Постановка задачи. Имеется n неделимых предметов: $I=\{i=\overline{1,n}\}$. Заданы: p_i – вес, c_i – ценность i-го предмета. $1 \le i \le n$.

Требуется уложить в рюкзак некоторую совокупность предметов с общей стоимостью не менее числа c и минимального веса.

Математическая модель задачи. Введем переменные $x_i,\ i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} I, \text{ если предмет укладывается в рюкзак;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем оптимизационную задачу:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min,\ x\in X,$$

$$X=\{x:\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c,\ x_i = 0\vee 1,\ i=\overline{1,n}\}. \qquad (1)$$

Схема решения. 0-итерация. Находим оценку $\xi_0=\xi(x)$. Для этого решаем задачу:

$$f(x)\to\min,\ x\in X, \qquad (2)$$

где $X=\{x:\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c,\ i\le x_i\le 1,\ i=1,n\}$.

Она представляет из себя непрерывную задачу линейного программирования. Пусть x^* решение задачи (2). Положим $\xi_0=f(x^*)$. Если x^* есть план задачи (1), то x^* и ее решение. В противном случае разбиваем множество X на два подмножества, укладывая или не укладывая один из предметов (например, первый):

$$X_{11}=\{x:x_1=0,\ x\in X\},\quad X_{12}=\{x:x_1=1,\ x\in X\}.$$

Список множества для первой итерации $S_1=\{X_{11},X_{12}\}$.

Рекорд итерации $r_0=\infty$. k-итерация. Пусть $S_k=\{X_{k1},X_{k2},...,X_{ks(k)}\}$ – список множеств для этой итерации. Находим оценку $\xi_k=\min\limits_{1\le i\le s(k)}\xi(X_{ki})$, где $\xi(X_{ki})$ – оценки снизу значений функции задачи (1) на подмножестве X_{ki}. Они находятся как решения непрерывных задач:

$$f(x)\to\min,\ \ x\in X_{ki},\ \ 1\le i\le s(k). \qquad (3)$$

Пусть x^{*i}, $1\le i\le s(k)$ решения задачи (3). Тогда полагаем $\xi(X_{ki})=f(x^{*i})$.

Если при некотором i, $1\le i\le s(k)$ задача (3) не имеет решения, то $\xi(X_{ki})=\infty$.

Пусть среди решений x^{*i}, $1\le i\le s(k)$ непрерывных задач (1) есть планы задач (1): $x^{k1},x^{k2},...,x^{kl}\in X$.

Вычисляем рекорд итерации

$$r_k = \min_{1 \le i \le l}\{f(x^{ki}), r^{k-1}\}, f(x^k) = r^k,$$

а) если $r^k = \xi^k$, то план x^k – решение задачи (1);

б) если $r^k - \xi^k = \varepsilon > 0$, то $x^\varepsilon = x^k - \varepsilon$ – оптимальный план.

Если не выполняются случай а) либо случай б) (т. е. приближение нас не удовлетворяет), то переходим к следующей итерации. Составляем список множеств для (k + 1)-й итерации S_{k+1}. Для этого разбиваем множество $X_k(\xi(X_k) = \xi_k)$ на два подмножества (укладывая или не укладывая в рюкзак один из оставшихся в X_k предметов); X_k^1 и X_k^2. В S_{k+1} включаем множества из S_k и X_k^1, X_k^2, исключив множество X_k. Из списка S_{k+1} следует также исключить те множества списка S_k, для которых оценка снизу больше либо равна r^k.

Итерации продолжают либо до получения оптимального плана, либо до достижения заданной степени точности ε. Так как множества планов задачи (1) конечны, то всегда можно построить оптимальный план.

Метод решения непрерывных задач типа (2), (3). Пусть требуется решить задачу (2). Для каждого i, $1 \le i \le n$ вычисляем относительный вес на единицу стоимости $\frac{p_i}{c_i}$. Ясно, что оптимальный план задачи (2) будет построен, если загрузить в рюкзак в первую очередь предметы (для непрерывной задачи их можно дробить) с наименьшим числом $\frac{p_i}{c_i}$.

Засыпая в рюкзак предметы в порядке возрастания числа до достижения заданной стоимости груза c, строим оптимальный план задачи (2). Задачи (3) решаются аналогично.

Пример. Рассмотрим задачу о рюкзаке с данными из таблицы ниже.

N	1	2	3	4
c_i	20	10	12	7
p_i	3	4	5	2

$n = 4$, $c = 30$, математическая модель имеет вид:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 \geq 30,$$

$$x_i = 0 \cup 1, \quad i = \overline{1,4}. \tag{4}$$

Решение

0-итерация.

Решаем задачу (4) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1.$$

Вычисляем отношение $\frac{p_i}{c_i}$, $i = \overline{1,4}$.

$$\frac{p_1}{c_1} = \frac{3}{20}, \quad \frac{p_2}{c_2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{p_3}{c_3} = \frac{5}{12}, \quad \frac{p_4}{c_4} = \frac{2}{7}.$$

Загружаем в рюкзак предметы в порядке возрастания относительной ценности: первый, четвертый, второй, третий. Оптимальный план задачи (4):

$$x^* = \{x_1^* = x_4^* = 1, x_2^* = 0{,}3, x_3^* = 0\},$$

$$\xi_0 = \xi(x) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6{,}2.$$

x^* не является планом задачи (4).

Множество X разбиваем на подмножества: $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$,

$$X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}, \quad X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}, \quad r_0 = \infty.$$

1-итерация. Имеем $\xi(X_{11}) = \infty$. Так как 10 + 12 + 7 = 29 < 30,

$$\xi(X_{12}) = \xi(X), \quad x^{*2} = x^*, \quad \xi_1 = \xi_0.$$

На итерации планы не построены: $r_1 = \infty$.

Множество X_{11} исключаем из списка, а множество X_{12} разбиваем на два подмножества:

$$X_{21} = \{x \in X_{12} : x_2 = 0\} = \{x \in X : x_1 = 1, x_2 = 0\},$$

$$X_{22} = \{x \in X : x_1 = x_2 = 1\}, \quad S_2 = \{X_{21}, X_{22}\}.$$

2-итерация. $\xi(X_{21}) = 6{,}25$, $x^{*1} = \{1, 0, \frac{1}{4}, 1\}$,

$$\xi(X_{22}) = 7,\ x^{*2} = \{1{,}1{,}0{,}0\},\ \xi_2 = 6{,}25.$$

Получен рекордный план итерации $x^2 = x^{*2}$, $r_2 = 7$, x^2 будет ε-оптимальный план: $\varepsilon = r_2 - \xi_2 = 0{,}75$. Так как p_i целое число, то условие $r_k - \varepsilon_k < 1$ означает, что рекордный план оптимальный. Следовательно, x^2 решение задачи $x^0 = \{1{,}1{,}0{,}0\}$, $f(x^0) = 7$.

Варианты с заданиями

Задание. Записать математическую модель задачи. Решить задачу о рюкзаке методом ветвей и границ с данными из таблицы при $n = 5$, $c = 30$.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
c_i	20	10	12	7	7	10	12	16	9	7	13	10	9	8	15	20	13	17
p_i	3	4	5	2	3	4	3	5	1	3	4	2	1	5	3	5	4	4

Нарисовать дерево вариантов. Номера предметов в i-м варианте (i – номер студента по списку в журнале) выбираются следующим образом:

$$k = \overline{0{,}4},$$

$$1 \le i \le 14 : i + k,$$

$$15 \le i \le 24 : i + 2k - 14,$$

$$25 \le i \le 30 : i + 3k - 24.$$

Контрольные вопросы

1. Формулировка задачи о рюкзаке.
2. Метод ветвей и границ.

Литература

1. Ашманов, С. А. Линейное программирование : учеб. пособие для вузов / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1981. – 303 с.

2. Ашманов, С. А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1991. – 447 с.

3. Бышик, Т. П. Методы оптимизации: Нелинейное программирование и вариационное исчисление : практ. рук. / Т. П. Бышик, В. Л. Мережа. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 42 с.

4. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов. – Минск : Наука и техника, 1974. – 272 с.

5. Габасов, Р. Методы линейного программирования / Р. Габасов. – Минск : БГУ, 1977. – 174 с.

6. Габасов, Р. Методы линейного программирования / Р. Габасов. – Минск : БГУ, 1978. – 240 с.

7. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. пособие для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» / В. Г. Карманов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1980. – 256 с.

8. Краснов, М. Л. Вариационное исчисление : учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1973. – 192 с.

9. Костевич, Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений : учеб. пособие для вузов / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003. – 424 с.

10. Струченков, В. И. Методы оптимизации: основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учеб. пособие / В. И. Струченков. – Изд. 2-е, перераб. – М. : Экзамен, 2007. – 255 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

ПРАКТИКУМ
по выполнению лабораторных работ для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения

Составитель Велесницкий Василий Федорович

Электронный аналог печатного издания

Редактор	*Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка	*Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 25.04.19.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Цифровая печать. Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,02.
Изд. № 22.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель