

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Информатика»

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

ПРАКТИКУМ

**по выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 1-40 04 01
«Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2019

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73
М54

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 8 от 05.03.2018 г.)*

Составитель *В. Ф. Велесницкий*

Рецензент: доц. каф. «Информационные технологии» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *В. В. Комраков*

М54 **Методы** оптимизации и управления : практикум по выполнению лаборатор. работ для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / сост. В. Ф. Велесницкий. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 36 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-406-3.

Предлагается шесть лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации и управления» для совершенствования навыков в области линейного программирования. Особое внимание уделяется изучению линейных уравнений.

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения.

УДК 519.852(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-535-406-3

© Велесницкий В. Ф., составление, 2019
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2019

вания $x_j \geq 0$, являются уравнениями, то в этом случае задачу линейного программирования называют *канонической задачей линейного программирования* (КЗЛП).

Точку или точки (если их несколько), удовлетворяющие системе ограничений, называют *допустимым решением (планом)* задачи линейного программирования и обозначают \bar{X} . Множество всех допустимых решений называют *областью допустимых решений* (ОДР). Допустимое решение, в котором достигается экстремальное значение целевой функции, называют *оптимальным решением (планом)* задачи линейного программирования и обозначают $\bar{X}_{\text{опт}}$.

Формулировку общей задачи линейного программирования (ОЗЛП) можно записать более компактно:

$$L(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + c \rightarrow \max(\min);$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_k \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Заметим, что лабораторные работы № 1, 2 выполняются вручную, остальные требуется решить с помощью ЭВМ (т. е. написать программу на любом языке программирования высокого уровня). Теорию можно найти в списке литературы. Основой для составления работ является [3].

Шаг 4. Перемещают линию уровня по направлению вектора \vec{c} для задачи на максимум и в направлении, противоположном \vec{c} , для задачи на минимум. Перемещение производится до линии уровня, которая является границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР:

4.1. Если такой линии не существует, то:

4.1.1. $L_{\max} = +\infty$ при решении ЗЛП с максимизационным критерием.

4.1.2. $L_{\min} = -\infty$ при решении ЗЛП с минимизационным критерием.

В обоих случаях задачу считают неразрешимой. Конец.

4.2. Если же указанная линия уровня существует, то точка, в которой целевая функция достигает максимального (минимального) значения, находится на этой прямой, обозначаемой $L_0^+(L_0^-)$.

4.2.1. Если линия уровня не параллельна ни одной из сторон ОДР, то это – угловая точка ОДР.

4.2.2. Если линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в этом случае возможны варианты: эта точка –

а) угловая точка ОДР;

б) любая точка соответствующей стороны.

Переходят к следующему шагу.

Шаг 5. Находят координаты точек экстремума и значение целевой функции в них:

5.1. Если задача имеет единственное решение (случаи 4.2.1, 4.2.2а), то находят координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней. Конец.

5.2. Если же имеет место случай 4.2.2б, то говорят, что задача имеет альтернативный оптимум и ее общее решение находится по формуле $\bar{X}_{\text{опт}} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, X_1, X_2 – оптимальные решения в угловых точках ОДР (если такие, конечно, имеются). Конец.

Пример. Найти значения переменных, при которых функция $L(X) = 5,2x_1 - x_2$ принимает экстремальные значения при условии, что:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 .
Найдем решение максимизационной задачи.

Шаг 1. Находим ОДР (область допустимых решений).

Сначала построим граничные прямые (по точкам их пересечения с координатными осями):

$$2x_1 + 5x_2 = 10 \text{ по точкам } (5; 0), (0; 2),$$

$$x_1 - 3x_2 = 3 \text{ по точкам } (3; 0), (0; -1),$$

$$-x_1 + x_2 = 1 \text{ по точкам } (-1; 0), (0; 1).$$

Затем, используя точку $O(0; 0)$, определим соответствующие полуплоскости. Пересечением полученных полуплоскостей является неограниченная многогранная область, изображенная на рис. 1.1. Это и есть искомая ОДР, так как полученная область располагается в первой четверти плоскости Ox_1x_2 .

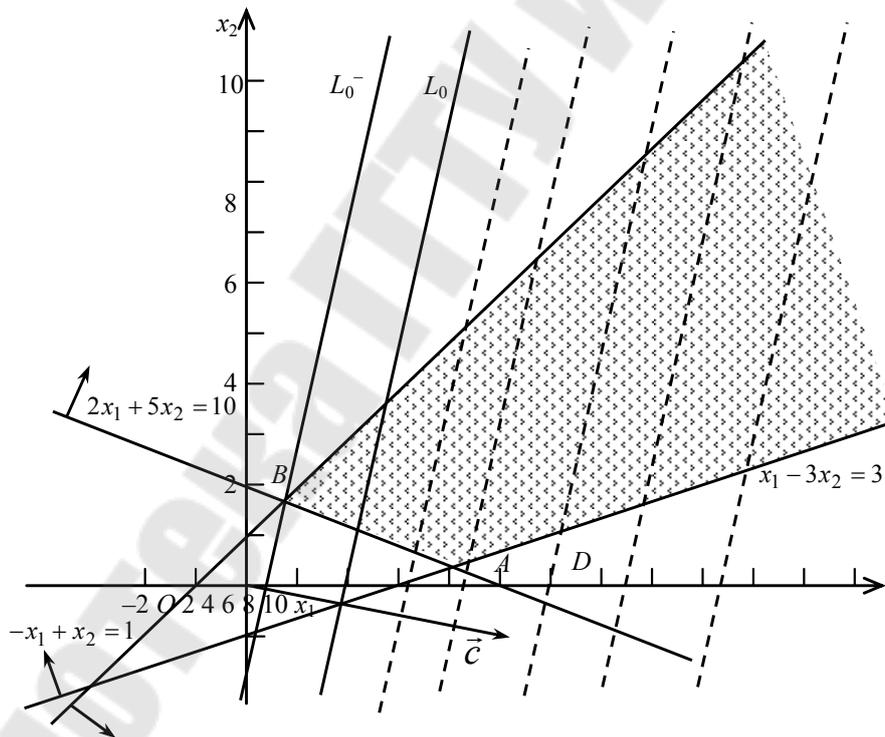


Рис. 1.1. Неограниченность области допустимых решений и целевой функции

Шаг 2. Строим вектор $\vec{c}(5; 2; -1)$.

Шаг 3. Проводим линию уровня L_0 таким образом, чтобы она имела с ОДР общие точки.

Шаги 4–5. Перемещаем L_0 по направлению вектора \vec{c} до линии уровня, которая являлась бы границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Однако закончить указанное перемещение невозможно. Из рис. 1.1 видно, что какую бы линию уровня в направлении вектора нормали ни провести (штрихованные прямые на чертеже), любая из них пересекает ОДР. Следовательно, $L_{\max} = +\infty$. Это означает, что задача на максимум неразрешима.

Теперь найдем значения переменных, при которых целевая функция минимизируется. Шаги 1–3 точно те же, что и при решении максимизационной задачи.

Шаг 4. Перемещаем линию уровня L_0 в направлении, противоположном вектору \vec{c} , до линии, являющейся границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Такой линией является прямая L_0^- , проходящая через точку B . Следовательно, $L_{\min} = L(B)$.

Шаг 5. Координаты точки B определяются как пересечение прямых $2x_1 + 5x_2 = 10$ и $-x_1 + x_2 = 1$. Решая соответствующую систему уравнений, найдем координаты точки B : $x_1 = 5/7$ и $x_2 = 12/7$. Таким образом, $L_{\min} = 2$.

Варианты с заданиями

Задание. Графическим методом решить следующие задачи (письменно):

| | |
|--|---|
| <p>1. $z = x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>2. $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>3. $z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>4. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| <p>5. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3,4} \end{cases}$ | <p>6. $z = x_1 - 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \geq -7, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>7. $z = -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>8. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3,4} \end{cases}$ |
| <p>9. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ | <p>10. $z = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ -4x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>11. $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>12. $z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 \leq 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>13. $z = -4x_1 + 3x_2 - x_5 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$ | <p>14. $z = x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + x_5 = 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ |
| <p>15. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 5x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 \leq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ | <p>16. $z = 3x_1 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |

| | |
|---|--|
| <p>17. $z = 5x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>18. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>19. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max(\min)$</p> $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ | <p>20. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>21. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \leq 13, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>22. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ |
| <p>23. $z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$ | <p>24. $z = x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -x_1 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 72, \\ -3x_3 + 11x_4 - x_5 = 16, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$ |
| <p>25. $z = 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>26. $z = -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \rightarrow \max(\min)$,</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_6 = 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$ |

Контрольные вопросы

1. Задачи линейного программирования.
2. Алгоритм решения ЗЛП графическим методом.
3. Постановка производственной задачи.

Для полученной системы и целевой функции составляется таблица для жордановых исключений, так называемая симплекс-таблица:

| Базисные | Свободные | | | | |
|--------------|-------------|-----------------|-----------------|-----|-----------------|
| | b_{i0} | x_{k+1} | x_{k+2} | ... | x_{n+t} |
| x_1 | b_{10} | $b_{1, k+1}$ | $b_{1, k+2}$ | ... | $b_{1, n+t}$ |
| x_2 | b_{20} | $b_{2, k+1}$ | $b_{2, k+2}$ | ... | $b_{2, n+t}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_k | b_{k0} | $b_{k, k+1}$ | $b_{k, k+2}$ | ... | $b_{k, n+t}$ |
| $\bar{L}(X)$ | \bar{c}_0 | \bar{c}_{k+1} | \bar{c}_{k+2} | ... | \bar{c}_{n+t} |

Выясняется, имеются ли в последней строке таблицы положительные элементы, кроме \bar{c}_0 . Пусть, например, коэффициент $\bar{c}_{k+1} > 0$. Значит, увеличивая переменную x_{k+1} , мы уменьшаем слагаемое $\bar{c}_{k+1}(-x_{k+1})$, а значит, и целевую функцию. Следовательно, опорный план, в котором переменная x_{k+1} имеет нулевое значение, поскольку является свободной, не оптимален. Но ненулевое значение переменная x_{k+1} может принять, если будет базисной. Значит, ее надо перевести в базисные. Столбец, содержащий положительный коэффициент в последней строке, может стать разрешающим столбцом. Если столбцов с положительными элементами в последней строке несколько, то в качестве разрешающего столбца может быть выбран любой из них. Для уточнения номера разрешающего столбца надо перейти к п. 4. Если же в последней строке положительных элементов нет, то процесс вычисления завершен, и опорное решение, соответствующее последней таблице, будет оптимальным. Выписываем значение целевой функции, даем интерпретацию полученных результатов. Конец.

Пусть столбец, который может стать разрешающим, имеет номер j , т. е. $\bar{c}_j > 0$. Это означает, как уже говорилось выше, что можно уменьшить значение целевой функции путем увеличения значения x_j , оставляя все другие свободные переменные без изменений, т. е. равными нулю. Имеем:

хотя бы один столбец, содержащий положительный элемент в последней и какой-нибудь еще строках, то этот столбец – разрешающий. Далее надо перейти к п. 5.

В разрешающем столбце j находится строка с номером i , для которой достигается $\min \frac{b_{r0}}{b_{rj}}$, $1 \leq r \leq k$, $b_{rj} > 0$. Строка i – разрешающая строка.

Меняются местами переменные x_j и x_i . Для этого в последней симплекс-таблице надо выполнить жордановы исключения по соответствующему алгоритму. Вернуться к п. 3.

Продemonстрируем на примерах применение рассмотренного алгоритма симплекс-метода.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{x_2}{45,5} + \frac{x_3}{29} \leq 4,6, \\ \frac{x_1}{23,5} \leq 4,5, \\ 417,7x_1 + 221,9x_2 + 112,24x_3 \leq 2485,7, \\ 1192,5x_1 + 675x_2 + 270x_3 \leq 9738,5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$L(X) = 54,3x_1 + 50,2x_2 + 27,0x_3 \rightarrow \max.$$

Решение

Перейдем к КЗЛП (канонической ЗЛП), оставив для корректного выполнения алгоритма в дробях четыре знака после запятой:

$$\begin{cases} 0,0220x_2 + 0,0345x_3 + x_4 = 4,6, \\ 0,0426x_1 + x_5 = 4,5, \\ 417,7x_1 + 221,9x_2 + 112,24x_3 + x_6 = 2485,7, \\ 1192,5x_1 + 675x_2 + 270x_3 + x_7 = 9738,5, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7, \end{cases}$$

$$\bar{L}(X) = -54,3x_1 - 50,2x_2 - 27,0x_3 \rightarrow \min.$$

Ясно, что базис в системе линейных уравнений образуют новые переменные x_4, x_5, x_6, x_7 . Не проводя подробные рассуждения, как в предыдущем примере, укажем только симплекс-таблицы, отражающие

решение. Все величины будем сохранять с четырьмя знаками после запятой. В первой таблице, в отличие от предыдущего примера, совмещены исходная и преобразованная по алгоритму жордановых исключений таблицы.

| | b_{i0} | x_1 | x_2 | x_3 |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------------|-------------------|
| x_4 | 4,6 -0,2486 | 0 -0,0418 | 0,0220 -0,0001 | 0,0345 -0,0112 |
| x_5 | 4,5 0 | 0,0426 0 | 0 0 | 0 0 |
| x_6 | 2485,7 11,2019 | 417,7 1,8824 | 221,9 0,0045 | 112,24 0,5058 |
| x_7 | 9738,5 -7561,2508 | 1192,5 -1270,6016 | 675 -3,0419 | 270 -341,4229 |
| \bar{L} | 0 -562,2653 | 54,3 -94,4837 | 50,2 -0,2262 | 27,0 -25,3887 |

↑

В последней строке таблицы нет положительных элементов, следовательно, последнее опорное решение (0; 0; 22,1469; 3,8350; 4,5; 0; 3759,0449) является оптимальным.

| | b_{i0} | x_1 | x_6 | x_3 |
|-----------|------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| x_4 | 4,3514 -0,5164 | -0,0418 -0,0868 | -0,0001 -0,0002 | 0,0233 -0,0461 |
| x_5 | 4,5 0 | 0,0426 0 | 0 0 | 0 0 |
| x_2 | 11,2019 22,1469 | 1,8824 3,7216 | 0,0045 0,0089 | 0,5058 1,9771 |
| x_7 | 2177,2492 1581,7957 | -78,1016 265,8096 | -3,0419 0,6354 | -71,4229 141,2078 |
| \bar{L} | -562,2653 -35,6848 | -40,1837 -5,9966 | -0,2262 -0,0143 | 1,6113 -3,1856 |

↑

В итоге получаем:

| | b_{i0} | x_1 | x_6 | x_2 |
|-----------|-----------|----------|---------|----------|
| x_4 | 3,8350 | -0,1286 | -0,0003 | -0,0461 |
| x_5 | 4,5 | 0,0426 | 0 | 0 |
| x_3 | 22,1469 | 3,7216 | 0,0089 | 1,9771 |
| x_7 | 3759,0449 | 187,7080 | -2,4065 | 141,2078 |
| \bar{L} | -597,9501 | -46,1803 | -0,2405 | -3,1856 |

Дадим интерпретацию полученным результатам:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 22,1469, \quad x_4^* = 3,8350, \quad x_5^* = 4,5, \quad x_6^* = 0, \\ x_7^* = 3759,0449, \quad \max L(X) = -\min \bar{L}(X) = 597,9501.$$

Варианты с заданиями

Задание. Симплексным методом решить следующие задачи (вручную).

| | |
|---|--|
| <p>1. $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ -x_1 + x_3 \geq -1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | <p>2. $z = 3x_1 - x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4, \\ -2x_2 + x_6 = 8, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$ |
| <p>3. $z = x_2 - x_1 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$ | <p>4. $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>5. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 6, \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | <p>6. $z = 8x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 20, \\ -6x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |

| | |
|--|--|
| 7. $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 8. $z = -x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 9. $z = 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_5 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ x_2 + x_4 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$ | 10. $z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$ |
| 11. $z = -5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$ | 12. $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_2 + 4x_3 \leq 3, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 13. $z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_3 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 14. $z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_1 - 3x_3 \leq 1, \\ x_2 + x_3 \leq 4, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 15. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 16. $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + x_3 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 17. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 18. $z = -8x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \leq 7, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 19. $z = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 20. $z = -x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| 21. $z = 6x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 22. $z = 2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + x_3 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |

| | |
|--|---|
| 23. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_3 \leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ | 24. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 1, \\ x_2 - 2x_4 \leq 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| 25. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$ | 26. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ |

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи линейного программирования в канонической форме.
2. Определение базисного плана.
3. Критерий оптимальности в симплекс-методе.
4. Достаточное условие неразрешимости задачи линейного программирования.
5. Алгоритм симплекс-метода.

Лабораторная работа № 3

ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Цель работы: изучить двойственный симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

Теоретические сведения

Для решения задачи линейного программирования (ЛП) двойственным симплекс-методом, кроме исходных данных c, b, A , на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

- 1) текущий базисный двойственный план y ;
- 2) соответствующий двойственному плану y базис $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$;
- 3) $m \times m$ -матрицу $B = A_B^{-1}$, обратную к базисной матрице $A_B = (A_j, j \in J_B)$.

Опишем общую итерацию двойственного симплекс-метода по шагам.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана \aleph , соответствующего базису J_B : $\aleph_B = (\aleph_j, j \in J_B) = Bb$.

Шаг 2. Если выполняются неравенства $\aleph_j \geq 0, j \in J_B$, то STOP: вектор $\aleph = (\aleph_B, \aleph_N = 0)$ является оптимальным планом задачи. В противном случае перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Среди базисных индексов $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ выберем индекс j_s , для которого $\aleph_{j_s} < 0$. Подставим m -вектор Δy и числа $\mu_j, j \in J_N = J/J_B$ по правилам

$$\Delta y' = e'_s B, \quad \mu_j = \Delta y' A_j, \quad j \in J_N.$$

Если $\mu_j \geq 0, j \in J_N$, то STOP: ограничения исходной задачи несовместны, а целевая функция двойственной задачи ЛП не ограничена снизу на множестве ее планов. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_N, \mu_j < 0} (c_j - A'_j y) / \mu_j$$

и выберем в качестве индекса j_0 любой элемент из множества $\{j \in J_N : \mu_j < 0, (c_j - A'_j y) / \mu_j = \sigma_0\}$.

Шаг 5. Построим новый базисный двойственный план \bar{y} и соответствующий ему базис \bar{J}_B по правилам

$$\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y, \quad \bar{J}_B = (J_B \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, \dots, j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, \dots, j_m\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу \bar{B} , обратную к новой базисной матрице $\bar{A}_B = (A_j, j \in \bar{J}_B)$, по правилам, описанным на шаге 6 итерации прямого симплекс-метода.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых значений для базисного двойственного плана \bar{y} , базиса \bar{J}_B и матрицы \bar{B} .

Замечания

1. На шаге 3 выбор индекса $j_s \in J_B$ и на шаге 4 выбор индекса $j_0 \in J_N$ могут оказаться неоднозначными. Как и в прямом симплекс-методе, это может привести к закликиванию алгоритма. Для предотвращения закликивания рекомендуется использовать дополнительные

правила. Например, правило Блэнда для двойственного симплекс-метода сводится к следующему:

– на шаге 3 индекс j_s однозначно определяется условием

$$j_s = \min j_i, \quad i \in \{k \in \{1, 2, \dots, m\} : \aleph_{j_k} < 0\};$$

– на шаге 4 индекс j_0 однозначно определяется соотношением

$$j_0 = \min j, \quad j \in \{j \in J_H : \mu_j < 0, (c_j - A'_j y) / \mu_j = \sigma_0\}.$$

2. Легко проверить, что если базисный двойственный план $\{y, J_B\}$ является невырожденным, то для нового базисного плана $\{\bar{y}, \bar{J}_B\}$ справедливо неравенство $b'\bar{y} < b'y$. (В общем случае верно неравенство $b'\bar{y} \leq b'y$.)

3. Проблема построения начального базисного двойственного плана $\{y, J_B\}$ является нетривиальной. Для ее решения можно разработать двухфазный двойственный симплекс-метод.

Варианты с заданиями

Задание. Двойственным симплексным методом решить следующие задачи (написать программу). Для проверки можно использовать онлайн-калькулятор.

| | |
|---|--|
| <p>1. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min,$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$ | <p>2. $z = 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 16, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$ |
| <p>3. $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$ | <p>4. $z = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5} \end{cases}$ |
| <p>5. $z = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$ | <p>6. $z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{cases}$ |

| | |
|--|--|
| <p>7. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>8. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>9. $z = x_1 + x_2 - x_3 + x_6 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5, \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 = 7, \\ -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$ | <p>10. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>11. $z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ -x_1 + 3x_3 \leq 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$ | <p>12. $z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| <p>13. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | <p>14. $z = -1,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| <p>15. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_2 + x_3 \leq 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$ | <p>16. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$ |
| <p>17. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_3 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ | <p>18. $z = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$</p> $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ |

| | |
|--|--|
| 19. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | 20. $z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| 21. $z = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | 22. $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| 23. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | 24. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |
| 25. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ | 26. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min,$ $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$ |

Контрольные вопросы

1. Первая фаза двойственного симплекс-метода.
2. Вторая фаза двойственного симплекс-метода.

Лабораторная работа № 4

МАТРИЧНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы: изучить метод потенциалов на примере транспортной задачи.

Теоретические сведения

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, \dots, a_m . Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, \dots, b_n . Известны c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ – стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каж-

дому j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице ниже.

| | | | | |
|----------------------|----------|----------|-----|----------|
| $a_i \backslash b_j$ | b_1 | b_2 | ... | b_n |
| a_1 | c_{11} | c_{12} | ... | c_{1n} |
| a_2 | c_{21} | c_{22} | ... | c_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| a_m | c_{m1} | c_{m2} | ... | c_{mn} |

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, вектора запросов потребителей $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ и матрицы стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т. д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т. п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ и потребителей v_j , $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \\ u_i + v_j &= c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал v_j , и $v_j = c_{ij} - u_i$ при $x_{ij} > 0$, если известен потенциал u_i .

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{lk} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те оценки, которые

больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max \{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{\leftarrow} \{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{\leftarrow} \{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$. Далее возвращаемся к п. 3 алгоритма.

Варианты с заданиями

Задание. Решить транспортную задачу методом потенциалов (начальный базисный план перевозок построить с помощью метода минимального элемента, написать программу). Для проверки можно использовать онлайн-калькулятор.

1.

| | | | | |
|-------|----|----|----|----|
| b_j | 40 | 20 | 20 | 20 |
| a_i | | | | |
| 25 | 6 | 8 | 14 | 4 |
| 30 | 5 | 2 | 2 | 8 |
| 35 | 7 | 6 | 7 | 5 |
| 10 | 4 | 5 | 12 | 7 |

2.

| | | | | |
|-------|----|----|----|----|
| b_j | 10 | 40 | 20 | 30 |
| a_i | | | | |
| 10 | 12 | 9 | 14 | 7 |
| 15 | 11 | 13 | 10 | 8 |
| 25 | 4 | 2 | 3 | 5 |
| 50 | 2 | 6 | 13 | 3 |

3.

| | | | | |
|-------|----|----|----|----|
| b_j | 10 | 40 | 40 | 10 |
| a_i | | | | |
| 15 | 2 | 7 | 8 | 4 |
| 25 | 3 | 8 | 5 | 1 |
| 30 | 5 | 10 | 3 | 9 |
| 30 | 1 | 4 | 4 | 10 |

4.

| | | | | |
|-------|----|----|----|----|
| b_j | 60 | 65 | 75 | 50 |
| a_i | | | | |
| 70 | 4 | 7 | 15 | 5 |
| 80 | 7 | 6 | 2 | 3 |
| 80 | 3 | 4 | 8 | 5 |
| 20 | 8 | 2 | 4 | 7 |

5.

| $a_i \backslash b_j$ | 30 | 750 | 50 | 100 |
|----------------------|----|-----|----|-----|
| 70 | 7 | 5 | 1 | 6 |
| 120 | 5 | 3 | 4 | 9 |
| 20 | 6 | 8 | 7 | 7 |
| 40 | 4 | 3 | 5 | 5 |

6.

| $a_i \backslash b_j$ | 75 | 125 | 60 | 140 |
|----------------------|----|-----|----|-----|
| 80 | 4 | 5 | 2 | 11 |
| 40 | 7 | 3 | 2 | 4 |
| 160 | 3 | 4 | 3 | 5 |
| 120 | 5 | 7 | 9 | 6 |

7.

| $a_i \backslash b_j$ | 45 | 40 | 5 | 10 |
|----------------------|----|----|---|----|
| 30 | 7 | 9 | 9 | 5 |
| 15 | 2 | 5 | 8 | 9 |
| 35 | 5 | 6 | 4 | 2 |
| 20 | 3 | 4 | 3 | 3 |

8.

| $a_i \backslash b_j$ | 25 | 35 | 45 | 35 |
|----------------------|----|----|----|----|
| 50 | 6 | 8 | 2 | 4 |
| 30 | 7 | 2 | 5 | 4 |
| 40 | 8 | 1 | 7 | 2 |
| 20 | 1 | 2 | 8 | 12 |

9.

| $a_i \backslash b_j$ | 60 | 40 | 35 | 65 |
|----------------------|----|----|----|----|
| 45 | 5 | 4 | 2 | 3 |
| 30 | 8 | 7 | 5 | 7 |
| 50 | 4 | 2 | 6 | 8 |
| 75 | 2 | 5 | 1 | 3 |

10.

| $a_i \backslash b_j$ | 200 | 100 | 80 | 120 |
|----------------------|-----|-----|----|-----|
| 60 | 6 | 3 | 3 | 8 |
| 140 | 3 | 2 | 7 | 6 |
| 150 | 5 | 4 | 2 | 12 |
| 140 | 2 | 5 | 8 | 7 |

11.

| $a_i \backslash b_j$ | 90 | 100 | 70 | 130 | 110 |
|----------------------|----|-----|----|-----|-----|
| 200 | 12 | 15 | 21 | 14 | 17 |
| 150 | 14 | 8 | 15 | 11 | 21 |
| 150 | 19 | 16 | 26 | 12 | 20 |

12.

| $a_i \backslash b_j$ | 180 | 140 | 190 | 120 | 170 |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 300 | 12 | 21 | 9 | 10 | 16 |
| 280 | 13 | 15 | 11 | 13 | 21 |
| 220 | 19 | 26 | 12 | 17 | 22 |

13.

| $a_i \backslash b_j$ | 180 | 120 | 90 | 105 | 105 |
|----------------------|-----|-----|----|-----|-----|
| 250 | 12 | 8 | 21 | 10 | 15 |
| 200 | 13 | 4 | 15 | 13 | 21 |
| 150 | 19 | 16 | 26 | 17 | 20 |

14.

| $a_i \backslash b_j$ | 200 | 170 | 230 | 225 | 175 |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 400 | 13 | 9 | 5 | 11 | 17 |
| 250 | 14 | 5 | 12 | 14 | 22 |
| 350 | 20 | 17 | 13 | 18 | 21 |

15.

| $a_i \backslash b_j$ | 160 | 70 | 90 | 80 | 100 |
|----------------------|-----|----|----|----|-----|
| 150 | 8 | 20 | 7 | 11 | 16 |
| 200 | 4 | 14 | 12 | 15 | 17 |
| 150 | 15 | 22 | 11 | 12 | 19 |

16.

| $a_i \backslash b_j$ | 170 | 120 | 190 | 140 | 180 |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 280 | 28 | 12 | 7 | 18 | 7 |
| 300 | 35 | 14 | 12 | 15 | 3 |
| 220 | 30 | 16 | 11 | 25 | 15 |

17.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 180 | 120 | 90 | 105 | 105 |
| 150 | 14 | 6 | 4 | 4 | 4 |
| 250 | 17 | 10 | 9 | 11 | 5 |
| 200 | 15 | 11 | 6 | 15 | 3 |

18.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 300 | 160 | 220 | 180 | 140 |
| 250 | 9 | 15 | 35 | 20 | 7 |
| 400 | 15 | 35 | 12 | 11 | 6 |
| 350 | 16 | 19 | 40 | 15 | 25 |

19.

| | | | | | |
|----------------------|-----|----|-----|-----|----|
| $b_j \backslash a_i$ | 100 | 70 | 130 | 110 | 90 |
| 150 | 20 | 3 | 9 | 15 | 35 |
| 150 | 14 | 10 | 12 | 20 | 46 |
| 200 | 25 | 11 | 16 | 19 | 48 |

20.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 190 | 140 | 180 | 120 | 170 |
| 280 | 7 | 3 | 9 | 15 | 35 |
| 220 | 3 | 10 | 12 | 20 | 46 |
| 300 | 15 | 11 | 16 | 19 | 48 |

21.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 120 | 180 | 105 | 90 | 105 |
| 200 | 9 | 6 | 17 | 11 | 8 |
| 250 | 13 | 4 | 9 | 5 | 7 |
| 150 | 6 | 7 | 14 | 10 | 6 |

22.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 175 | 225 | 230 | 170 | 200 |
| 350 | 5 | 13 | 18 | 17 | 8 |
| 400 | 6 | 10 | 15 | 6 | 3 |
| 250 | 24 | 21 | 9 | 16 | 17 |

3.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 120 | 110 | 85 | 195 | 190 |
| 250 | 15 | 7 | 16 | 4 | 11 |
| 250 | 20 | 9 | 6 | 10 | 9 |
| 200 | 2 | 4 | 7 | 3 | 6 |

24.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 160 | 120 | 100 | 150 | 170 |
| 250 | 14 | 11 | 9 | 13 | 18 |
| 180 | 6 | 5 | 14 | 4 | 14 |
| 270 | 7 | 19 | 11 | 6 | 13 |

25.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $b_j \backslash a_i$ | 160 | 160 | 180 | 220 | 280 |
| 350 | 6 | 11 | 10 | 14 | 19 |
| 300 | 17 | 6 | 4 | 11 | 9 |
| 350 | 12 | 8 | 19 | 10 | 13 |

26.

| | | | | | |
|----------------------|----|----|----|----|----|
| $b_j \backslash a_i$ | 40 | 30 | 80 | 40 | 20 |
| 70 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 50 | 4 | 7 | 5 | 4 | 2 |
| 90 | 8 | 2 | 3 | 3 | 3 |

Контрольные вопросы

1. Транспортная задача.
2. Метод северо-западного угла.
3. Метод минимальной стоимости.
4. Метод потенциалов.

Лабораторная работа № 5
**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ
МИНИМИЗАЦИИ**

Цель работы: изучить методы решения задачи безусловной оптимизации.

Теоретические сведения

Пусть дана задача на безусловный минимум $f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$ и известно начальное приближение x^1 . Требуется построить приближенное (улучшить план x^1) или точное решение задачи. Последовательные приближения строим по формуле $x^{k+1} = x^k + \theta_k \ell^k, k = 1, 2, \dots$, где ℓ^k – направление, а θ_k – шаг на k -й итерации.

Метод наискорейшего спуска (МНС). Применим в случае $f(x) \in C^{(1)}$. В этом методе в качестве ℓ^k выбирают направление антиградиента $\ell^k = -\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots$, а шаг θ_k на итерации находят как решение задачи одномерной оптимизации $\varphi(\theta) = f\left(x^k - \theta \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}\right) \rightarrow \min, \theta \geq 0, k = 1, \dots, 2, \dots$.

Метод Ньютона (МН) в основном применяется при условии $f(x) \in C^2, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0$. В методе полагают $\theta_k = 1$, $\ell^k = -\left(\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots$.

Анализ решения. Если на k -й итерации для плана $x^* = x^k$ выполняется условие $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0$, то дальнейшее улучшение планов по МНС и МН невозможно. План удовлетворяет необходимому условию оптимальности 1-го порядка, и, следовательно, может существовать решение. Он может быть подвергнут исследованию на оптимальность с помощью известных для задачи более сильных (необходимых и достаточных) условий оптимальности.

Например, если $f(x) \in C^{(2)}$, то условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \geq 0$ является необходимым, а условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} > 0$ достаточным для локальной оптимальности плана x^* . Если $f(x), x \in R^n$ выпуклая функция, то условие является критерием оптимальности плана x^* .

Варианты с заданиями

Задание. Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (2-й итерации), а затем применить метод Ньютона к задаче (требуется написать программу на любом языке программирования):

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n,$$

сравнить полученный план по целевой функции согласно варианту.

1. $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min, x^1 = (0,0)$.
2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, x^1 = (1,0)$.
3. $f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \rightarrow \min, x^1 = (5,3)$.
4. $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (0,0)$.
5. $f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (7,4)$.
6. $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min, x^1 = (8,9)$.
7. $f(x) = 5(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (4,5)$.
8. $f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 2(x_2 - 3)^2 \rightarrow \max, x^1 = (6,4)$.
9. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2) \rightarrow \max, x^1 = (3,-1)$.
10. $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2,3)$.
11. $f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, x^1 = (5,2)$.
12. $f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,10)$.
13. $f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2,7)$.
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2,2)$.
15. $f(x) = -20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, x^1 = (2,3)$.
16. $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,5)$.

17. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2,6)$.
18. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min, x^1 = (4,2,1)$.
19. $f(x) = 3x_1 - 0,2x_1^2 + x_2 - 0,5x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (1,2)$.
20. $f(x) = 2x_1 - 0,1x_1^2 + 3x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,1)$.
21. $f(x) = 3x_1 - (x_1 - 2)^2 - (2x_2 + 1)^2 \rightarrow \max, x^1 = (5,4)$.
22. $f(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 + 0,1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$.
23. $f(x) = -6x_1 + 4x_2^2 + x_1^2 - 18 \rightarrow \min, x^1 = (3,2)$.
24. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 11)^2 \rightarrow \min, x^1 = (7,0)$.
25. $f(x) = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \max, x^1 = (0,1,2)$.
26. $f(x) = (9x_1 - 10)^2 + (0,1x_2 + 10)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$.

Контрольные вопросы

1. Метод наименьшего спуска.
2. Метод Ньютона.

Лабораторная работа № 6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Цель работы: изучить метод ветвей и границ.

Теоретические сведения

Постановка задачи. Имеется n неделимых предметов:

$I = \{\overline{i = 1, n}\}$. Заданы: p_i – вес, c_i – ценность i -го предмета. $1 \leq i \leq n$.

Требуется уложить в рюкзак некоторую совокупность предметов с общей стоимостью не менее числа c и минимального веса.

Математическая модель задачи. Введем переменные $x_i, i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} 1, & \text{если предмет укладывается в рюкзак;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем оптимизационную задачу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x : \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, n}\}. \quad (1)$$

Схема решения. 0-итерация. Находим оценку $\xi_0 = \xi(x)$. Для этого решаем задачу:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (2)$$

где $X = \{x : \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad i \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}\}$.

Она представляет из себя непрерывную задачу линейного программирования. Пусть x^* решение задачи (2). Положим $\xi_0 = f(x^*)$. Если x^* есть план задачи (1), то x^* и ее решение. В противном случае разбиваем множество X на два подмножества, укладывая или не укладывая один из предметов (например, первый):

$$X_{11} = \{x : x_1 = 0, \quad x \in X\}, \quad X_{12} = \{x : x_1 = 1, \quad x \in X\}.$$

Список множества для первой итерации $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$.

Рекорд итерации $r_0 = \infty$. k -итерация. Пусть $S_k = \{X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{ks(k)}\}$ – список множеств для этой итерации. Находим оценку $\xi_k = \min_{1 \leq i \leq s(k)} \xi(X_{ki})$, где $\xi(X_{ki})$ – оценки снизу значений функции задачи (1) на подмножестве X_{ki} . Они находятся как решения непрерывных задач:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X_{ki}, \quad 1 \leq i \leq s(k). \quad (3)$$

Пусть x^{*i} , $1 \leq i \leq s(k)$ решения задачи (3). Тогда полагаем $\xi(X_{ki}) = f(x^{*i})$.

Если при некотором i , $1 \leq i \leq s(k)$ задача (3) не имеет решения, то $\xi(X_{ki}) = \infty$.

Пусть среди решений x^{*i} , $1 \leq i \leq s(k)$ непрерывных задач (1) есть планы задач (1): $x^{k1}, x^{k2}, \dots, x^{kl} \in X$.

Вычисляем рекорд итерации

$$r_k = \min_{1 \leq i \leq l} \{f(x^{ki}), r^{k-1}\}, f(x^k) = r^k,$$

а) если $r^k = \xi^k$, то план x^k – решение задачи (1);

б) если $r^k - \xi^k = \varepsilon > 0$, то $x^\varepsilon = x^k - \varepsilon$ – оптимальный план.

Если не выполняются случай а) либо случай б) (т. е. приближение нас не удовлетворяет), то переходим к следующей итерации. Составляем список множеств для $(k + 1)$ -й итерации S_{k+1} . Для этого разбиваем множество X_k ($\xi(X_k) = \xi_k$) на два подмножества (укладываем или не укладываем в рюкзак один из оставшихся в X_k предметов); X_k^1 и X_k^2 . В S_{k+1} включаем множества из S_k и X_k^1 , X_k^2 , исключив множество X_k . Из списка S_{k+1} следует также исключить те множества списка S_k , для которых оценка снизу больше либо равна r^k .

Итерации продолжают либо до получения оптимального плана, либо до достижения заданной степени точности ε . Так как множества планов задачи (1) конечны, то всегда можно построить оптимальный план.

Метод решения непрерывных задач типа (2), (3). Пусть требуется решить задачу (2). Для каждого i , $1 \leq i \leq n$ вычисляем относительный вес на единицу стоимости $\frac{p_i}{c_i}$. Ясно, что оптимальный план задачи (2) будет построен, если загрузить в рюкзак в первую очередь предметы (для непрерывной задачи их можно дробить) с наименьшим числом $\frac{p_i}{c_i}$.

Засыпая в рюкзак предметы в порядке возрастания числа до достижения заданной стоимости груза c , строим оптимальный план задачи (2). Задачи (3) решаются аналогично.

Пример. Рассмотрим задачу о рюкзаке с данными из таблицы ниже.

| | | | | |
|-------|----|----|----|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 |
| c_i | 20 | 10 | 12 | 7 |
| p_i | 3 | 4 | 5 | 2 |

$n = 4, c = 30$, математическая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\rightarrow \min, \\ 20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 &\geq 30, \\ x_i &= 0 \cup 1, \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение

0-итерация.

Решаем задачу (4) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1.$$

Вычисляем отношение $\frac{p_i}{c_i}, i = \overline{1,4}$.

$$\frac{p_1}{c_1} = \frac{3}{20}, \quad \frac{p_2}{c_2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{p_3}{c_3} = \frac{5}{12}, \quad \frac{p_4}{c_4} = \frac{2}{7}.$$

Загружаем в рюкзак предметы в порядке возрастания относительной ценности: первый, четвертый, второй, третий. Оптимальный план задачи (4):

$$\begin{aligned} x^* &= \{x_1^* = x_4^* = 1, x_2^* = 0,3, x_3^* = 0\}, \\ \xi_0 &= \xi(x) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6,2. \end{aligned}$$

x^* не является планом задачи (4).

Множество X разбиваем на подмножества: $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$,

$$X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}, \quad X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}, \quad r_0 = \infty.$$

1-итерация. Имеем $\xi(X_{11}) = \infty$. Так как $10 + 12 + 7 = 29 < 30$,

$$\xi(X_{12}) = \xi(X), \quad x^{*2} = x^*, \quad \xi_1 = \xi_0.$$

На итерации планы не построены: $r_1 = \infty$.

Множество X_{11} исключаем из списка, а множество X_{12} разбиваем на два подмножества:

$$X_{21} = \{x \in X_{12} : x_2 = 0\} = \{x \in X : x_1 = 1, x_2 = 0\},$$

$$X_{22} = \{x \in X : x_1 = x_2 = 1\}, \quad S_2 = \{X_{21}, X_{22}\}.$$

2-итерация. $\xi(X_{21}) = 6,25, x^{*1} = \{1, 0, \frac{1}{4}, 1\}$,

$$\xi(X_{22}) = 7, \quad x^{*2} = \{1,1,0,0\}, \quad \xi_2 = 6,25.$$

Получен рекордный план итерации $x^2 = x^{*2}$, $r_2 = 7$, x^2 будет ε -оптимальный план: $\varepsilon = r_2 - \xi_2 = 0,75$. Так как p_i целое число, то условие $r_k - \varepsilon_k < 1$ означает, что рекордный план оптимальный. Следовательно, x^2 решение задачи $x^0 = \{1,1,0,0\}$, $f(x^0) = 7$.

Варианты с заданиями

Задание. Записать математическую модель задачи. Решить задачу о рюкзаке методом ветвей и границ с данными из таблицы при $n = 5$, $c = 30$.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|---|---|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| c_i | 20 | 10 | 12 | 7 | 7 | 10 | 12 | 16 | 9 | 7 | 13 | 10 | 9 | 8 | 15 | 20 | 13 | 17 |
| p_i | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 | 3 | 5 | 4 | 4 |

Нарисовать дерево вариантов. Номера предметов в i -м варианте (i – номер студента по списку в журнале) выбираются следующим образом:

$$k = \overline{0,4},$$

$$1 \leq i \leq 14 : i + k,$$

$$15 \leq i \leq 24 : i + 2k - 14,$$

$$25 \leq i \leq 30 : i + 3k - 24.$$

Контрольные вопросы

1. Формулировка задачи о рюкзаке.
2. Метод ветвей и границ.

Литература

1. Ашманов, С. А. Линейное программирование : учеб. пособие для вузов / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1981. – 303 с.
2. Ашманов, С. А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1991. – 447 с.
3. Бышик, Т. П. Методы оптимизации: Нелинейное программирование и вариационное исчисление : практ. рук. / Т. П. Бышик, В. Л. Мережа. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 42 с.
4. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов. – Минск : Наука и техника, 1974. – 272 с.
5. Габасов, Р. Методы линейного программирования / Р. Габасов. – Минск : БГУ, 1977. – 174 с.
6. Габасов, Р. Методы линейного программирования / Р. Габасов. – Минск : БГУ, 1978. – 240 с.
7. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. пособие для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» / В. Г. Карманов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
8. Краснов, М. Л. Вариационное исчисление : учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1973. – 192 с.
9. Костевич, Л. С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений : учеб. пособие для вузов / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003. – 424 с.
10. Струченков, В. И. Методы оптимизации: основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учеб. пособие / В. И. Струченков. – Изд. 2-е, перераб. – М. : Экзамен, 2007. – 255 с.

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Введение..... | 3 |
| <i>Лабораторная работа № 1. Графический метод решения задач линейного программирования.....</i> | <i>5</i> |
| <i>Лабораторная работа № 2. Симплексный метод решения задач линейного программирования.....</i> | <i>11</i> |
| <i>Лабораторная работа № 3. Двойственный симплексный метод</i> | <i>18</i> |
| <i>Лабораторная работа № 4. Матричная транспортная задача</i> | <i>22</i> |
| <i>Лабораторная работа № 5. Решение задачи безусловной минимизации.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Лабораторная работа № 6. Решение задачи о рюкзаке методом ветвей и границ</i> | <i>30</i> |
| Литература | 35 |

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ

**ПРАКТИКУМ
по выполнению лабораторных работ
для студентов специальности 1-40 04 01
«Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения**

Составитель Велесницкий Василий Федорович

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 25.04.19.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Цифровая печать. Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,02.

Изд. № 22.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель