Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по одноименному курсу для студентов
специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника»
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
Б12

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 5 от 27.12.2010 г.*)

Рецензенты: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого
Л. Л. Великович

Бабич, А. А.

Б12 Специальные математические методы и функции : учеб.-метод. пособие по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 213 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Дано изложение ряда специальных разделов математики путем использования универсального математического языка, а именно теории множеств, абстрактных пространств и отображений. Приведен обширный материал для практического закрепления знаний по курсу «Специальные математические методы и функции».

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной форм обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Бурное развитие электроники в последнее время требует, безусловно, и изменения подходов к изучению математических дисциплин. Это нашло свое отражение в новом образовательном стандарте и учебном плане по специальности 1–36 04 02 «Промышленная электроника». В частности, ряд разделов математики, которые традиционно либо не включались в курс «Высшей математики» для технических ВУЗов, либо излагались несистематически, поверхностно, но которые важны и необходимы для изучения специальных дисциплин на старших курсах, выделены в отдельный курс «Специальные математические методы и функции». Проблемой при этом является отсутствие учебников и учебных пособий, в которых разделы математики, составляющие предмет данного курса, излагались бы вместе. Причем речь не идет о простом механическом включении их «под одной обложкой». Перед разработчиками курса ставилась задача изложить эти разделы цельно, связанно и вместе с тем доступно. Для достижения этой цели авторы использовали несколько методических приемов и подходов.

Во-первых, единообразие изложения достигается путем систематического использования универсального математического языка, а именно, теории множеств, абстрактных пространств и отображений.

Во-вторых, текст пособия структурирован по главам и параграфам, при этом все теоремы и формулы снабжены удобной для поиска тройной нумерацией (первые две цифры – это номер главы и номер параграфа). Важные пояснения выделены в форме замечаний.

В-третьих, большинство теорем снабжены доказательствами, конец доказательств обозначен символом ■.

В-четвертых, в пособии для лучшего усвоения материала имеется большое количество различных упражнений, примеров, задач, графических иллюстраций и рисунков. Некоторые важные задачи снабжены решениями и комментариями, конец которых обозначен символом ▲.

Книга предназначена для студентов, овладевших основами линейной алгебры и математического анализа в рамках курса «Высшая математика».

Глава 1 «Элементы теории множеств» посвящена изложению основных понятий теории множеств. При этом в отличие, например, от курса дискретной математики, упор делается на изучение свойств бесконечных множеств и их отображений. Именно существенное различие свойств конечных и бесконечных множеств, а в конечном итоге конечномерных и бесконечномерных пространств, создает трудности в изучении функционального анализа и делает оправданным выделение данной дисциплины в отдельный курс.

Глава 2 «Метрические пространства» содержит сведения о понятиях «расстояние», «близость», «окрестность» в абстрактных пространствах, в частности, в пространствах функций. Это позволяет легко перенести уже знакомые студентам из математического анализа понятия «предел», «сходимость», «непрерывность» на абстрактные пространства, а также усвоить новые понятия, такие как «полнота», «замыкание», «компактность». В качестве одного из приложений в главе изложен принцип сжимающих отображений, являющийся одним из важнейших методов решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений.

В Главе 3 «Линейные пространства» вводится понятие абстрактного линейного (векторного пространства). В изложении материала постоянно используются ссылки на результаты и понятия (линейная независимость, размерность, базис), которые известны студентам из курса линейной алгебры. В этой же главе вводится важнейшее понятие нормы, приведены примеры нормированных пространств, отмечены их особенности. Введение банаховых пространств отмечает принципиальную разницу между конечномерными и бесконечномерными линейными пространствами.

Глава 4 «Гильбертовы пространства» посвящена изучению линейных пространств, в которых введена операция скалярного умножения. Введение скалярного произведения позволяет в свою очередь ввести понятие ортонормированной системы, ортонормированного базиса, разложение по базису. Здесь же рассмотрена процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Обобщение линейных пространств со скалярным произведением на бесконечномерный случай приводит к введению гильбертовых пространств. В данной главе на примере функциональных гильбертовых пространств подробно рассмотрены особенности разложения функций по системам специальных ортогональных многочленов (обобщенное разложение Фурье). В частности, рассмотрены системы многочленов Лагранжа, Чебышева, Эрмита, Лагерра. Дополнительно рассмотрены системы функций Радамахера и Уолша, которые используются при анализе цифровых сигналов.

В Главе 5 «Основы теории линейных операторов» вводится важнейший для приложений класс специальных отображений, а именно, класс линейных операторов. Глава содержит сведения об основных свойствах линейных операторов. Приведены многочисленные примеры операторов, в частности, операторы дифференцирования и интегрирования. Особое внимание уделено понятию обратного оператора и вообще обратимости, которые напрямую связаны с решением линейных уравнений произвольного типа (матричного, дифференциального, интегрального и др.), записанного в операторной форме. Рассмотрены вопросы, касающиеся анализа структуры спектра линейного оператора, определения собственных значений и векторов. Отмечены основные свойства самосопряженных и унитарных операторов, особенности их спектра.

Глава 6 посвящена приложениям теории операторов к решению дифференциальных уравнений. Подробно изучены линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В частности, сформулирована задача Штурма-Лиувилля, разобраны общие свойства дифференциального оператора Штурма-Лиувилля, в качестве примеров приведены решения уравнений Лежандра, Чебышева, Эрмита. Вторая группа приложений связана с решением линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В главе приведены основные уравнения математической физики, подробно рассмотрен метод Фурье их решения, в основе которого лежат результаты предыдущих глав. На примере решения задач колебаний струны и мембраны отмечены особенности использования метода Фурье на практике, например, необходимость введения специальных функций Бесселя.

В Главе 7 «Интегральные преобразования» содержится материал, посвященный вопросам представления функций в виде несобственных интегралов, в частности, интегралов Фурье. Подробно изучены свойства преобразований Фурье, а также (на примере уравнения теплопроводности) его приложения к решению дифференциальных уравнений.

Глава 8 «Дискретные преобразования и их приложения» имеет самостоятельное значение и в ней последовательно изложен материал, имеющий отношение к дискретному z-преобразованию, его свойствам и приложениям к решению разностных (рекуррентных) уравнений. Здесь стоит отметить важность этой главы, которая обусловлена, в частности, тем, что в настоящее время в электронике преобладающим направлением развития является использование дискретных (цифровых) сигналов и их преобразований.

Глава 9 «Элементы вариационного исчисления» посвящена вопросам, связанным с поиском экстремумов функционалов. Поиск экстремумов, оптимальных решений является важнейшей прикладной задачей математики. В вариационном исчислении рассматриваются методы поиска экстремумов, когда «целевая функция» представляет собой интегральный функционал, определенный на пространстве функций. В начале главы приведены основные примеры задач вариационного исчисления. Далее вводится понятие вариации функционала, понятие дифференцируемости функционала по Фреше и по Гато, на конкретных примерах показаны их отличия. После постановки задачи на экстремум выводится уравнение Эйлера-Лагранжа, подробно рассмотрены простейшие случаи его интегрируемости. В конце главы рассмотрены простейшие обобщения вариационной задачи, в том числе задача с подвижными границами, задача на условный экстремум (задача Лагранжа), изопериметрическая задача.

Для проведения практических занятий в конце каждой главы имеется список контрольных вопросов и задач. Ответы к задачам приведены в конце пособия.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Понятие множества

Понятие *множества* принадлежит к числу первичных математических понятий. Оно не может быть определено, а может быть только пояснено на примерах.

Множество – набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, называемых его элементами, обладающих общим для всех них характеристическим свойством.

Суть концепции множества – это способность элементов собираться в группы.

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое» (Г.Кантор (1845 – 1918)).

Обозначения: множества будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, …, M, …, а их элементы – малыми a, b, … . Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается как $a \in A$; запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

<u>Опр. 1.1.</u> Множество A называется *подмножеством* множества B, если все элементы из A входят и в B.

Обозначение: $\boxed{A \subseteq B \equiv \{\text{A есть подмножество B}\}.}$

Иногда неизвестно, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого множества* $\varnothing$, т.е. множества, не содержащего ни одного элемента.

<u>Опр. 1.2.</u> Пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества M, в том числе и пустого.

<u>Опр. 1.3.</u> Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$ называются *собственными подмножествами.*

Обозначение: $\boxed{A \subset B \equiv \{\text{A есть собственное подмножество B}\}.}$

Принцип равенства множеств:

Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они содержат одни и те же элементы.

ТЕОРЕМА 1.1. Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда:

$$A \subseteq B \quad \text{и} \quad B \subseteq A.$$

Доказательство.

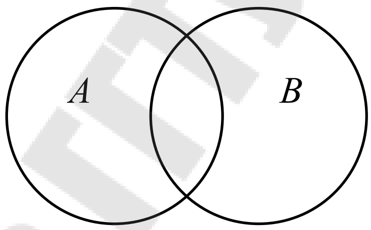
Пусть $A \neq B$. Тогда либо в B должен существовать элемент x, которого нет в A, но тогда нарушается включение $B \subseteq A$, либо в A должен существовать элемент y, которого нет в B, но тогда нарушается включение $A \subseteq B$. Таким образом, наше предположение неверно. ■

Множество всех множеств есть неопределенное понятие, а множество всех подмножеств данного множества A вполне определено. Оно называется *булеаном* A и обозначается как $P(A)$.

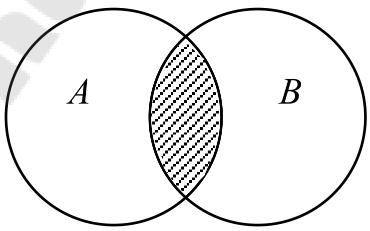
§ 2. Операции над множествами

Над множествами определены следующие операции:

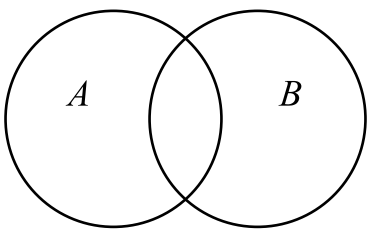
1. Объединение (сумма): $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ или } \ x \in B\}$.



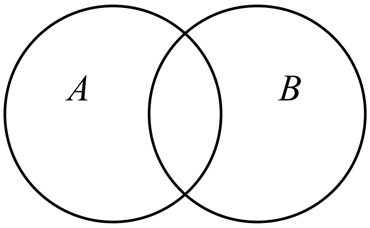
2. Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}$.



3. Разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } \ x \notin B\}$.



4. Симметрическая разность: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



Операции сложения и пересечения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и взаимной дистрибутивности:

$$A \cup B = B \cup A; \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$A \cap B = B \cap A; \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества U. Например, различные множества точек на прямой, плоскости и т.п. Такое множество называется *универсальным множеством* (*универсумом*). В этом случае разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества *A* и обозначается как $CA \equiv A' \equiv \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Принцип двойственности:

1. Дополнение объединения равно пересечению дополнений

$$U \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (U \setminus A_{\alpha}) \qquad (1.2.1)$$

2. Дополнение пересечения равно объединению дополнений

$$U \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (U \setminus A_{\alpha}) \qquad (1.2.2)$$

<u>*Замечание*</u>: Принцип двойственности в простейшем варианте называют правилами де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

§ 3. Отображения

<u>Опр. 3.1.</u> Пусть X и Y – два непустых множества. Тогда всякое правило, позволяющее сопоставить *каждому* элементу из X *един-*

ственный элемент из Y называется ***отображением***, действующим из X в Y:

$$f : X \to Y.$$

По-существу, понятие «отображение» является обобщением понятия «числовая функция». При специализации природы множеств X и Y отображения имеют особые названия:

«*вектор-функция*», «*мера*», «*функционал*», «*оператор*».

Если x – элемент из X, то соответствующий ему элемент $y = f(x) \in Y$ называется его *образом*. Совокупность всех тех элементов $x \in X$, образом которых является элемент $y \in Y$, называется *прообразом* (*полным прообразом*) элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Понятия образа и прообраза обобщаются и на подмножества множеств X и Y:

$$f(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Опр. 3.2. Отображение вида $f(X) = Y$, т.е. когда множество X отображается на все множество Y, называется *сюръекцией*.

Опр. 3.3. Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ так же различны, то отображение называется *инъекцией*.

ТЕОРЕМА 3.1. Имеют место следующие соотношения:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

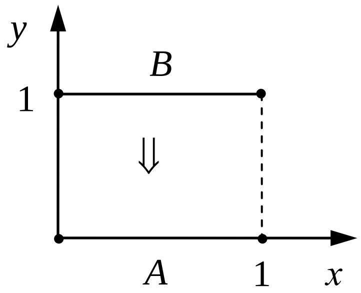
Последнее соотношение в общем случае равенством не является.

Пример 1.1.

Пусть отображение f представляет собой проектирование плоскости на ось OX, т.е. $f : (x, y) \to (x,0)$.

Рассмотрим два множества $A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$ и $B = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ y = 1\}$, которые представляют собой два непересекающихся отрезка, т.е. $A \cap B = \varnothing$. Но тогда $f(A \cap B) =$

$= f(\varnothing) = \varnothing$, в то время как $f(A) \cap f(B) = A$, следовательно, $\underbrace{f(A \cap B)}_{\varnothing} \subseteq \underbrace{f(A) \cap f(B)}_{A}$:



Обратное, очевидно, неверно.

<u>Опр. 3.4.</u> Отображение $f: X \to Y$, которое является одновременно и сюръекцией и инъекцией называется *биекцией* или взаимно-однозначным соответствием между X и Y.

<u>Опр. 3.5.</u> Множества X и Y, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие, называются *эквивалентными*: $X \sim Y$.

§ 4. Понятие мощности множеств

<u>Опр. 4.1.</u> *Мощностью* конечного множества *M* называется число его элементов $n(M)$.

Сравнивать мощности конечных множеств можно просто подсчитав количество содержащихся в них элементов. Очевидно к тому же, что мощность любого подмножества конечного множества не может превышать мощности самого множества, т.е.

$$\text{если } B \subseteq A, \quad \text{то } n(B) \le n(A).$$

<u>Замечание</u>: Если $B \subset A$, то $n(B) < n(A)$! (для конечных множеств).

Однако подсчет количества элементов невозможен для бесконечных множеств. Для введения понятия мощности для бесконечных множеств необходимо использовать другой принцип сравнения, а именно *установление биекции*.

Например, для того чтобы проверить одинаково ли число студентов и имеющихся стульев в аудитории можно просто рассадить студентов. Если не хватит всем места и не останется лишних стульев, то количество элементов в множествах студентов и стульев одинаково.

Множество называется бесконечным, если его нельзя исчерпать путем удаления или вычеркивания любой его конечной совокупности.

<u>Опр. 4.2.</u> Множества A и B имеют одинаковую мощность, если между ними можно установить биекцию, т.е. взаимно-однозначное соответствие.

<u>Опр. 4.3.</u> Множество A называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, т.е если существует биекция $f: A \to \mathbb{N}$.

Обозначение: $\boxed{\aleph_0 \text{ – «алеф нуль».}}$

Примеры счетных множеств:

– множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$;

– множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Свойства счетных множеств:

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.
2. Объединение любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.
3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

ТЕОРЕМА 4.1. Множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0,1]$ несчетно.

Доказательство.

Предположим, что дано некоторое счетное множество действительных чисел $\alpha \in [0,1]$. Запишем их в виде десятичных дробей.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots \\ \alpha_2 = 0,a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0,a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots \end{array}\right\}$$

Далее построим дробь $\beta = 0,b_1b_2\ldots b_n\ldots$, где b_1 – произвольная цифра $\neq a_{11}$, b_2 – произвольная цифра $\neq a_{22}$ и т.д. Эта дробь не совпадает ни с одной дробью α_k. Таким образом, никакое счетное множество не исчерпывает действительных чисел, лежащих на отрезке $[0,1]$.

Способ построения дроби β называется *диагональной процедурой Кантора*. ■

Опр. 4.4. Множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел на отрезке $[0,1]$, называются множествами мощности *континуум*.

Обозначение: $\boxed{c \text{ или } \aleph \text{ (алеф)}}$.

Примеры множеств мощности континуум:

– множество всех точек прямой;
– множество иррациональных чисел $\mathbb{I}$;
– множество всех прямых на плоскости;
– множество всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций.

Для доказательства эквивалентности множеств важна следующая одна из основных теорем теории множеств.

ТЕОРЕМА 4.2. (теорема Кантора-Бернштейна)

Пусть A и B два произвольных множества. Тогда если существует взаимно-однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно-однозначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.

Существование множества промежуточной мощности между $\aleph_0$ и $\aleph$ можно принять или не принять аксиоматически [*континуум-гипотеза*].

Что касается существования множеств, мощности которых превышают $\aleph$, то отметим следующие результаты:

1. Мощность булеана некоторого множества M превышает мощность исходного множества.
2. Для конечного множества M:

$$n(P(M)) = 2^{n(M)}. \qquad (1.4.1)$$

3. Мощность булеана всякого счетного множества совпадает с мощностью континуум:

$$2^{\aleph_0} = \aleph. \qquad (1.4.2)$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1.

Вопросы.

1. Что называется подмножеством?
2. Является ли множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ подмножеством
   а) рациональных $\mathbb{Q}$;
   б) иррациональных $\mathbb{I}$;
   в) действительных $\mathbb{R}$ чисел?
3. Какие множества называются равными?
4. Дать определение теоретико-множественным операциям.
5. Сформулировать свойства теоретико-множественных операций.
6. Что называется отображением?
7. Какие типы отображений вы знаете?
8. Как вводится мощность конечного множества?
9. Какие множества называются равномощными?
10. Какое множество называется счетным?
11. Привести примеры несчетных множеств.
12. Сформулировать терему Кантора-Бернштейна.

Задачи.

1.1. Доказать равенства:

а) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$;

б) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

в) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)=(A\cap C)\setminus B$;

г) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

д) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

1.2. Вытекает ли из $A\setminus B=C$, что $A=B\cup C$?

1.3. Верны ли равенства:

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$;

б) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;

в) $(A\setminus B)\cup=(A\cup C)\setminus B$?

1.4. Доказать, что равенство $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\cup C$ верно, если $A\supset C$, и неверно, если $C\setminus A=\varnothing$.

1.5. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел и множеством $\boldsymbol{S}$ всех четных положительных чисел.

1.6. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел и множеством $\boldsymbol{T}$ всех четных чисел.

1.7. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством Q^+ всех неотрицательных рациональных чисел и множеством $\boldsymbol{N}$ всех натуральных чисел.
1.8. Найти взаимно однозначное отображение отрезка $[0,1]$ на отрезок $[a,b]$.
1.9. Найти взаимно однозначное отображение интервала $]0,1[$ на всю числовую прямую.
1.10. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0,1]$ на интервал $]0,1[$.
1.11. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0,1]$ на всю числовую прямую.
1.12. Установить взаимно однозначное соответствие между сферой с одной выколотой точкой и плоскостью.
1.13. Установить взаимно однозначное соответствие между открытым единичным кругом ($x^2 + y^2 < 1$) и множеством точек плоскости, являющихся дополнением к замкнутому единичному кругу ($x^2 + y^2 \le 1$).
1.14. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?
1.15. Какова мощность множества всех рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и знаменателе?
1.16. Какова мощность множества всех конечных десятичных дробей?
1.17. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости, радиусы которых рациональны и координаты центра которых – рациональные числа – счетно.
1.18. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества E на прямой больше единицы, то множество E конечно или счетно.
1.19. Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна эквивалентность замкнутого круга и открытого круга того же радиуса на плоскости.
1.20. Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна эквивалентность плоскости и замкнутого квадрата на плоскости.
1.21. Какова мощность множества всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел?
1.22. Какова мощность множества всех последовательностей действительных чисел?

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие метрики

Одной из важнейших операций анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние между точками. Многие фундаментальные факты анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел (т.е. с тем, что они образуют поле), а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию *метрического пространства*.

Опр. 2.1.1. Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

$[M_1]$ $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ [аксиома тождества];

$[M_2]$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ [аксиома симметрии];

$[M_3]$ $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in M$ [аксиома треугольника].

Неотрицательное число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y.

Часто расстояние $\rho(x, y)$ называют просто *метрикой*. Элементы метрического пространства принято называть *точками*. Таким образом, метрическое пространство представляет собой, по-существу, пару $R = (M, \rho)$.

Пример 2.1.

Положим для элементов произвольного множества M,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \ne y. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы метрики $[M_1]$ – $[M_3]$ выполняются. Соответствующее метрическое пространство называется *пространством изолированных точек*, так как речь идет о точках, а не об их окрестностях.

<u>*Пример 2.2.*</u>

Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x,y) = |x-y|. \tag{2.1.2}$$

образует метрическое пространство, которое будем обозначать как $\boldsymbol{R^1}$.

<u>*Пример 2.3.*</u>

Множество упорядоченных наборов n действительных чисел $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ с метрикой

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - x_k\right)^2}. \tag{2.1.3}$$

называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством* $\boldsymbol{R^n}$.

<u>*Пример 2.4.*</u>

Множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|. \tag{2.1.4}$$

образует метрическое пространство.

Доказательство:

1) Имеем
$0 \le |x(t)-y(t)| \le \max|x(t)-y(t)| = \rho(x,y) = 0 \Rightarrow x(t) = y(t)$.

2) $\rho(x,y) = \max|x(t)-y(t)| = \max|y(t)-x(t)| = \rho(y,x)$.

3) $|x-y| \le |x-z| + |z-y| \Rightarrow \max|x-y| \le \max\big[|x-y| + |z-y|\big] \le$
$\le \max|x-z| + \max|z-y|$, т.е. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$. ■

Для проверки аксиом метрики полезны следующие неравенства.

1. Неравенство треугольника для модуля:

$$\begin{aligned} &|x+y| \le |x| + |y|, \\ &|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

2. Неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 . \qquad (2.1.6)$$

3. Неравенство Гёльдера:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \text{ где } p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad (2.1.7)$$

4. Неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}, \text{ где } p > 1. \qquad (2.1.8)$$

5. Следствие неравенства Минковского при $p = 2$:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} . \qquad (2.1.9)$$

Замечание: 1) При выполнении условий сходимости и существования справедливы аналоги этих неравенств для рядов и интегралов. Например,

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx . \qquad (2.1.10)$$

Часто это неравенство называют *неравенством Шварца.*

2) Доказательство некоторых неравенств будет непосредственно следовать из свойств скалярного произведения, которое вводится в евклидовых пространствах.

§ 2. Непрерывные отображения в метрических пространствах

Понятие непрерывности является основным в математическом и функциональном анализе. С наивной точки зрения оно понятно. Однако формализация этого понятия требует использования специального подхода. В метрических пространствах непрерывность достаточно легко ввести с помощью метода окрестностей, или с помощью языка $\varepsilon - \delta$.

Опр.2.2.1. Пусть X и Y два метрических пространства и $f: X \to Y$ некоторое отображение. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$ таких, что $\rho_X(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.

Если отображение непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f непрерывно на X.

Конкретизируя метрики ρ_X и ρ_Y, мы получаем определение непрерывности для частных случаев отображений, например, для обычных числовых функций.

Пример 2.5.

Расстояние $\rho(x, y)$ как функция двух переменных $x, y \in M$ непрерывно.

Доказательство:

Имеем

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,v) + \rho(v,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x,y) - \rho(v,z) \le \rho(x,z) + \rho(y,v)$$

$$\rho(v,z) \le \rho(x,z) + \rho(x,v) \le \rho(x,z) + \rho(y,v) + \rho(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(v,z) - \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,v).$$

Таким образом, справедливо неравенство четырехугольника:

$$\left|\rho(x,y) - \rho(v,z)\right| \le \rho(x,z) + \rho(y,v).$$

Далее, полагая $\rho(x, x_0) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\rho(y, y_0) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$\left|\rho(x,y) - \rho(x_0,y_0)\right| \le \rho(x,x_0) + \rho(y,y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Если отображение $f: X \to Y$ взаимно-однозначно, то оно и обратимо, т.е. существует $f^{-1}: Y \to X$.

Опр. 2.2.2. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *гомеоморфным отображением* (*гомеоморфизмом*), а сами пространства X и Y *гомеоморфными*.

Пример 2.6.

1. Числовая прямая $(-\infty,\infty)$ гомеоморфна интервалу $(-1,1)$. Гомеоморфизм задается отображением $y=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x$.
2. Круг гомеоморфен любому квадрату.
3. Любые два отрезка гомеоморфны.
4. Отрезок не гомеоморфен окружности.

Свойства фигур, которые не меняются при переходе к гомеоморфным фигурам, называются *топологическими*.

Важным частным случаем гомеоморфизма является отображение, сохраняющее метрические свойства.

Опр. 2.2.3. Биекция f между метрическими пространствами $R=(X,\rho_X)$ и $R'=(Y,\rho_Y)$ называется *изометрией*, если для любых $x_1,x_2\in X$ справедливо равенство

$$\rho_X(x_1,x_2)=\rho_Y(f(x_1),f(x_2)). \tag{2.2.1}$$

Изометрия пространств R и R' означает, что метрические связи между их элементами одни и те же; различной может быть только природа элементов.

Естественно рассматривать изометрические между собой пространства как тождественные.

§ 3. Открытые и замкнутые множества

В метрических пространствах легко вводятся понятия открытых и замкнутых множеств.

