



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика и электротехника»

Л. Г. Бычкова

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

ПРАКТИКУМ

**по курсу «Теория электрических цепей»
для студентов специальностей
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
и 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2019

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73
Б95

*Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 8 от 24.04.2018 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук,
доц. *А. О. Добродей*

Бычкова, Л. Г.

Б95

Расчет цепей несинусоидального тока. Расчет длинных линий : практикум по курсу «Теория электрических цепей» для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» днев. и заоч. форм обучения / Л. Г. Бычкова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 93 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретическую справку, решение типовых задач, задачи для самостоятельного решения и тестирования по разделам: «Несинусоидальные токи», «Линии с распределенными параметрами».

Для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2019

ГЛАВА 1. ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1.1. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ.

1.1.1р. Записать три первые гармоники разложения несинусоидального напряжения (рис.1.1.).

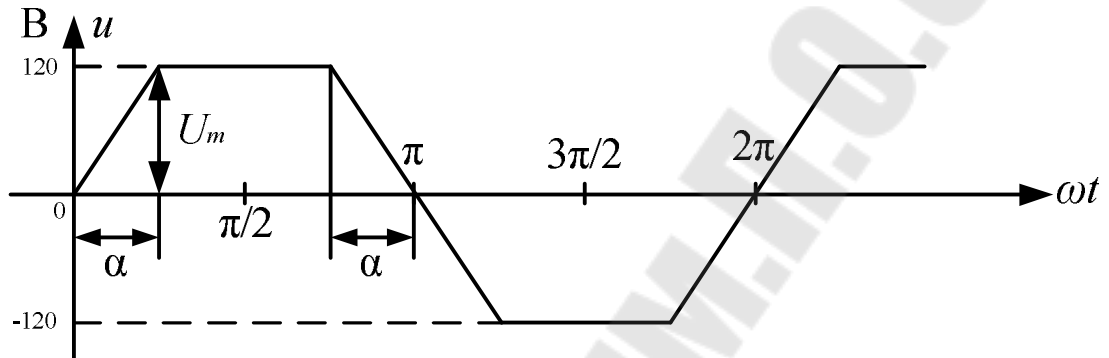


Рис.1.1.

Решение

Для заданной несинусоидальной кривой имеется табличное разложение в ряд Фурье. Оно имеет вид:

$$u = \frac{4U_m}{\alpha\pi} \left(\sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t \dots \right)$$

Подставим численные значения: $U_m = 120 \text{ В}$, $\alpha = \pi/4 \text{ рад}$.

$$\begin{aligned} u &= \frac{4 \cdot 120 \cdot 4}{\pi \cdot \pi} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{4} \sin 5\omega t \right) = \\ &= 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t - 5,5 \sin 5\omega t = 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t + \\ &+ 5,5 \sin(5\omega t - 180^\circ), \text{ В.} \end{aligned}$$

1.1.2р. Записать ряд Фурье для функции $f_2(t)$, представленной на рис.1.2.а.

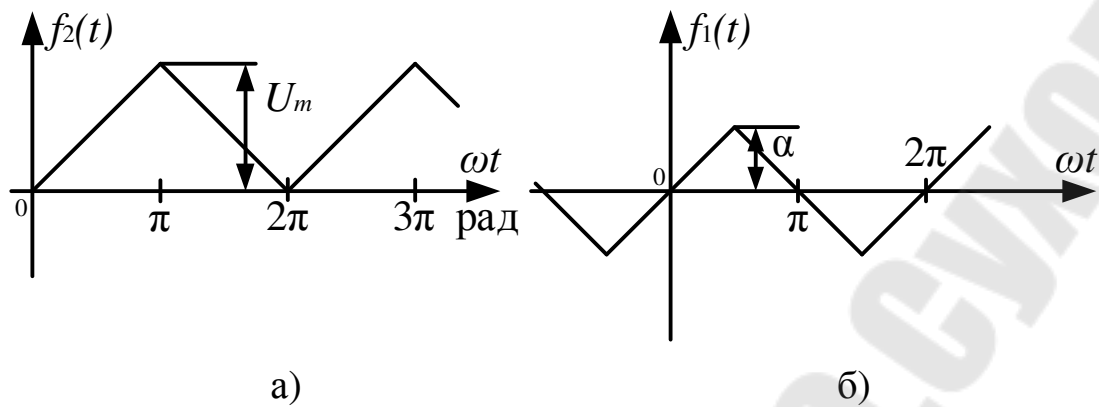


Рис.1.2.

Решение

Известно табличное разложение функции $f_1(t)$ (рис.1.2.б):

$$f_1(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left(\sin\omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t \dots \right).$$

Сместим $f_1(t)$ на четверть периода вправо, что соответствует уменьшению её аргумента t на величину $T/4$ или аргумента ωt на $\omega T/4 = 2\pi/4 = \pi/2$, получим:

$$f_1(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) + \dots \right]$$

С учётом того, что $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \omega t$;

$\sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos 3\omega t$; $\sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos 5\omega t$, получим

$$f_1(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left(-\cos\omega t - \frac{1}{9} \cos 3\omega t - \frac{1}{25} \cos 5\omega t - \dots \right)$$

Заменим амплитуду a на $\frac{U_m}{2}$, и поднимем функцию на величину постоянной составляющей, которая равна среднему за период значению заданной функции:

$$f_2(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{4U_m}{\pi^2} \left(\cos\omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

1.1.3. Каким видом симметрии обладают кривые, заданные в виде:

а) $i = 10 \sin\omega t + 3 \sin 2\omega t$, А ?

б) $u = 24 \sin\omega t - 12 \sin 3\omega t$, В ?

1.1.4. Какие гармоники входят в состав кривых $f(t)$, изображённых на рис.1.3. (а,б).

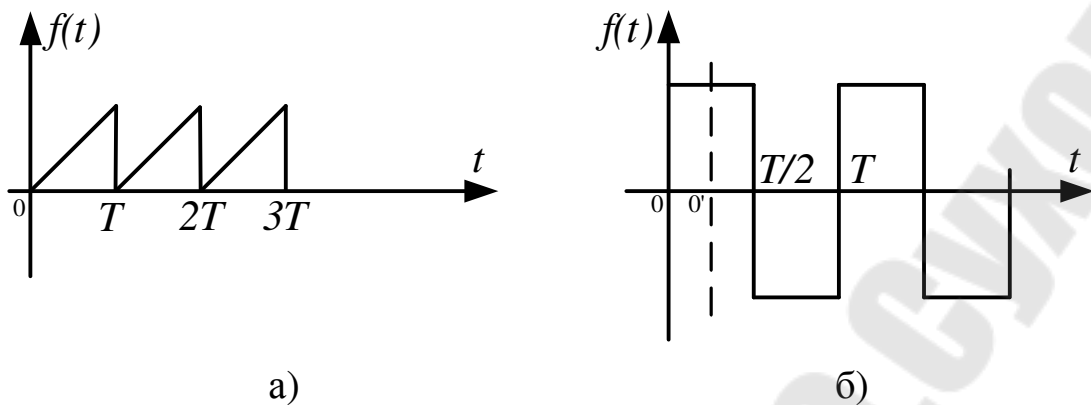


Рис.1.3.

1.1.5. Какие гармоники будут входить в состав кривой $f(t)$ (рис.1.3.б), если начало отсчёта времени перенести в точку $0'$?

1.1.6. Ток $i(t)$ источника тока является периодической функцией времени, представленной на рис.1.4. Определить постоянную составляющую и три первые гармоники тока.

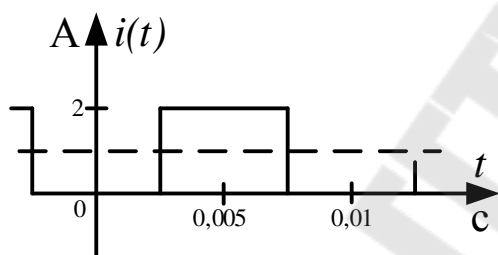


Рис.1.4.

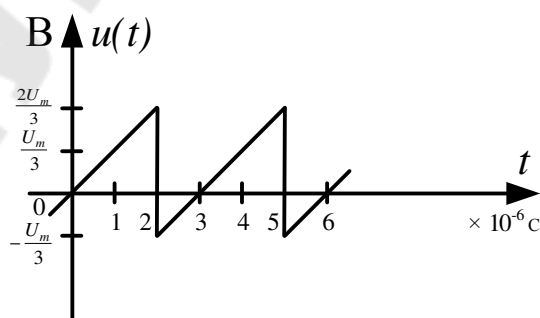


Рис.1.5.

1.1.7. Постоянная составляющая напряжения, представленного на рис.1.5., равна 100 В. Определить амплитуды и начальные фазы трёх первых гармоник.

1.1.8. Вычислить постоянную составляющую и три первые гармоники разложения несинусоидального напряжения, представленного на рис.1.6.а,б в ряд Фурье. Каждый из импульсов напряжения представляет собой полуволну напряжения.

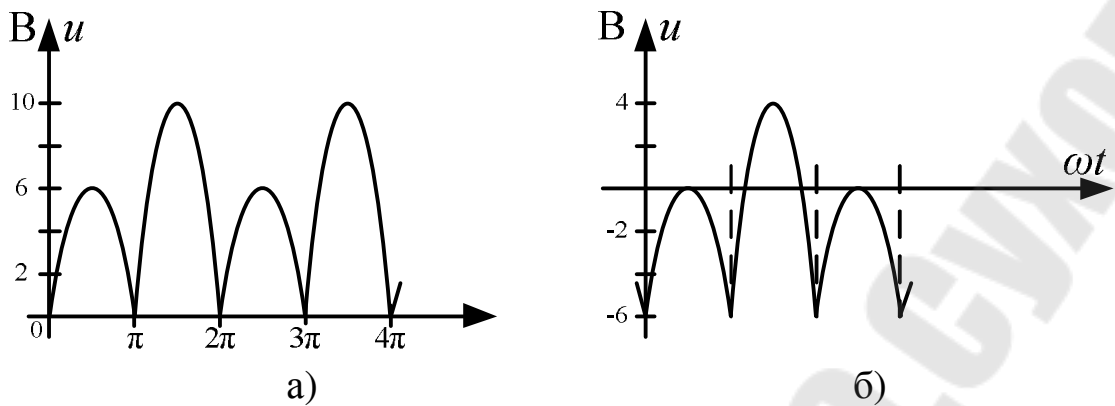


Рис.1.6.

- 1.1.9.** Напряжение изменяется по закону указанному на рис.1.1. Определить, какие гармоники присутствуют при разложении в ряд Фурье (по виду симметрии), и записать четыре первых гармоники ряда Фурье, если $U_m = 100$ В;
- а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \pi/3$; в) $\alpha = \pi/2$.

- 1.1.10.** Разложить в ряд Фурье периодические кривые, показанные на рис.1.7.а,б., предварительно определив, какие гармоники присутствуют в разложении.

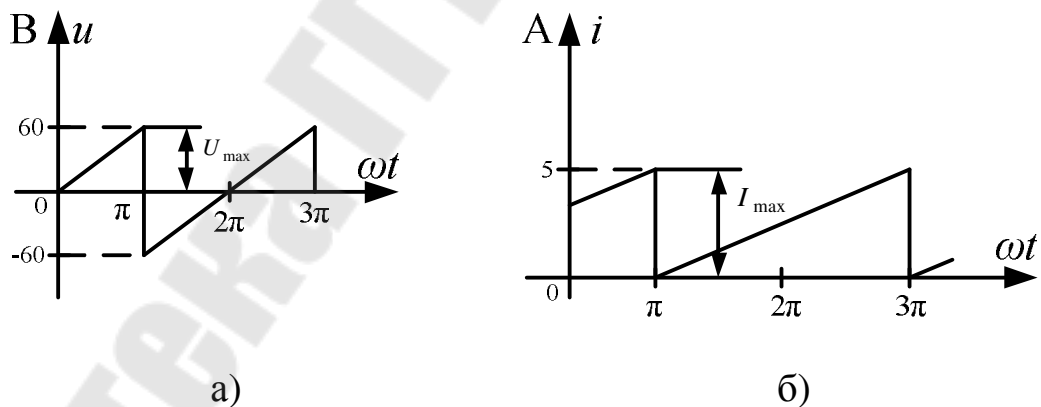


Рис.1.7.

- 1.1.11.** Записать аналитическое выражение функции в виде суммы двух синусоид по известным коэффициентам: $B_1 = 2,853$, $C_1 = 0,927$, $B_2 = 0,587$, $C_2 = -0,809$ первых двух гармоник ряда Фурье.

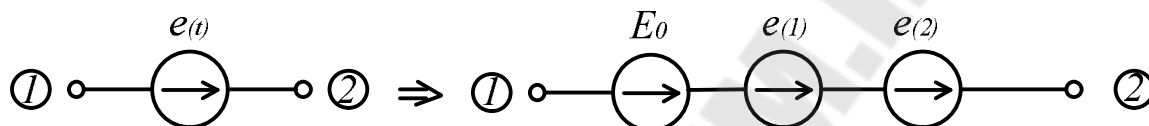
1.2. РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭДС И ТОКАМИ

Теоретическая справка

Пусть несинусоидальная ЭДС представлена рядом Фурье:

$$e(t) = E_0 + e_{(1)} + e_{(2)} + \dots$$

В этом случае источник можно рассматривать как последовательное соединение разночастотных источников ЭДС:



Расчет выполняется методом наложения: для каждой составляющей отдельно. Для расчета применяют любой из методов расчета цепей постоянного и синусоидального тока.

Следует учитывать, что реактивные сопротивления элементов схемы зависят от номера гармоники. Так, сопротивление индуктивности $X_{L(k)} = k\omega_1 L = kX_{L(1)}$ возрастает пропорционально номеру гармоники, а сопротивление емкости $X_{c(k)} = \frac{1}{k\omega_1 c} = \frac{X_{c(1)}}{k}$ - уменьшается.

При расчете каждой из гармоник можно применять комплексный метод, строить векторные диаграммы *только* для каждой гармоники отдельно. *Недопустимо* сложение векторов напряжений или токов разных гармоник, т.к. векторы разных гармоник вращаются с разной скоростью $k\omega$. Результат расчета токов и напряжений может быть представлен суммой гармонических составляющих, т.е. рядом Фурье.

Действующее и среднее по модулю значение несинусоидальной функции

Действующее значение:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}. \quad (1.1)$$

После подстановки $f(t)$ в виде ряда Фурье и интегрирования, получим:

$$A = \sqrt{A_{(0)}^2 + \sum_1^n A_{(k)}^2}, \quad (1.2)$$

где $A_{(k)} = \frac{A_{m(k)}}{\sqrt{2}}$ - действующее значение синусоиды k -той гармоники.

Пусть, например, ЭДС генератора представлена, как:

$$e(t) = E_{m(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{m(2)} \sin(3\omega_1 t + \psi_3) + E_{m(3)} \sin(5\omega_1 t + \psi_5).$$

Действующее значение ЭДС:

$$E = \sqrt{\frac{E_{m(1)}^2 + E_{m(3)}^2 + E_{m(5)}^2}{2}}. \quad (1.3)$$

Среднее по модулю значение несинусоидальной функции равно:

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt, \quad (1.4)$$

и в общем случае не совпадает с постоянной составляющей ряда Фурье A_0 . Величина A_{cp} зависит от начальных значений гармонических составляющих ψ_k . Среднее по модулю значение можно рассчитать или интегрируя ряд Фурье согласно (1.4), или графоаналитическим методом:

$$A_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n |f_p(\omega t)|. \quad (1.5)$$

Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальной кривой

1. Коэффициент формы K_ϕ определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю:

$$K_\phi = \frac{A}{A_{cp}}; \quad \text{для синусоиды } K_\phi = 1,11. \quad (1.6)$$

2. Коэффициент амплитуды K_a - отношение максимального к действующему значению функции:

$$K_a = \frac{A_{\max}}{A}; \quad \text{для синусоиды } K_a = \sqrt{2}. \quad (1.7)$$

3. Коэффициент искажения K_u - отношение действующего значения первой гармоники к действующему значению всей кривой:

$$K_u = \frac{A_{(1)}}{A}; \quad \text{для синусоиды } K_u = 1. \quad (1.8)$$

4. Коэффициент высших гармоник K_σ - это отношение действующего значения высших гармоник ($k \geq 2$) к действующему значению первой:

$$K_\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^n A_{(k)}^2}{A_{(1)}^2}}; \quad \text{для синусоиды } K_\sigma = 0. \quad (1.9)$$

1.2.1р. Определить мгновенное значение тока $i(t)$ (рис. 1.8.а), если $u(t) = 75 + 106\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) - 50\sqrt{2} \sin(2\omega t - 45^\circ)$, $R = 150 \text{ Ом}$,

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом}.$$

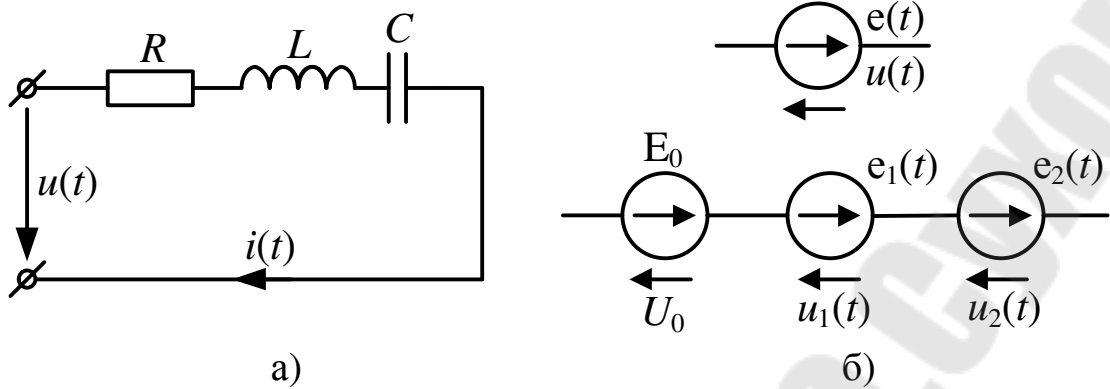


Рис.1.8

Решение

Расчёт линейной цепи с несинусоидальными источниками ведётся по принципу наложения. Каждое слагаемое ряда $u(t) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + \dots$ представляется отдельным источником (рис. 2.1.б).

Сопротивление элементов для каждого слагаемого режима определяются частотой соответствующего источника:
 $X_{L(k)} = k\omega L$, $X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega C}$. Сопротивление резистора R – от частоты не зависит.

Постоянная составляющая $k = 0$:

$I_0 = 0$, т.к. в цепи есть конденсатор.

Первая гармоника $k = 1$:

$$\underline{U}_{m(1)} = 106\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ В};$$

$$X_{L(1)} = \omega L = 100 \text{ Ом};$$

$$X_{c(1)} = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)}) = 150 + j(100 - 100) = 150 \text{ Ом}.$$

Для первой гармоники наблюдается резонанс напряжений.

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{106\sqrt{2} e^{j45^\circ}}{150} = 1e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Вторая гармоника $k = 2$:

$$\underline{U}_{m(2)} = -50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} \text{ В};$$

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 200 \text{ Ом}; X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = 50 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{2(2)} &= R + j(X_{L(2)} - X_{C(2)}) = 150 + j(200 - 50) = 150 + j150 = \\ &= 150\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{I}_{m(2)} &= \frac{50\sqrt{2} e^{j135^\circ}}{150\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 0,33 e^{j90^\circ} \end{aligned}$$

Мгновенное значение искомого тока:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = 0 + 1 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,33 \sin(2\omega t + 90^\circ), \text{ А}$$

1.2.2. Для схемы рис.1.9., а определить мгновенные значения токов в ветвях и их действующие значения, если:

$$e(t) = 20 \sin(2\omega t - 90^\circ), \text{ В}, \quad i_1(t) = 10 + 10 \sin(\omega t + 60^\circ), \text{ А}.$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \text{ Ом}, \quad R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}.$$

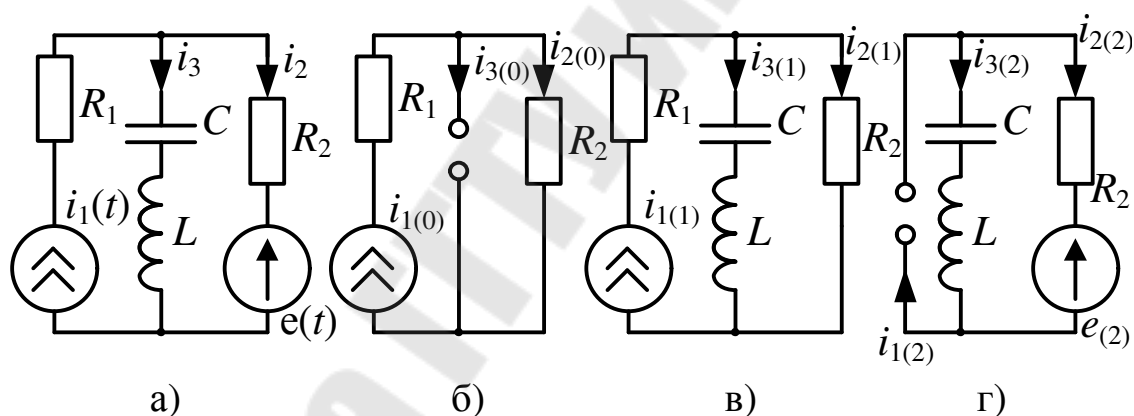


Рис. 1.9

Решение

Режим в этой цепи найден путём наложения трёх режимов в цепях (рис.1.9б,в,г).

$$k = 0$$

Расчёт для нулевой составляющей ведём по схеме рис.1.9б. Так как конденсатор постоянный ток не пропускает и источник ЭДС не содержит нулевой гармоники, то:

$$I_{3(0)} = 0, \quad I_{1(0)} = I_{2(0)} = 10 \text{ А}.$$

$$k = 1$$

Расчёт для первой гармоники выполняем по схеме рис.1.9в. Источник ЭДС не содержит первой гармоники, поэтому в схему не включен.

Определим комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_{1(1)} = \underline{Z}_{2(1)} = R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{3(1)} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j2 - j2 = 0$$

$$\text{Следовательно: } I_{2(1)} = 0, \quad I_{1(1)} = I_{2(1)} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ}, \text{ А}$$

$$k = 2$$

Расчёт для второй гармоники (рис.1.9г)

$$\underline{Z}_{2(2)} = 4 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{3(2)} = j2\omega L - j\frac{1}{2\omega C} = j4 - j1 = j3 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1(2)} = 0; \quad \underline{I}_{2(2)} = \underline{I}_{3(2)} = \frac{\underline{E}_{(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = \frac{20\sqrt{2}e^{-j90^\circ}}{4 - j3} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-j53^\circ}, \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов в ветвях:

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(2)} = 10 + 10 \sin(\omega t + 60^\circ), \text{ А};$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(2)} = -10 + 4 \sin(2\omega t - 53^\circ), \text{ А};$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 10 \sin(\omega t + 60^\circ) + 4 \sin(2\omega t - 53^\circ), \text{ А.}$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \left(\frac{I_{m1(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} = 12,24 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{m2(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10,39 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7,615 \text{ А.}$$

1.2.3.р. В цепи рис.1.10а действует ЭДС $e(t) = 16 + 20 \sin 100t$;

$$C_2 = C_3 = 10 \text{ мкФ}, \quad C_1 = 20 \text{ мкФ}, \quad R = 1 \text{ кОм.}$$

Найти закон изменения тока i_1 и напряжений на элементах схемы. Определить их действующие значения.

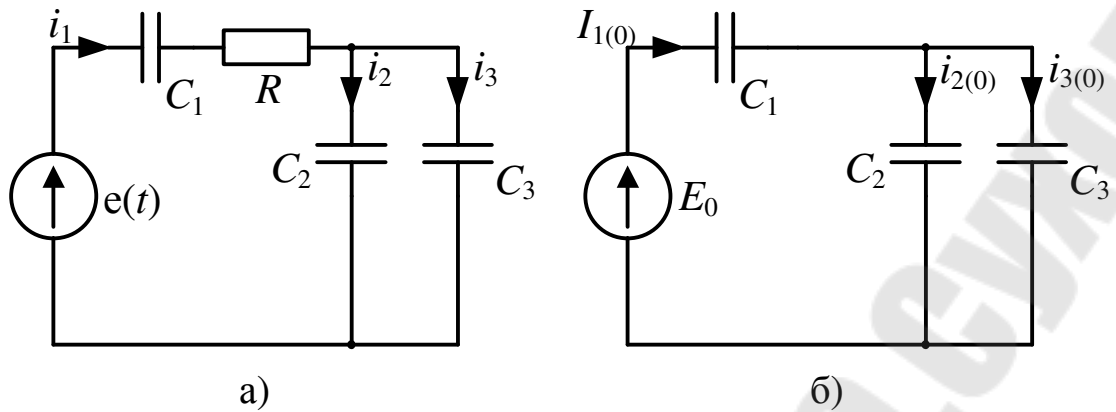


Рис. 1.10

Решение

Расчёт произведём отдельно для каждой гармоника.

$$k = 0$$

Для постоянной составляющей имеем схему (рис.1.10б). Т.к. постоянный ток через конденсатор не протекает, то

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = 0; U_{R(0)} = 0.$$

Из системы уравнений:

$$U_{C1(0)} + U_{C2(0)} = E_0 \Rightarrow U_{C2(0)} = E_0 - U_{C1(0)}$$

$$U_{C2(0)} - U_{C3(0)} = 0 \Rightarrow U_{C3(0)} = E_0 - U_{C1(0)}$$

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} + I_{3(0)} \Rightarrow C_1 U_{C1(0)} = C_2 U_{C2(0)} + C_3 U_{C3(0)},$$

Получаем:

$$U_{C1(0)} \cdot C_1 = (E_0 - U_{C1(0)}) \cdot C_2 + (E_0 - U_{C1(0)}) \cdot C_3$$

$$U_{C1(0)} \cdot (C_1 + C_2 + C_3) = E_0 \cdot (C_2 + C_3)$$

$$U_{C1(0)} = \frac{E_0 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{16(10 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6})}{20 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ В};$$

$$U_{C2(0)} = E_0 - U_{C1(0)} = 16 - 8 = 8 \text{ В};$$

$$k = 1$$

Для первой гармоники (рис.1.10а) имеем:

$$X_{C1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{100 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 500 \text{ Ом};$$

$$X_{C2(1)} = X_{C3(1)} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{100 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 1000 \text{ Ом}.$$

Тогда:

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{E}_{(1)}}{R - j\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega(C_2 + C_3)}\right)} = \frac{20\sqrt{2}}{1000 - j\left(\frac{10^6}{100 \cdot 20} + \frac{10^6}{100 \cdot 20}\right)} = 0,01e^{-j45^\circ}, \text{ А};$$

$$\underline{U}_{C1(1)} = \underline{I}_{1(1)} \left(-j \frac{1}{\omega C_1}\right) = 0,01e^{-j45^\circ} 500e^{-j90^\circ} = 5e^{-j135^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{C2(1)} = \underline{U}_{C3(1)} = \underline{I}_{1(1)} \left(-j \frac{1}{\omega(C_2 + C_3)}\right) = 0,01e^{-j45^\circ} 500e^{-j90^\circ} = 5e^{-j135^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{R(1)} = \underline{I}_{1(1)} R = 0,01e^{-j45^\circ} \cdot 1000 = 10e^{-j45^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2(1)} = \underline{U}_{C2(1)} j\omega C_2 = 5e^{-j135^\circ} 10^{-3} e^{j90^\circ} = 0,005e^{-j45^\circ}, \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3(1)} = \underline{U}_{C3(1)} j\omega C_3 = 5e^{-j135^\circ} \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} = 0,005e^{-j45^\circ}, \text{ А}.$$

Запишем закон изменения токов и напряжений на элементах схемы:

$$i_1 = 0,01\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ), \text{ А};$$

$$i_2 = i_3 = 0,005\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ), \text{ А};$$

$$u_R = 10\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ), \text{ В};$$

$$u_{C1} = 8 + 5\sqrt{2} \sin(100t - 135^\circ), \text{ В};$$

$$u_{C2} = u_{C3} = 8 + 5\sqrt{2} \sin(100t - 135^\circ), \text{ В}.$$

Действующие значения:

$$I_1 = 0,01 \text{ А}, I_2 = I_3 = 0,005 \text{ А}, U_R = 10 \text{ В},$$

$$U_{C1} = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ В}, U_{C2} = U_{C3} = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ В}.$$

1.2.4. По какому закону изменяется напряжение $u(t)$ цепи рис.1.11, если: $i = 10 + 5 \sin 200t$, А, $R = 30$ Ом, $L = 0,4$ Гн ?

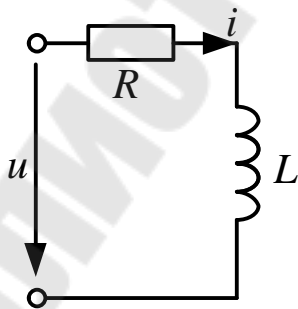


Рис.1.11

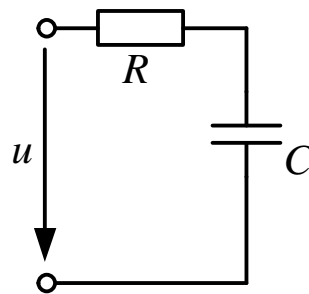


Рис.1.12

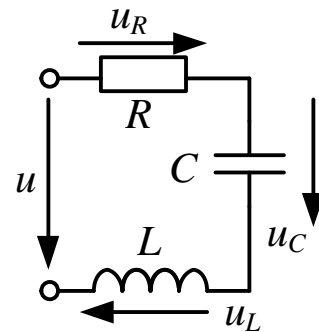


Рис.1.13

1.2.5. Напряжение, приложенное к цепи рис.1.12., изменяется по закону: $u = 282 + 282\sin 314t$. Сопротивление $R = 30$ Ом, ёмкость $C = 80$ мкФ. Определить действующее значение тока цепи, мгновенный ток.

1.2.6. Определить действующие и мгновенные значения тока и напряжения на отдельных участках электрической цепи рис.1.13., если напряжение $u = 400 + 282\sin \omega t$. При угловой частоте ω $X_C = X_L = 60$ Ом, сопротивление $R = 40$ Ом.

1.2.7. Определить действующие и мгновенные значения токов цепи рис.1.14, если напряжение $u = 120 + 282\sin \omega t + 141\sin(3\omega t + 30^\circ)$ В. При угловой частоте ω : $X_C = X_L = 30$ Ом, сопротивления $R_1 = R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 100$ Ом.

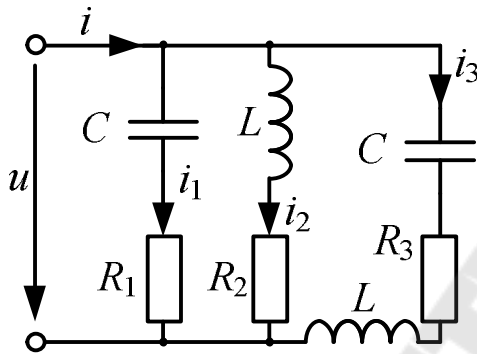


Рис.1.14

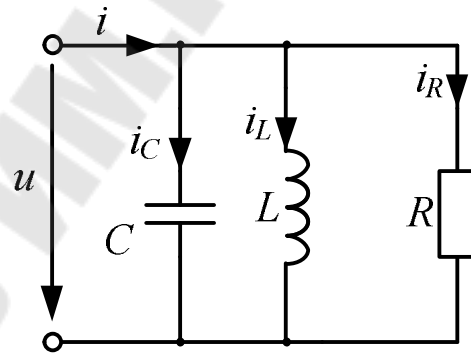


Рис.1.15

1.2.8. Ток конденсатора (рис.1.15) изменяется по закону $i_C = 60\sin(\omega t + 60^\circ) + 30\sin(3\omega t - 60^\circ)$. Определить законы изменения токов i_C , i_R и i_L , а также напряжения U , если сопротивления равны $R = \omega L = \frac{1}{3\omega C} = 3$ Ом.

1.2.9. Входное напряжение цепи рис.1.16, изменяется по закону $u = 20\sin(2\omega t + 90^\circ) - 10\sin(4\omega t - 90^\circ)$,

$R = 10$ Ом, $X_{L(2)} = \omega_2 L = 10$ Ом, $X_{C(2)} = \frac{1}{\omega_2 C} = 20$ Ом.

Определить мгновенные значения всех токов.

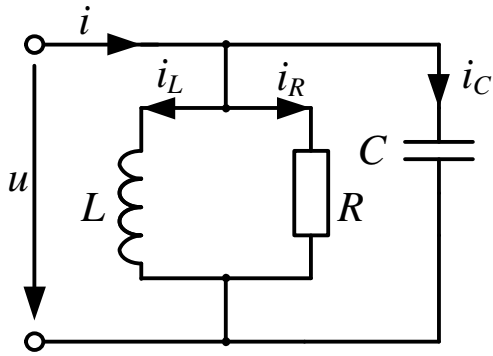


Рис.1.16

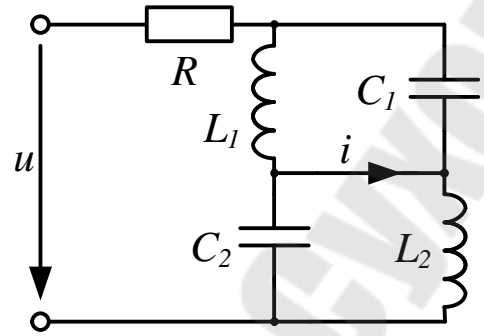


Рис.1.17

1.2.10. На вход цепи подаётся напряжение (рис.1.17) $u = 10 + 40 \sin \omega t + 20 \sin(2\omega t - 45^\circ)$, В. Параметры цепи:

$$\omega L_1 = 20 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C_1} = 20 \text{ Ом}, \quad \omega L_2 = 10 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C_2} = 40 \text{ Ом}, \quad R = 10 \text{ Ом}.$$

Определить ток i .

1.2.11. Найти действующее значение тока и напряжения на сопротивлении R_1 в цепи рис.1.18. Параметры цепи:

$$R_1 = 100 \text{ Ом}, \quad R_2 = 200 \text{ Ом}, \quad L = 8 \text{ мкГн}, \quad C = 200 \text{ пФ};$$

$$e_A = 10 - 8 \sin \omega t + 3 \sin(2\omega t + 45^\circ), \text{ В}; \quad e_B = 2 \text{ В}; \quad \omega = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

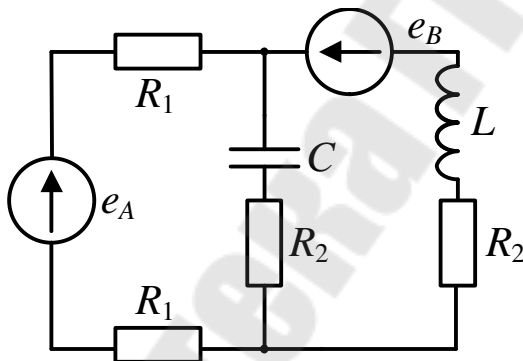


Рис.1.18

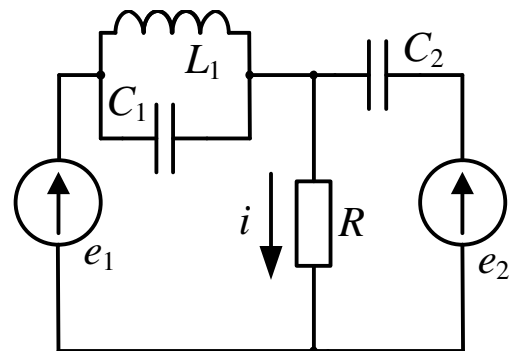


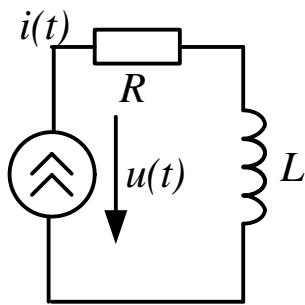
Рис.1.19

1.2.12. Найти ток i в цепи, представленной на рис.1.19, если $e_1 = 100 \text{ В}$, $e_2 = 100 \sin \omega t + 50 \sin(3\omega t + 30^\circ)$, В, $\omega = 500 \text{ рад/с}$,

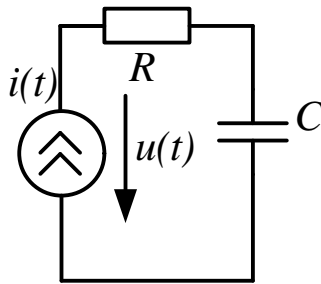
$$R = 100 \text{ Ом}, \quad L_1 = 1 \text{ Гн}, \quad C_1 = 4 \text{ мкФ}, \quad C_2 = 20 \text{ мкФ}.$$

1.2.13. Вычислить мгновенные значения напряжений $u(t)$ источников тока в схемах рис.1.20а,б, если

$$i(t) = 2 \sin \omega t + 1 \sin 3\omega t, \text{ A}, R = 12 \text{ Ом}, \omega L = 12 \text{ Ом}, \frac{1}{\omega C} = 12 \text{ Ом}.$$



а)



б)

Рис.1.20

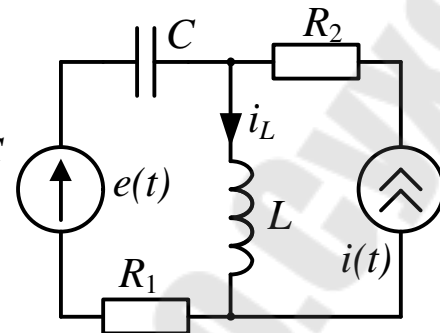


Рис.1.21

1.2.14. Рассчитать мгновенное значение тока в индуктивной катушке $e(t) = 100 + 50 \sin(\omega t - 30^\circ)$ В, $i(t) = 10 + 5 \sin 2\omega t$ А, ке(рис.1.21),если:

$$R_2 = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \text{ Ом}, R_2 = 5 \text{ Ом}.$$

1.2.15. Определить мгновенное значение тока i_2 в схеме рис.1.23, если $i(t) = 20 + 10 \sin(\omega t + 30^\circ) - 4 \cos 2\omega t$ А, $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $\omega M = 1,2 \text{ Ом}$.

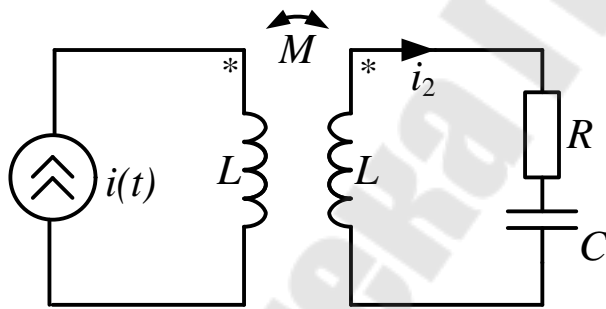


Рис.1.23

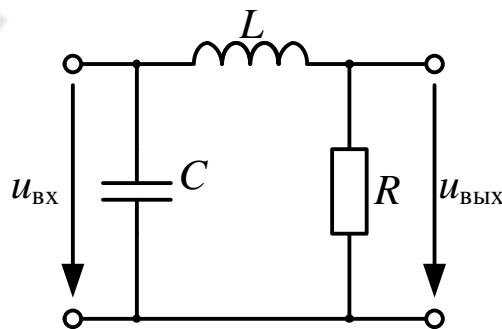


Рис.1.24

1.2.16. На вход цепи рис.1.24 подаётся напряжение, представленное на рис.1.5. Параметры цепи $L = 60 \text{ мГн}$, $C = 500 \text{ мкФ}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $U_m = 100 \text{ В}$. Определить мгновенное и действующее значения напряжения на выходе, учитывая четыре гармоники.

1.2.17. Определить мгновенные и действующие значения напряжения на выходе (рис.1.25а), если на вход цепи подаётся напряжение, представленное на рис.1.25б. Параметры цепи: $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 20 \text{ мкФ}$.

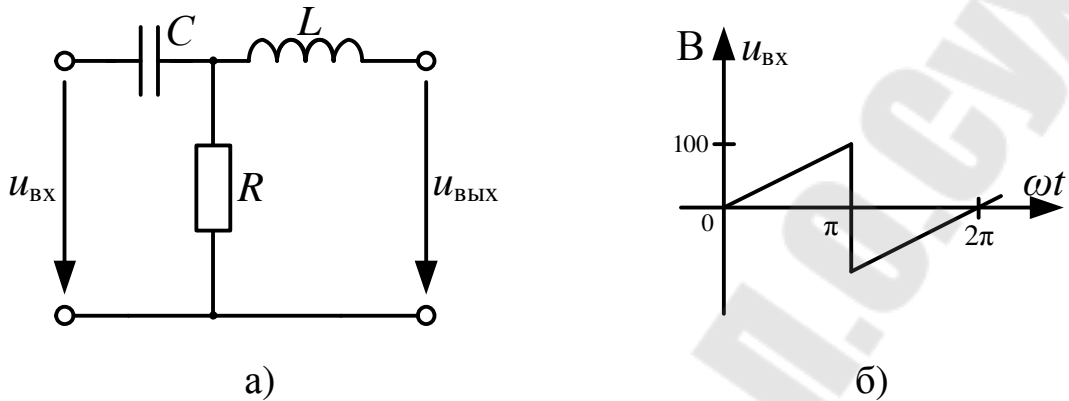


Рис.1.25.

1.2.18. На вход четырехполосника (рис.1.26) подается напряжение $u_1(t) = |U_{m1} \sin \omega t|$ после двухполупериодного выпрямления:

$$U_{m1} = 100\sqrt{2} \text{ В}; x_{c(1)} = 2k = 100 \text{ Ом}; x_{L(1)} = 25 \text{ Ом}.$$

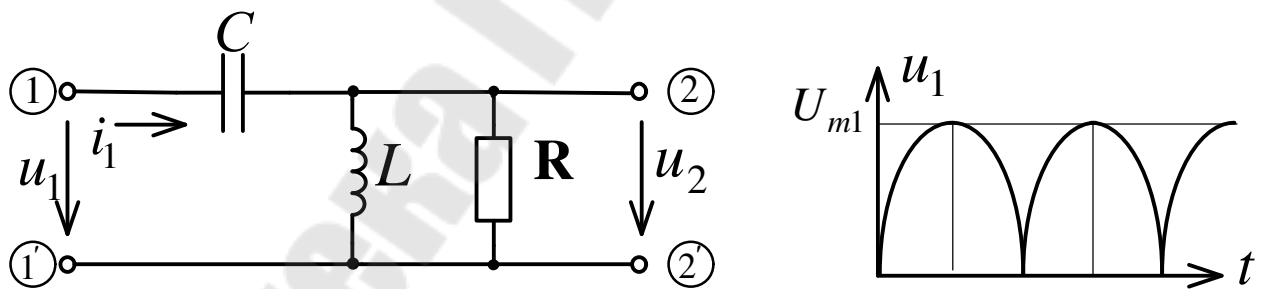


Рис.1.26

Рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ входного напряжения $U_1(j\omega)$, выходного $U_2(j\omega)$ и коэффициента передачи по напряжению $H_U(j\omega)$. Определить эквивалентные синусоиды входного тока и напряжения.

Решение

1. Представим $u_1(t)$ в виде ряда Фурье, ограничившись первыми тремя членами ряда. Табличное разложение задается для косинусоиды $u(t) = |U_m \cos \omega t|$, следовательно, необходимо сместить время на $t_0 = -\frac{T}{4}$. В результате получим:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{4U_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\omega t \left(t - \frac{T}{4} \right) - \frac{1}{15} \cos 4\omega \left(t - \frac{T}{4} \right) \right] = \\ &= 90 - 60 \cos 2\omega t - 12 \cos 4\omega t, \text{ В} \end{aligned}$$

2. Выполним расчет режима четырехполюсника для каждой гармоники отдельно:

$$k = 0$$

$$U_{1(0)} = 90 \text{ В}; x_L = k\omega L = 0; x_C = \frac{1}{k\omega C} = \infty$$

$$I_{1(0)} = 0; U_{2(0)} = 0$$

$$H_{U(0)} = \frac{U_{2(0)}}{U_{1(0)}} = 0. P_{(0)} = 0$$

$$k = 2$$

$$U_{1(2)} = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{-j90} \text{ В}; x_{L(2)} = 2x_{L(1)} = 50 \text{ Ом}$$

$$x_{C(2)} = \frac{x_{C(1)}}{2} = 50 \text{ Ом}$$

Рассчитаем токи методом преобразования:

$$\underline{Z}_{n(2)} = \frac{R \cdot jx_{L(2)}}{R + jx_{L(2)}} = \frac{50 \cdot j50}{50 + j50} = 25 + j25, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{BX(2)} = \underline{Z}_{n(2)} - jx_{C(2)} = 25 - j25, \text{ Ом}$$

Входной ток:

$$\underline{I}_{1(2)} = \frac{\underline{U}_{1(2)}}{\underline{Z}_{BX(2)}} = \frac{60e^{-j90^\circ}}{\sqrt{2}(25 - j25)} = 1,2e^{-j45^\circ}, \text{ A}$$

Напряжение на нагрузке:

$$\underline{U}_{2(2)} = \underline{I}_{1(2)} \cdot \underline{Z}_{n(2)} = 1,2e^{-j45^\circ} \cdot 25\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 42\text{ B}$$

Коэффициент передачи по напряжению:

$$H_{U(2)} = \frac{U_{2(2)}}{U_{1(2)}} = \frac{42 \cdot \sqrt{2}}{60 \cdot e^{-j90^\circ}} = 1 \cdot e^{j90^\circ}$$

Мощность источника питания:

$$\tilde{S}_{(2)} = \underline{U}_{1(2)} \cdot \underline{I}_{1(2)}^* = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} \cdot 1,2e^{j45^\circ} = 50,9e^{-j45^\circ} = 36 - j36, \text{ ВА}$$

$$P_{1(2)} = 36 \text{ Вт}; Q_{1(2)} = -36 \text{ ВАР}$$

$$k = 4$$

$$\underline{U}_{1(4)} = \frac{12}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ}, \text{ В}$$

$$x_{L(4)} = 4x_{L(1)} = 100 \text{ Ом}; x_{C(4)} = \frac{x_{C(1)}}{4} = 25 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{n(4)} = \frac{R \cdot jx_{L(4)}}{R + jx_{L(4)}} = \frac{50 \cdot j100}{50 + j100} = 40 + j20 = 44,7e^{j26,6^\circ}, \text{ Ом}$$

Входное сопротивление:

$$\underline{Z}_{BX(4)} = \underline{Z}_{n(4)} - jx_{C(4)} = 40 - j5 = 40,5e^{-j7,1^\circ}, \text{ Ом}$$

Входной ток:

$$\underline{I}_{1(4)} = \frac{\underline{U}_{1[4]}}{\underline{Z}_{BX(4)}} = \frac{12e^{-j90^\circ}}{\sqrt{2} \cdot 40,5e^{-j7,1^\circ}} = 0,21e^{-j82,9^\circ}, \text{A}$$

Напряжение на нагрузке:

$$\underline{U}_{2(4)} = \underline{I}_{1(4)} \cdot \underline{Z}_{n(4)} = 9,4e^{-j55,9^\circ}, \text{B}$$

Коэффициент передачи по напряжению:

$$\underline{H}_{u(4)} = \frac{\underline{U}_{2(4)}}{\underline{U}_{1(4)}} = 1,1e^{-j34,1^\circ}$$

Мощность источника питания:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{(4)} &= \underline{U}_{1(4)} \cdot \underline{I}_{1(4)}^* = \frac{12}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} \cdot 0,21e^{j82,9^\circ} = 1,79e^{-j7,1^\circ} = 1,78 - j0,22 \text{ ВА} \\ P_{(4)} &= 1,78 \text{ Вт}; Q_{(4)} = -0,22 \text{ ВАР} \end{aligned}$$

3. Совместное рассмотрение полученных решений:

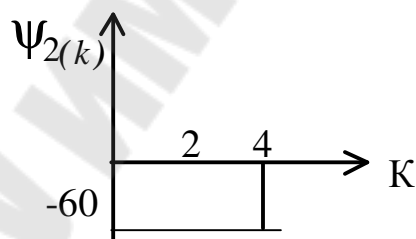
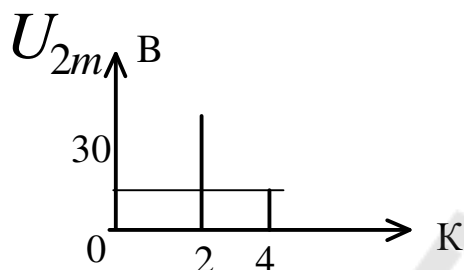
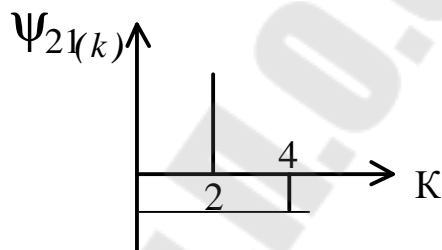
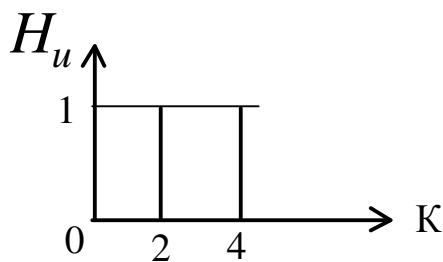
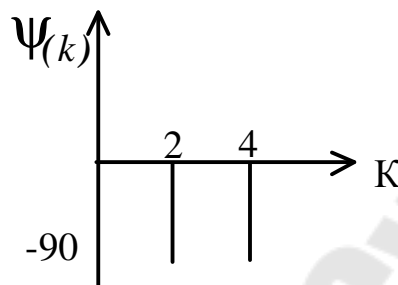
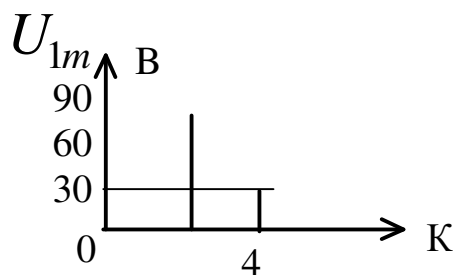
3.1. Мгновенное значение напряжение на нагрузке:

$$u_2(t) = 60 \sin 2\omega t + 13,2 \sin(4\omega t - 55,9^\circ), \text{ B}$$

Мгновенное значение входного тока:

$$i_1(t) = 1,2\sqrt{2} \sin(2\omega t - 45^\circ) + 0,21\sqrt{2} \sin(4\omega t - 82,9^\circ), \text{ A}$$

3.2. АЧХ и ФЧХ $\underline{U}_1(j\omega)$, $\underline{U}_2(j\omega)$, $\underline{H}_u(j\omega)$



3.3. Рассчитаем эквивалентные синусоиды для переменных составляющих входного напряжения и тока.

Действующее значение переменной составляющей входного напряжения:

$$U_1 = \sqrt{U_{1(2)}^2 + u_{1(4)}^2} = \sqrt{\frac{60^2 + 12^2}{2}} = 43,3 \text{ В}$$

Действующее значение входного тока:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(2)}^2 + I_{1(4)}^2} = \sqrt{1,2^2 + 0,21^2} = 1,22 \text{ А}$$

Активная мощность переменной составляющей источника питания:

$$P = \sum_1^k P_{(k)} = P_{(2)} + P_{(4)} = 38 \text{ Вт}$$

Реактивная мощность источника питания:

$$\pm Q = \pm \sum_1^k Q_{(k)} = -36,0 - 0,22 = -36,22 \text{ ВАР}$$

Коэффициент мощности:

$$\cos \theta = \frac{P_1}{U_1 I_1} = \frac{38}{43,3 \cdot 1,22} = 0,72,$$

$$\theta = -43^\circ$$

Знак «минус» взят из физических соображений. Поскольку реактивная мощность $Q < 0$, характер цепи емкостный и сдвиг фаз между напряжением и током отрицательный: $\theta < 0$, ток опережает напряжение на 43° .

1.3. ИЗМЕРЕНИЯ В ЦЕПЯХ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. МОЩНОСТЬ.

Теоретическая справка

Измерение несинусоидальных напряжений приборами различных систем могут дать неодинаковые результаты.

Приборы магнитоэлектрической системы измеряют постоянную составляющую, а с выпрямителями - среднее по модулю.

Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем реагируют на действующее значение измеряемой величины.

Электронные приборы с выпрямителем и магнитоэлектрической регистрирующей частью в цепи **синусоидального** тока измеряют действующее значение, т.е., их шкалы градуируют:

$$U_v = 1,1 U_{cp}$$

Если на входе вольтметра включен конденсатор, задерживающий постоянную составляющую, то показание такого вольтметра:

$$U_v = 1,11(u_{cp} - U_0). \quad (2.11)$$

1.3.1. Определить показания электромагнитных приборов в схеме рис.1.27, если приложенное напряжение изменяется по закону $u(t) = 4 + 5\sqrt{2} \sin \omega t + 3\sqrt{2} \sin 2\omega t$, В. Параметры схемы: $R = 5$ Ом, $X_{L2} = X_{C2} = 2$ Ом, $X_{C3} = 6$ Ом.

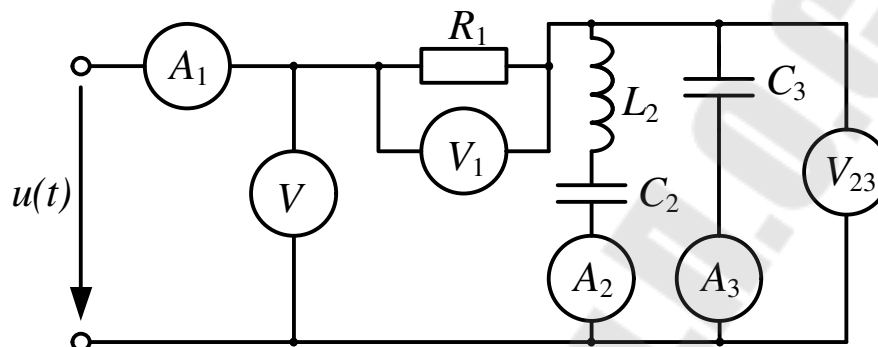


Рис.1.27

Решение.

Постоянная составляющая:

$I_{1(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = 0$; $U_{1(0)} = 0$, $U_{23(0)} = U_{(0)} - U_{1(0)} = 4$ В, т.к. постоянный ток через ёмкость не протекает.

Первая гармоника $k = 1$:

Во второй ветви резонанс напряжений ($L_2 C_2$):

$$X_{2(1)} = X_{L2(1)} - X_{C2(1)} = 0$$

- третья ветвь закорочена.

$$I_{2(1)} = 0, I_{1(1)} = I_{2(1)} = \frac{U_{(1)}}{R_1} = \frac{5}{5} = 1 \text{ А,}$$

$$U_{23(1)} = 0, U_{1(1)} = U_{(1)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

Вторая гармоника $k = 2$:

$$X_{2(2)} = X_{L2(2)} - X_{C2(2)} = 4 - 1 = 3 \text{ Ом. (характер индуктивный)}$$

$$X_{3(2)} = X_{C3(2)} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Ом.}$$

В параллельных ветвях резонанс токов:

$$\underline{Z}_{23(2)} = \infty, I_{1(2)} = 0, U_{1(2)} = 0, \underline{U}_{23(2)} = 3 \text{ В,}$$

$$\underline{I}_{2(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{2(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ A}, \quad \underline{I}_{3(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{3(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ A}.$$

Показания приборов:

$$I_{A1} = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \text{ A},$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ A},$$

$$I_{A3} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \text{ A},$$

$$U_{V1} = \sqrt{U_{1(0)}^2 + U_{1(1)}^2 + U_{1(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5 \text{ В},$$

$$U_{V2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5 \text{ В},$$

$$U = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7,07 \text{ В}.$$

1.3.2. К цепи рис.1.29 приложено напряжение $u = 100 + 100 \cdot \sin 100t$. Как изменяется показания амперметров A_1 магнитоэлектрической и A_2 электромагнитной систем, если фазу первой гармоники сдвинуть на 180° ?

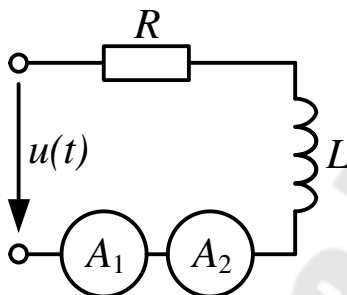


Рис.1.28

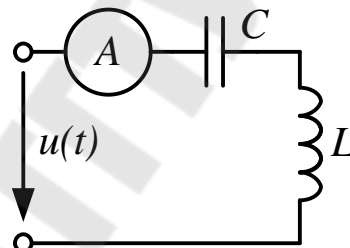


Рис.1.29

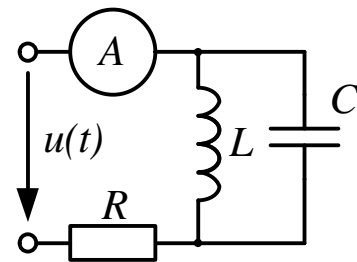


Рис.1.30

1.3.3. Найти показание электромагнитного амперметра (рис.1.30), если $u = 100\sqrt{2} \sin \omega t - 100\sqrt{2} \sin(3\omega t + 60^\circ)$, В,

$$\omega L = 10 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}.$$

1.3.4. В цепи рис.3.4. $u(t) = 20 + 10\sqrt{2} \sin \omega t$, В, $R = 10 \text{ Ом}$, $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.

Определить показание амперметра.

1.3.5. Найти мгновенное значение тока и определить показание электродинамического вольтметра в цепи рис.1.31, если $u = 200 \sin \omega t + 50 \sin(5\omega t - 30^\circ)$, В, $\omega L = 25$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 125$ Ом.

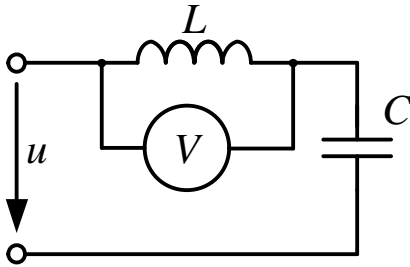


Рис.1.31

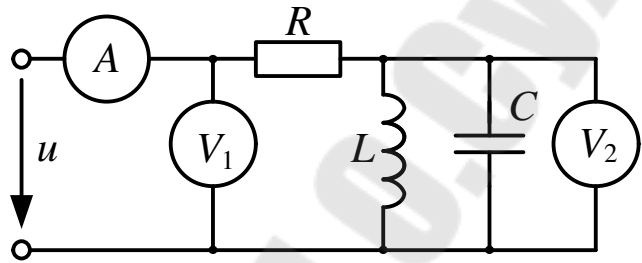


Рис.1.32

1.3.6. Определить показание электродинамических амперметра и вольтметров (рис.1.32), если $u = 20 + 100 \sin \omega t + 20 \sin 5\omega t$, В,

$$R = 10 \text{ Ом}, \quad \omega L = 2 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 50 \text{ Ом}.$$

1.3.7. На вход цепи рис.1.33 подаётся напряжение $u = 270\sqrt{2} \sin 1000t + 90\sqrt{2} \sin(3000t + 10^\circ)$, В, $C_1 = 200$ мкФ, $L_1 = 5$ мГн, $L_2 = 3$ мГн.

1. При какой ёмкости C_2 входной ток в цепи будет синусоидальным с угловой частотой 1000 с^{-1} ?
2. При найденном значении ёмкости C_2 определить показание амперметра тепловой системы.

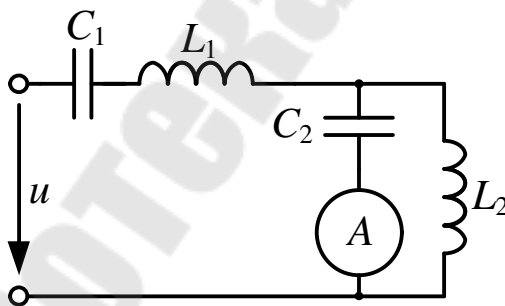


Рис.1.33

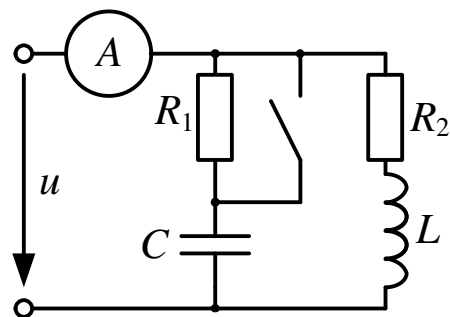


Рис.1.34

1.3.8. Найти показание электродинамического амперметра в цепи рис.1.34 при: а) замкнутом и б) разомкнутом рубильнике. Напряжение на входе $u = 100 \sin 50t + 50 \sin 100t + 20 \sin 150t$, В,

$$L_1 = 1 \text{ Гн}, C_1 = 100 \text{ мкФ}, R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}.$$

1.3.9. Найти мгновенное значение тока i_B и показания всех приборов в цепи рис.1.35 (приборы показывают действующие значения и среднюю мощность), если $\omega L_A = 10 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 40 \text{ Ом}$,
 $\omega L_B = 30 \text{ Ом}$, $R = 60 \text{ Ом}$, $e_A = 40 \text{ В}$, $e_B = 30 \text{ В}$,
 $e_C = 60 + 30 \sin(\omega t + 60^\circ) + 60 \sin(2\omega t - 20^\circ)$, В.

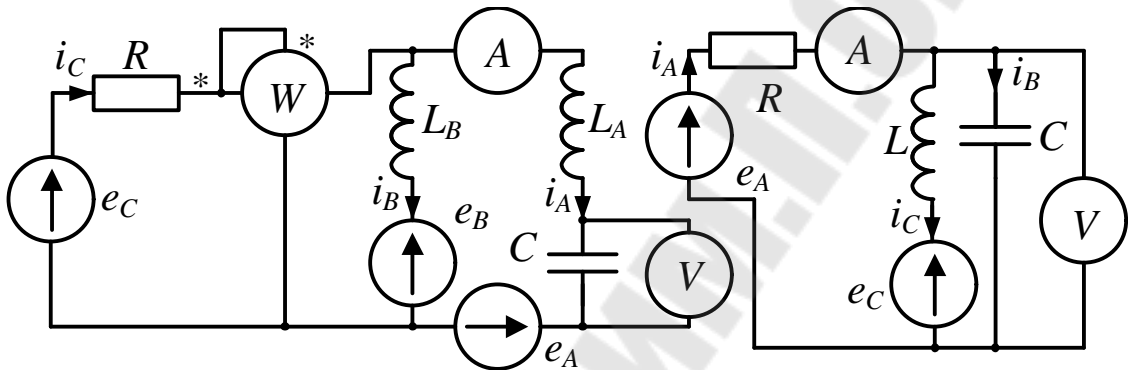


Рис.1.35

Рис.1.36

1.3.10. Параметры цепи рис.1.36: $R = 4 \text{ Ом}$, $\omega L = 3 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 12 \text{ Ом}$,

$e_A = 4 + 34 \sin \omega t + 12 \sin(2\omega t + 20^\circ)$, В, $e_C = 12 \text{ В}$. Определить мгновенные значения токов i_A , i_B , i_C и показания приборов электромагнитной системы.

1.3.11. Параметры цепи рис.1.37:

$$R = 30 \text{ Ом}, \omega L = 30 \text{ Ом}, \frac{1}{\omega C} = 120 \text{ Ом},$$

$$e_A = 30 + 141 \sin(\omega t + 30^\circ) + 85 \sin(2\omega t - 15^\circ), \text{ В}, e_C = 60 \text{ В}.$$

1. Найти мгновенные и действующие значения токов и напряжений на ёмкости.
2. Определить показания электродинамических приборов.

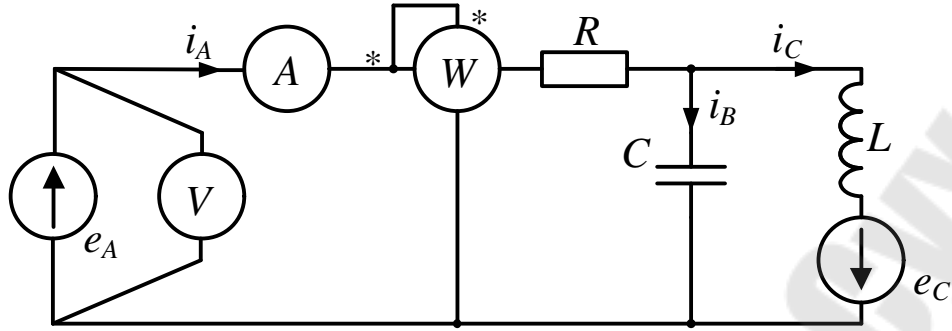


Рис.1.37

1.3.12. Параметры цепи рис.1.38: $\omega L = 25 \text{ Ом}$, $\frac{1}{\omega C} = 75 \text{ Ом}$.

Напряжение на входе $u = 200 \sin \omega t + 50 \sin(3\omega t + 30^\circ)$, В.

Найти мгновенное значение тока i и показания электродинамических приборов.

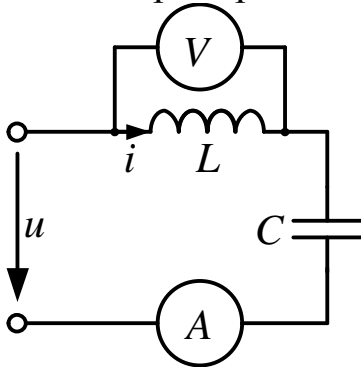


Рис.1.38

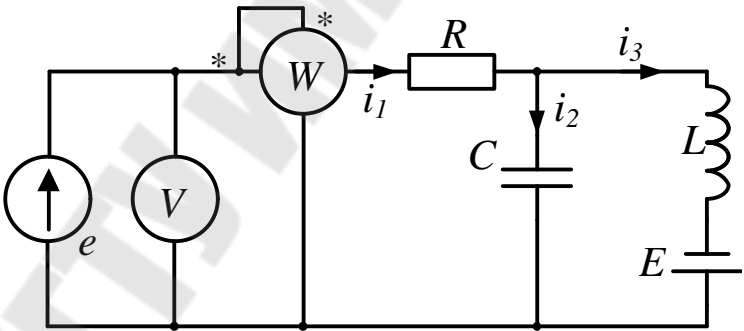


Рис.1.39

1.3.13. Параметры цепи рис.1.39:

$$R = 30 \text{ Ом}, \quad \omega L = 30 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 120 \text{ Ом}, \quad E = 120 \text{ В},$$

$e = 30 + 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(2\omega t - 15^\circ)$, В. Определить мгновенные и действующие значения токов и показания электродинамических приборов.

1.3.14. Параметры цепи рис.1.40: $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 4 \text{ Ом}$, $\omega M = 3 \text{ Ом}$.

Напряжение на входе $u = 100 \sin \omega t + 50 \sin 2\omega t$, В.

Найти показания электромагнитных вольтметров.

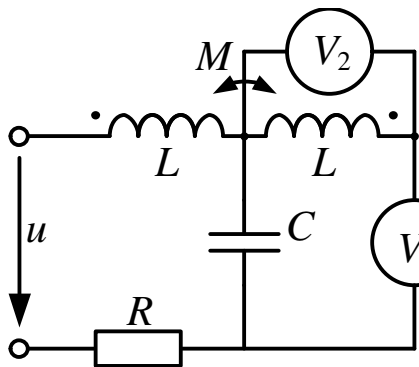


Рис.1.40

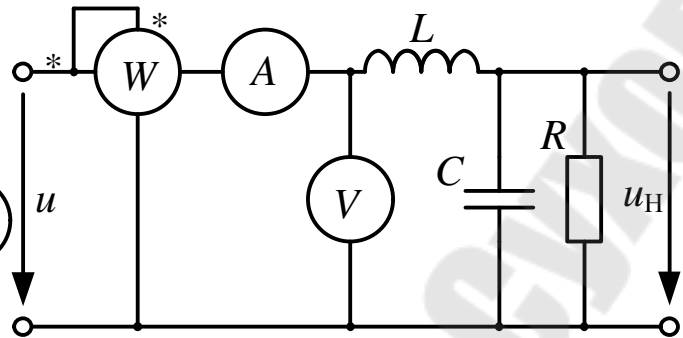


Рис.1.41

1.3.15. Напряжение на сопротивлении R (рис.1.41)

$u_H = 10 + 20 \sin \omega t + 40 \sin 2\omega t$, В, параметры цепи:

$$R = 100 \text{ Ом}, \quad \omega L = 100 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 200 \text{ Ом}.$$

Найти показания приборов электродинамической системы.

1.3.17. Рассчитать мгновенные значение напряжения на конденсаторе

$u_c(t)$ (рис. 1.42) и построить его график. Найти показания

вольтметра электромагнитной системы и ваттметра электродинамической системы, если

$j(t) = 5 + 10 \sin(1000t + 30^\circ)$ А,

$e(t) = 50 + 100 \sin(2000t - 45^\circ)$ В, $L_1 = 30$ мГн, $L_2 = 10$ мГн,

$C = 33,3$ мкФ, $R = 10$ Ом.

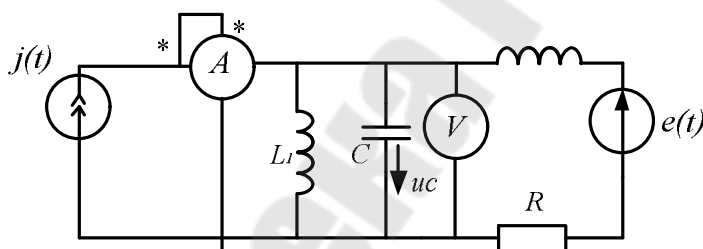


Рис.1.42

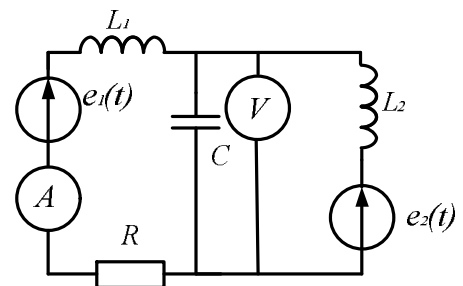


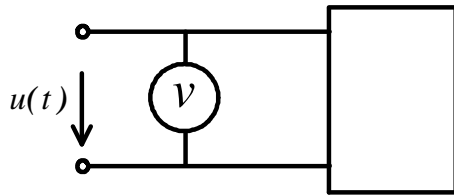
Рис.1.43

1.3.18. В цепи рис. 1.43: $e_1(t) = 20 + 30 \sin(\omega t - 15^\circ) + 20 \sin(2\omega t + 45^\circ)$

В, $e_2(t) = 10$ В. Параметры цепи: $\omega L_1 = 2$ Ом, $\omega L_2 = \frac{1}{\omega C} = 6$ Ом,

$R = 10$ Ом. Определить показания вольтметра и амперметра электромагнитной системы.

1.3.19р. На вход двухполюсника подключается напряжение несинусоидальной формы:



а)

$$u(t) = 10 + 100\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin 2\omega t + 40\sqrt{2} \sin 3\omega t, B$$

б)

$$u(t) = 10 + 100\sqrt{2} \sin \omega t - 50\sqrt{2} \sin 2\omega t - 40\sqrt{2} \sin 3\omega t, B$$

Рассчитать показание вольтметра для двух случаев:

1. прибор электромагнитной системы;
2. прибор электронной системы, имеющий входную емкость и реагирующий на среднее по модулю значение сигнала.

Решение

1. Приборы электромагнитной системы показывают действующее значение измеряемой величины. Следовательно, показание прибора не зависит от начальных фаз гармонических составляющих и для случая а) и б) одинаково и равно:

$$U_v = \sqrt{U_{(0)}^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2 + U_{(3)}^2} = \sqrt{10^2 + 100^2 + 50^2 + 40^2} = 119,2 \text{ В}$$

2. Прибор электронной системы в цепи синусоидального тока показывает действующее значение:

$$U_v = \left[\frac{1}{T} \int_0^T |u(t) - U_{(0)}| dt \right] \cdot 1,11,$$

где $K_\phi = \frac{A}{A_{cp}}$ - коэффициент формы; для синусоиды равен 1,11.

Рассчитаем показание вольтметра:

$$\begin{aligned}
U_v &= 1,11 \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} (U_{m(1)} \sin \omega t + U_{m(2)} \sin 2\omega t + U_{m(3)} \sin 3\omega t) dt \right] = \\
&= 1,11 \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_{m(1)} \sin \omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{m(2)} \sin 2\omega t d\omega t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{3\pi} U_{m(3)} \sin 3\omega t d(\omega t) - \right] = 1,11 \left[\frac{1}{\pi} U_{m(1)} (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} U_{m(2)} (-\cos 2\omega t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{3\pi} U_{m(3)} (-\cos 3\omega t) \Big|_0^{3\pi} - \right] = \\
&= 1,11 \left[\frac{2U_{m(1)}}{\pi} + 0 + \frac{2U_{m(3)}}{3\pi} \right] = 1,11 \left[\frac{2 \cdot 100\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2 \cdot 40\sqrt{2}}{3\pi} \right] = 113,3 \cdot B
\end{aligned}$$

б) во втором случае поменяется знак перед второй и третьей гармониками:

$$U_v = 1,11 \left[\frac{2U_{m(1)}}{\pi} - \frac{2U_{m(3)}}{3\pi} \right] = 1,11 \left[\frac{2 \cdot 100\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2 \cdot 40\sqrt{2}}{3\pi} \right] = 86,7 B$$

Таким образом, среднее по модулю значение зависит от начальных фаз гармоник, поэтому показание вольтметра электронной системы для случаев а) и б) различно.

1.3.20. На вход двухполюсника подключается сигнал, форма которого показана на рисунке 1.44. Рассчитать показание вольтметра:

- а) электродинамической системы,
- б) электронной.

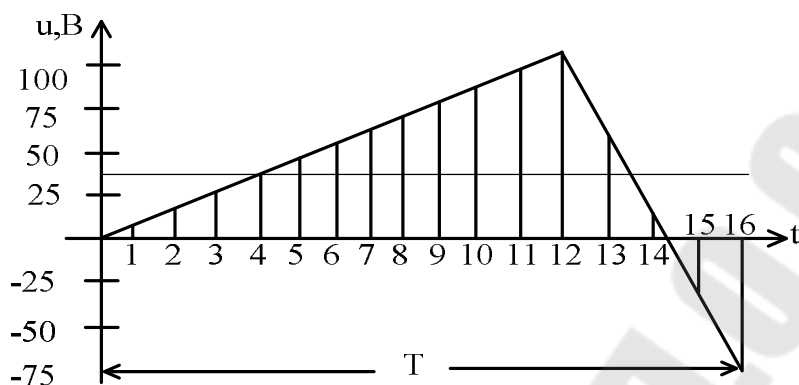


Рис.1.44

Решение

Определим показания приборов графоаналитическим методом. Разобьем весь период на $N = 16$ частей. Значения напряжения в узлах сетки приведены в таблице:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_k	0	8,3	16,6	24,9	33,2	41,7	50	8,3	6,6
9	10	11	12	13	14	15	16		
75	83,3	91,6	100	50	-12,5	-37,5	-75		

Постоянная составляющая вычисляется как среднее за период:

$$U_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N U_{(k)} = 35,9 \text{ В}$$

Среднее по модулю за период:

$$U_{cp} = \frac{1}{N} \sum_1^N |U_{(k)}| = 44.53 \text{ В}$$

Показание электронного вольтметра:

$$U_v = 1,11[U_{cp} - U_0] = 1,11[44,53 - 35,9] = 8,63 \text{ В}$$

Электродинамический вольтметр показывает действующее значение напряжения:

$$U_v = \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_1^N u_k^2} = 58,5 \text{ В}$$

1.3.21. К двухполюснику (рис. 1.45) подключён источник напряжения $u(t) = 1 + 8 \sin(\omega t + 15^\circ) + 4 \sin(2\omega t + 75^\circ) + 4 \sin(3\omega t + 15^\circ)$ В. Он вызывает ток $i(t) = 10 + 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) + 5\sqrt{2} \sin(2\omega t + 30^\circ)$ А. Определить полную, активную и реактивную мощности, а также мощность искажения.

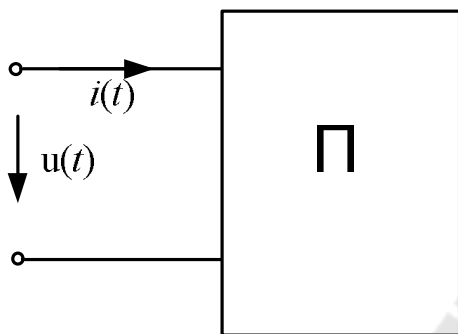


Рис.1.45

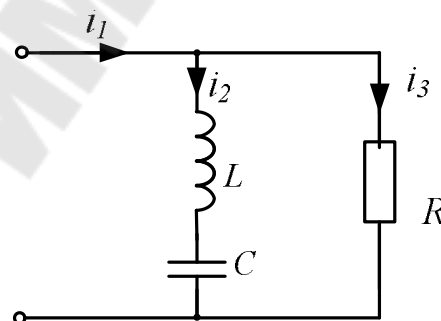


Рис.1.46

Решение.

Активная мощность определяется по формуле $P = P_{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{(k)}$, где $P_{(0)}$ – активная мощность постоянной составляющей, P_k – активная мощность гармоник.

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} = U_{(0)} \cdot I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos(\underline{U}_{(1)} \wedge \underline{I}_{(1)}) + U_{(2)} I_{(2)} \cos(\underline{U}_{(2)} \wedge \underline{I}_{(2)}) + U_{(3)} I_{(3)} \cos(\underline{U}_{(3)} \wedge \underline{I}_{(3)}) = I_{(0)} + \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{(0)} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos(0 - 45^\circ) + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos(75^\circ - 30^\circ) + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 60 \text{ Вт}$$

Постоянные составляющие не создают реактивной мощности, поэтому:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = U_{(1)} I_{(1)} \sin \varphi_1 + U_{(2)} I_{(2)} \sin \varphi_2 + U_{(3)} I_{(3)} \sin \varphi_3 = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{(0)} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin(-45^\circ) + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ + 0 = -30 \text{ ВАР.}$$

На полную мощность постоянные составляющие влияют, значит:

$$S = UI = 7 \cdot 15 = 105 \text{ ВА,}$$

где:

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2 + U_{(3)}^2} = \sqrt{I^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7 \text{ В}$$

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + I_{(3)}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2} = 15 \text{ А}$$

Для несинусоидального режима формула:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

несправедлива. Для этого режима:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2,$$

где:

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

так называемая мощность искажения.

Если формы кривых $u(t)$ и $i(t)$ одинаковы (цепь чисто активная), то $T=0$. Чем больше отличаются по форме друг от друга эти функции, тем больше мощность искажения.

1.3.22. Рассчитать мгновенные значения токов i_1 и i_2 (рис.1.47.), а также активную мощность P и коэффициент мощности $\cos \varphi$, если $i_2 = 10 \sin \omega t - 5 \sin 5\omega t$ А, на первой гармонике $X_L = 5$ Ом, $X_C = 25$ Ом, $R=20$ Ом.

Решение.

Первая гармоника

$$\underline{I}_{2m(1)} = 10A \quad \underline{Z}_{2(1)} = +j5 - j25 = -j20 = 20 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{U}_{2m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} \cdot \underline{Z}_{2(1)} = 10 \cdot 20 \cdot e^{-j90^\circ} = 200 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{R} = \frac{200 \cdot e^{-j90^\circ}}{20} = 10 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} + \underline{I}_{3m(1)} = 10 - j10 = 10\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

Пятая гармоника

$$\underline{I}_{2m(5)} = 5A \quad \underline{Z}_{2(5)} = j25 - j5 = j20 = 20 \cdot e^{j90^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{U}_{2m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} \cdot \underline{Z}_{2(5)} = 5 \cdot 20 \cdot e^{j90^\circ} = 100 \cdot e^{j90^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I}_{3m(5)} = \frac{100 \cdot e^{j90^\circ}}{20} = 5 \cdot e^{j90^\circ} \text{ А}, \quad \underline{I}_{1m(5)} = 5 + j5 = 5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Искомые величины:

$$i_1 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) + 5\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ), \text{ А}$$

$$i_3 = 10 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) + 5 \sin(5\omega t + 90^\circ), \text{ А}.$$

Активная мощность выделяется только в R , поэтому активную мощность P можно рассчитать:

$$P = U_{23(1)} I_{1(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{23(5)} I_{1(5)} \cos \varphi_{(5)}, \text{ или}$$

$$P = P_R = P_{R(1)} + P_{R(5)} = U_{23(1)} I_{3(1)} \cos \varphi_{3(1)} + U_{23(5)} I_{3(5)} \cos \varphi_{3(5)} \text{ или}$$

$$P = P_R = I_{3(1)}^2 R + I_{3(5)}^2 R = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 = 1000 + 250 = 1250 \text{ Вт}$$

Полная мощность:

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{25000} = 158 \text{ В}$$

$$I_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 11,2 \text{ A},$$

$$S = U_2 I_1 = 158 \cdot 11,2 = 1766,5 \text{ ВА}$$

Коэффициент мощности:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1250}{1766,5} = 0,707$$

1.3.23. К цепи рис.1.48 приложено напряжение $u(t) = 100 + 100\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ) \text{ В}$, $\omega t = \frac{1}{\omega C} = R = 100 \text{ Ом}$.

Определить потребляемую активную мощность.

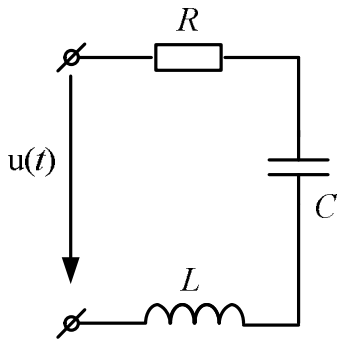


Рис.1.48.

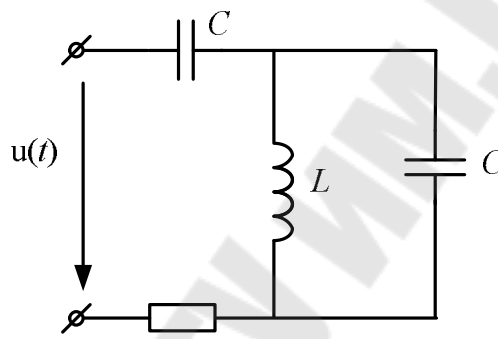


Рис.1.49

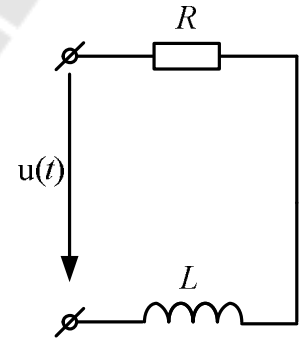


Рис.1.50

1.3.24. Найти полную мощность, потребляемую цепью рис.1.49, если $u(t) = 100 + 100 \sin(100t + 45^\circ) \text{ В}$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $L = 1 \text{ Гн}$, $R = 10 \text{ Ом}$.

1.3.25. Найти активную мощность, выделяемую в ветви (рис.1.50), если $u(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 40\sqrt{2} \sin 2\omega t \text{ В}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $\omega L = 10 \text{ Ом}$.

1.3.26. Найти активную мощность в сопротивлении $Z = (4 + j3) \text{ Ом}$, если ток в нем $i = 6 + 3\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ А}$.

1.3.27. К двухполюснику (рис.1.51) подключена ЭДС $e(t) = 5 + 12 \sin \omega t + 4 \sin 3\omega t \text{ В}$. Она вызывает ток $i(t) = 5 + 2 \sin(3\omega t + 60^\circ) \text{ А}$. Определить полную, активную и реактивную мощность, а также мощность искажения.

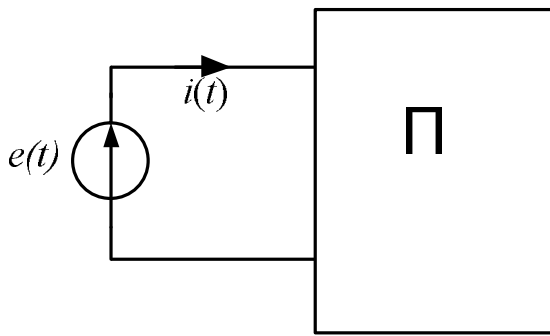


Рис.1.51

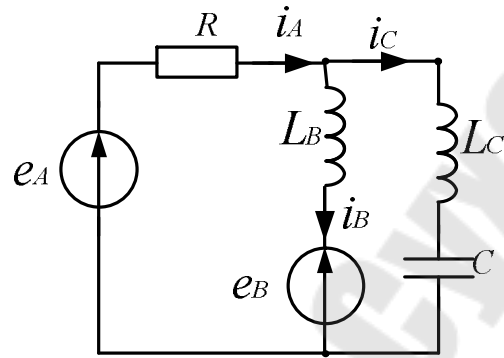


Рис.1.52

1.3.28. Напряжение и ток в цепи изменяются по закону

$$u(t) = 80\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 20^\circ) \text{ В,}$$

$$i(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 75^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(3\omega t + 40^\circ) \text{ А.}$$

Определить активную, реактивную и полную мощность цепи.

1.3.29. В цепи рис.1.52. действует две ЭДС:

$$e_A(t) = 60 + 30 \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \sin 2\omega t \text{ В и } e_B = 30 \text{ В. Параметры цепи:}$$

$$\omega L_B = 30 \text{ Ом, } \omega L_C = 10 \text{ Ом, } \frac{1}{\omega C} = 40 \text{ Ом, } R = 60 \text{ Ом.}$$

1. Найти мгновенные и действующие значения токов и напряжения на ёмкости, а также мощность в сопротивлении R.

2. Определить активную и полную мощности источника ЭДС $e_A(t)$

1.4 РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЦЕПЯХ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1.4.1. Цепь рис.1.53. подключена к источнику с напряжением

$$u(t) = 20 + 80 \sin 500t + 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ), \text{ В. Параметры элементов в цепи: } R = 20 \text{ Ом, } L_1 = 40 \text{ мГн, } L_2 = 20 \text{ мГн, } C_1 = 100 \text{ мкФ, } C_2 = 50 \text{ мкФ.}$$

Определить ток $i(t)$.

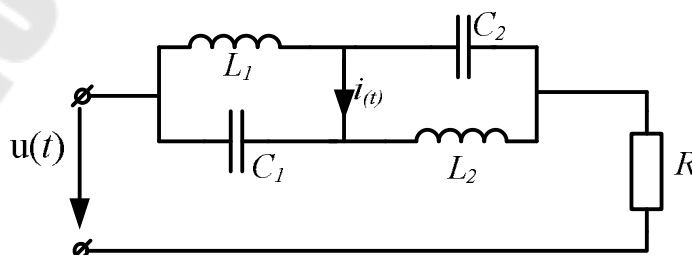


Рис.1.53

Решение.

Заданная цепь представляет собой последовательное соединение резисторов R , параллельного контура L_1C_1 и ещё одного параллельного контура L_2C_2 .

Согласно условию напряжение источника $u(t)$ представляет собой ряд Фурье, содержащий постоянную составляющую ($u_{(0)} = 20$ В), первую ($u_{(1)} = 80 \sin 500t$ В) и вторую ($u_{(2)} = 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ)$ В) гармоники. Следовательно, ток $i(t)$ по методу наложения можно представить в виде:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)},$$

где $I_{(0)}$ - постоянная составляющая;

$i_{(1)}$ - ток первой гармоники;

$i_{(2)}$ - ток второй гармоники;

Ток постоянной составляющей $I_{(0)}$ течёт по элементам L_1 , L_2 и R и равен:

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{20}{20} = 1 \text{ А.}$$

На частоте первой гармоники:

$$X_{L_1(1)} = \omega L_1 = 500 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом;}$$

$$X_{C_1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом,}$$

т.е. контур L_1C_1 настроен в резонанс. Его общее сопротивление на частоте $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$ будет бесконечно большим, напряжение первой гармоники $u_{(1)}$ будет приложено к зажимам этого контура. При этом ток в коротке (равный току в катушке L_1):

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{jX_{L_1(1)}} = \frac{80}{j20} = 4 \cdot e^{-90^\circ} \text{ А.}$$

и

$$i_{(1)} = 4 \cdot \sin(500t - 90^\circ)$$

На частоте второй гармоники:

$$X_{L_2(2)} = 2 \cdot \omega L_2 = 2 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом;}$$

$$X_{C_2(2)} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2 \cdot 500 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

т.е., контур L_2C_2 настроен в резонанс. Его общее сопротивление бесконечно велико и напряжение второй гармоники $u_{(2)}$ приложено к зажимам этого контура.

Ток в коротке (равный току в катушке L_2):

$$I_{m(2)} = \frac{U_{m(2)}}{jX_{L_2(2)}} = \frac{30 \cdot e^{-j45^\circ}}{j20} = 1,5 \cdot e^{-j135^\circ} \text{ А}$$

$$i_{(2)} = 1,5 \cdot \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ)$$

Искомый ток:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)} = 1 + 4 \sin(500t - 90^\circ) + 1,5 \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ), \text{ А}$$

1.4.2. Цепь рис.1.54 подключена к источнику с напряжением $u(t) = 40 + 80 \sin \omega t - 40 \sin 3\omega t$, В. Сопротивление резистора $R=20$ Ом. Сопротивления остальных элементов цепи на частоте первой гармоники $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 10$ Ом. Рассчитать мгновенное значение тока в цепи.

Определить показания вольтметров электромагнитной системы.

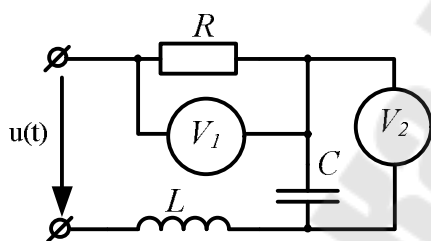


Рис.1.54

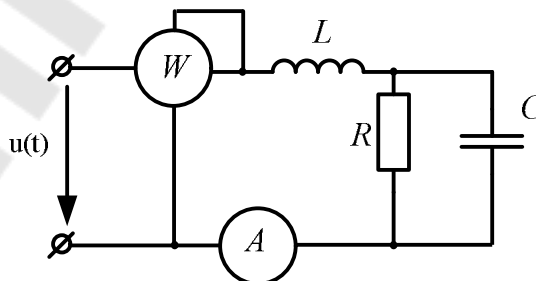


Рис.1.55

1.4.3. Цепь рис 1.55 подключена к источнику с напряжением $u(t) = 20 + 100 \sin \omega t - 40 \sin 2\omega t$, В. Сопротивление резистора $R=10$ Ом. Сопротивления остальных элементов цепи на частоте первой гармоники: $\omega L = 5$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 10$ Ом. Рассчитать мгновенное значение тока в источнике. Определить показания электромагнитного амперметра и электродинамического ваттметра.

4.4. Цепь рис.1.56 подключена к источнику с напряжением $u(t) = 40 + 80 \sin \omega t - 40 \sin(2\omega t + 90^\circ)$, В. $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, Сопротивление остальных элементов цепи на частоте первой гармоники:

$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 4$ Ом. Рассчитать мгновенные значения токов во всех ветвях цепи.

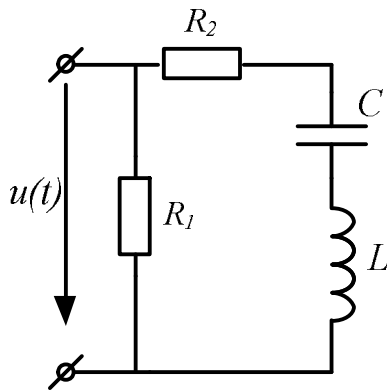


Рис.1.56

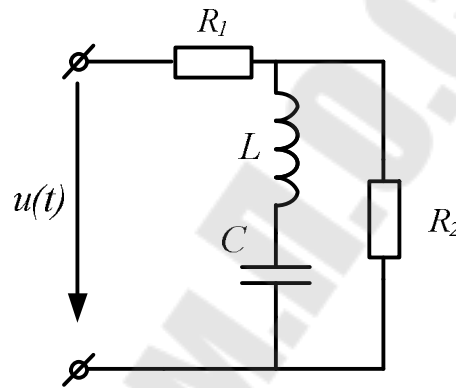


Рис.1.57

1.4.5. Цепь рис. 1.57 подключена к источнику с напряжением $u(t) = 25 + 100 \sin \omega t - 20\sqrt{2} \sin 3\omega t$, В. $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом. Сопротивления остальных элементов цепи на частоте первой гармоники:

$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 15$ Ом. Рассчитать мгновенные значения токов во всех ветвях цепи.

1.4.6. Первичная обмотка трансформатора (рис.1.58) подключена к источнику тока $i_j(t) = 2 + 4 \sin \omega t + 2 \sin(2\omega t + 30^\circ)$ А. Сопротивление элементов цепи на частоте первой гармоники: $\omega L_1 = 5$ Ом,

$\omega L_2 = 10$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 60$ Ом. Определить показание электромагнитного вольтметра.

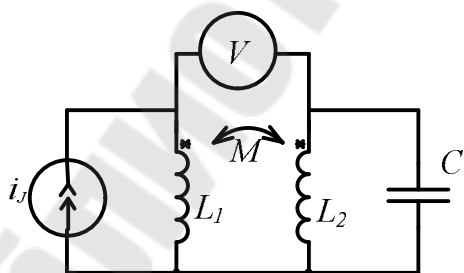


Рис.1.58

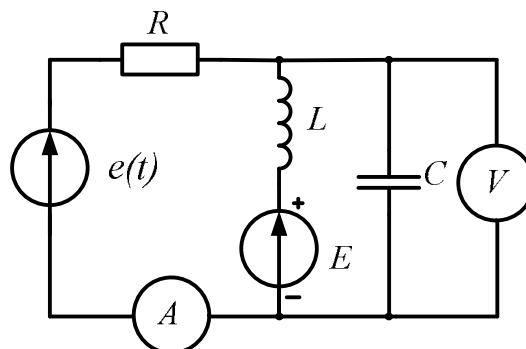


Рис.1.59

1.4.7. В цепи рис.1.59 $e(t) = 4 + 34 \sin \omega t + 12 \sin(2\omega t + 20^\circ)$, $E=15$ В, $R=4$ Ом, $\omega L = 3$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 12$ Ом. Рассчитать мгновенное значение токов во всех ветвях цепи. Определить показания приборов электромагнитной системы.

1.4.8. В цепи рис.1.60 $u(t) = 100 \sin \omega t + 500 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$ В, $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ с⁻¹, $R=100$ Ом, $L_1 = 0,1$ Гн. Рассчитать значения C_1 , C_2 и L_2 , при которых в резисторе R будет протекать лишь ток третьей гармоники, причём его величина должна быть наибольшей. Определить мгновенное значение этого тока.

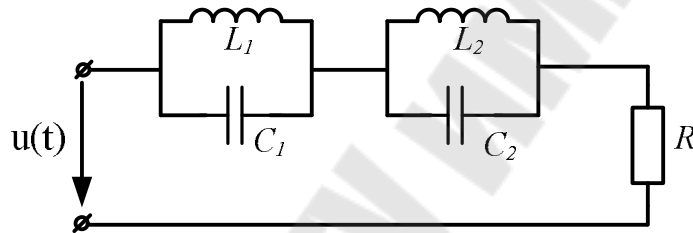


Рис.1.60

Решение

Для того, чтобы в резисторе R отсутствовали токи первой и пятой гармоник, оба параллельных контура ($L_1 C_1$ и $L_2 C_2$) должны быть настроены в резонанс токов на соответствующих частотах. Кроме того, ток третьей гармоники в резисторе R будет наибольшим, если реактивное сопротивление цепи на частоте 3ω будет равно 0, т.е. при резонансе напряжений.

Рассмотрим два решения.

1. Контур $L_1 C_1$ настроен в резонанс на частоте ω , а контур $L_2 C_2$ - на частоте 5ω .

Из условий резонансов токов следует:

$$\frac{1}{L_1 C_1} = \omega^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{L_2 C_2} = 25\omega^2 \quad (2)$$

Из условия резонанса напряжений следует:

$$\frac{3\omega L_1 / 3\omega C_1}{3\omega L_1 - I / 3\omega C_1} + \frac{3\omega L_2 / 3\omega C_2}{3\omega L_2 - I / 3\omega C_2} = 0$$

Или после преобразований:

$$\frac{L_1}{9\omega^2 L_1 C_1 - I} + \frac{L_2}{9\omega^2 L_2 C_2 - I} = 0 \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) – (3) с учётом исходных данных нетрудно получить:

$$C_1 \approx 0,253 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; C_2 \approx 0,127 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; L_1 = 0,008 \text{ Гн.}$$

2. Если же контур $L_1 C_1$ настроен в резонансе на частоте 5ω , а контур $L_2 C_2$ - на частоте ω , то равенства (1) и (2) примут вид:

$$\frac{1}{L_1 C_1} = 25\omega^2 \quad (4)$$

$$\frac{1}{L_2 C_2} = \omega^2 \quad (5)$$

а условие (3) не изменится.

Решая совместно уравнения (3)-(5), получим:

$$C_1 \approx 0,01 \cdot 10 \text{ Ф}; C_2 \approx 0,02 \cdot 10 \text{ Ф}; L_2 = 1,25 \text{ Гн.}$$

В любом из приведенных решений общее сопротивление контуров $L_1 C_1$ и $L_2 C_2$ равно нулю. Следовательно, мгновенное значение тока в резисторе R .

$$i = \frac{u_{(3)}}{R} = \frac{500 \sin 3\omega t}{100} = 0,5 \sin 3\omega t \text{ А.}$$

1.4.9. В цепи рис.1.61 $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t$, В; $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$, $L_1 = 2,5 \text{ Гн}$. Рассчитать значение ёмкостей C_1 и C_2 , при которых напряжение на сопротивлении R_H не зависит от значения R_H и равно $u_H = 100 \sin \omega t$ В.

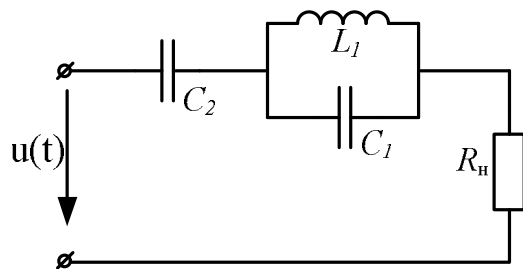


Рис.1.61

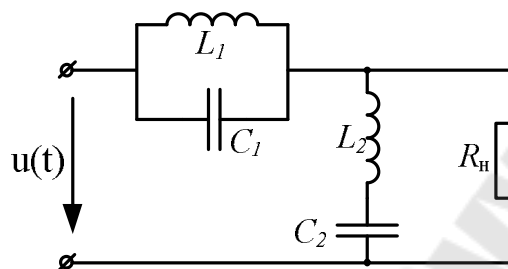


Рис.1.62

Решение

Напряжение u_n не будет содержать третьей гармоники в том случае, когда параллельный контур $L_1 C_1$ настроен в резонанс, т.е. при условии:

$$3\omega C_1 = \frac{1}{3\omega L_1}$$

Откуда:

$$C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = \frac{1}{9 \cdot 314^2 \cdot 2,5} \approx 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

Вместе с тем, напряжение u_n равно первой гармонике напряжения источника, если реактивное сопротивление цепи отсутствует, т.е. при резонансе напряжений.

Из условий резонанса напряжений на первой гармонике следует:

$$\frac{L_1 / C_1}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1} - \frac{1}{\omega C_2} = 0$$

Откуда:

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{1}{314^2 \cdot 2,5} - 0,45 \cdot 10^{-6} \approx 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

1.4.10. В цепи рис.1.62 $u(t) = 20 + 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t$, В; $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$; $L_1 = 0,05$ Гн, $L_2 = 0,2$ Гн, $R_H = 40$ Ом. Подобрать ёмкости конденсаторов C_1 и C_2 так, чтобы в сопротивлении нагрузки протекал постоянный ток. Определить величину этого тока.

1.4.11. На рис.1.63 показан электрический фильтр, не пропускающий в нагрузку пятую гармонику тока и не оказывающей сопротивления

третьей гармонике тока. $u(t) = 120 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$, В; $L_1 = L_2 = 10$ мГн, $f = 2$ кГц, $R_H = 10^3$ Ом. Рассчитать напряжение на нагрузке $u_H(t)$.

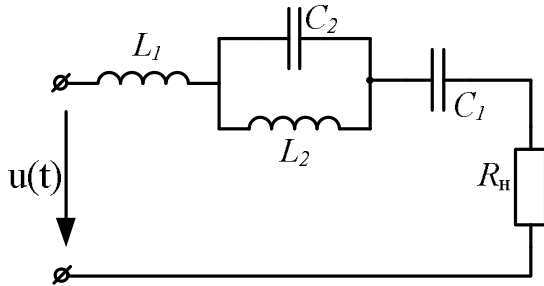


Рис.1.63

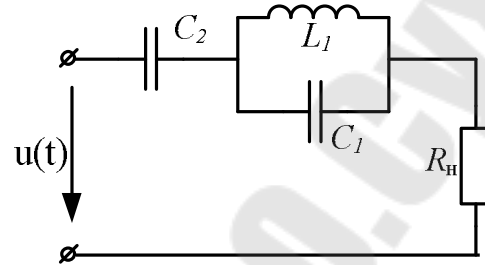


Рис.1.64

4.12. В цепи рис.1.64 $u(t) = 100 \sin 500t + 50 \sin 3 \cdot 500t$, В. $L_1 = 0,5$ Гн, $R_H = 25$ Ом. Рассчитать значения ёмкостей C_1 и C_2 , при которых ток в резисторе R_H будет равен $i_H = 2 \sin 1500t$ А.

1.4.13. В цепи рис.1.65 $u(t) = 270\sqrt{2} \sin 10^3 t + 90\sqrt{2} \sin(3 \cdot 10^3 t + 10^6)$, В; $C_1 = 200$ мкФ, $L_1 = 5$ мГн, $L_2 = 3$ мГн. Определить, при какой ёмкости C_2 входной ток в цепи будет синусоидальным с угловой частотой 10^3 c^{-1} . Рассчитать мгновенное значение этого тока.

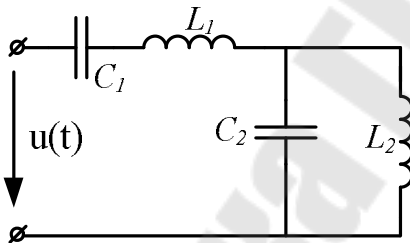


Рис.1.65

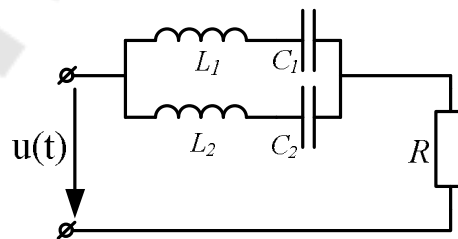


Рис.1.66

4.14. В цепи рис.1.66 $L_1 = 100$ мГн, угловая частота основной гармоники $\omega = 10^3 \text{ c}^{-1}$. Рассчитать значения C_1 , C_2 и L_2 , при которых в цепи имеет место резонанс напряжений на первой и третьей гармониках и резонанс токов на второй гармонике.

ОТВЕТЫ

К разделу 1

- 1.1.1. См. решение.
1.1.2. См. решение.
1.1.3. а) относительно начала координат;
б) оси абсцисс и начала координат;
1.1.4. а) постоянная составляющая, нечётные, чётные синусоидальные;
б) нечётные синусоидальные;
1.1.5. Нечетные косинусоидальные.
1.1.7. $100 + 191 \sin(\omega t - 60^\circ) + 95.5 \sin(2\omega t + 60^\circ) + 63.7 \sin(3\omega t + 180^\circ)$
1.1.11. $f(t) = 3 \sin(\omega t + 18^\circ) + \sin(2\omega t - 54^\circ)$

К разделу 2

- 1.2.1. См. решение.
1.2.2. См. решение.
1.2.3. См. решение.
1.2.5. $I = 4 \text{ A}$, $i = 4\sqrt{2} \sin(314t + 53^\circ) \text{ A}$.
1.2.9. $i = 2,24 \sin(\omega_2 t + 64^\circ) + 1,1 \sin(2\omega_2 t + 116^\circ) \text{ A}$;
 $i_L = 2 \sin \omega_2 t + 0,5 \sin 2\omega_2 t \text{ A}$;
 $i_R = 2 \sin(\omega_2 t + 90^\circ) + 1 \sin(2\omega_2 t + 90^\circ) \text{ A}$;
 $i_C = 1 \sin(\omega_2 t + 180^\circ) + 1 \sin(2\omega_2 t + 180^\circ) \text{ A}$;
1.2.10. $i = 1 + 2 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) + 1 \cdot \sin(2\omega t - 135^\circ) \text{ A}$;
1.2.11. 25 мА; 2.5 В;
1.2.13. $34 \sin(\omega t + 45^\circ) + 37.9 \sin(3\omega t + 71^\circ) \text{ В}$;
 $34 \sin(\omega t - 45^\circ) + 12,6 \sin(3\omega t - 18,5^\circ) \text{ В}$.
1.2.14. $i_L(t) = 10 + 10 \sin(\omega t - 30^\circ) + 2,24 \sin(2\omega t - 116,5^\circ) \text{ A}$.
1.2.15. $i_2(t) = 4 \cdot \sin(\omega t + 120^\circ) + 2,263 \cdot \sin(2\omega t - 45^\circ) \text{ A}$.

К разделу 3

- 3.1. См. решение.
3.2. Не изменяется у "А" обеих систем.
3.3. $I = 5\sqrt{2} \text{ A}$

- 3.4. $2A$
- 3.6. $7,2 A$; $20,2 B$.
- 3.7. 37 мкФ ; $10 A$.
- 3.8. а) $0,34 A$; б) $0,805 A$.
- 3.9. $0,5 + 1 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) A$; $1 A$; $33,2 B$; 15 Вт .
- 3.10. $-2 + 6 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) A$; $2 \cdot \sin(\omega t + 135^\circ) + 2 \cdot \sin(2\omega t + 110^\circ) A$;
 $-2 + 8 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) + 2 \cdot \sin(2\omega t - 70^\circ) A$; $4,7 A$; $22,45 B$.
- 3.11. 1) $3 + 2,83 \cdot \sin(\omega t - 93^\circ) A$;
 $0,95 \cdot \sin(\omega t + 156^\circ) + 1,41 \cdot \sin(2\omega t + 75^\circ) A$;
 $3 + 3,78 \cdot \sin(\omega t - 23^\circ) + 1,41 \cdot \sin(2\omega t - 105^\circ) A$; $3,6 A$; $1,2 A$; $4,13A$;
 $-60 + 114 \cdot \sin(\omega t + 66^\circ) + 85 \cdot \sin(2\omega t - 15^\circ) B$; $117 B$;
 2) $120 B$, 210 Вт .
- 3.12. $4 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) + 1 \cdot \sin(3\omega t - 120^\circ) A$; $2,92A$; $88,4 B$.
- 3.13. $3 + 2\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 23^\circ) A$;
 $0,67\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 157^\circ) + \sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t + 75^\circ) A$;
 $3 + 2,67\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 23^\circ) + \sqrt{2} \cdot \sin(2\omega t - 105^\circ) A$; $3,6 A$; $1,2 A$;
 $4,13 A$; $120 B$; 210 Вт .
- 3.14. $26,8 B$; $61 B$.
- 3.15. $0.436 A$; $66 B$; 11 Вт .
- 3.16. $u_C = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t + 75^\circ) + 200 \cdot \sin(2000t - 135^\circ) B$;
 $u_v = 173 B$; $P_w = 500 \text{ Вт}$.
- 1.3.17. $u_v = 24,2 B$; $I_A = 1,73 A$;
- 1.3.21. См. решение.
- 1.3.22. См. решение.
- 1.3.23. $P=100 \text{ Вт}$.
- 1.3.24. $S=0$.
- 1.3.25. $P = P + P_{(2)} = 400 + 40 = 440 \text{ Вт}$.
- 1.3.26. $P = P_{(0)} + P_{(1)} = 6^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 4 = 180 \text{ Вт}$.
- 1.3.27. $S = 53,25 \text{ ВА}$; $P = 27 \text{ Вт}$; $Q = -3,464 \text{ Вар}$; $T = 45,76 \text{ ВА}$;
- 1.3.29. 1) $0,5 + 2 \cdot \sin 2\omega t A$; $0,87 A$; $0,5 + 1 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) A$; $0,87 A$
 $1 \cdot \sin(\omega t + 120^\circ) + 1 \cdot \sin 2\omega t A$; $1 A$; 45 Вт ;
 2) 60 Вт ; 81 ВА ;

ГЛАВА 2. ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. ЛИНИЯ С ПОТЕРЯМИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Для оценки, к какому типу отнести цепь с сосредоточенными или распределенными параметрами – следует сравнить ее длину l с длиной электромагнитной волны $\lambda = VT$.

Линия передачи энергии, геометрическая длина l которой соизмерима с длиной волны λ , должна быть представлена эквивалентной схемой с распределительными параметрами. Такие линии называются “длинными”. На практике “длинными” считаются линии, у которых $l \geq (0,05 \div 0,1)\lambda$. Эквивалентная схема длинной линии показана на рис. 2.1.

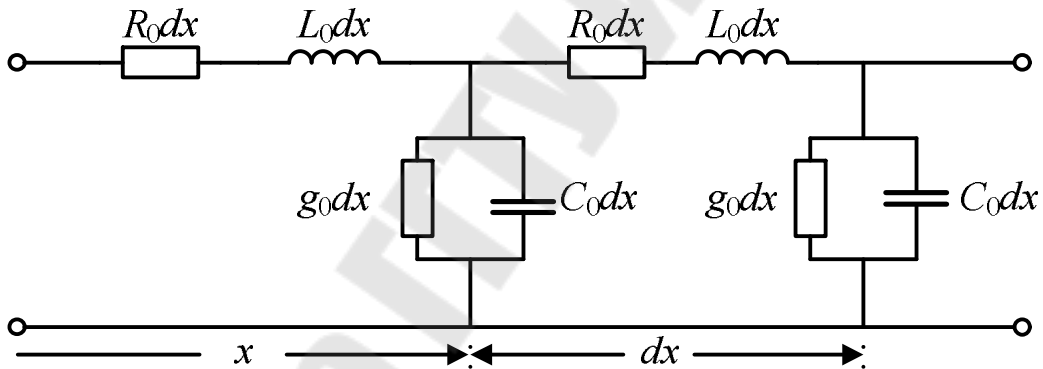


Рис.2.1

R_0, L_0, g_0, C_0 – первичные или погонные параметры линии, отнесенные к единице ее длины.

Распределение напряжений и токов вдоль линии:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (2.1)$$

$$\underline{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z_C} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x})$$

Где:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \quad \text{- волновое сопротивление линии,}$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad \text{- постоянная распространения;}$$

α - коэффициент затухания; β - коэффициент фазы.

Решение можно представить в виде наложения прямых и обратных волн напряжения и тока, связанных законом Ома:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}} \\ \underline{I} &= \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{обр}},\end{aligned}$$

где:

$$\underline{U}_{\text{пр}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x}$$

$$\underline{U}_{\text{обр}} = \underline{A}_2 e^{\gamma x}$$

$$\underline{I}_{\text{пр}} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} / \underline{Z}_c$$

$$\underline{I}_{\text{обр}} = \underline{A}_2 e^{\gamma x} / \underline{Z}_c$$

Таким

образом:

$$\underline{I}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_{\text{пр}}}{\underline{Z}_c}$$

$$\underline{I}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_{\text{обр}}}{\underline{Z}_c}$$

Уравнения длинной линии в гиперболических функциях:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma l ;$$

(2.2)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l$$

2.1.1. Кабель длиной $l = 30$ км имеет параметры: $R_0 = 11,04, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ км}^{-1}$; $L_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}, \text{ Гн/км}$; $C_0 = 38 \cdot 10^{-9}, \text{ Ф/км}$; $G_0 = 0,8 \cdot 10^{-6}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ км}^{-1}$. Для частот $f_1 = 300$ Гц и $f_2 = 2400$ Гц определить волновое сопротивление линии Z_B , коэффициент затухания α , коэффициент фазы β , фазовую скорость V_ϕ и задержку во времени при прохождении волны всей длины линии.

Решение

1. Волновое сопротивление линии определяется по формуле:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}},$$

Где:

$$\underline{Z}_0 = R_0 + jX_0, \quad X_0 = \omega L_0, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f;$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + jb_0, \quad b_0 = \omega C_0.$$

Для частоты $f_1 = 300$ Гц:

$$\omega = 6,28 \cdot 300 = 1884, \text{ с}^{-1};$$

$$X_0 = 1884 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 1,13, \text{ Ом/км};$$

$$b_0 = 1884 \cdot 38 \cdot 10^{-9} = 71,6 \cdot 10^{-6}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1};$$

$$Z_0 = 11,4 + j1,13 = 11,46e^{j6,3^\circ}, \text{ Ом/км};$$

$$Y_0 = (0,8 + j71,6) \cdot 10^{-6} = 71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89,4^\circ}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{11,46e^{j6,3^\circ}}{71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89,4^\circ}}} = 400e^{-j41,5^\circ}, \text{ Ом};$$

Для частоты $f_1 = 2400$ Гц:

$$\omega = 2\pi \cdot 2400 = 15072, \text{ с}^{-1};$$

$$X_0 = 15072 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 9,04, \text{ Ом/км};$$

$$b_0 = 15072 \cdot 38 \cdot 10^{-9} = 572,7 \cdot 10^{-6}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1};$$

$$Z_0 = 11,4 + j9,04 = 14,55e^{j38,4^\circ}, \text{ Ом/км};$$

$$Y_0 = (0,8 + j572,7) \cdot 10^{-6} = 572,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,9^\circ}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{14,55e^{j38,4^\circ}}{572,7 \cdot 10^{-6} e^{j89,9^\circ}}} = 159,4e^{-j25,72^\circ}, \text{ Ом};$$

2. Постоянная распространения волны:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta,$$

α - постоянная затухания;

β - коэффициент фазы.

Для частоты $f_1 = 300$ Гц:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{11,46e^{j6,3^\circ} \cdot 71,6 \cdot 10^{-6} e^{j89,4^\circ}} = 28,6 \cdot 10^{-3} e^{j47,5^\circ} = (19,3 + j21,1) \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1}$$

$$\alpha = 19,3 \cdot 10^{-3}, \text{ Нп/км},$$

$$\beta = 21,1 \cdot 10^{-3}, \text{ рад/км};$$

Фазовая скорость:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1884}{21,1 \cdot 10^{-3}} = 89289, \text{ км/с};$$

Задержка во времени:

$$t_3 = \frac{1}{V_{\phi}} = \frac{80}{89289} = 0,896 \cdot 10^{-3}, \text{ с.}$$

Для частоты $f_1 = 2400, \text{ ГЦ}$:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{14,55 e^{j38,4^\circ} \cdot 572,2 \cdot 10^{-6} e^{j89,9^\circ}} = 91,48 \cdot 10^{-3} e^{j64,15^\circ} = (41,19 + j85) \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1}$$

$$\alpha = 41,19 \cdot 10^{-3}, \text{ Н/км},$$

$$\beta = 85 \cdot 10^{-3}, \text{ рад/км};$$

Фазовая скорость:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{15072}{85 \cdot 10^{-3}} = 177318, \text{ км/с};$$

Задержка во времени:

$$t_3 = \frac{1}{V_{\phi}} = \frac{80}{177318} = 0,45 \cdot 10^{-3}, \text{ с.}$$

2.1.2. Заданы первичные параметры кабеля:

$$R_0 = 12, \text{ Ом/км}; L_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}, \text{ Г/км};$$

$$C_0 = 43 \cdot 10^{-9}, \text{ Ф/км}; G_0 = 10^{-6}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ км}^{-1}$$

Длина кабеля $l = 30, \text{ км}$; частота передаваемого сигнала

$f = 10^3, \text{ Гц}$. Кабель нагружен на резистор $R_2 = 300, \text{ Ом}$, напряжение

$U_2 = 60, \text{ В}$.

Определить:

1. Волновое сопротивление \underline{Z}_C и постоянную распространения, V_{ϕ} , длину волны передаваемого сигнала λ .
2. Напряжение u_1 и ток i_1 на входе кабеля.

Решение

1. Волновое сопротивление и постоянную распространения находим по формулам:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}},$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta,$$

Где:

$$\underline{Z}_0 = R_0 + jX_0, \quad \underline{Y}_0 = G_0 + jb_0;$$

$$X_0 = \omega L_0 = 6,28 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 3,768 \cdot 10^{-9}, \text{ Ом/км};$$

$$b_0 = \omega C_0 = 6,28 \cdot 10^3 \cdot 43 \cdot 10^{-9} = 270 \cdot 10^{-9}, \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{км}^{-1};$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{12 + j3,768}{(1 + j270) \cdot 10^{-6}}} = 216e^{-j37,16^\circ}, \text{ Ом};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(12 + j3,768)(1 + j270) \cdot 10^{-6}} = 0,0345 + j0,0469, \text{ км}^{-1};$$

Коэффициент затухания:

$$\alpha = 0,0345, \text{ Нф / км}$$

Коэффициент фазы:

$$\beta = 0,0469, \text{ рад/км} = 2,68 \text{ град/км.}$$

Фазовая скорость:

$$V_\phi = \frac{L_0}{\beta} = \frac{6,28 \cdot 10^3}{0,0469} = 134 \cdot 10^3, \text{ км/с};$$

Длина волны:

$$\lambda = \frac{V_\phi}{f} = \frac{134000}{1000} = 134, \text{ км.}$$

Напряжение и ток на входе кабеля рассчитывается как сумма падающих и отражённых волн:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1n} + \underline{U}_{10},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1n} + \underline{I}_{10};$$

$$\underline{U}_{1n} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2} e^{\underline{\gamma} l} = \frac{60 + 0,2 \cdot 216e^{-j36,17^\circ}}{2} e^{30(0,0345 + j0,0469)} = 138,6e^{-j65,7^\circ}, \text{ В}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{60}{300} = 0,2, \text{ А}$$

$$\underline{U}_{10} = \frac{U_2 - I_2 Z_C}{2} e^{-\gamma l} = \frac{60 - 0,2 \cdot 216 e^{-j36,17^\circ}}{2} e^{-30(0,0345 + j0,0469)} = 6,24 e^{-j35,2^\circ}, \text{ В}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1n} + \underline{U}_{10} = 62,1 + j122,7 = 173,5 e^{-j36,17^\circ}, \text{ В}$$

Падающая и отражённая волны тока связаны с падающей и отражённой волной напряжения закона Ома:

$$\underline{I}_{1n} = \frac{\underline{U}_{1n}}{Z_C} = \frac{138,6 e^{j65,7^\circ}}{216 e^{-j36,17^\circ}} = 0,624 e^{j102^\circ} = -0,129 + j0,628, \text{ А}$$

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{Z_C} = \frac{6,24 e^{-j35,2^\circ}}{216 e^{-j36,17^\circ}} = 0,0289 e^{j0,97^\circ} = 0,0289, \text{ А}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1n} + \underline{I}_{10} = -0,129 + j0,628 = 0,64 e^{j101,7^\circ}, \text{ А}$$

Мгновенные значения:

$$u_1 = 245,4 \sin(\omega t + 64^\circ), \text{ В}$$

$$i_1 = 0,9 \sin(\omega t + 101,7^\circ), \text{ А}$$

2.1.3. По данным задачи №2 рассчитать напряжение u_1 и ток i_1 в начале линии, если линия согласованна с нагрузкой.

Решение

Если линия согласованна с нагрузкой, то:

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C, \quad \underline{U}_2 = I_2 \underline{Z}_C,$$

тогда:

$$\underline{U}_{1n} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + I_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma l} = U_2 e^{\gamma l} = 60 e^{30(0,0345 + j0,0469)} = 475,5 e^{j80,7^\circ}, \text{ В}$$

$$\underline{U}_{10} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - I_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma l} = 0, \text{ В}$$

$$\underline{I}_{1n} = \frac{\underline{U}_{1n}}{Z_C} = \frac{475,5 e^{j80,7^\circ}}{216 e^{-j36,17^\circ}} = 2,2 e^{j116,87^\circ}, \text{ А}$$

$$I_{10} = \frac{U_{10}}{Z_c} = 0, \text{ А}$$

Мгновенное значение тока и напряжения:

$$u_1 = 475,2 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 80,7^\circ), \text{ В}$$

$$i_1 = 2,2 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 116,87^\circ), \text{ А}$$

2.1.4. Рассчитать дополнительную индуктивность L , которую необходимо включить на километр длины кабеля задачи №1, чтобы линия стала неискажающей.

Решение

Условие Хэвисайда неискажающей линии:

$$\frac{L_0 + L}{C_0} = \frac{R_0}{g_0}$$

Отсюда:

$$L = \frac{R_0 C_0}{g_0} - L_0 = \frac{12 \cdot 43 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} - 0,6 \cdot 10^{-3} = 515 \cdot 10^{-3}, \text{ Гн}$$

Линии с потерями при согласованной нагрузке

2.1.5. Воздушная линия связи длиной $l = 100$, км (рис. 18-1), параметры которой $r_0 = 5,4$, Ом/км; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, Г/км; $g_0 = 1 \cdot 10^{-6}$, См/км; $C_0 = 1 \cdot 10^{-3}$, Ф/км, замкнута на сопротивление, равное волновому сопротивлению (Z_c). Напряжение в конце линии $u_2 = 10\sqrt{2} \sin \omega t$, В, при частоте $f = 800$, Гц.

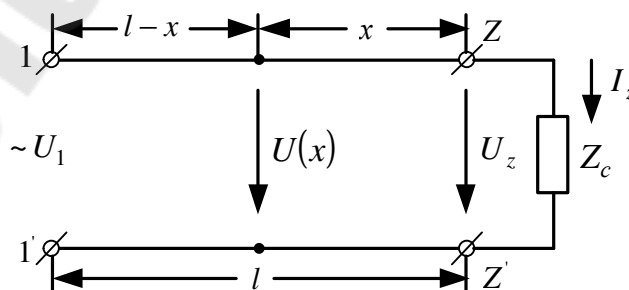


Рис.2.2

Определить действующее и мгновенные значения напряжения U_1, u_1 и тока I_1, i_1 в начале линии. Построить кривые распределения вдоль линии действующих значений напряжения U и тока I . Вычислить мощности, подводимые к нагрузке и ко входу линии.

Решение задачи

1. Общая характеристика согласованного режима.

При согласованной нагрузке энергия перемещается вдоль линии только в одном направлении – от источника к приёмнику (прямые волны напряжения и тока). В конце линии вся энергия и соответственно вся передаваемая информация воспринимаются приёмником без отражения.

Отсутствие отраженных волн напряжения и тока исключает возврат посылаемого сигнала (от приёмника к источнику).

В рассматриваемом режиме нагрузки (при $Z_n = Z_c$) комплексное напряжение в любой точке линии на расстоянии x от её конца определяется только падающей волной:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{\gamma x} = \underline{U}_2 e^{\gamma x}, \quad (2.3)$$

так как $\underline{I}_2 \underline{Z}_n = \underline{U}_2$, и комплексный ток в любой точке линии

$$\underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_{\text{пр}}}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \underline{I}_2 e^{\gamma x}, \quad (2.4)$$

где \underline{U}_2 и \underline{I}_2 – комплексное напряжение и ток в конце линии;
 γ – коэффициент распространения (комплексная величина);
 \underline{Z}_c – волновое сопротивление линии.

В приведенных формулах неизвестны две величины: *волновое сопротивление \underline{Z}_c и коэффициент распространения γ , называемые вторичными параметрами линии.* Перейдём к их вычислению.

2. Вычисление \underline{Z}_c и γ . Волновое (характеристическое) сопротивление линии определяется по формуле:

$$\underline{Z}_c = z_c e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0},$$

где \underline{Z}_0 - продольное сопротивление линии на километр длины:

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0 = 5,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 5,4 + j10 = 11,4e^{j61,4^\circ}, \text{ Ом}$$

и проводимость на 1 км линии:

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0 = 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \approx 10^{-6}(1 + j30) = 10^{-6} \cdot 30e^{j88,05^\circ}$$

При подстановке величины \underline{Z}_0 и \underline{Y}_0 в волновое сопротивление, получим

:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{11,4e^{j61,40^\circ}}{10^{-6} \cdot 30e^{j88,05^\circ}}} = \sqrt{0,38 \cdot 10^6 e^{-j16,25^\circ}} = 620e^{-j8,10^\circ}, \text{ Ом}$$

Коэффициент распространения:

$$\underline{\gamma} = a + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 18,5 \cdot 10^{-3} e^{-j74,50^\circ} = 4,8 \cdot 10^{-3} + j17,9 \cdot 10^{-3}, (\text{км})^{-1}.$$

коэффициентом затухания:

$$a = 4,8 \cdot 10^{-3}, \text{ Нп/км},$$

коэффициентом фазы:

$$\beta = 17,9 \cdot 10^{-3}, \text{ рад/км}.$$

3. Вычисление напряжения и тока в начале и конце линии.

По условию задачи задано напряжение в конце линии $U_2 = 10, \text{ В}$, начальная фаза которого принята равной нулю.

Поэтому запишем:

$$\underline{U}_2 = U_2 = 10, \text{ В}$$

и преобразуем формулу напряжения:

$$\underline{U} = U_2 e^{\gamma x} = 10e^{(a+j\beta)x} = 10e^{ax} e^{j\beta x}, \text{ В}$$

Поскольку x – это расстояние от конца линии, то при $x = l$ получим напряжение начала линии \underline{U}_1 .

Предварительно вычислим:

$$ax = al = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,48, \text{ Нп}, \quad e^{al} = e^{0,48} = 1,62,$$

$$\beta x = \beta l = 17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,79, \text{ рад},$$

и так как $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$, то $\beta l = 1,79 \cdot 57,3 = 102,5^\circ = 102,5^\circ = 102,3^\circ$.

При подстановке данных комплексное напряжение в начале линии равно:

$$\underline{U}_1 = 16,2e^{j102,3^\circ}.$$

Мгновенное значение:

$$u_1 = 16,2\sqrt{2} \sin(\omega t + 102,3^\circ), \text{ В}.$$

Действующее значение: $U_1 = 16,2, \text{ В}.$

Вычислим ток в начале линии:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{\gamma l} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} = \frac{16,2e^{j102,3^\circ}}{620e^{-j8,10^\circ}} = 26,2 \cdot 10^{-3} e^{j110,4^\circ} \text{ А} = 26,2e^{j110,4^\circ}, \text{ мА}.$$

Мгновенное значение этого тока:

$$i_1 = 26,2\sqrt{2} \sin(\omega t + 110,4^\circ), \text{ мА},$$

и действующее значение: $I_1 = 26,2, \text{ мА}$

Ток в конце линии ($x = 0$):

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} = \frac{10}{620e^{-j8,10^\circ}} = 16,1e^{j8,1^\circ}, \text{ мА}$$

Сдвиг по фазе между напряжением и током в конце линии зависит от аргумента сопротивления нагрузки. При согласованной нагрузке $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c = Z_c e^{j\theta}$ сдвиг по фазе равен θ . Таким образом, при согласованной нагрузке разность фаз напряжения и тока в начале и конце линии одинакова:

$$\angle \underline{U}_1, \underline{I}_1 = \angle \underline{U}_2, \underline{I}_2 = \theta$$

4. Построение графиков распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

Формула (2.4) выражает комплексное действующее значение напряжения в любой точке линии $\underline{U}(x)$. Модуль этой величины:

$$U(x) = U_2 e^{ax} = 10e^{4,8 \cdot 10^{-3} x}$$

определяет действующее значение напряжения в зависимости от расстояния x от конца линии. Для различных расстояний x значения U приведены в табл. 2.1. По этим величинам напряжения построен график U на рис. 2.2, где по оси абсцисс отложены расстояния $l-x$ (рис. 2.2), которое отсчитываем от начала линии.

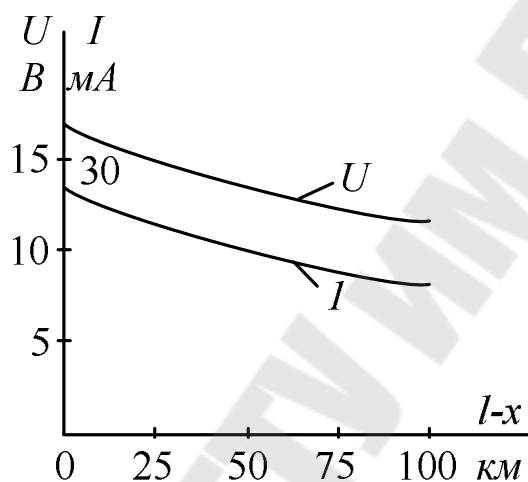


Рис.2.2

Таблица 2.1

x , км	0	25	50	75	100
ax , Нп	0	0,12	0,24	0,36	0,48
e^{ax}	1	1,13	1,27	1,43	1,62
U , В	10	11,3	12,7	14,3	16,2
I , мА	16,1	18,2	20,5	23,0	26,2

Для построения графика тока преобразуем уравнение (2.4) к аналогичному виду:

$$I(x) = \frac{U_2}{z_c} e^{ax} = I_2 e^{ax} = 16,1e^{ax}, \text{ мА}$$

Для выбранных значений x (таб. 2.1) вычислены величины тока, и по этим данным построен график I на рис. 2.2.

Графики действующего значения напряжения U и тока

I (рис. 2.2) показывают затухание волн напряжения и тока при их перемещении от начала линии к концу.

5. Вычисление мощностей.

Полная комплексная мощность в нагрузке:

$$\tilde{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = 10 \cdot 16,1 \cdot 10^{-3} e^{-j8,1^\circ} \cdot 26,2 \cdot 10^{-3} e^{-j110,4^\circ} = 0,424 e^{-j8,1^\circ} = 0,42 - j0,0607, \text{ В} \cdot \text{А}$$

Следовательно, активная мощность источника энергии:

$$P_1 = 0,42, \text{ Вт} = 240, \text{ мВт}.$$

Дополнительные вопросы к задаче

1. Какое ослабление напряжения и тока создаёт рассматриваемая линия?

В заданных условиях (при согласованной нагрузке) отношение напряжений и токов в начале линии и её конце, как следует из (2.3) и (2.4) при $x = l$, т.е. при $U = U_1$ и $I = I_1$:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{ax} = e^{0,48} = 1,62$$

Следовательно, ток и напряжение ослабляются линией в 1,62 раза. Это же ослабление характеризуется в неперах величиной:

$$al = \ln 1,62 = \ln e^{0,48} = 0,48, \text{ Нп}.$$

2. Каково ослабление в линии, подводимой к ней активной мощности?

Отношение активных мощностей:

$$P_1 / P_2 = 420 / 159 = 2,6.$$

Это же ослабление мощности, но выраженное в неперах:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2} \ln 2,6 = \frac{1}{2} \cdot 0,96 = 0,48, \text{ Нп}.$$

Полученное значение совпадает с полученным в предыдущем вопросе ослаблением напряжений и токов. Этот результат не случаен: при нагрузке отношение мощностей:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1 \cos \theta}{U_2 I_2 \cos \theta} = \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{I_1}{I_2} = e^{2al},$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2} \ln e^{2al} = al.$$

3. Будет ли рассматриваемая линия неискажающей для спектра частот от 200 до 2000, Гц?

Отсутствие искажений означает, что формы сигнала в начале линии и в её конце подобны, т.е. сигнал изменяется только по величине.

Линия будет неискажающей, если коэффициент затухания a и фазовая скорость $V = \omega/\beta = 2\pi f/\beta$ не будут изменяться в диапазоне частот. Для заданной линии a и ϑ вычислены для трёх значений частоты (таблица 2.2). Результаты вычислений показывают, что линия вносит искажения, т.е. при передаче, например, телефонного разговора речь будет искажаться.

Таблица 2.2

$f, \text{Гц}$	$a, \text{Нп/км} \cdot 10^{-8}$	$\beta, \text{рад/км} \cdot 10^{-3}$	$\vartheta, \text{км/с}$
200	3,88	5,6	224
800	4,8	17,9	280
2000	4,6	45,7	275

4. Можно ли сделать рассматриваемую линию линией без искажений?

У неискажающей линии между её параметрами должно выполняться соотношение Хевисайда:

$$r_0 / L_0 = g_0 / C_0.$$

В заданной линии это условие не соблюдается. Следовательно, надо изменить какой – либо параметр. Как правило, вводят дополнительную индуктивность, включаемую через каждый километр линии, которая при наших данных равна:

$$L_{\text{доп}} = \frac{C_0 r_0}{g_0} - L_0 = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 5,4}{10^{-6}} - 2 \cdot 10^{-3} = 30,4 \cdot 10^{-3}, \Gamma = 30,4, \text{ мГ}.$$

5. Как построить график волны напряжения в линии для моментов времени $t = 0$ и $t = 50, \text{ мкс}$? Запишем мгновенное значение напряжения вдоль линии:

$$u = 10\sqrt{2}e^{ax} \sin(\omega t + \beta x) \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) показывает, что в любой заданный момент времени t напряжение вдоль линии при согласованной нагрузке распределяется по синусоидальному закону с уменьшающейся от начала к концу линии амплитудой $10\sqrt{2}e^{ax}$.

В частности, при $\omega t = 0$ получим:

$$u(0) = 10\sqrt{2}e^{ax} \sin \beta x,$$

или, например, при частоте $f = 2000, \text{ Гц}$, для которой $a = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$, $\beta = 45,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$ (табл. 2.1),

$$u(0) = 10\sqrt{2}e^{4,6 \cdot 10^{-3} x} \sin 45,7 \cdot 10^{-3} x$$

Задаваясь значениями x от 0 до 100 км, вычисляем $u(0)$ и строим по точкам график (рис. 2.3), В частности, $u(0) = 0$ при $x = 0$ и $45,7 \cdot 10^{-3} x = \pi$, откуда $x = 68,8, \text{ км}$ (точка K).

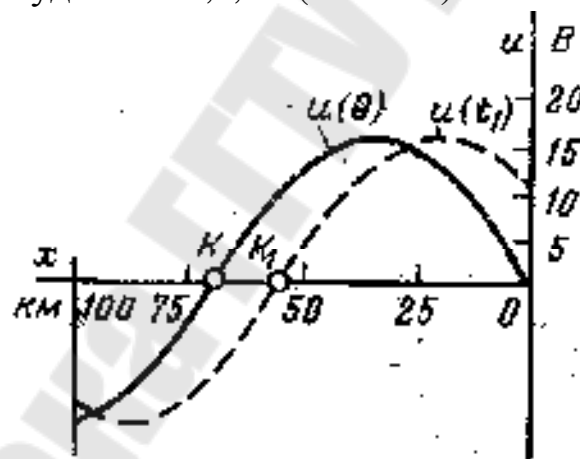


Рис 2.3 Мгновенные значения напряжения в линии для двух моментов времени.

Затухание синусоиды на рис. 2.3 мало заметно, так как вдоль линии уложилось всего 1,5 полуволны.

Для другого заданного момента $t_1 = 50, \text{ мкс} = 5 \cdot 10^{-5}, \text{ с}$:

$$u(t_1) = 10\sqrt{2}e^{ax} \sin(\omega t_1 + \beta x).$$

В конце линии ($x=0$) напряжение уже равно не нулю, а $u_2(t_1) = 10\sqrt{2} \sin 2\pi f t_1 = 10\sqrt{2} \sin 36^\circ = 8,3, \text{В}$ (рис. 2.3).

Нулевое значение тока (точка K_1) будет на расстоянии x_1 , определяются из условия:

$$\omega t_1 + \beta x_1 = \pi,$$

откуда:

$$x_1 = 55, \text{км}.$$

Как видно из графиков рис.2.2: $u(0)$ и $u(t_1)$, за время t_1 волна напряжения сместилась к концу линии и прошла путь $68,8 - 55 = 13,8, \text{км}$.

Линия с потерями при несогласованной нагрузке

2.1.7. Линия, рассмотренная в предыдущей задаче, нагружена на активное сопротивление $r_n = 500, \text{Ом}$.

Определить напряжение и ток на входе линии, если напряжение на её выходе (на сопротивление r_n) $U_2 = 10, \text{В}$.

При несогласованной нагрузке в линии будет как прямая, так и обратные волны напряжение, и ток в любой точке линии:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{-\gamma x}; \quad (2.6)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} + \underline{I}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2 \underline{Z}_c} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2 \underline{Z}_c} e^{-\gamma x}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.6) и (2.7) записываются ещё гиперболическими синусами и косинусами:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \text{sh} \underline{\gamma} x; \quad (2.8)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x,$$

(2.9)

Где: $\text{sh} \underline{\gamma} x = 0,5(e^{\underline{\gamma} x} - e^{-\underline{\gamma} x})$ и $\text{ch} \underline{\gamma} x = 0,5(e^{\underline{\gamma} x} + e^{-\underline{\gamma} x})$.

В частности, чтобы получить напряжение и ток на входе линии \underline{U}_1 и \underline{I}_1 , нужно принять $x = l$.

Многие величины, входящие в формулы (2.6) – (2.9), вычислены в предыдущем параграфе. К их числу относятся:

Волновое сопротивление линии:

$$\underline{Z}_c = 620e^{-j8,1^\circ} = 614 - j87,5, \text{ Ом};$$

произведение коэффициента распространения на длину линии

$$\underline{\gamma}l = (a + j\beta)l = 0,48 + j1,79,$$

а также

$$e^{\underline{\gamma}l} = e^{0,48} e^{j1,79} = 1,62e^{j102,3^\circ} = -0,35 + j1,58.$$

Другая вспомогательная величина:

$$e^{-\underline{\gamma}l} = \frac{1}{e^{\underline{\gamma}l}} = \frac{1}{-0,35 + j1,58} = -0,133 + j0,603,$$

И гиперболические функции равны:

$$\text{sh } \underline{\gamma}l = 0,5(-0,35 + j1,58 - 0,133 + j0,603) = -0,11 + j1,09 = 1,1e^{j95,5^\circ}$$

$$\text{ch } \underline{\gamma}l = 0,5(-0,35 + j1,58 - 0,133 - j0,603) = -0,24 + j0,5 = 0,54e^{j116,3^\circ}$$

Принимая комплексное напряжение на входе линии $U_2 = 10, \text{ В}$, вычислим ток в нагрузке:

$$\underline{I}_2 = \frac{U_2}{r_{\text{н}}} = \frac{100}{500} = 0,02 \text{ А},$$

и по формуле (2.8) – напряжение на входе линии:

$$\underline{U}_1 = 10(-0,24 - j0,5) + 0,02(614 - j87,5)(-0,11 + j1,09) = 1,9 + j19,2 = 19,3e^{j84,2^\circ}, \text{ В}$$

Чтобы получить напряжение на входе линии от каждой из волн (прямой и обратной), следует пользоваться формулой (2.6), что сделано в дополнительном вопросе 3. По формуле (2.9) ток на входе:

$$\underline{I}_1 = \frac{10 \cdot 1,1e^{j95,5^\circ}}{620e^{-j8,1^\circ}} + 0,02(-0,24 - j0,5) = 28,5 \cdot 10^{-3} e^{j108,4^\circ}, \text{ А},$$

т.е. на входе линии ток $I_1 = 28,5, \text{мА}$ опережает напряжение на угол $24,2^\circ$. Это означает, что входное сопротивление линии активно-ёмкостное.

Дополнительные вопросы к задаче

1. Как вычислить входное сопротивление линии?

При решении задачи входное сопротивление линии оценивалось только качественно, но его легко вычислить по закону Ома, как отношение напряжения на входе линии к входному току. Соответственно для режимов нагрузки, холостого хода и короткого замыкания линии имеем:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{19,3e^{j84,2^\circ}}{28,5 \cdot 10^{-3} e^{j108,4^\circ}} = 680e^{-j24,2^\circ} = 620 - j276, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_x = \frac{U_1}{I_{1x}} = \frac{19,3}{63,5 \cdot 10^{-3} e^{j12,3^\circ}} = 304e^{j12,3^\circ} = 298 + j632, \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_K = \frac{U_1}{I_{1K}} = \frac{19,3}{15,3 \cdot 10^{-3} e^{j28,5^\circ}} = 1260e^{-j28,5^\circ} = 1120 + j605, \text{ Ом}.$$

Значительные изменения входного сопротивления линии при включении, отключении или случайном закорачивании приёмника следует учитывать, выбирая источники энергии или защитные устройства.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.6. Линия длиной $l = 200, \text{ км}$, параметры которой $r_0 = 3, \text{ Ом/км}$, $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}, \text{ Г/км}$, $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}, \text{ Ф/км}$, $g_0 = 1,0 \cdot 10^{-6}, \text{ См/км}$, нагружена на сопротивление, равное волновому. Напряжение в конце линии $U_2 = 20, \text{ В}$ при частоте $f = 800, \text{ Гц}$. Построить кривую распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии. Точки брать через каждые $50, \text{ км}$.

2.1.7. Параметры линии: $r_0 = 5, \text{ Ом/км}$; $L_0 = 2, \text{ мГ/км}$; $C_0 = 5 \cdot 10^{-3}, \text{ мкФ/км}$; $g_0 = 10^{-6}, \text{ См/км}$. Вычислить дополнительную индуктивность, которую нужно включить на каждый километр длины линии, чтобы не было искажений сигналов.

2.1.8. Линия электропередачи длиной $l = 1000$, км имеет первичные параметры: $r_0 = 0,035$, Ом/км; $\omega L_0 = 0,392$, Ом/км; $g_0 = 4,17 \cdot 10^{-8}$, См/км и $\omega C_0 = 2,92 \cdot 10^{-6}$, См/км. Мощность в нагрузке $P_2 = 300$, МВт при напряжении $U_2 = 220,3$, кВ и $\cos \varphi_2 = 1$. Определить вторичные параметры линии, напряжение и ток на его входе.

2.1.9. Кабельная линия длиной $l = 70$ км нагружена на сопротивление, равное волновому. Напряжение на приёмном конце линии $U_2 = 10$, кВ. Определить напряжение и ток в начале линии, если параметры линии $r_0 = 1$, Ом/км; $\omega C_0 = 4 \cdot 10^{-4}$, См/км; $g_0 = \omega L_0 = 0$.

2.1.10. Вторичные параметры линии без потерь: $z_c = 500$, Ом; $\beta = 105$, рад/км. Линия работает на частоте $f = 5$, МГц. Определить, на каком расстоянии от начала следует закоротить линию, чтобы она была эквивалентна индуктивности $L = 10$, мГ.

Ответы к задачам

2.1.6.

l , км	0	50	100	150	200
U , В	32,4	28,6	25,4	22,6	20
I , мА	95	84	74,5	66,0	58,5

2.1.7. 23, мГ/км.

2.1.8. $367e^{-j2,15^\circ}$, Ом; $1,07 \cdot 10^{-3} e^{-j87^\circ}$, (км) $^{-1}$; $201e^{j57^\circ}$, кВ; $570e^{j65,3^\circ}$, А.

2.1.9. 27, кВ; 540, А.

2.1.10. 5,4, м.

2.2. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Теоретическая справка

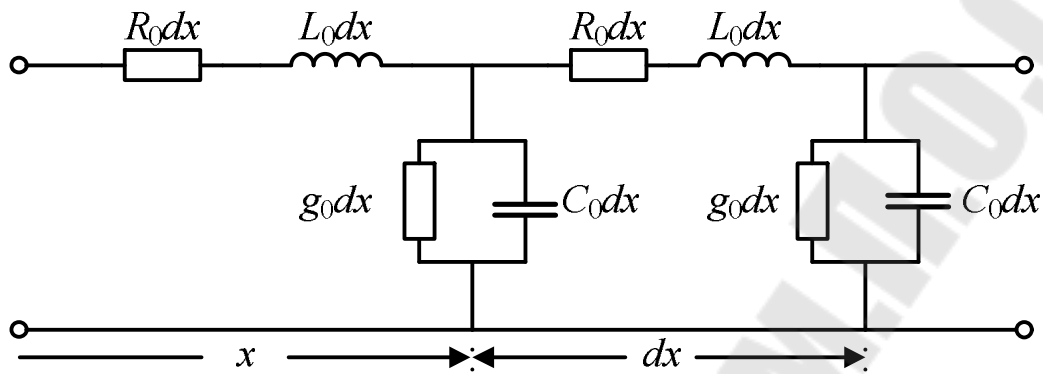


Рис. 2.4

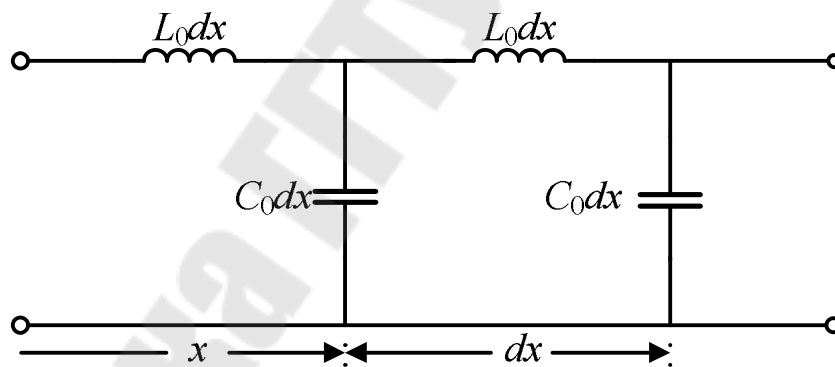


Рис. 2.5

На рис. 2.4 приведена схема замещения линии с потерями. Если выполняется условие $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg g_0$, то такую линию считают линией без потерь (рис. 2.5). Далее все соотношения приводятся для линии без потерь.

Электромагнитная волна распространяется вдоль линии с фазовой скоростью

$$V_\Phi = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (2.10)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ – длина волны;

$\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$ – коэффициент фазы на единицу длины;

$T = \frac{1}{f}$ – период колебаний передаваемого по линии сигнала.

Таким образом, напряжение в конце линии появляется не в момент подключения генератора, а со временем запаздывания

$$\tau_3 = \frac{1}{V_\phi} = l\sqrt{L_0C_0}, \quad (2.11)$$

т.е., линия без потерь является идеальной линией задержки.

Уравнения линии без потерь:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta x, \quad (2.12)$$

$$\underline{I}(x) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x,$$

где $Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ – волновое сопротивление линии,

x – расстояние, отсчитываемое от нагрузки.

Уравнения линии без потерь позволяют построить графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

1. В режиме холостого хода $\underline{I}_2 = 0$ и действующее значение напряжения $U(x)$ изменяется по закону выпрямленной косинусоиды:

$$U(x) = U_2 |\cos \beta x| \quad (2.13)$$

На нагрузке при $x = 0$ $U(x) = U_2$ – (пучность напряжения), и при $x = \frac{\lambda}{4} \left(\beta x = \frac{\pi}{2} \right)$, $U\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 0$ – (узел напряжения).

2. В режиме короткого замыкания $\underline{U}_2 = 0$ действующее значение напряжения $U(x)$ изменяются по закону выпрямленной синусоиды:

$$U(x) = I_2 Z_B |\sin \beta x|. \quad (2.14)$$

При $x=0$ напряжение $U(x)=0$ – узел напряжения, и при $x = \frac{\lambda}{4}$

$U\left(\frac{\lambda}{4}\right) = I_2 Z_H$ – пучность напряжения. Узлы и пучности сдвинуты по сравнению с режимом ХХ на длину $x = \frac{\lambda}{4}$.

3. В режиме реактивной нагрузки $Z_H = \pm jX_H$ ток нагрузки I_2 равен:

$$I_2 = \frac{U_2}{\pm jX_H},$$

тогда
$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos \beta x \pm \underline{U}_2 \frac{Z_B}{X_H} \sin \beta x \quad (2.15)$$

Обозначим $\frac{Z_B}{Z_H} = \frac{Z_B}{X_H} = K$, тогда распределение модулей $U(x)$ будет представлено следующим соотношением:

$$U(x) = U_2 (\cos \beta x \pm K \sin \beta x), \quad (2.16)$$

где знак “+” соответствует индуктивной нагрузке, знак “-” – емкостной. В отличие от режима ХХ и КЗ в конце линии ($x = 0$) отсутствует пучность или узел напряжения. Найдем значение x_1 , соответствующее узлу напряжения:

$$U_2 (\cos \beta x_1 \pm K \sin \beta x_1) = 0,$$

отсюда

$$x_1 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}(\pm K). \quad (2.17)$$

Узел напряжения при емкостной нагрузке сдвинут влево от конца линии и при индуктивной – вправо на расстояние $x_1 < \frac{\lambda}{4}$.

Во всех случаях (режим ХХ, КЗ и реактивной нагрузки) в линии образуется режим стоячих волн: имеет место узел напряжения, и местоположение этого узла строго определено. Такой режим носит название режим “стоячих” волн.

4. В режиме активной нагрузки $Z_H = R_H$ коэффициент $K = \frac{Z_B}{R_H}$ распределение действующих значений напряжений вдоль линии соответствует формуле:

$$U(x) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta x + K^2 \sin^2 \beta x}. \quad (2.18)$$

Из соотношения (2.18) следует, что действующее значение напряжения изменяется не по синусоидальному закону, и в линии отсутствует узел напряжения. Однако расположение максимальных U_{\max} и минимальных U_{\min} значений строго определено. На рис. 20.3 показаны распределения $U(x)$ для трех случаев:

- а) $K = 1, R_H = Z_B, U(x) = U_2$ – режим согласованной нагрузки. В линии существует только *бегущая* волна;
- б) $K > 1, Z_B > R_H$;
- в) $K < 1, Z_B < R_H$;

В двух последних случаях $K \neq 1$, и в линии имеет место режим смешанных волн: наложение *бегущей* и *стоячей* волны.

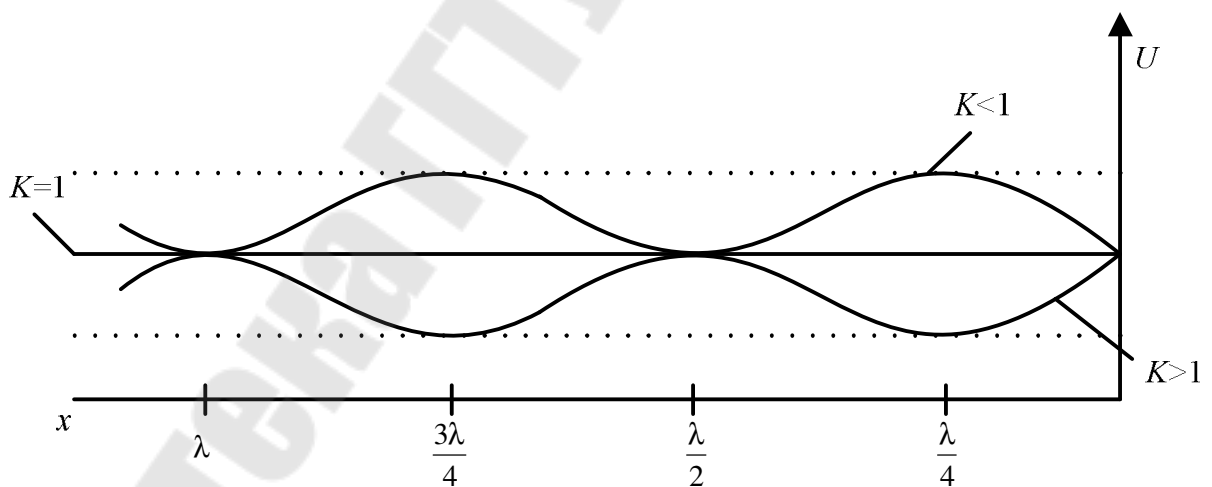


Рис 2.6

Можно показать [3], что в точках максимума прямая и обратная волны совпадают по фазе, в точках минимума – находится в противофазе

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} \\ U_{\min} &= U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Степень несогласованности линии с нагрузкой характеризуется коэффициентом стоячей волны (К.С.В.)

$$K = \frac{U_{\text{мак}}}{U_{\text{мин}}} = \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}} = \frac{1 + \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}}{1 - \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}} = \frac{1 + n_u}{1 - n_u} \quad (2.20)$$

где:

$$n_u = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}} = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}$$

– коэффициент отражения линии по напряжению на нагрузке.

Величина, обратная К.С.В., называется коэффициентом бегущей волны $K_{\text{б}}$ (К.Б.В.):

$$K_{\text{б}} = \frac{1}{K_{\text{с}}}$$

2.2.1. Колебания с частотой $f = 25$ МГц распространяются с фазовой скоростью $V_{\text{ф}} = 2 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$. Определить постоянную распространения $\underline{\gamma}$, коэффициент фазы β и длину волны λ .

Решение

$$V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad \omega = 6,28 \cdot 25 \cdot 10^6 = 1,57 \cdot 10^8 (\text{с}^{-1})$$

$$\beta = \frac{\omega}{V_{\text{ф}}} = \frac{1,57 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 0,785 \left(\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right);$$

$$\lambda = \frac{6,28}{0,785} = 8(\text{м});$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j0,785 (\text{м}^{-1})$$

2.2.2. Для определения первичных параметров воздушной линии без потерь длиной $l = 3(\text{м})$ было измерено входное сопротивление $Z_k = 290(\text{Ом})$ на частоте $f = 10^8(\text{Гц})$.

Решение

Уравнения длинной линии без потерь:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta x, \\ \underline{I}(x) &= j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x, \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии без потерь в некотором сечении можно рассчитать по закону Ома:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(x) = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta x}{j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x} = Z_B \frac{\underline{Z}_H + j Z_B \operatorname{tg} \beta x}{j \underline{Z}_H \operatorname{tg} \beta x + Z_B},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \\ V_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \end{array} \right\}$$

В режиме короткого замыкания линии напряжение $\underline{U}_2=0$, и входное сопротивление линии равно:

$$\underline{Z}_k = j Z_B \operatorname{tg} \beta x.$$

Для воздушной линии фазовую скорость можно принять равной:

$$V_\phi = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{V_\phi} = \frac{2\pi f}{V_\phi} = \frac{6,29 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0,209 \left(\frac{\text{р}}{\text{м}} \right) \\ Z_B &= \frac{Z_k}{\operatorname{tg} \beta l} = \frac{290}{\operatorname{tg} 0,209 \cdot 3} = 400(\text{Ом}) \end{aligned}$$

Отсюда первичные параметры линии:

$$L_0 = \frac{Z_B}{V_\phi} = \frac{400}{3 \cdot 10^8} = 133,4 \cdot 10^{-8} = 1,33 \cdot 10^{-8} = 1,33 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right)$$

$$C_0 = \frac{1}{Z_B V_\phi} = \frac{1}{400 \cdot 3 \cdot 10^8} = \frac{1}{12 \cdot 10^{10}} = 0,083 \cdot 10^{10} = 8,3 \cdot 10^{12} \left(\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right)$$

2.2.3. Определить Z_B и βl линии без потерь, если известно: $Z_k = j90(\text{Ом})$, $Z_x = -j40(\text{Ом})$.

Решение

Сопrotивление линии без потерь в режиме короткого замыкания линии ($U_2 = 0$):

$$Z_k = jZ_B \cdot \text{tg}\beta l.$$

Волновое сопротивление линии можно определить через входные сопротивления в режиме холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_B = \sqrt{Z_k \cdot Z_x} = \sqrt{j90 \cdot (-j40)} = 60(\text{Ом}).$$

Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания:

$$Z_x = \frac{Z_B}{\text{tg}\beta l},$$

Отсюда:

$$\text{tg}\beta l = \sqrt{\frac{Z_k}{Z_x}} = \sqrt{\frac{90}{40}} = 1,5; \quad \beta l = 0,983(\text{рад}) = 56,31^\circ$$

2.2.4.

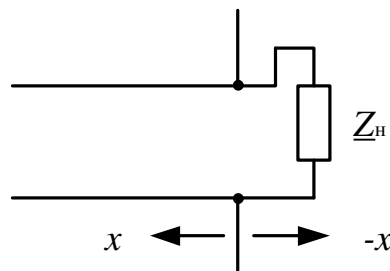


Рис.2.7

Измерен ток $I_2 = 0,1(\text{А})$ в конце воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = 600(\text{Ом})$, нагруженной на сопротивление $Z_H = 1200(\text{Ом})$ (рис.2.7)

1). Определить, на каком расстоянии от конца линии: а) напряжение максимальное; б) минимальное, и значение этих напряжений.

2). Построить график распределения действующих значений напряжений вдоль линии $U(x)$.

Решение

$$\underline{U}_2(x) = \underline{U}_2 \cos \beta x + j I_2 Z_B \sin \beta x = \underline{U}_2 (\cos \beta x + j k \sin \beta x), \quad k = \frac{Z_B}{R_H}.$$

На нагрузке: $x = 0$, $\cos \beta x = 1$, $\sin \beta x = 0$, $U(0) = U_2$.

На расстоянии от конца линии $x = \frac{\lambda}{4}$:

$$\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \beta x = 0, \quad \sin \beta x = 1$$

$$k = \frac{Z_B}{R_H} = \frac{600}{1200} = 0,5; \quad U_2 = I_2 \cdot R_H = 120(\text{В}).$$

$$U(x) = U_{\min} = U_2 \cdot k = 120 \cdot 0,5 = 60(\text{В});$$

На расстоянии от конца линии $x = \frac{\lambda}{2}$:

$$\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi, \quad \sin \beta x = 0, \quad \cos \beta x = 1,$$

$$U(x) = U_{\max} = 120(\text{В});$$

Распределение напряжений вдоль линии показано на рис.2.8.

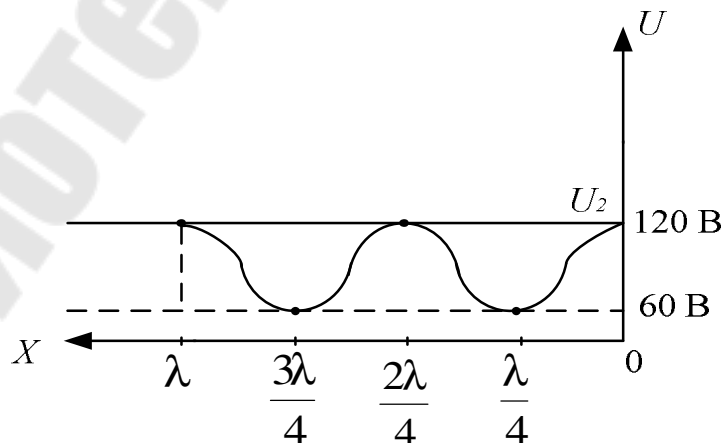


Рис.2.8

2.2.6. Длина линии задача 2.2.5. $l = \frac{7}{8} \cdot \pi$. Определить ЭДС генератора с внутренним сопротивлением $Z_r = 20 + j40$ (Ом) (рис.2.9).

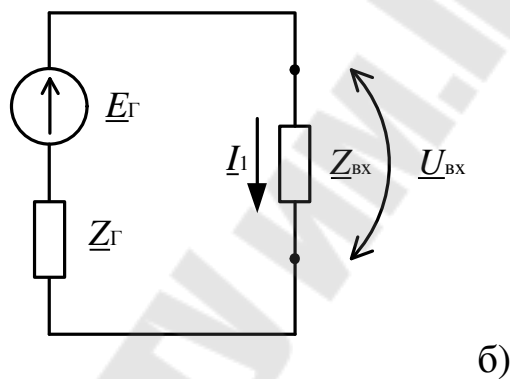
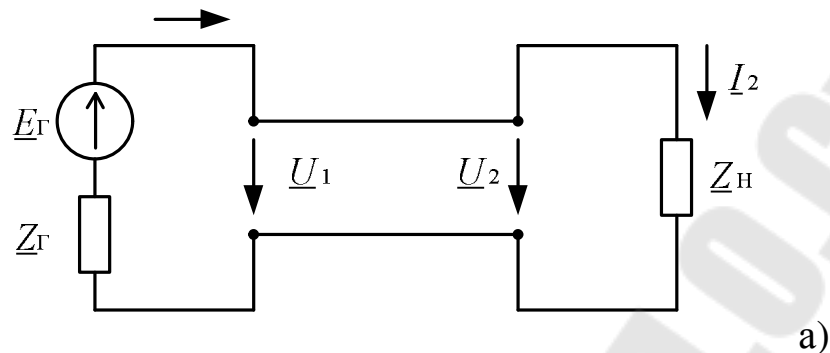


Рис.2.9а,б.

Решение

Рассчитаем напряжение в начале линии:

Примем $\underline{U}_2 = U_2$, тогда:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 (\cos \beta l + jk \sin \beta l);$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\pi} \cdot \frac{7}{8} \pi = 5,495 \text{ (рад)} = 314,86^\circ;$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 120 (\cos 314,86^\circ + j0,5 \cdot \sin 314,86^\circ) = 120(0,705 - j0,354) = \\ &= 120 \cdot 0,789 \cdot 1^{-j26,7^\circ} = 94,861^{-j26,7^\circ} \end{aligned}$$

Входное сопротивление линии:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{BX}} &= \underline{Z}_{\text{B}} \frac{\underline{Z}_{\text{H}} + \underline{Z}_{\text{B}} \operatorname{tg} \beta l}{\underline{Z}_{\text{H}} \cdot \operatorname{tg} \beta l + \underline{Z}_{\text{B}}} = 600 \frac{1200 + j600 \cdot \operatorname{tg} 314,86^\circ}{j1200 \cdot \operatorname{tg} 314,86^\circ + 600} = \\ &= 600 \frac{1200 + j600 \cdot (-1)}{j1200 \cdot (-1) + 600} = 600 \frac{2 - j1}{1 - j2} = 600(0,8 + j0,6) = \\ &= 600e^{j36,9^\circ} \text{ (Ом)} = 480 + j360 \text{ (Ом)} \end{aligned}$$

Ток начала линии рассчитаем по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{BX}}} = \frac{94,86e^{-j26,7^\circ}}{600e^{j36,9^\circ}} = 0,158e^{-j63,57^\circ};$$

Генератор нагружен на сопротивление (рис.2.8):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_9 &= \underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_{\text{BX}} = 480 + j360 + 20 + j40 = 500 + j400 = \\ &= 6,40e^{j38,66^\circ} \text{ (Ом)}. \end{aligned}$$

$$\underline{E}_\Gamma = \underline{I}_1(\underline{Z}_9) = 101e^{-j24,9^\circ} \text{ (В)}$$

$$e_\Gamma = 142 \sin(\omega t - 24,9^\circ) \text{ (В)}$$

Согласование линии с нагрузкой

2.2.6. Идеальная линия с волновым сопротивлением $\underline{Z}_{\text{B}} = 400 \text{ (Ом)}$ и длиной волны $\lambda = 2 \text{ м}$ согласована с нагрузочным сопротивлением. $\underline{Z}_{\text{H}} = (100 + j200) \text{ (Ом)}$. Определить параметры согласующего устройства l_0 и $l_{\text{ш}}$.

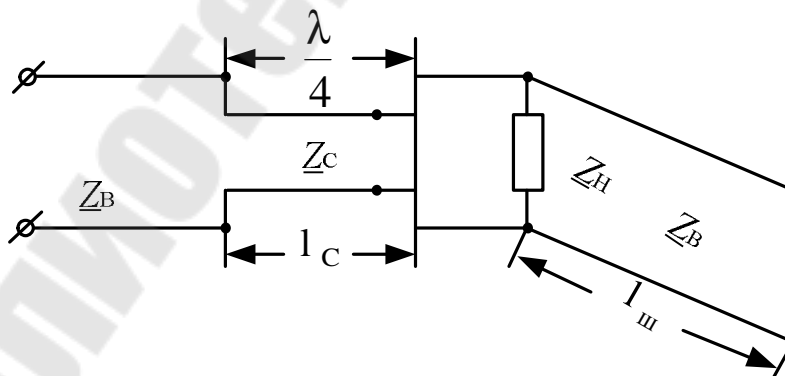


Рис.2.21

Так как нагрузка активно – емкостная, линию $l_{ш}$ выбираем в режиме холостого хода, поскольку в этом режиме при длине линии меньше $\frac{\lambda}{4}$ входное сопротивление $Z_{вх}(x)$ имеет индуктивный характер .

Решение

1. Определим входное сопротивление шунта $Z_{вхш} = jZ_B \cdot tg\beta l_{ш}$ по условию компенсации $X_{сн} = 200(\text{Ом})$. Сопротивление шунта индуктивное $X_{вхш} = X_L$. Схема замещения нагрузки линии при подключении шлейфа показана на рис. 2.22.

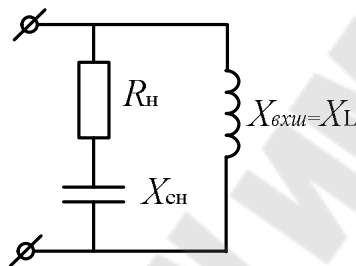


Рис. 2.22

Для компенсации емкостного сопротивления нагрузки должно выполняться условие резонанса токов:

$$\frac{1}{X_L} = \frac{X_{сн}}{X_{сн}^2 + R_{н}^2},$$

Отсюда:

$$X_{сн}^2 + R_{н}^2 - X_L X_{сн} = 0$$

$$X_L = \frac{X_{сн}^2 + R_{н}^2}{X_{сн}} = \frac{100^2 + 200^2}{200} = 250(\text{Ом});$$

$$tg\beta l_{ш} = \frac{250}{400} = 0,625 \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\beta l_{ш} = 1,012 \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6,28}{2} = 3,14 \left(\frac{\text{p}}{\text{м}} \right)$$

$$l_{ш} = \frac{1,012}{3,14} = 0,3(\text{м}).$$

Активная проводимость:

$$g_H = \frac{R_H}{X_{сн}^2 + R_H^2} = \frac{100}{100^2 + 200^2} = 0,002(\text{см})$$

После компенсации: $R_H' = \frac{1}{g_H} = 500(\text{Ом})$.

Определим волновое сопротивление четвертьволнового трансформатора:

$$Z_c = \sqrt{Z_B \cdot R_H} = \sqrt{400 \cdot 500} = 447,2(\text{Ом})$$

Длина отрезка кабеля $l_c = \frac{\lambda}{4} = 0,5(\text{м})$.

2.2.7. Резонансный контур электронного усилителя метровых волн состоит из ёмкости $C = 10\text{н}(\Phi)$ и переменной индуктивности, выполненной на отрезке длиной, равной линии в режиме короткого замыкания.

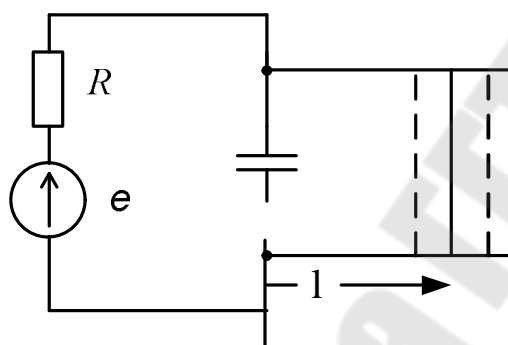


Рис.2.23

Дано:

$$E=3\text{кВ}, \quad R_0=3\text{кВ} \quad L_0=0,67\text{мГн}$$

$$f=200\text{МГц}, \quad C_0=16,6\text{нФ/м}$$

Определить дину линии l

Решение

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{0,67 \cdot 10^{-6}}{16,6 \cdot 10^{-12}}} = 200(\text{Ом})$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0} = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \sqrt{0,67 \cdot 10^{-6} \cdot 16,6 \cdot 10^{-12}} = 4,2 \left(\frac{\text{Р}}{\text{М}} \right)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{4,2} = 1,5(\text{м})$$

Условие параллельного резонанса:

$$X_C = X_L = Z_B \operatorname{tg} \beta l$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-12}} = 80(\text{Ом})$$

$$80 = 200 \operatorname{tg} \beta l$$

$$\beta l = \operatorname{arctg} \frac{80}{200} = 0,38$$

$$l = \frac{0,38}{4,2} = 0,09(\text{м})$$

2.2.8. Линия без потерь (рис.2.24) длиной $l = \frac{\lambda}{8}$, с волновым сопротивлением $Z_C = 10, \text{Ом}$ нагружена на сопротивление $Z_H = -j10, \text{Ом}$, на входе линии включён источник ЭДС $E = 100, \text{В}$ с внутренним сопротивлением $Z_{BH} = 10, \text{Ом}$.

Найти: U_1, I_1, U_2 .

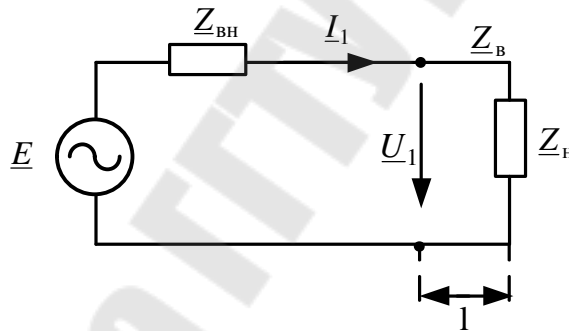
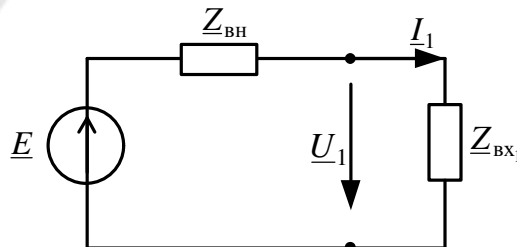


Рис.2.25

Решение

Схема замещения со стороны источника питания, где Z_{BX1} - входное сопротивление линии (рис.2.26).



Уравнение линии без потерь:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta x \\ \underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x \end{cases}$$

Входное сопротивление линии без потерь в начале линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l \\ \underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta l \end{cases}$$

$$\underline{Z}_{\text{BX1}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta l}{j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l} = \frac{\underline{Z}_H \cos \beta l + j Z_B \sin \beta l}{j \frac{\underline{Z}_H}{Z_B} \sin \beta l + \cos \beta l}$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\underline{Z}_{\text{BX1}} = \frac{j10 \cos \frac{\pi}{4} + j10 \sin \frac{\pi}{4}}{j \frac{-j10}{10} \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}} = j10, \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{E}{\underline{Z}_{\text{BH}} + \underline{Z}_{\text{BX1}}} = \frac{100}{10 + j10} = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}, \text{ А}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{\text{BX1}} = (5 - j5)j10 = 50 + j50 = 50\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \text{ В}$$

Напряжение на нагрузке \underline{U}_2 найдём из уравнения:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} \sin \beta l$$

2.2.8. Входное сопротивление воздушной линии без потерь в режиме холостого хода на частоте $f = 10^8$ Гц $\underline{Z}_{\text{BXX}} = -j400, \text{ Ом}$; ёмкость линии: $C_0 = 10^{-6}$ Ф/км. Определить минимальную длину линии l_{min} .

Решение

Уравнение линии без потерь:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 Z_B \sin \beta l \\ \underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l \end{cases}$$

В режиме холостого хода $\underline{I}_2 = 0$, тогда:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l \\ \underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta l \end{cases}$$

Входное сопротивление линии:

$$\underline{Z}_X = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cos \beta l}{j \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \sin \beta l} = -j Z_B \operatorname{ctg} \beta l$$

Отсюда:
$$l_{\min} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{Z_X}{Z_B}$$

$$Y_0 = j\omega C_0 = j2\pi f C_0 = j2 \cdot 3,14 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = j628, \text{ См/км}$$

Фазовая скорость: $V_\phi = 3 \cdot 10^5$, км/с

$$V_\phi = \frac{2\pi f}{\beta}; \quad \beta = \frac{2\pi f}{V_\phi} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 2090 \text{ рад/км}$$

$$Z_B = \frac{1}{V_\phi \cdot C_0} = 3,33 \text{ Ом.}$$

$$l_{\min} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{Z_X}{Z_B} \right) = \frac{1}{2090} \operatorname{arctg} \left(\frac{400}{3,33} \right) = 0,23 \text{ м.}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\cos \beta l + j \frac{1}{Z_H} \sin \beta l} = \frac{50\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{\cos \frac{\pi}{4} + j \frac{1}{-j10} \sin \frac{\pi}{4}} = 111e^{j45^\circ}, \text{ В}$$

Ответ:

$$u_1 = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В}, i_1 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ), \text{ А},$$

$$u_2 = 111\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В.}$$

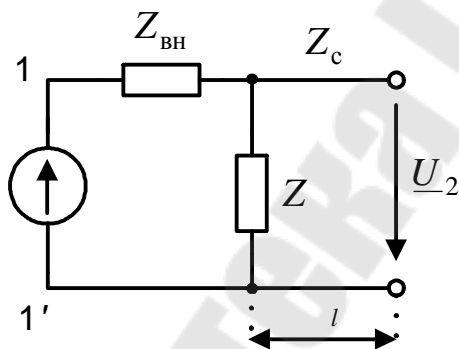
ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ

Билет 1

1. Линия без потерь, параметры которой $Z_B = 100 \text{ Ом}$, $\beta = 2 \text{ рад/м}$, $l = 3 \text{ м}$ включена на напряжение $u_1(t) = 100\sin(\omega t + 30^\circ)$, В. Линия работает в режиме согласованной нагрузки. Рассчитать мощность нагрузки и КПД линии.
2. Получить формулу входного сопротивления линии для случая линии с потерями и без потерь. Определить комплексное сопротивление отрезка линии без потерь с $Z_B = 500 \text{ Ом}$, нагруженного на сопротивление $Z_H = \frac{Z_B}{2}$. Длина линии: $l = \frac{\lambda}{2}$; $l = \frac{\lambda}{4}$.

Билет 2

1. Линия без потерь, имеющая параметры: $Z_B = 100 \text{ Ом}$, $\beta = 1,5 \text{ рад/м}$, нагружена на активное сопротивление $R_H = 200 \text{ Ом}$. Напряжение на входе линии $u_1 = 10\sin 10^6 t$, В. Рассчитать $i_2(t)$ на нагрузке.



2. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{4}{3}\lambda$ и $Z_c = 100 \text{ Ом}$, разомкнута на конце ($Z_H = \infty$). Чему равно входное сопротивление цепи относительно зажимов 1-1', если $Z_{вн} = 10 \text{ Ом}$, $Z = 50 \text{ Ом}$?

Билет 3

1. Линия без потерь имеет волновое сопротивление $Z_B = 500 \text{ Ом}$ и работает при частоте $f = 10^7 \text{ Гц}$. Определить амплитуду тока в режиме холостого хода линии в точке, отстоящей от конца линии на расстоянии $x = 5 \text{ м}$, если напряжение на конце линии $U_{2m} = 100 \text{ В}$.

2. Линия без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = 400$ Ом нагружена на емкостное сопротивление, равное волновому. Частота питающего воздушную линию генератора $f = 100$ МГц. Определить расстояние от конца линии до ближайшей пучности напряжения.

Билет 4

1. Коаксиальный кабель без потерь при частоте $f = 10^6$ Гц имеет следующие параметры: $Z_B = 400$, $\beta = 2$ рад/м, $l = 50$ см. Определить значение эквивалентной емкости, замещающей этот кабель, разомкнутой на конце.
2. Для линии длиной $l = 60$ км определены: $R_{\text{вх.кз}} = 2500$ Ом, $R_{\text{вх.хх}} = 19600$ Ом. Измерения выполнены на постоянном токе. Определить R_0 , G_0 , Z_B , γ .

Билет 5

1. На входе линии с параметрами $L_0 = 2$ мГн/км, $C_0 = 4 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $l = 100$ км действует напряжение $u_1(t) = 100 \sin(2\pi \cdot 300)t$, В $Z_H = \infty$. Определить вторичные параметры линии, а также $i_1(t)$ и $u_2(t)$.
2. Каким должно быть волновое сопротивление линии без потерь длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, чтобы согласовать линию также длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, волновое сопротивление которой $Z_{B1} = 450$ Ом, с нагрузкой $R_H = 200 + j300$, Ом.

Билет 6

1. Линия длиной $l = \frac{\lambda}{4}$ замкнута на чисто реактивную нагрузку. Определить напряжение \underline{U}_2 в конце линии, если ток в начале линии $\underline{I}_1 = -j10$ А. Параметры линии: $r_0 = 0$, $g_0 = 0$, $L_0 = 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 40 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Рассчитать длину волны λ .

2. Линия длиной $l = 70$ км, параметры которой $r_0 = 42,2$ Ом/км, $L_0 = 9,08 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9}$ Ф/км и $g_0 = 0,7 \cdot 10^{-6}$ см/км, работает на частоте $\omega = 5 \cdot 10^3$ 1/с. Определить $Z_{вх}$ в режиме ХХ и КЗ.

Билет 7

1. Для линии с волновым сопротивлением $Z_e = 300$ Ом найти сопротивление нагрузки, если коэффициент отражения по напряжению $\underline{n}_u = 0,3e^{j45^\circ}$. Напряжения $u_2 = 2\sin(\omega t + 30^\circ)$ В. $f = 800$ Гц. Определить $i_2(t)$.
2. Каким должно быть волновое сопротивление линии без потерь, длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, чтобы согласовать линию, волновое сопротивление которой $Z_c = 400$ Ом с нагрузкой $R_H = 100$ Ом?

Билет 8

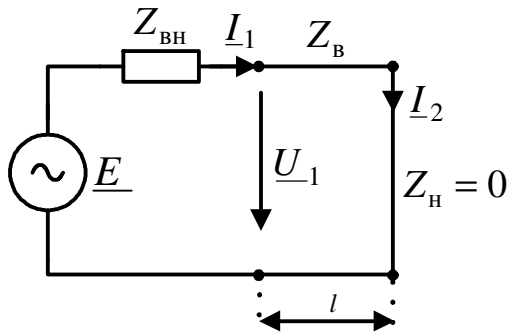
1. Линия, длина которой $l = 50$ км и волновое сопротивление $Z_B = 550$ Ом, согласованно нагружена. $P_2 = 2$ кВт, $\cos\varphi_2 = 1$, $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Нп/км. Определить P_1 , U_1 , I_1 . Построить распределение $U(x)$, $I(x)$.
2. Для линии без потерь длиной $l = 50$ определить частоту, при которой линия соответствует четверти длины волны. Параметры линии: $L_0 = 5$ мГн/км, $C_0 = 50 \cdot 10^{-12}$ Ф/км.

Билет 9

1. Линия из медных проводов разомкнута на конце $Z_B = 665e^{-j12^\circ}$ Ом, $\gamma = (3,3 + j18) \cdot 10^{-3}$ 1/км. Длина линии $l = 300$ км, $U_1 = 100$ В. Определить напряжение в конце линии и ток в начале. Определить коэффициент отражения по напряжению \underline{n}_u на нагрузке.

2. Определить, на каком минимальном расстоянии l должна быть замкнута линия без потерь с волновым сопротивлением Z_B и длиной волны λ , чтобы ее входное сопротивление стало равным jZ_B ?

Билет 10

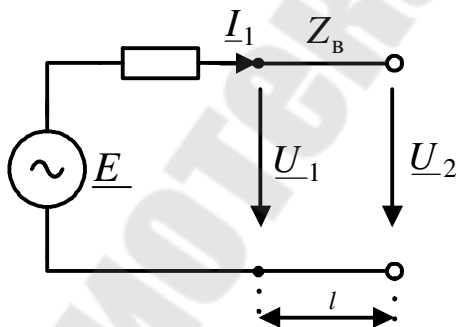


1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{5}{8}\lambda$ и $Z_B = 10$ Ом, замкнутая на коротко, подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E = 100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{вн} = 10$ Ом. Определить \underline{U}_1 и \underline{I}_1 .

Построить $U(x)$.

2. Первичные параметры телефонной линии $r_0 = 3$ Ом/км, $L_0 = 10$ мГн/км, $g_0 = 10^{-6}$ см/км, $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Какую дополнительную индуктивность $L_{0\text{доп}}$ нужно включить на каждом километре линии, чтобы она стала неискажающей? Рассчитать время задержки линии для $l = 100$ км.

Билет 11



1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{\lambda}{8}$ и $Z_B = 10$ Ом, к режиме ХХ подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E = 100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{вн} = 10$ Ом. Определить

$\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{U}_2$. Построить $U(x)$.

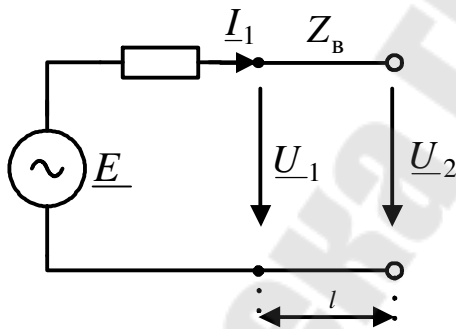
2. Для линии без потерь длиной $l = 100$ км определить частоты, при которых $l = \frac{\lambda}{4}$; $l = \frac{\lambda}{2}$. Параметры линии $L_0 = 25$ мГн/км, $C_0 = 0,1$ мкФ/км.

Билет 12

1. Линия длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, параметры которой $Z_B = 30$ Ом, $r_0 = g_0 = 0$, нагружена на сопротивление $Z_H = j40$ Ом. Определить напряжение \underline{U}_1 в начале линии, если $\underline{U}_2 = 400$ В. Построить распределение $U(x)$.

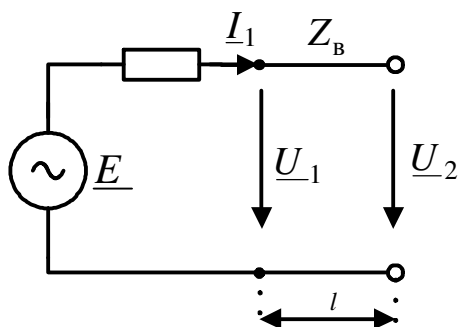
1. Линия без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = 400$ Ом, $V_\phi = 260 \cdot 10^3$ км/с нагружена на сопротивление $Z_H = j1,5Z_B$. Частота передаваемого сигнала $f = 2000$ Гц. Определить ближайшую пучность и узел напряжения.

Билет 13



1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{3}{8}\lambda$ и $Z_B = 10$ Ом, в режиме ХХ подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E = 100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{BH} = 10$ Ом. Рассчитать и построить зависимости $U(x)$ и $I(x)$.
2. Входное сопротивление линии без потерь длиной $l = 80$ км при $Z_B = 400$ Ом, $Z_{BK1} = -j134$ Ом. Рабочая длина волны $\lambda = 100$ км. Определить модуль и характер сопротивления нагрузки.

Билет 14



1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{3}{4}\lambda$ и $Z_B = 10$ Ом, разомкнута на конце и подключена к источнику синусоидальной ЭДС. Действующее значение ЭДС $E = 100$ В и $Z_{вн} = 10$ Ом. Рассчитать зависимости $U(x)$ и $I(x)$.

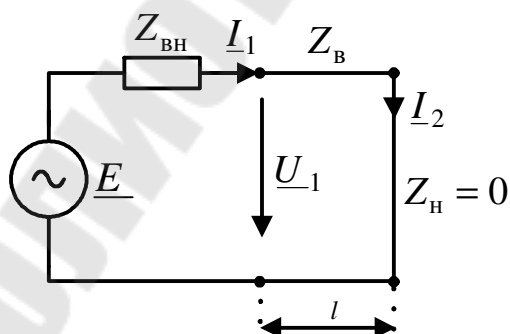
2. Входное сопротивление нагруженного отрезка линии без потерь длиной $l = \frac{3}{4}\lambda$ с волновым сопротивлением $Z_B = 500$ Ом, $Z_{вх1} = 200 + j200$ Ом. Определить активную и реактивную составляющие сопротивления нагрузки.

Билет 15

1. Линия длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, параметры которой $Z_B = 20$ Ом, $r_0 = g_0 = 0$, нагружена на сопротивление $Z_H = j30$ Ом. Определить напряжение U_1 в начале линии, если $U_2 = j300$ В. Построить зависимость $U(x)$. $V_\phi = 250000$ км/с, $f = 100$ с⁻¹.

2. Для согласования линии без потерь, обладающей волновым сопротивлением $Z_{B1} = 150$ Ом, с нагрузкой $R_H = 300$ Ом включен четверть-волновой трансформатор. Определить волновое сопротивление Z_{B2} трансформатора и напряжение на нагрузке, если $U_1 = 100$ В.

Билет 16



1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{\lambda}{8}$ и $Z_B = 10$ Ом, в режиме КЗ подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E = 100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{вн} = 10$ Ом. Определить U_1 , I_1 , I_2 . Построить $U(x)$.

2. По воздушной линии связи с параметрами $R_0 = 2,5$ Ом/км, $G_0 = 10^{-6}$ см/км, $L_0 = 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 8 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Определить дополнительную индуктивность $L_{\text{доп}}$ Гн/км, чтобы линия была неискажающей. Для этой линии определить максимальную дальность передачи, если допустимое затухание $\alpha l_{\text{max}} = 3,3$ Неп.

Билет 17

1. К линии длиной $l = 20$ км, параметры которой: $Z_B = 1350e^{-j24^\circ}$, $\alpha = 17,5 \cdot 10^{-3}$ Нп/км, $\beta = 0,039$ рад/км, приложено напряжение $u_1(t) = 10 \sin 2\pi \cdot 800t$, В. Определить действующие значения напряжения в конце линии и тока в начале и написать уравнение их мгновенных значений, если линия находится в режиме ХХ.
2. Входное сопротивление линии без потерь длиной $l = 60$ км при $Z_B = 500$ Ом, $Z_{\text{вх1}} = -j134$ Ом, длина волны $\lambda = 100$ км. Определить Z_H .

Билет 18

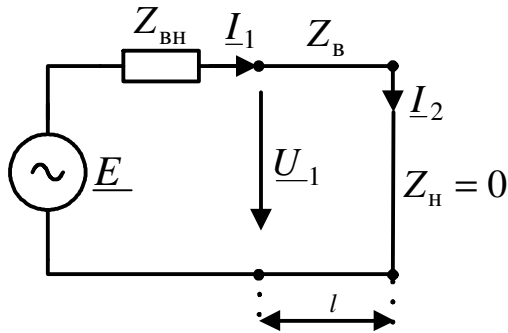
1. Напряжение в начале линии без потерь длиной $l = \frac{\lambda}{2}$, равно $U_1 = 100$ В. Чему равен ток в конце линии, если $Z_H = j10$ Ом? Рассчитайте ЭДС генератора с согласованном режиме.
2. Коэффициент бегущей волны в линии без потерь равен $K_6 = 0,6$. Волновое сопротивление линии $Z_B = 500$ Ом. Определить R_H .

Билет 19

1. К линии длиной $l = 20$ км, параметры которой $Z_B = 1350e^{-j24^\circ}$, $\alpha = 17,5 \cdot 10^{-3}$ Нп/км, $\beta = 0,039$ рад/км приложено напряжение $u_1 = 10 \sin \omega t$, В, $f = 800$ Гц. Определить I_1 , P_1 , U_2 , I_2 , P_2 и КПД линии. Линия согласована с нагрузкой.

2. Определить наименьшую длину короткозамкнутой на конце двухпроводной воздушной линии без потерь с $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, чтобы при частоте 10^6 Гц входное сопротивление её равнялось $j600$ Ом,

Билет 20



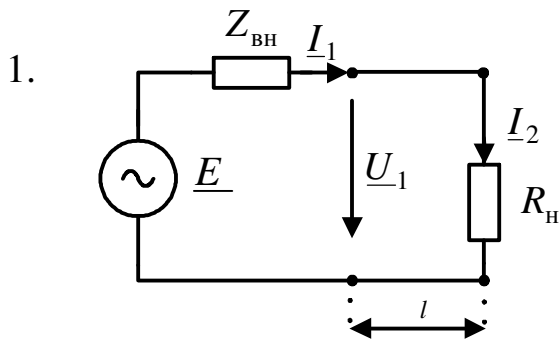
1. Линия без потерь, длина на которой $l = \frac{\lambda}{8}$ и $Z_{в} = 10$ Ом, в режиме $Z_{н} = j10$ Ом подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E = 100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{вх} = 10$ Ом. Определить \underline{U}_1 , \underline{I}_1 , \underline{U}_2 .

2. Определить наименьшую длину воздушной линии без потерь с $C_0 = 10^{-6}$ 1/Ом·км, находящейся в режиме ХХ, чтобы при частоте 10^8 Гц входное сопротивление линии было равно $Z_{вх.х} = -j400$ Ом,

Билет 21

1. К линии без потерь длиной 100 км приложено напряжение $U_1 = 10$ В при $\omega = 5 \cdot 10^{-3}$ рад/с, $L_0 = 0,24 \cdot 10^{-2}$ Гн/км, $V_{\phi} = 2,5 \cdot 10^5$ км/с. Определить напряжение \underline{U}_2 в конце линии и ток \underline{I}_2 в режиме $Z_{н} = -j100$ Ом.
2. Линия длиной $l = 5$ км на частоте $f = 1000$ Гц имеет в режиме ХХ $Z_{вх.х} = 500e^{-j60^\circ}$ Ом, в режиме КЗ $Z_{вх.к} = 450e^{-j10^\circ}$ Ом. Определить волновое сопротивление линии $Z_{в}$ и постоянную распространения $\underline{\gamma}$.

Билет 22



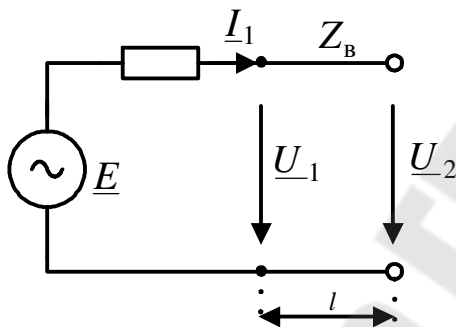
противление $Z_{\text{вн}}=10$ Ом.

Линия без потерь, длина которой $l = \frac{\lambda}{4}$ и в $Z_{\text{в}}=10$ Ом, с нагрузкой на конце $Z_{\text{н}}=R_{\text{н}}=10$ Ом подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E=100$ В и внутреннее со-

Определить I_1, U_1, I_2 .

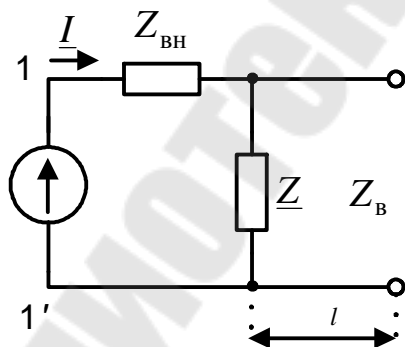
2. Волновое сопротивление линии на частоте $f=1000$ Гц, $Z_{\text{в}}=500e^{-j40^\circ}$ Ом, коэффициент распространения линии $\gamma = 0,2e^{j45^\circ}$ км⁻¹. Определить первичные параметры линии.

Билет 23



1. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{5}{8}\lambda$ и $Z_{\text{в}}=10$ Ом, в режиме $Z_{\text{н}}=-j20$

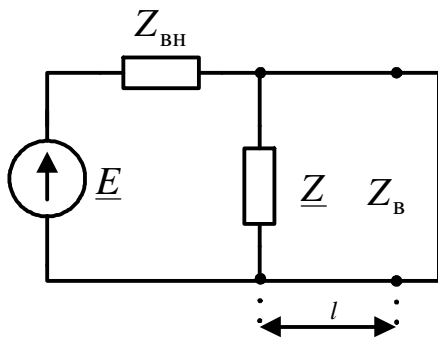
Ом подключена к источнику синусоидальной ЭДС, действующее значение которой $E=100$ В и внутреннее сопротивление $Z_{\text{вн}}=10$ Ом. Определить U_1, I_1, U_2 .



2. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{1}{3}\lambda$ и волновое сопротивление $Z_{\text{в}}=100$ Ом, $Z_{\text{вн}}=10$ Ом, $Z=30$ Ом находится в режиме ХХ. Рассчитать ток генератора I .

Билет 24

1. Линия длиной $l = \frac{\lambda}{4}$, параметры которой $Z_B = 20$ Ом, $R_0 = g_0 = 0$, нагружена на сопротивление $Z_H = j30$ Ом. Определить ЭДС генератора $e_1(t)$ с внутренним сопротивлением $R_T = 10$ Ом, $U_2 = j300$ В.



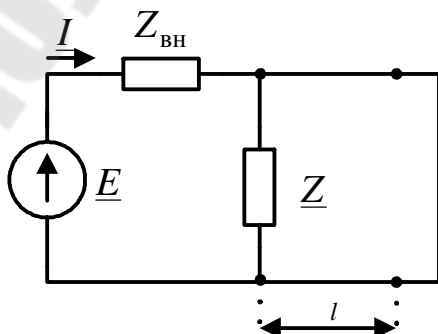
2. Линия без потерь длиной $l = \frac{3}{7}\lambda$, $Z_B = 120$ Ом замкнута накоротко. $Z_{BH} = 10$ Ом, $Z = 50$ Ом, $E = 120$ В. Рассчитать мощность источника ЭДС.

Билет 25

1. К линии без потерь длиной 60 км приложено напряжение $U_1 = 10$ В при $\omega = 5 \cdot 10^3$ 1/с, $L_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 0,67 \cdot 10^{-8}$ Ф/км. В режиме ХХ определить напряжение в конце U_2 и ток I_1 в начале линии. Построить $U(x)$.
2. Для неискажающей линии с параметрами $R_0 = 0,1$ Ом/км, $G_0 = 10^{-4}$ см/км, $C_0 = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф/км рассчитать Z_H в согласованном режиме.

Билет 26

1. На входе линии без потерь длиной $l = 110$ км с параметрами $L_0 = 2$ мГн/км, $C_0 = 7,2 \cdot 10^{-6}$ Ф/км действует напряжение $u_1(t) = 350 \sin(2\pi \cdot 4000t)$, В. Линия нагружена на волновое сопротивление. Определить V_ϕ и λ . Рассчитать $u_2(t)$ и $i_2(t)$.



2. Линия без потерь, длина которой $l = \frac{3}{4}\lambda$, волновое сопротивление $Z_B = 300$ Ом, находится в режиме короткого замыкания. Внутреннее сопротивление генератора $Z_{вн} = 15$ Ом, $Z = 100$ Ом, $E = 150$ В. Определить ток генератора I .

Билет 27

1. На входе линии без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = 500$ Ом, $V_{\phi} = 250 \cdot 10^3$ км/с, $l = 60$ км действует напряжение $u_1 = 350\sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 2000t)$, В. Линия нагружена на $Z_H = -j\sqrt{3}Z_B$. Определить U_2 и I_1 .
2. Рассчитать, на каком расстоянии от нагрузки расположена ближайшая пучность и ближайший узел напряжения в линии (смотри условие предыдущей задачи).

Билет 28

1. На входе линии без потерь с волновым сопротивлением $Z_B = 300$ Ом, $V_{\phi} = 250 \cdot 10^3$ км/с, $l = 100$ км действует напряжение $u_1 = 220\sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 1850t)$, В. Линия нагружена на $Z_H = -j\sqrt{3}Z_B$. Определить $u_2(t)$ и $i_1(t)$.
2. Рассчитать, на каком расстоянии от нагрузки расположена ближайшая пучность и ближайший узел тока в линии (смотри условие предыдущей задачи).

Билет 29

1. На входе однородной линии с параметрами $R_0 = 2$ Ом/км, $L_0 = 2$ мГн/км, $G_0 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ 1/Ом·км, $C_0 = 7 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Определить Z_B ,

$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$, V_ϕ , λ и коэффициент передачи $\underline{H}_u = \frac{U_2}{U_1}$ на частоте

$\omega = 10^4$ рад/с, если линия работает в режиме согласованной нагрузки.

- По условию предыдущей задачи рассчитать дополнительную индуктивность $L_{\text{доп}}$ на километр линии, чтобы она стала неискажающей. Какова наибольшая длина линии, если допустимое затухание $\alpha_{e_{\text{max}}} = 3,3$ Нп? Для найденной линии определить время задержки сигнала t_3 .

Билет 30

1. Кабельная линия на частоте $f = 3 \cdot 10^3$ Гц, $\underline{Z}_B = 500e^{-j45^\circ}$ Ом,

$\underline{\gamma} = (\sqrt{2} + j\sqrt{2}) \cdot 10^{-2}$ км⁻¹ находится в согласованном режиме.

Мощность источника $P_1 = 100$ Вт, мощность нагрузки $P_2 = 7$ Вт. Рассчитать длину линии l , токи на входе и выходе линии.

2. По условию предыдущей задачи рассчитать погонные параметры линии V_ϕ , λ .

ЛИТЕРАТУРА

- Батура М.П. Теория электрических цепей/ М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв.- 3-е изд., перераб. – Минск: Вышэйшая школа, 2015.

2. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. “Теоретические основы электротехники”, - М.: 1984, т.1, 2.
3. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники”, М: Высшая школа, 1996, 559с.
4. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др. “Основы теории цепей”, - М.: Энергия, 1975, 1990 г.
5. Атабеков Г.И. и др. “Теоретические основы электротехники”, М.: 1978, ч.1, 1979, ч.3.
6. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники под ред. П.Н.Ионкина. М.: Энергоатомиздат, 1982.
7. Сборник задач по ТОЭ под ред.Л.А.Бессонова. – М.: Высшая школа, 1988.
8. М.Р.Шебес. “Задачник по теории линейных электрических цепей”. М.: 1982, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1.1РАЗЛОЖЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ.....	3
---	---

1.2. РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭДС И ТОКАМИ.....	7
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА.....	7
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	9
1.3. ИЗМЕРЕНИЯ В ЦЕПЯХ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. МОЩНОСТЬ.	
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА.....	23
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	24
1.4 РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЦЕПЯХ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....	37
ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 1.....	44
ГЛАВА 2. ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	
2.1. Линия с потерями.....	47
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА.....	47
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	48
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ РАЗДЕЛА 2.1.....	64
2.2. Длинные линии без потерь	
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА.....	65
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	69
ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ.....	79
ЛИТЕРАТУРА.....	92

Бычкова Лилия Геннадьевна

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

**Практикум
по курсу «Теория электрических цепей»
для студентов специальностей
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
и 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 29.03.19.

Рег. № 39Е.

<http://www.gstu.by>