Опр. 2.3.1. Совокупность всех точек x метрического пространства $R=(X,\rho)$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x,x_0)<r, \tag{2.3.1}$$

называется *открытым шаром* $B(x_0,r)$ *с центром в точке* x_0 *и радиусом* r. В случае $r=\varepsilon$ открытый шар называется ε*-окрестностью* точки x_0:

$$\rho(x,x_0)<\varepsilon\Rightarrow B(x_0\varepsilon)=O_\varepsilon(x_0).$$

В случае нестрогого неравенства

$$\rho(x, x_0) \le r \qquad (2.3.2)$$

множество точек $x \in R(X, \rho)$ называется *замкнутым шаром* и обозначается как $B[x_0, r]$, а в случае равенства

$$\rho(x, x_0) = r \qquad (2.3.3)$$

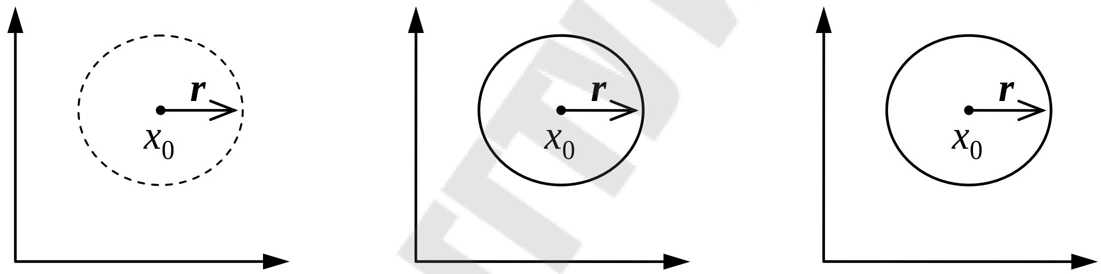
шаром.

<u>*Замечание*</u>: Для открытых и замкнутых шаров, а также сфер иногда используются обозначения:

$$\underset{(ball)}{B^n(x,\varepsilon)}, \quad \underset{(disk)}{D^n(x,\varepsilon)}, \quad \underset{(sphere)}{S^{n-1}(x,\varepsilon)}.$$

<u>*Пример 2.7.*</u>

В пространстве $R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in R\}$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2}$ имеем

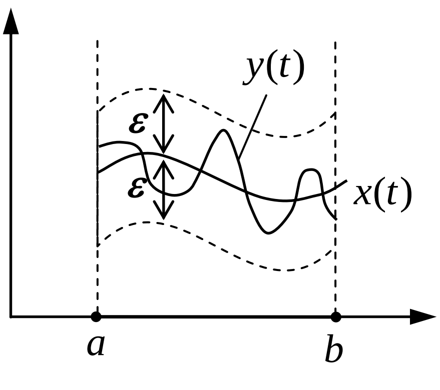


$B^2(x_0, r)$ $\qquad$ $B^2[x_0, r]$ $\qquad$ $S^1(x_0, r)$

Эту метрику удобно обозначить как $d(x, y)$, а само пространство как $\boldsymbol{R}_d^2$.

<u>*Пример 2.8.*</u>

В пространстве $C[a, b]$ ε-окрестность функции $x(t)$ представляет собой полосу:



Опр. 2.3.2. Множество *M* называется *ограниченным*, если оно целиком находится в некотором шаре.

Придадим точный смысл понятия близости точки к множеству.

Опр. 2.3.3. Точка $x \in M$ называется *точкой прикосновения* множества *X*, если любая ее окрестность содержит, хотя бы одну точку из *X*. Совокупность всех точек прикосновения множества *X* называется его *замыканием* и обозначается как $[X]$.

Пример 2.9.

Любая точка $x \in X$ является для множества X точкой прикосновения. (Множество касается самого себя!)

Переход от множества *X* к его замыканию $[X]$ можно рассматривать как *операцию замыкания*.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Операция замыкания обладает следующими свойствами:

1. $X \subseteq [X]$;
2. $[[X]] = [X]$;
3. $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;
4. $[X \cup Y] = [X] \cup [Y]$;
5. $[X \cap Y] \subseteq [X] \cap [Y]$.

Опр. 2.3.4. Точка $x_0 \in M$ называется *предельной* для множества $X \subset M$, если в любой ее окрестности содержится, по крайней мере, одна точка из X отличная от x_0.

Пример 2.10.

В пространстве изолированных точек с метрикой $\rho(x, y)$ (2.1.1) каждый элемент пространства является точкой прикосновения, однако предельных точек пространство не имеет.

Действительно, если $\varepsilon = 1/2$, то $B(x, \varepsilon) = \{x\}$ и других точек в этой окрестности нет!

Таким образом, понятия точек прикосновения и предельных точек в принципе разные!

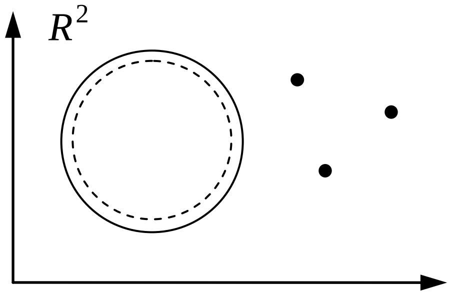
Пример 2.11.

Пусть $M = [0,1]$, а $X = \mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Каждая точка отрезка $[0,1]$ является предельной для множества $\mathbb{Q}_{[0,1]}$.

Опр. 2.3.5. Точка $x \in X$ называется *изолированной* для множества *X*, если найдется такая ее окрестность $O_\varepsilon(x)$, которая не содержит других точек из *X*.

В пространстве дискретных точек все точки изолированы.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Всякая точка прикосновения множества $X \subset M$ является либо предельной, либо изолированной точкой множества *X*.



Таким образом, замыкание $[X]$ состоит из точек трех типов:

1. изолированные точки;
2. предельные точки $\in X$;
3. предельные точки $\notin X$.

Опр. 2.3.6. Точка *x* является *внутренней* точкой множества *X*, если существует ее окрестность $O_\varepsilon(x)$, целиком принадлежащая *X*.

Множество *X*, все точки которого внутренние называется *открытым*.

Опр. 2.3.7. Множество *X*, содержащее все свои предельные точки называется *замкнутым*.

Замыкание $[X]$ есть замкнутое множество.

Открытый шар $B(x_0, \varepsilon)$ есть множество открытое, а замкнутый шар $B[x_0, \varepsilon]$ есть множество замкнутое.

Следует отметить, что $[B(x_0, \varepsilon)] = B[x_0, \varepsilon]$.

Замечание: Термин «открытый» в выражениях «открытый шар» и «открытое множество» имеют разный смысл. Понятие «открытое множество» является более фундаментальным и может быть введено без понятия метрики (топологические пространства).

Поскольку предельные точки всегда входят в замыкание $[X]$, то замкнутое множество может быть определено и как множество, совпадающее со своим замыканием:

$$X = [X],$$

т.е. содержащее все свои точки соприкосновения.

Отметим основные свойства замкнутых и открытых множеств:

1. Объединение любого числа открытых множеств есть множество открытое.
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.
3. Множество X открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Пример 2.12.

Пустое множество $\varnothing$ и всё метрическое пространство М являются одновременно и открытыми и замкнутыми множествами! Действительно, имеем: $M \setminus M = \varnothing$, $M \setminus \varnothing = M$.

Пример 2.13.

Интервал (a, b) – открытое множество, а отрезок $[a, b]$ – замкнутое. Полуинтервал $[a, b)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

Опр.2.3.8. Подмножество X называется *плотным* в M, если $[X] = M$, то есть его замыкание совпадает с M.

Пример 2.14.

Множество $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.к. $[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$.

Пример 2.15.

$B(x_0, r)$ плотно в $B[x_0, r]$.

Опр. 2.3.9. Пространство M, имеющее плотное счётное подмножество называется *сепарабельным*.

Таким образом, множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ является сепарабельным пространством, т.к. оно имеет плотное счётное подмножество, а именно, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пример 2.16.

Пространство ограниченных последовательностей сепарабельным не является.

§ 4. Сходимость в метрических пространствах

Пусть задана последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M.

Опр. 2.4.1. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 (другими словами, точка x_0 называется пределом $\{x_n\}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, начиная с которого все точки последовательности содержатся в $O_\varepsilon(x_0)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \ n > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Из определения непосредственно следует, что если $\{x_n\} \to x_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0. \qquad (2.4.1)$$

Свойства пределов и сходящихся последовательностей.

1. Если предел x_0 существует, то он единственен.
2. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к той же точке x_0.
3. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Связь между точками прикосновения и пределом устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4.1. Для того, чтобы точка x_0 была точкой прикосновения множества X, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ из X, сходящаяся к x_0.

Для изолированной точки x можно взять последовательность вида $\{x, x, \ldots\}$, состоящую из совпадающих точек. Для предельных точек множества X последовательность должна содержать различные точки.

Замечание: Имеется различие в терминах «предел» и «предельная точка».

Понятие непрерывности отображения теперь можно ввести в терминах сходимости последовательностей.

Опр. 2.4.2. Отображение $y = f(x)$ непрерывно в точке x_0, если для всякой последовательности, сходящейся к x_0: $\{x_n\} \to x_0$, последовательность образов сходится к $f(x_0)$: $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$.

Можно показать, что ***опр. 2.2.1*** и ***опр.2.4.2*** эквивалентны друг другу. Однако определение на языке последовательностей часто бывает более удобным для установления непрерывности отображения.

Пример 2.17.

Задано отображение $F(y) = y(1)$ пространства $C_{[0,1]}$ в $\boldsymbol{R}$. Является ли оно непрерывным?

Решение. В пространстве непрерывных функций $C_{[0,1]}$ метрика вводится как $\rho(x, y) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$. Пусть $y(t)$ – произвольный элемент пространства $C_{[0,1]}$, а $\{y_n(t)\}$ – сходящаяся к нему последовательность. Согласно (2.4.1) имеем

$$\lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y) = \lim_{n \to \infty} \max_{0 \le x \le t} |y_n(t) - y(t)| = 0.$$

С другой стороны $F(y_n) = y_n(1)$, поэтому

$$\rho(F(y_n), F(y)) = |F(y_n) - F(y)| = |y_n(1) - y(1)| \le$$
$$\le \max_{0 \le x \le t} |y_n(t) - y(t)| = \rho(y_n, y) \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Таким образом, отображение непрерывно в любой точке пространства $C_{[0,1]}$. ▲

§ 5. Полные метрические пространства

В предыдущем параграфе было введено понятие сходимости в метрических пространствах. Однако в ***опр. 2.4.1*** явно присутствует предел. Естественно возникает вопрос о том, как его найти? В обычном математическом анализе основным признаком сходимости является критерий Коши, который основан на понятии фундаментальной последовательности. Естественно, что эти понятия имеют свои аналоги и в функциональном анализе.

Опр. 2.5.1. Пусть M – метрическое пространство. Последовательность элементов $\{f_n\}$ из М называется *последовательностью Коши или фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ для любых $n, m > n_0$.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится, то она обязательно является фундаментальной. Действительно, из неравенства треугольника (аксиома $[M_3]$) имеем

$$\rho(f_n, f_m) \le \rho(f_n, f_0) + \rho(f_m, f_0) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Здесь использовалось ***опр. 2.4.1.*** для сходящейся к пределу f_0 последовательности.

Обратное утверждение неверно! Не всякая последовательность метрического пространства M сходится.

Пример 2.18.

Последовательность десятичных приближений по недостатку к $\sqrt{2}$ является фундаментальной в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, однако она не сходится в $\mathbb{Q}$.

Опр. 2.5.2. Метрическое пространство M называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ этого пространства сходится, причем предел $f_0 \in M$.

Пример 2.19.

Пространство изолированных точек полно, т.к. в этом пространстве фундаментальными являются только стационарные последовательности: $\{x, x, \ldots, x, \ldots\} \to x$.

Пример 2.20.

Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ полно.

Пример 2.21.

Пространство $C[a,b]$ полно.

Действительно, пусть $\{x_n(t)\}$ – некоторая фундаментальная последовательность из $C[a,b]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0: $\forall\, n, m > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(x_n, x_m) = \max\limits_{a \le t \le b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ для любых $t \in [a,b]$. Последнее неравенство означает равномерную сходимость $\{x_n(t)\}$, а как известно из анализа в этом случае ее предел $x_0(t)$ есть также непрерывная функция.

Устремляя $m \to \infty$, получаем

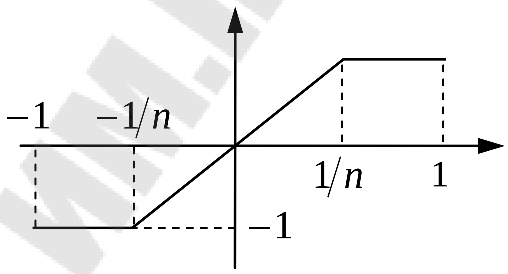
$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \Rightarrow x_n(t) \to x(t).$$

<u>Пример 2.22.</u>

Пространство $C_2[a,b]$ полным не является.

В качестве примера можно взять последовательность функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le -1/n \\ nt, & -1/n \le t \le 1/n \\ 1, & 1/\mathrm{n} \le t \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$



Последовательность является фундаментальной в $C_2[a,b]$, т.е.

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 \, dt \le \frac{2}{\min(n,m)} \to 0.$$

Однако она не сходится ни к какой непрерывной функции.

ТЕОРЕМА 2.5.1. (теорема о вложенных шарах)

Для того чтобы метрическое пространство M было полным необходимо и достаточно, чтобы *всякая* последовательность вложенных замкнутых шаров

$$B_1[x_1, r_1] \supset B_2[x_2, r_2] \supset \ldots \supset B_k[x_k, r_k] \supset \ldots,$$

радиус которых $r_k \to 0$, имела непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \ne \varnothing.$$

В данной теореме условие о стремлении к нулю радиусов (диаметров) замкнутых множеств существенно. Если это условие не будет выполняться, то пересечение может быть пустым.

Если пространство M не полно, то его всегда можно расширить до полного пространства.

Опр. 2.5.3. Пусть M – метрическое пространство. Полное метрическое пространство M^* называется *пополнением* пространства M, если

1) M является подпространством M^*: $M \subset M^*$;
2) M всюду плотно в M^*: $[M] = M^*$.

Пример 2.23.

Пространство всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ является пополнением пространства рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 2.5.2. (т. Хаусдорфа о пополнении метрического пространства)

Всякое метрическое пространство R имеет пополнение и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из R, т.е.

$$\rho^*\big|_R = \rho_R.$$

§ 6. Принцип сжимающих отображений

Целый ряд задач, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа, например, дифференциальных, можно сформулировать в виде задачи существования неподвижной точки при некотором отображении метрического пространства в себя. Одним из важнейших критериев существования таких точек является *принцип сжимающих отображений*.

Опр. 2.6.1. Пусть M – метрическое пространство. Отображение $A: M \to M$ называется *сжимающим отображением*, если существует такое число $0 < q < 1$, что для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x, y). \tag{2.6.1}$$

Очевидно, что всякое сжимающее отображение непрерывно, т.к. если $\rho(x_n, x_0) \to 0$, то и $\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x_n, x_0) \to 0$ в любой точке пространства M.

Опр. 2.6.2. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения A, если

$$Ax = x. \tag{2.6.2}$$

ТЕОРЕМА 2.6.1. (принцип сжимающих отображений Пикара-Банаха)

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство:

Пусть x_0 – произвольная точка из $X \subset M$. Полагаем $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, …, $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$. Тогда имеем:

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le q^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le q^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \le$$

$$\le q^n \rho(x_0, x_1) \{1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-n-1}\} \le q^n \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-q}$$

Так как $0 < q < 1$, то при достаточно большом n правую часть неравенства можно сделать сколь угодно малой, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, а в силу полноты метрического пространства (по условию) она имеет предел. Положим

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Тогда в силу непрерывности отображения

$$Ax = A \lim_{x \to n} x_n = \lim_{n \to \infty} Ax_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x,$$

что и требовалось доказать.

Единственность следует из того, что для двух неподвижных точек $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le q\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. ■

Следствие. Для сжимающего отображения $A: M \to M$ справедлива следующая оценка сходимости

$$\rho(x_n, x) \le \frac{q^n}{1-q} \rho(Ax_0, x_0), \tag{2.6.3}$$

где x_0 – стартовая точка, а x – неподвижная точка отображения.

Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения $Ax = x$, принцип сжимающих отображений дает фактический метод приближенного нахождения этого решения (*метод последовательных приближений или метод итераций*).

<u>Пример 2.24.</u>

Пусть f – функция, определенная на отрезке $[a,b]$ и которая удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le K|x_2 - x_1|,$$

где $K < 1$ – константа Липшица. Пусть также функция $f(x)$ отображает отрезок $[a,b]$ в себя, т.е. $f(x) \in [a,b]$ для любого $x \in [a,b]$. Тогда f есть сжимающее отображение, следовательно, согласно т.2.6.1 последовательность $\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots\}$ сходится к корню уравнения $f(x) = x$.

В частности, если функция $f(x)$ дифференцируема, то согласно теореме Лагранжа условие сжимаемости отображения будет выполнено, если $|f'(x)| < 1$ на $[a,b]$.

<u>Пример 2.25.</u>

Пусть требуется найти корень уравнения $F(x) = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$, где λ – некоторая константа. Неподвижная точка x для функции $f(x)$ и будет корнем исходного уравнения:

$$x = f(x) \Rightarrow x = x - \lambda F(x) = 0 \Rightarrow \lambda F(x) = 0 \Rightarrow F(x) = 0.$$

Если $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ (что гарантирует существование корня!), а $0 < K_1 \le F'(x) \le K_2$ на $[a,b]$, то условие сжимаемости будет выполнено, если $|f'(x)| = |1 - \lambda F'(x)| < 1$. Решая это неравенство, получаем:

$$-1 < 1 - \lambda F'(x) < 1 \Rightarrow -2 < -\lambda F'(x) < 0 \Rightarrow 0 < \lambda F'(x) < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda < \frac{2}{F'(x)} < \frac{2}{\max\limits_{[a,b]} F'(x)} \Rightarrow 0 < \lambda < \frac{2}{K_1}.$$

<u>*Замечание*</u>: Условие сжатия существенно зависит от выбора метрики в пространстве.

§ 7. Компактность в метрических пространствах

В математическом анализе ограниченность последовательности приводила к интересным и важным свойствам. В частности, из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т. Вейерштрасса). В абстрактных метрических пространствах ограниченность заменяется термином «компактность».

<u>***Опр. 2.7.1.***</u> Множество X метрического пространства M называется *компактом* (*или компактным*), если всякая его последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом в X.

Компактное множество в любом метрическом пространстве является замкнутым (содержит все свои предельные точки) и ограниченным (целиком содержится в некотором открытом шаре). Обратное, вообще говоря, неверно.

<u>***Лемма.***</u> Замкнутый единичный шар в метрическом пространстве M компактен тогда и только тогда, когда M конечномерное векторное пространство.

<u>*Пример 2.26.*</u>

Рассмотрим бесконечномерное пространство последовательностей l_∞, состоящее из ограниченных последовательностей $f=(f_1, f_2,...)$ с метрикой $\rho(f,g)=\max\limits_i |f_i-g_i|$.

Пусть $f^{(n)}$ – последовательность, все компоненты которой равны 0, а n-ая компонента равна 1, т.е. $f^{(n)}=\{0,0,...,1,...,0,...\}$.

Ясно, что множество $\{f^{(n)}\}$ содержится в замкнутом единичном шаре пространства l_∞. Однако при $n \neq m$

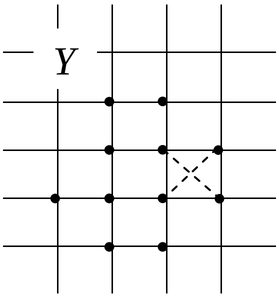
$$\rho\left(f^{(n)}, f^{(m)}\right)=1.$$

Следовательно, все точки лежат на расстоянии 1 друг от друга, и никакая последовательность таких векторов не может быть сходящейся. Элементы $f^{(n)}$ можно рассматривать как единичные векторы вдоль осей координат. Тогда понятно, что отсутствие компактности есть прямое следствие бесконечного числа осей.

Для пояснения ситуации введем следующее понятие.

Опр. 2.7.2. Пусть M – метрическое пространство, а $X \subset Y$ некоторое его подмножество. Тогда множество X называется ε-*сетью* множества Y, если для любой точки $x \in X$ существует точка $y \in Y$ такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Пример 2.27.



Y – плоскость, X – множество точек с целочисленными координатами. Точки из Y находятся от точек из X на самое большое расстояние, равное половине диагонали $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, X является $\frac{\sqrt{2}}{2}$-сетью для Y.

ТЕОРЕМА 2.7.1. (теорема Хаусдорфа)

Для того, чтобы метрическое пространство M было компактным необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть этого пространства.

Замечание: Множество X для которого существует конечная ε-сеть часто называют *вполне ограниченным*. Условие вполне ограниченное является более сильным, чем условие просто ограниченное.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2.

Вопросы.

1. Что называется метрическим пространством?
2. Дать определение непрерывного в точке отображения.
3. Какое отображение называется гомеоморфным?
4. Что называется открытым, замкнутым шаром?
5. Какое множество называется открытым, замкнутым?
6. Сформулировать свойства открытых и замкнутых множеств.
7. Какая точка называется точкой прикосновения?
8. Дать определение замыкания множества.
9. Какая точка называется предельной?

10. Дать определение изолированной точки.
11. Дать определение сходящейся последовательности в метрическом пространстве.
12. Что называется последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)?
13. Какое метрическое пространство называется полным?
14. Сформулировать терему о вложенных шарах.
15. Какое отображение называется сжимающимся?
16. Какое множество называется компактным?
17. Сформулировать теоремы Хаусдорфа.

Задачи.

2.1. Является ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если расстояние между числами x и y определить как $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$?

2.2. Будет ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если расстояние между числами x и y определить как $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$?

2.3. Будет ли метрическим пространством множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, если за расстояние между любыми двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принять число: $\rho(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| dx$?

2.4. Будет ли метрическим пространством множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, если за расстояние между любыми двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принять число: $\rho(\varphi, \psi) = \sqrt{\int\limits_a^b (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx}$?

2.5. Является ли множество точек плоскости метрическим пространством, если расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости определить формулой: $\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$?

2.6. Пусть X - множество всех пар чисел (a, b). Для любых двух его элементов $x(a_1, b_1), y(a_2, b_2)$ положим:

$\rho_1(x, y) = \max\{| a_2 - a_1 |, | b_2 - b_1 |\}$;

$\rho_2(x, y) = | a_2 - a_1 | + | b_2 - b_1 |$;

$\rho_3(x, y) = \sqrt{| a_2 - a_1 |^2 + | b_2 - b_1 |^2}$ (евклидова метрика).

Доказать, что ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют аксиомам метрики и что все три метрики ρ_1, ρ_2, ρ_3 эквивалентны.

Доказать полноту пространств $(X, \rho_1), (X, \rho_2), (X, \rho_3)$.

2.7. Пусть расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости задано формулой: $\rho_p(A, B) = \sqrt[p]{|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p}$.

Как будут выглядеть единичные шары, соответствующие параметрам: $p = 1,\ 1 < p < 2,\ p = 2,\ p \to \infty$?

2.8. Пусть E - множество всех бесконечных последовательностей комплексных чисел: $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ Положим $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$. Доказать, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет аксиомам метрики.

2.9. Пусть X – произвольное непустое множество. Введем в нем следующую метрику: $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$. Будет ли пространство (X, ρ) полным?

2.10. Показать, что $\rho_1(x, y) = arctg\,|x - y|$ является метрикой на множестве всех действительных чисел.

2.11. Доказать, что множество E всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, таких, что $|f(x)| \leq A$, где A - фиксированное положительное число, ограничено и замкнуто в пространстве $C[0,1]$, но не компактно.

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие векторного пространства

Чтобы достичь наибольшей общности и идейной простоты, в функциональном анализе принят аксиоматический подход. В качестве источника аксиом выбираются те свойства конечномерных пространств, которые делают эти пространства удобными для изучения.

Аксиомы векторного пространства подсказаны алгебраическими свойствами сложения и умножения на скаляр обычных трехмерных векторов.

Опр. 3.1.1. Пусть V – непустое множество, и пусть любой паре f, g его элементов при помощи операций сложения можно сопоставить элемент $f+g\in V$ со свойствами:

$[V_1]$ $f+g=g+f$;

$[V_2]$ $f+(g+h)=(f+g)+h$;

$[V_3]$ существует единственный нулевой элемент 0: $f+0=f$;

$[V_4]$ для любого f существует единственный элемент противоположный элемент $(-f)$: $f+(-f)=0$.

Кроме этого, допустим, что из каждого элемента f с помощью числа λ ($\lambda\in\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$) можно образовать элемент $\lambda f\in V$ со свойствами:

$[V_5]$ $\lambda(f+g)=\lambda g+\lambda f$;

$[V_6]$ $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$;

$[V_7]$ $(\lambda\mu)f=\lambda(\mu f)$;

$[V_8]$ $1\cdot f=f$.

Тогда V называется *векторным пространством*. Элементы f, g, h пространства V называются *точками* или *векторами*.

В теории конечномерных пространств важную роль играют такие понятия как «линейная зависимость», «базис», «размерность».

Опр. 3.1.2. Пусть V – векторное пространство. Конечное множество $S=\{f_j\}$, $j=\overline{1,n}$ векторов из V называется *линейно-зависимым*, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ не все равные нулю, для которых

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n=0. \qquad (3.1.1)$$

В противном случае система S называется *линейно-независимой*.

Ясно, что произвольное множество S векторов из V линейно-независимо, если каждое его непустое конечное подмножество линейно-независимо. В противном случае оно линейно-зависимо.

Опр. 3.1.3. Если существует положительное число n такое, что V содержит не более чем n линейно независимых векторов, то V называется конечномерным пространством размерности n. Если V не является конечномерным, то оно называется бесконечномерным.

Опр. 3.1.4. Конечное множество S элементов из векторного пространства V размерности n называется *базисом* V, если множество S линейно-независимо, и каждый элемент V можно записать в виде

$$g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n, \tag{3.1.2}$$

где $\lambda_k \in \boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$; $\{f_1, f_2,..., f_n\} = S$.

Отметим, что понятие базиса сейчас определено только для конечномерных пространств. Соответствующее понятие для бесконечномерных пространств намного менее полезно.

Пример 3.1.

Пусть V – множество упорядоченных n-наборов, т.е. конечных последовательностей чисел $(f_1,..., f_n)$ и пусть $f = (f_1,..., f_n)$ и $g = (g_1,..., g_n)$ – произвольные элементы из V. Линейные операции можно определить как покомпонентное сложение и умножение на число:

$$f + g = (f_1 + g_1,..., f_n + g_n), \tag{3.1.3}$$

$$\lambda f = (\lambda f_1,..., \lambda f_n). \tag{3.1.4}$$

Очевидно, что все свойства $[V_1]$ – $[V_8]$ выполняются и V является векторным пространством. Оно обозначается как $\boldsymbol{R^n}$ или $\boldsymbol{C^n}$. Конечно, $\boldsymbol{R^3}$ – это пространство обычных векторов.

Пример 3.2.

Возьмем бесконечные последовательности $f = (f_n)$, а правила действий над ними сохраним. Мы получим бесконечномерное пространство последовательностей, которое обозначается как ℓ.

Пример 3.3.

Рассмотрим множество V комплекснозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$. Для $f,g \in V$ и $\lambda \in \boldsymbol{C}$ определим новые функции $f+g$ и λf, полагая для всех $x \in [a,b]$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{3.1.5}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x). \tag{3.1.6}$$

Эти операции называются соответственно поточечным сложением и умножением на скаляр λ. Все аксиомы $[V_1]$ – $[V_8]$ выполнены, следовательно, V – комплексное векторное пространство. Пространство V – бесконечномерно.

В общем случае векторное пространство произвольных функций не поддается изучению, и на класс допустимых функций всегда налагаются какие-нибудь ограничения. Например, рассматриваются ограниченные функции. Другой очень важный пример – пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, которое обозначается как $C[a,b]$.

В последнем примере точками V были функции. Здесь легко проследить геометрический подход. Его цель – попытаться описать свойства множеств функций на языке геометрических понятий. Придерживаясь этой аналогии, обобщим понятие прямых и плоскостей, проходящих через начало координат в $\boldsymbol{R}^3$.

Опр. 3.1.5. Линейным подпространством M векторного пространства V называется непустое подмножество в V, которое само является векторным пространством с теми же правилами действий, что и в V.

Слово «линейный» включено в название для того, чтобы подчеркнуть чисто алгебраический характер M и избежать путаницы с «замкнутым пространством».

Всякое линейное подпространство содержит нулевой элемент 0.

Опр. 3.1.6. Пусть S – непустое множество из векторного пространства V. Множество всех конечных линейных комбинаций элементов из S называется *линейной оболочкой* S и обозначается как $[S]$.

Ясно, что $[S]$ – линейное подпространство в V. Отсюда видно, что во всяком векторном пространстве содержится множество различных линейных подпространств, и поэтому стоит иметь в виду возможность разложения V на линейные подпространства.

<u>Опр. 3.1.7.</u> Пусть M и N – линейные подпространства векторного пространства V, и пусть $M, N \neq 0$. Пусть каждый элемент $f \in V$ можно представить в виде суммы

$$f = g + h, \quad \text{где } g \in M, \ h \in N.$$

Тогда пространство V записывается как

$$V = M + N$$

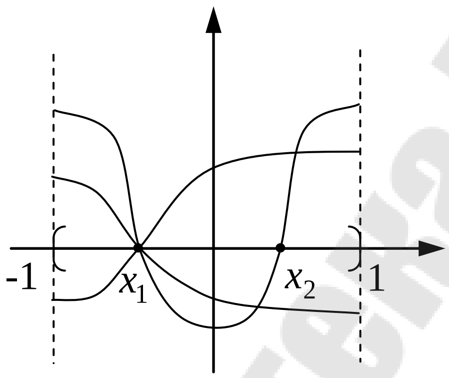
и называется *векторной суммой* подпространств M и N. Если, кроме того, векторы g и h однозначно определены для каждого $f \in V$, то V называется *прямой суммой* M и N, при этом пишут

$$V = M \oplus N.$$

<u>Лемма.</u> Пусть $V = M + N$. Тогда $V = M \oplus N$ тогда и только тогда, когда $M \cap N = 0$.

<u>Пример 3.4.</u>

Пусть $V = C_{[-1,1]}$. Возьмем две различные точки $x_1, x_2 \in [-1,1]$. Положим $M_1 = \{f \in V \mid f(x_1) = 0\}$ и $M_2 = \{f \in V \mid f(x_2) = 0\}$.



Каждое $M_{1,2}$ является линейным подпространством в V. Кроме того $V = M_1 + M_2$:

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x), & x \neq x_1, x_2, \\ f^{(2)}(x_1), & x = x_1, \\ f^{(1)}(x_2), & x = x_2. \end{cases}$$

Но $V \neq M_1 \oplus M_2$, так как $M_1 \cap M_2 \neq 0$.

<u>Пример 3.5.</u>

Пусть $M_{чет}$ – множество четных функций в $V = C_{[-1;1]}$, а $M_{нечет}$ – множество нечетных функций. Тогда $V = M_{чет} \oplus M_{нечет}$.

Если S_1 и S_2 – два произвольных множества, то множество упорядоченных пар $[f, g]$, где $f \in S_1$ и $g \in S_2$ обозначается как $S_1 \times S_2$. Если V и W – векторные пространства, то $V \times W$ можно превратить в векторное пространство следующим образом.

Опр. 3.1.8. Пусть V и W – векторные пространства. Для $f_1, f_2 \in V$ и $g_1, g_2 \in W$ положим

$$[f_1, g_1] + [f_2, g_2] = [f_1 + f_2, g_1 + g_2], \tag{3.1.7}$$

$$\lambda[f_1, g_1] = [\lambda f_1, \lambda g_1]. \tag{3.1.8}$$

Векторное пространство $V \times W$, состоящее из всевозможных пар элементов $[f, g]$ называется *прямым произведением V и W*.

Полезное обобщение допускает геометрическое понятие выпуклого тела.

Опр. 3.1.9. Подмножество S векторного пространства V называется *выпуклым*, если для любых $g, f \in S$ имеет место включение

$$\alpha f + (1 - \alpha) g \in S$$

при любом $0 \le \alpha \le 1$.

Равносильное определение состоит в том, что

$$\frac{af + bg}{a + b} \in S, \quad \text{где} \quad a, b \ge 0, \; a^2 + b^2 \ne 0.$$

Наименьшее выпуклое подмножество в V, содержащее S, называется *выпуклой оболочкой S*.

§ 2. Нормированные векторные пространства

Векторное пространство – это чисто алгебраический объект, и если мы хотим заниматься в нем анализом, необходимо ввести какой-либо способ измерения расстояния.

В главе 2 были рассмотрены метрические пространства. Однако определение метрики не предполагает наличия в пространстве никакой алгебраической структуры. Для большинства представляющих интерес векторных пространств можно ввести более сильное понятие, чем метрика, а именно, понятие нормы, служащей мерой расстояния от некоторого фиксированного начального элемента.

Опр. 3.2.1. Пусть V – векторное пространство, и пусть каждому его элементу f сопоставлено неотрицательное число $\|f\|$ так, что для всех $f, g \in V$ выполнены условия:

[H$_1$] $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

[Н$_2$] $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ для любых $\lambda \in \boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$;

[Н$_3$] $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).

Тогда число $\|f\|$ называется *нормой* вектора f, а V называется *нормированным (векторным) пространством*.

Всякое нормированное пространство является метрическим, так как метрику можно ввести по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \tag{3.2.1}$$

Обратно, метрическое пространство будет нормированным, если введенное в пространстве расстояние согласовано с алгебраическими операциями:

1). $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ (инвариантность относительно сдвигов); (3.2.2)

2). $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \rho(x, y)$ (однородность). (3.2.3)

Отметим, что на одном и том же векторном пространстве можно ввести более чем одну норму, и соответствующие нормированные пространства рассматриваются как различные.

<u>Опр. 3.2.2.</u> Пусть подмножество S ограничено в V. Тогда его *диаметром* называется верхняя грань расстояний между принадлежащими ему двумя точками:

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x, y \in S} \|x - y\|. \tag{3.2.4}$$

<u>Опр. 3.2.3.</u> *Расстоянием* $\operatorname{dist}(f, S)$ от точки f до множества S называется нижняя грань расстояний от точки f до точек множества S:

$$\operatorname{dist}(f, S) = \inf_{g \in S} \|f - g\|. \tag{3.2.5}$$

<u>Замечание</u>: Символами inf и sup (infimum и supremum) обозначаются соответственно нижние и верхние грани.

<u>Пример 3.6.</u>

Пусть $V = \boldsymbol{R}^n$. Определим евклидову норму вектора $f = (f_1, \dots, f_n)$, полагая

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_k^2}\,. \qquad (3.2.6)$$

При $k=3$ эта норма совпадает с обычным модулем вектора в $\boldsymbol{R^3}$. Замкнутый единичный шар: $\bar{S}(0,1)=\{f:\|f\|_2\le 1\}$. В $\boldsymbol{R^3}$ – это обычный шар. Диаметр шара, очевидно, равен 2. Шар $\bar{S}(0,1)$ не является векторным пространством (линейным подпространством), т.к. операция сложения в нем не замкнута, он является метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g)=\|f-g\|_2$.

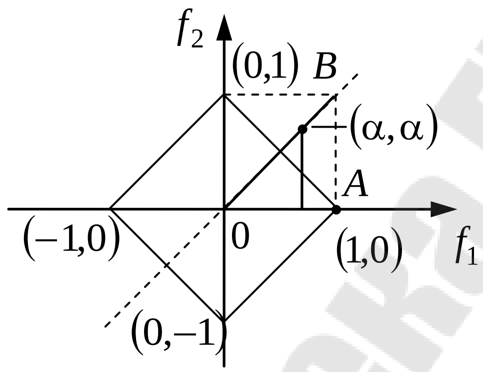
Геометрия в нормированных пространствах зависит от определения нормы и может проявлять необычные черты.

<u>Пример 3.7.</u>

Пусть $V=\mathbb{R}^2$. Определим норму элемента $f=(f_1, f_2)$ как

$$\|f\|_1 = |f_1| + |f_2|. \qquad (3.2.7)$$

Легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются, следовательно, V – нормированное пространство. Единичным шаром $\bar{S}(0,1)=\{f:|f_1|+|f_2|\le 1\}$ служит квадрат.



Этот факт приводит к неприятным последствиям. В обычном евклидовом пространстве, т.е. пространстве $\boldsymbol{R^2}$ с евклидовой нормой (3.2.6), если заданы проходящая через начало прямая l и не лежащая на ней точка P, имеется единственная точка $P'\in l$, такая что расстояние PP' минимально, т.е. $\|f-g\|_2\to\min$. Однако для нормы $\|\cdot\|_1$ (3.2.7) эта единственность утрачена.

Действительно, в качестве l возьмем биссектрису 1-го и 3-го координатных углов. Точки на биссектрисе имеют координаты (α,α), поэтому расстояния от точек l до точки $A(1,0)$ будет равно

$$\|f_A - g\|_1 = |1-\alpha| + |\alpha|.$$

Данная функция имеет минимум, равный 1, как следует из чертежа, и достигается для любого $\alpha: 0\le\alpha\le 1$.

Таким образом, все точки отрезка $[0, B]$ равноудалены по норме $\|\cdot\|_1$ от точки A.

Замечание: Отметим, что в некоторых бесконечномерных пространствах min может вообще не достигаться, но inf существует!

Поскольку всякое нормированное пространство является метрическим, то все свойства метрических пространств, связанные со сходимостью и непрерывностью автоматически переносятся на нормированные пространства.

Приведем пример бесконечномерных нормированных пространств.

Пример 3.8.

Рассмотрим пространство последовательностей l и определим величины

$$\|f\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^p\right\}^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty), \tag{3.2.8}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_k |f_k|, \tag{3.2.9}$$

где $f = (f_n) \in l$ – последовательность. Данные величины удовлетворяют всем аксиомам $[H_1]$ – $[H_3]$ в ***опр.(3.2.1)*** и в случае, если они конечны, они определяют нормы в пространстве l.

Проверка неравенства треугольника основана на использовании неравенств Гёльдера и Минковского, которые на языке норм могут быть записаны в виде

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \text{ (неравенство Гёльдера)}, \tag{3.2.10}$$

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g_p\| \text{ (неравенство Минковского)}. \tag{3.2.11}$$

Соответствующие нормированные пространства последовательностей обозначаются как l_p и l_∞.

Замечание: В конечномерных пространствах $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{C}^n$ из сходимости последовательности компонент $\{\boldsymbol{f}_j^{(k)}\} \to \{\boldsymbol{f}_{j0}^{(k)}\}$, $j = \overline{1, n}$, следует сходимость векторной последовательности $f^{(k)} = \left(f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}\right) \to f_0^{(k)}$. Для бесконечномерных пространств это не так. Рассмотрим последовательность вида

$$f^{(n)} = \left\{ \underbrace{0,...,}_{n-1}0,1,1,... \right\}.$$

Ясно, что $\{f_j^{(n)}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $\left\| f^{(n)} \right\|_\infty = 1$ при любом n, поэтому последовательность расходится. Более того, сходимость существенно зависит от индекса p для пространств l_p.

Пример 3.9.

Пространство ограниченных непрерывных комплекснозначных функций, определенных на некотором промежутке $X \subset \boldsymbol{R}$ или области $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ можно нормировать следующим образом

$$\| f \| = \sup_{x\in\Omega} \left| f(x) \right|, \quad (\textit{sup-норма}) \tag{3.2.12}$$

$$\| f \|_1 = \int_\Omega \left| f(x) \right| dx. \tag{3.2.13}$$

В случае, если функции $f(x)$ дифференцируемы соотношения типа (3.2.12) и (3.2.13) вводятся на производные, например,

$$\| f \| = \sup_{x\in\Omega} \left| f^{(k)}(x) \right|, \ k = 0,1,..,k, \tag{3.2.14}$$

или

$$\| f \| = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(j)}(x) \right|. \tag{3.2.15}$$

Замечание: Сравним понятие «близости» двух функций f, g относительно sup-нормы и нормы $\| \cdot \|_1$: sup-норма ограничивает разность $\left| f(x) - g(x) \right|$ при каждом x; $\| \cdot \|_1$ ограничивает лишь среднее значение этой разности. При этом возможны резкие пики.

§ 3. Банаховы пространства

Опр. 3.3.1. Полное нормированное векторное пространство называется *банаховым пространством* B.

Опр. 3.3.2. Пусть (f_n) – последовательность элементов V. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если $\sum\limits_{n=1}^{n=1} \|f_n\| < \infty$ и *сходящимся*, если $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \underset{n\to\infty}{\to} f \in V$. При этом f называется *суммой ряда*.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Нормированное векторное пространство полно (т.е. является банаховым) тогда и только тогда, когда в нем всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. В банаховом пространстве перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на его сумму.

Для банаховых пространств всякое подмножество $S \subset B$ полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто. Таким образом, в банаховых пространствах понятие замкнутости (содержит все предельные точки) эквивалентно понятию полноты (всякая фундаментальная последовательность сходится).

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть Ω – произвольное множество в $\boldsymbol{R^n}$. Пространство $C(\Omega)$ ограниченных непрерывных комплекснозначных функций с sup-нормой банахово.

Замечание. Возникает вопрос: относительно каких норм полны пространства дифференцируемых функций $C^k(\Omega)$. Здесь sup-норма не подходит, т.к. имеются сходящиеся непрерывные по sup-норме функции, причем производная предела терпит разрыв. Здесь необходимо использовать нормы, которые включают в себя производные, например

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x\in\Omega} |f_i(x)| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|.$$

ТЕОРЕМА 3.3.3. Пространство последовательностей l_p с нормой $\|\cdot\|_p$ (3.2.8) является банаховым при всех индексах $1 \le p < \infty$.

Ранее нами было введено понятие плотности для метрических пространств ($[X] = Y \Rightarrow X$ плотно в Y).

Плотные множества играют важную роль, как в теории, так и в приложениях. Они отвечают интуитивному представлению о приближении некоторого множества, например, B неким меньшим множеством.

В теории часто применяют такой метод доказательства: сначала убеждаются, что некоторое свойство имеет место на плотном подмножестве $S \subset B$, а затем совершают переход «по непрерывности» на все B.

В приложениях понятие плотности лежит в основе большинства численных методов и теории приближений. Например, для нахождения непрерывного решения, скажем, интегрального или дифференциального уравнения, можно искать приближенные решения среди элементов множества S непрерывных кусочно-линейных функций (ломаные Эйлера). Действительно, множество S плотно в $C(\Omega)$, поэтому существование в S сходящегося к точному решению приближения гарантировано. Для этой цели также применяют множества многочленов, кусочно-квадратичных функций (метод парабол), сплайнов.

Отметим следующие результаты, в которых речь идет о наиболее употребительных плотных множествах в $C(\Omega)$ относительно sup-нормы.

ТЕОРЕМА 3.3.4. (теорема Вейерштрасса)

Пусть Ω – замкнутое ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$. Множество многочленов от n переменных плотно в $C(\Omega)$ относительно sup-нормы.

Следствие. Пусть $[a,b]$ – конечный отрезок. Множество непрерывных кусочно-линейных функций плотно в $C[a,b]$относительно sup-нормы.

<u>*Замечание.*</u> В следствии можно использовать равномерное разбиение $[a,b]$ на части.

Как мы знаем $C(\Omega)$ полно по sup-норме, но не полно по норме $\|\cdot\|_1$. Возникает вопрос – какие модификации нормы не приводят к нарушению полноты?

<u>Опр. 3.3.3.</u> Две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ на векторном пространстве V называются эквивалентными, если существует строго положительное действительные числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\|f\|_a \le \|f\|_b \le C_2\|f\|_a \text{ при любом } f \in V.$$

Если пространство V банахово, то оно остается банаховым и с любой эквивалентной нормой.

Пример 3.10.

Пусть $f \in C_{[0,1]}$. Положим

$$\| f \|_* = \sup_{x \in [0,1]} \left| e^{-ax} f(x) \right|, \quad \text{где } a > 0.$$

Тогда

$$\underbrace{e^{-a}}_{=C_1} \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) \right| \le \sup_{x \in [0,1]} \left| e^{-ax} f(x) \right| \le \underbrace{1}_{=C_2} \sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) \right|.$$

Таким образом, норма $\| f \|_*$ эквивалентна sup-норме в пространстве $C[a,b]$.

Переход к эквивалентной норме часто облегчает решение задач.

В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны!

В заключение рассмотрим проблему базисов в банаховых пространствах.

Ранее было дано понятие базиса в конечномерных векторных пространствах, которые нуждаются в модификациях. Однако при попытках такой модификации возникают трудности.

Естественным кажется назвать линейно-независимую последовательность $\{f_n\}$ базисом в B, если для любого $f \in B$ существует единственная последовательность коэффициентов $\{\alpha_n\}$ такая, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n. \tag{3.3.1}$$

Замечание. Это условие не сводится к условию: замкнутая линейная оболочка множества $\{f_n\}$ совпадает с B. Последнее значительно слабее.

Так в $C[0,1]$ с sup-нормой рассмотрим множество $S = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$. По теореме Вейерштрасса замкнутая линейная оболочка S совпадает со всем $C[0,1]$. Но, например, непрерывная на $(0;1]$ ограниченная функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ не представима в виде $\sum \alpha_n x^n$, таким образом, система одночленов S не образует базис в пространстве $C[0,1]$.

Короче говоря, у многих банаховых пространств есть базис в смысле (3.3.1), однако от него мало проку, полезных же базисов нет. Особенно ярко это демонстрирует пример из теории рядов Фурье: последовательность $\{e^{inx}\}$ не является базисом в пространстве $C[0,2\pi]$ с sup-нормой, однако широко используется в приложениях.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3.

Вопросы.

1. Что называется векторным пространством?
2. Привести примеры векторных пространств.
3. Какие векторы называются линейно зависимыми, линейно независимыми?
4. Что такое размерность линейного пространства?
5. Что называется базисом линейного конечномерного пространства?
6. Какую размерность имеет пространство матриц $M_{2\times 3}$? Приведите пример базиса в этом пространстве.
7. Какую размерность имеет пространство многочленов, степень которых не превышает 3? Приведите пример базиса в этом пространстве.
8. Что называется линейным подпространством?
9. Что называется линейной оболочкой множества векторов?
10. Дайте определение суммы линейных подпространств. Какая сумма называется прямой?
11. Дайте определение прямого произведения двух множеств. Является ли прямое произведение двух линейных пространств линейным пространством?
12. Сформулировать определение нормы. Привести примеры нормированных пространств.
13. Всякое ли нормированное пространство является метрическим?
14. Всякое ли метрическое пространство является нормированным?
15. Что называется банаховым пространством? Приведите примеры банаховых пространств.
16. Эквивалентны ли в банаховых пространствах понятия замкнутости и полноты?

Задачи.

3.1. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно. Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных ниже пространств?

а) Пространство l_1 последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$, где $x_k\in \boldsymbol{R}$ $(x_k\in \boldsymbol{C})$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$, с нормой

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|.$$

б) Пространство l_2 последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$, где $x_k\in\boldsymbol{R}$ $(x_k\in\boldsymbol{C})$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty$, с нормой

$$\|x\|=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right]^{1/2}.$$

в) Пространство $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|.$$

г) Пространство $C^k[a,b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\|=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}\left|x^{(i)}(t)\right|.$$

3.2. Доказать, что в пространстве столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ $(x_k\in\boldsymbol{R})$ можно ввести норму следующими способами:

а) $$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i}|x_k|^2\right]^{1/2};$$

б) $$\|x\|=\max_{1\le k\le m}\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|.$$

3.3. Пусть $A=\|a_{ij}\|$ $(i,j=1,2,\ldots,m)$- симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что в пространстве столбцов $x=(x_k)_{k=1}^m$ $(x_k\in\boldsymbol{R})$ можно ввести норму

$$\|x\|=\left[\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}x_ix_j\right]^{1/2}.$$

3.4. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

а) $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

б) $|x(b)-x(a)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

в) $\int\limits_a^b|x(t)|dt+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$.

3.5. В линейном пространстве вещественных непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций положим

$$\|x\| = \left[\int_a^b \left(x^2(t) + x'^2(t)\right)dt\right]^{1/2}.$$

а) Проверить аксиомы нормы.

б) Будет ли получающееся нормированное пространство банаховым?

3.6. Дана система многочленов $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Является ли она линейно независимой? Найти явный вид линейных комбинаций многочленов этой системы:

а) $5f_1 + f_2 - 4f_3$; б) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми:

3.7. $x_1 = (-3,1,5)$, $x_2 = (6,-2,15)$.

3.8. $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,5,7)$, $x_3 = (3,7,10)$.

3.9. $x_1 = (-1,3,1)$, $x_2 = (2,1,5)$, $x_3 = (1,3,4)$.

3.10. $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (1,-1,-1,1)$, $x_3 = (1,-1,1,-1)$, $x_4 = (1,1,-1,-1)$.

3.11. Проверить, что векторы $e_1 = (2,2,-1)$, $e_2 = (2,-1,2)$, $e_3 = (-1,2,2)$ образуют базис и найти координаты вектора $x = (1,1,1)$ в этом базисе.

3.12. Найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в каждом из следующих базисов: а) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$; б) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$.

ГЛАВА 4. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Евклидовы пространства

Пусть V – линейное пространство. Как было отмечено в конце предыдущей главы, в бесконечномерном случае введение базиса не является элементарным. Однако в конечномерном случае употребительными являются ортогональные базисы в векторном пространстве, а именно, декартов базис. Введение декартового базиса напрямую связано с операцией скалярного произведения. Введем аналог скалярного произведения в абстрактном векторном пространстве V, взяв за основу его алгебраические свойства.

Опр. 4.1.1. Пусть V – действительное линейное пространство. Скалярным произведением называется функционал (x, y), действующий из $V \times V$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам

[S_1] для любого $x \in V$ $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

[S_2] $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

[S_3] $(x, y) = (y, x)$;

[S_4] $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

для любых $x, y, z \in V$ и $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Замечание. Из этих аксиом следует, скалярное произведение есть билинейный функционал, т.е. он является линейным как по первому множителю, так и по второму:

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$
$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y).$$

Опр. 4.1.2. Линейное пространство V, наделенное скалярным произведением (f, g), называется *евклидовым пространством*.

Замечание. Другое название – *предгильбертово пространство*, оставляя термин «*евклидово*» только за конечномерным случаем.

Лемма. (неравенство Коши-Буняковского)

Для любых двух элементов f и g евклидова пространства имеет место неравенство

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}. \tag{4.1.1}$$

Доказательство:

В силу свойства 1 скалярного произведения для любых $\lambda \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$\left(\lambda f+g,\lambda f+g\right)\geq 0.$$

Или, применяя свойства 2 – 4:

$$\lambda^2\left(f,f\right)+2\lambda\left(f,g\right)+\left(g,g\right)\geq 0.$$

Неравенство будет выполняться для любых λ, если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, т.е.

$$D=4\left(f,g\right)^2-4\left(f,f\right)\left(g,g\right)\leq 0\Rightarrow\left|\left(f,g\right)\right|\leq\sqrt{\left(f,f\right)}\cdot\sqrt{\left(g,g\right)}.$$

ТЕОРЕМА 4.1.1. Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}. \tag{4.1.2}$$

Доказательство.

Проверим, что величина $\sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы $[H_1]$ – $[H_3]$ в ***опр.(3.2.1)***. Свойства 1 и 2 очевидны:

1. $\sqrt{(x,x)}=0\Rightarrow(x,x)=0\Rightarrow x=0$ и наоборот.
2. $\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|\cdot\sqrt{(x,x)}$.

Для проверки неравенства треугольника воспользуемся неравенством Коши-Буняковского (4.1.1)

$$\sqrt{(x+y,x+y)}=\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)}\leq\sqrt{(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)}\leq$$

$$\leq\sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}+(y,y)}=\sqrt{\left(\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}.$$

Таким образом, неравенство (4.1.1) может быть записано в виде

$$\left|\left(f,g\right)\right|\leq\|f\|\cdot\|g\|. \quad \blacksquare \tag{4.1.3}$$

Пример 4.1.

Для точек пространства $\boldsymbol{R^n}$ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ скалярное произведение можно определить как

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k. \tag{4.1.4}$$

Легко проверить выполнение всех условий ***опр. 4.1.1.*** При этом (4.1.3) принимает вид:

$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$ – общее неравенство Коши-Буняковского.

По-существу, неравенство (4.1.3) является источником вывода всех неравенств этого типа.

Пример 4.2.

Рассмотрим неравенство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Скалярное произведение введем по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx. \tag{4.1.5}$$

Все свойства скалярного произведения следуют из линейных свойств интеграла Римана. Норма вводится по формуле

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \tag{4.1.6}$$

Неравенство Коши-Буняковского при этом принято называть неравенством Шварца:

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

Как мы знаем пространство непрерывных функций можно снабдить и другими нормами, отличными от норм пространства $C_2[a,b]$ (4.1.6). Естественно возникает вопрос, обратный к теореме (4.1.1): всякое ли линейное нормированное пространство можно снабдить скалярным произведением, или другими словами, является ли любое линейное нормированное пространство евклидовым? Ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1.2. Для того, чтобы нормированное пространство V было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов f и g выполнялось равенство параллелограмма

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right). \qquad (4.1.7)$$

Пример 4.3.

Рассмотрим пространство $\boldsymbol{R}_p^n$, в котором норма определена формулой $\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$. Возьмем два элемента $x=(1,1,0,\ldots,0)$ и $y=(1,-1,0,\ldots,0)$. Имеем

$$x+y=(2,0,\ldots,0)\Rightarrow\|x+y\|_p=2;$$

$$x-y=(0,2,\ldots,0)\Rightarrow\|x-y\|_p=2;$$

$$\|x\|_p=2^{1/p};\qquad \|y\|_p=2^{1/p}.$$

Далее находим

$$\left.\begin{aligned}&\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2=4+4=8\\&2\left(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2\right)=4\cdot 2^{1/p}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 8=4\cdot 2^{2/p}\Rightarrow 2=2^{2/p}\Rightarrow p=2.$$

Другими словами, пространство $\boldsymbol{R}_p^n$ будет евклидовым только при $p=2$.

Таким образом, если норма удовлетворяет равенству (4.1.7), то такое пространство можно снабдить скалярным произведением. Посуществу, тождество параллелограмма представляет собой характеристическое свойство евклидова пространства. При этом скалярное произведение вводится по формуле (т. Иордана – фон Неймана, 1935)

$$(f,g)=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right). \qquad (4.1.8)$$

Это так называемое «поляризационное равенство».

§ 2. Ортогональные системы векторов

Одним из важнейших следствий наличия в пространстве скалярного произведения является возможность введения понятий ортогональности, ортогональной проекции и т.п. Это делает теорию пространств со скалярным произведением отличной от общей теории банаховых пространств, чья геометрия может быть очень далекой от привычной евклидовой геометрии.

<u>Опр. 4.2.1.</u> Два элемента x и y евклидова пространства E называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно 0:

$$(x, y) = 0 \Leftrightarrow \quad \{x \text{ и } y \text{ ортогональны}\}. \qquad (4.2.1)$$

Вообще в евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между элементами по аналогии с геометрическими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad (4.2.2)$$

Действительно, на основании неравенства Коши-Буняковского (4.1.3) имеем, что $\cos\varphi \le 1$. Однако какого-то смысла, связанного с геометрией, понятие угла в абстрактном пространстве не имеет, а вот свойство ортогональности является чрезвычайно важным.

<u>Опр. 4.2.2.</u> Система ненулевых векторов $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \in E$ является *ортонормированной*, если

1) все векторы системы взаимно ортогональны друг другу, т.е. $(x_i, x_j) = 0$, $i \ne j$;
2) нормы их равны 1, т.е. $\|x_k\| = 1$, $k = \overline{1, n}$.

Таким образом, для ортонормированной системы мы можем записать:

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \ne \beta \\ 1 & \text{при } x = \beta \end{cases}, \qquad (4.2.3)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Свойства ортогональных систем.

I. Для системы ортогональных векторов справедлива формула Пифагора:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2; \qquad (4.2.4)$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2. \qquad (4.2.5)$$

Доказательство.

Докажем равенство (4.2.4):

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+\underbrace{2(x,y)}_{=0}+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Равенство (4.2.5) доказывается по методу математической индукции. ■

II. Система ортогональных векторов линейно независима.

Доказательство.

Пусть для системы векторов $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ выполняется равенство $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n=0$. Тогда, используя свойства скалярного произведения, а также ортогональность векторов находим

$$0=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\,,\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=\text{(воспользуемся формулой Пифагора)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{\text{л}}^2\|x_k\|^2\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\ldots=0,$$

т.е. система S линейно независима. ■

<u>Опр. 4.2.3.</u> Для данного множества $S\subset E$ множество векторов в *E*, ортогональных каждому вектору из S' называется *ортогональным дополнением к* S и обозначается $S^{\perp}$.

<u>*Пример 4.4.*</u>

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ множество векторов *S* вида $x=(\alpha,\beta,0)$. Тогда всякий вектор $y=(0,0,\gamma)$ будет ортогонален каждому вектору *x*, следовательно,

$$S^{\perp}=\{y\,|\,(0,0,\gamma)\}.$$

Заметим, что если вектор *y* ортогонален каждому из векторов $x_1,x_2,...,x_n$, то тогда *y* будет ортогонален и каждой линейной комбинации векторов $x_1,x_2,...,x_n$:

$$(x,y)=\left(y,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\underbrace{(y,x_k)}_{=0}=0.$$

Понятно, что всякую ортогональную систему можно сделать ортонормированной, переходя к системе вида $\left\{\dfrac{x_k}{\|x_k\|}\right\}$. Более интересен другой переход – от произвольной линейно-независимой системы $\{f_1, f_2,..., f_n\}$ к ортонормированной системе $\{\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_n\}$, где $(\varphi_m, \varphi_l) = \delta_{ml}$.

ТЕОРЕМА 4.2.1. (теорема об ортогонализации)

Пусть $\{y_n\}$ – линейно-независимая система векторов в некотором евклидовом пространстве E. Тогда в E существует ортонормированная система векторов $\{x_n\}$.

Доказательство.

Определим последовательность векторов $\{q_n\}$ и $\{x_n\}$ индуктивно следующим образом:

$$\begin{aligned} &q_1 = y_1, \\ &q_2 = y_2 - (y_2, x_1)x_1, \\ &\quad\vdots \\ &q_k = y_k - \sum_{l=1}^{k-1}(y_k, x_l)x_l, \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|}, \\ &x_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|}, \\ &\quad\vdots \\ &x_k = \frac{q_k}{\|q_k\|}, \quad k = 3,4,... \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Покажем, что последовательность $\{q_n\}$ ортогональна.

Действительно,

$$(q_2, q_1) = (y_2 - (y_2, x_1)x_1, y_1) = (y_2, y_1) - (y_2, x_1)(x_1, y_1) = \left[x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \right] \Rightarrow$$

$$= (y_2, y_1) - \frac{(y_2, y_1)(y_1, y_1)}{\|y_1\|^2} = (y_2, y_1) - (y_2, y_1) = 0.$$

Далее по индукции, предположим, что $q_1,..., q_{k-1}$ ортогональны. Тогда для любого $m < k$ имеем

$$(q_k,q_m)=(y_k,q_m)-\sum_{l=1}^{k-1}(y_k,x_l)(x_l,q_m)=(y_k,q_m)-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(y_k,q_l)\overbrace{(q_l,q_m)}^{=\delta_{lm}\|q_m\|^2}}{\|q_l\|^2}=$$

$$=(y_k,q_m)-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(y_k,q_l)\cdot\|q_m\|^2}{\|q_l\|^2}\cdot\delta_{lm}=(y_k,q_m)-\frac{(y_k,q_m)\cdot\|q_l\|^2}{\|q_l\|^2}=0.$$

Таким образом, система векторов $q_1,q_2,\ldots,q_k$ ортогональна. Отсюда согласно методу математической индукции моментально следует ортогональность и последовательности $\{q_n\}$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ ортонормированна.

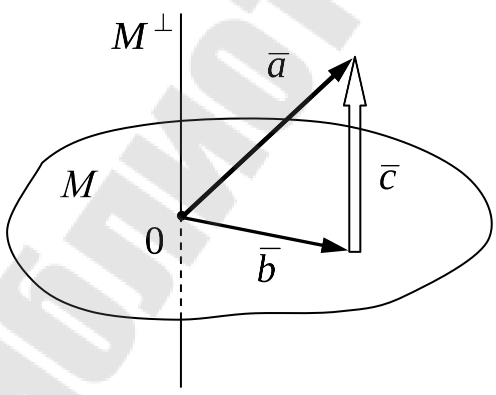
<u>*Замечание.*</u> 1) Процедура построения ортонормированной системы $\{x_n\}$ по линейно-независимой системе $\{y_n\}$ называется *процедурой ортогонализации Грама-Шмидта*.

2) Линейные оболочки систем $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ совпадают.

§ 3. Гильбертово пространство

В пространстве $\boldsymbol{R^3}$, если M – плоскость, проходящая через начало координат, то $M^{\perp}$ – перпендикулярная к ней прямая, также проходящая через начало. Приведем два типичных свойства $\boldsymbol{R^3}$, каждое из которых допускает обобщения на любом конечномерном пространстве.

Во-первых, в M существует единственный вектор, находящийся на минимальном расстоянии от данного вектора – в противоположность случаю банахова пространства, когда не гарантировано ни их существование, ни единственность такого вектора.



$\Rightarrow \overline{a}=\overline{b}+\overline{c},$ где $\overline{b}\in M,\ \overline{c}\in M^{\perp}.$

Во-вторых, всякий вектор $\bar{a}$ может быть однозначно записан в виде суммы $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$, где $\bar{b} \in M$, а $\bar{c} \in M^{\perp}$. Другими словами $\boldsymbol{R}^3$ можно разложить в прямую сумму ортогональных подпространств. Хотя эти свойства можно считать геометрическими, их обобщению на случай бесконечномерных евклидовых пространств препятствуют трудности чисто аналитического характера.

Как и в случае нормированных пространств, ключ к успеху - предположение о полноте.

Опр. 4.3.1. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством*.

Обозначение: гильбертовы пространства обозначаются символом $\mathcal{H}$.

Пример 4.5.

1). Пространства $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{C}^n$ с общим скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k-1}^{n} x_k y_k$ и $(u, v) = \sum\limits_{k-1}^{n} u_k \bar{v}_k$ являются гильбертовыми.

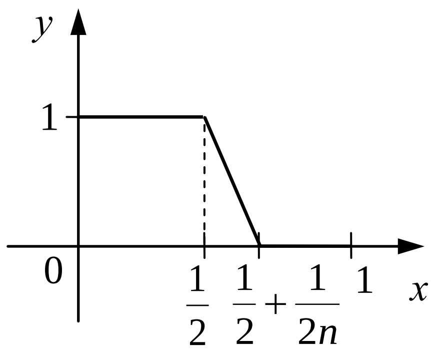
2). Пространство последовательностей l_2 со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ является гильбертовым. При этом норма пространства l_2 совпадает с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

3). Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C_2[a, b]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$, которое индуцирует норму $\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x) dx}$ не является полным, а значит, не является гильбертовым.

Пример 4.6.

Рассмотрим следующую последовательность функций

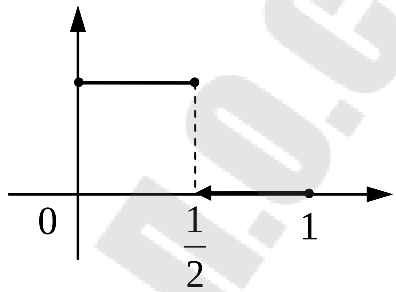
$$f_n(x) = \begin{cases} 2, \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 - 2n\left(x - \dfrac{1}{2}\right), \quad \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2n} + 1 \\ 0, \quad \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$$



Все функции непрерывны. Более того $\|f_n - f_m\| \le \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)^{1/2} \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Таким образом $\{f_n(x)\}$ – фундаментальная последовательность. Но предел есть функция разрывная:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases} \quad \Rightarrow$$



Таким образом $\{f(x)\} \notin C_2[0,1]$, что и доказывает неполноту этого пространства. ▲

<u>*Замечание.*</u> Для того, чтобы пространство функций со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) dx$ было полным необходимо расширить класс функций.

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть M – замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и пусть $f \in \mathcal{H}$. Тогда в M существует единственный элемент, ближайший к f.

Доказательство.

Положим $d = \operatorname{dist}(f, M)$ и выберем последовательность (g_n) в M так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - g_n\| = d$. Тогда согласно тождеству параллелограмма находим

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(g_n - f) + (f - g_m)\|^2 =$$

$$= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\left\|\frac{g_n + g_m}{2} - f\right\|^2.$$

Поскольку $\dfrac{1}{2}(g_n + g_m) \in M$, то последний член не меньше $4d^2$. Отсюда

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_n - g_m\| \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

Таким образом (g_n) – последовательность Коши (фундаментальная последовательность), а так как M замкнуто, то ее предел (а он существует, так как пространство гильбертово!) $g \in M$. Имеем $\|f - g\| = d$, следовательно, минимум расстояния достигается.

Если $g' \in M$ – другой элемент с этим же свойством $\|f - g'\| = d$, то из тождества параллелограмма находим

$$\|g - g'\|^2 = \|(g - f) - (g' - f)\|^2 =$$

$$= 2\left(\|g - f\|^2 + \|g' - f\|^2\right) - \|(g + g') - 2f\|^2 = 4\left(d^2 - \left\|\frac{1}{2}(g + g') - f\right\|^2\right).$$

Так как $\frac{1}{2}(g + g') \in M$, то второе слагаемое не меньше d^2, следовательно

$$\|g - g'\|^2 \le 4\left(d^2 - d^2\right) = 0 \Rightarrow g' = g. \ \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 4.3.2. (теорема о проекции)

Пусть M – замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда $M^{\perp}$ – тоже замкнутое подпространство и $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$, причем в разложении $f = g + h,\ g \in M, h \in M^{\perp}$ g есть ближайший к f элемент M.

Доказательство.

Замкнутость $M^{\perp}$ очевидна. Докажем, что $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Пусть $f \notin M$, а g – ближайший к f элемент M.

Для любого $h \in M$ и $\alpha > 0$ имеем $g + \alpha h \in M$. Поэтому

$$\|f - g\|^2 \le \|f - g - \alpha h\|^2 = \|f - g\|^2 - 2\underbrace{|\alpha|}_{=\alpha}(f - g, h) + \alpha^2 h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f - g, h) \le \frac{1}{2}\alpha h^2.$$

Так как α – произвольное число, то устремив $\alpha \to 0$, получим, что $(f - g, h) = 0$ для любого $h \in M$, а значит, $f - g \in M^{\perp}$.

Окончательно получим $f = g + (f - g) \in M + M^{\perp}$. А поскольку $M \cap M^{\perp} = 0$, то $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

§ 4. Ортонормированные базисы

В главе 3 обсуждалось, что с точки зрения приложений изучение базиса банаховых пространств бесполезно. В противоположность этому в гильбертовых пространствах существует важная теория базисов.

Опр. 4.4.1. Множество векторов $\mathcal{K}$ из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *полным*, если $\mathcal{K}^{\perp} = 0$.

Из определения следует, что для полных множеств векторов из равенства $(f,\varphi)=0$ следует $\varphi=0$!

Пусть $\mathcal{K}=\{\varphi_n\}$ счетное множество ортонормированных векторов из гильбертова пространства $\mathcal{H}$, т.е. $(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm}$.

Ортонормированные системы векторов в гильбертовом пространстве обладают следующими свойствами.

I. Для всякого ортонормированного множества $\mathcal{K}=\{\varphi_n\}$ и любого $f \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_n |(f,\varphi_n)|^2 \le \|f\|^2. \tag{4.4.1}$$

Доказательство.

В силу ортонормированности множества имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f,\varphi_n)\varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_n)^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_n)\varphi_n \right\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_n)^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(f,\varphi_n)(f,\varphi_m)(\varphi_n,\varphi_m) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_n)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}(f,\varphi_n)^2 \le \|f\|^2.$$

Поскольку правая часть неравенства от n не зависит, то его можно распространять на любое n, что и требовалось доказать. ■

II. (Свойство наилучшего приближения.) Для последовательности чисел $\{\alpha_n\}$ и любого m линейная комбинация $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k$ наилучшим образом приближается к f, если $\alpha_n=(f,\varphi_n)$.

Доказательство.

Имеем

$$\left\| f-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k\right\|^2=\left\| f-\sum_{k=1}^{m}(f,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{k=1}^{m}((f,\varphi_k)-\alpha_k)\varphi_k\right\|^2=$$

$$=\left\| f-\sum_{k=1}^{m}(f,\varphi_k)\varphi_k\right\|^2+2\left(\underbrace{f-\sum_{k=1}^{m}(f,\varphi_k)\varphi_k}_{\in M^{\perp}},\sum_{k=1}^{m}\underbrace{[(f,\varphi_k)-\alpha_k]}_{\in M}\varphi_k\right)+$$

$$+\left\|\sum_{k=1}^{m}[(f,\varphi_k)-\alpha_k]\right\|.$$

Следовательно

$$\|f\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(f,\varphi_k)|^2+\sum_{k=1}^{m}|(f,\varphi_k)-\alpha_k|^2\underset{\min}{\to}\text{ при}$$

$$|(f,\varphi_k)-\alpha_k|=0\quad\Rightarrow\quad\alpha_k=(f,\varphi_k),$$ что и требовалось доказать. ■

<u>Опр. 4.4.2.</u> Пусть $\mathcal{K}=\{\varphi_n\}$ – некоторая ортонормированная система, а $f\in\mathcal{H}$. Тогда числа

$$c_k=(f,\varphi_k)\tag{4.4.2}$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента f, а формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n\tag{4.4.3}$$

рядом (*обобщенным рядом*) *Фурье*.

Таким образом, свойство **II,** по-существу, означает, что многочлены Фурье дают наилучшее приближение к элементу f по системе ортонормированных функций $\mathcal{K}$.

Опр. 4.4.3. Ортонормированная система $\mathcal{K} = \{\varphi_n\}$ называется *ортонормированным базисом* пространства $\mathcal{H}$, если

$$f = \sum_n c_n \varphi_n, \tag{4.4.4}$$

где $c_n = (f, \varphi_n)$ для любых $f \in \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть $\mathcal{H}$ сепарабельное гильбертово пространство и $\mathcal{K} = \{\varphi_n\}$ – ортонормированное множество в нем. Тогда равносильны следующие условия:

1. $\mathcal{K}$ полно, т.е. $\mathcal{K}^{\perp} = 0$;
2. $[\overline{\mathcal{K}}] = \mathcal{H}$ – замыкание линейной оболочки совпадает с $\mathcal{H}$;
3. $\mathcal{K}$ – ортонормированный базис;
4. для любого $f \in \mathcal{H}$ верно равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_n |(f, \varphi_n)|^2. \tag{4.4.5}$$

Доказательство.

$1 \to 2$. Если $[\overline{\mathcal{K}}] \neq \mathcal{H}$, то существует элемент $f \in \mathcal{H}$, который не принадлежит $[\overline{\mathcal{K}}]$. Следовательно, $f = g + h$, где $g \in [\overline{\mathcal{K}}]$ и $h \in [\overline{\mathcal{K}}]^{\perp}$. Отсюда $\mathcal{K}^{\perp} = [\overline{\mathcal{K}}]^{\perp} \neq 0$, что противоречит полноте, т.е. условию 1.

$3 \to 4$. В равенстве Бесселя $\left\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k)\varphi_k \right\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k)^2$ устремим $m \to \infty$. Так как $f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k$ по определению базиса, то получаем равенство Парсеваля. ■

Следствие. Всякое сепарабельное гильбертово пространство имеет ортонормированный базис.

<u>Пример 4.7.</u>

Рассмотрим гильбертово пространство ℓ_2. Пусть $e_n = \Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1},\underset{n}{1},0,\ldots\Big)$, т.е. e_n – единичный вектор «вдоль оси *n*». Множество $\{e_n\}$ ортонормировано. Для любого $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ имеем

$(f, e_n) = f_n$. Поэтому если $(f, e_n) = 0$ для любого n, то $f = 0$. Значит, система $\{e_n\}$ полна и согласно теореме 4.4.1 является базисом. ▲

Пример 4.8.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$ (пространство интегрируемых на $[-\pi, \pi]$ функцию). Рассмотрим $\{x_n(t)\} = \left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}$. Данное множество является ортонормированным в $\mathcal{H}$. Однако для функции $x(t) = \cos t$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x, x_n)x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t \cdot \sin ntdt \cdot \sin nt\right] = 0 \neq \cos t,$$

таким образом, система $\left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}$ базис не образует. Дело в том, что она не полна. ▲

§ 5. Тригонометрическая система

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$, т.е. пространство функций с интегрируемым квадратом.

ТЕОРЕМА 4.5.1. Тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\} \tag{4.5.1}$$

образует полную ортонормированную систему, т.е. ортонормированный базис, в пространстве функций $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$.

Доказательство.

Проверим сначала ортогональность системы

$$\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}.$$

В пространстве $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$ скалярное произведение вводится как

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Поэтому имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0 \text{ (подынтегральная функция нечетная)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0 \text{ (подынтегральная функция нечетная)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \frac{n+m}{2} + \cos \frac{n-m}{2} \right] dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \frac{m-n}{2} - \cos \frac{m=m}{2} \right] dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Таким образом, мы не только доказали ортогональность, но также нашли и нормы:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\|^2 = \pi \Rightarrow \|\cos nx\| = \sqrt{\pi},$$

$$\|\sin nx\|^2 = \pi \Rightarrow \|\sin nx\| = \sqrt{\pi},$$

что доказывает ортонормированность системы (4.5.1).

Полнота тригонометрической системы следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами. ■

Согласно свойствам ортонормированных систем соответствующий ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{4.5.2}$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \qquad (4.5.3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,$$

сходится в среднем, т.е. по норме пространства $\mathcal{L}_2$, к функции $f(x)$. В силу полноты системы имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \qquad (4.5.4)$$

Отсюда следует, что для всякой функции из $\mathcal{L}_2$ квадрат ее коэффициентов Фурье образует сходящийся ряд.

Обратно, если числа a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ сходится, то тогда ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ тоже сходится, но в пространстве $\mathcal{L}_2$, а его сумма представляет собой функцию, имеющую a_0, a_n, b_n своими коэффициентами Фурье.

Замечание. Тригонометрические ряды были использованы французским математиком Ж.Фурье в его работах по математической физике, в первую очередь по распространению тепла. Однако формулы для коэффициентов a_n и b_n встречались уже у Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Римана, Дирихле и др. Первоначально термины «ряд Фурье», «коэффициенты Фурье» и т.д. связывались именно с тригонометрической системой. И лишь значительно позже стали употребляться в общем смысле применительно к системе любых евклидовых пространств.

Отметим, что системы функций $\{1,\cos x,\cos 2x,...\}$ и $\{\sin x,\sin 2x,...\}$ образуют полные ортонормированные системы функций на отрезке $[0,\pi]$ по отдельности. Доказательство этого факта связано с продолжением функции, определенной на отрезке $[0,\pi]$, на весь отрезок $[-\pi,\pi]$ четным и нечетным образом.

Рассмотрим запись ряда Фурье по тригонометрической системе в комплексной форме. Согласно формулам Эйлера имеем

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \Rightarrow \begin{matrix} \cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \\ \sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{matrix} \qquad (4.5.5)$$

Подставляя соотношения (4.5.5) в ряд Фурье, получим

$$\frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, а при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \end{aligned} \qquad (4.5.6)$$

Опр. 4.5.1. Выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (4.5.7)$$

называется *рядом Фурье в комплексной форме*.

Хотя коэффициенты c_n выражаются через действительные числа a_n и b_n по формуле (4.5.6), удобно найти для них общее выражение. Во-первых, отметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases} = 2\pi \delta_{nm}. \qquad (4.5.8)$$

Умножим равенство

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (4.5.9)$$

на e^{-imx} и интегрируем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = 2\pi c_m .$$

Таким образом,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.5.10}$$

Разложение (4.5.9) остается в силе и для комплексных функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi; \pi]$. Таким образом, функции $\{e^{inx}\}$ образуют базис в пространстве $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$ комплекснозначных функций с интегрируемым квадратом модуля на $[-\pi; \pi]$. Скалярное произведение в этом случае определяется как

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g}(x) dx . \tag{4.5.11}$$

Замечание. Замена $e^{inx} \to e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ позволяет перенести все результаты на пространство $\mathcal{L}_2[-l, l]$.

§ 6. *Многочлены Лежандра*

Рассмотрим совокупность одночленов

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\} . \tag{4.6.1}$$

Она определяет систему всех многочленов. Поэтому система (4.6.1) линейно независима и полная на отрезке $[-1; 1]$. Однако она не ортонормированная, а значит, не образует ортонормированный базис.

Согласно теореме об ортогонализации (4.2.1) систему (4.6.1) можно ортонормировать по отношению к скалярному произведению пространства функций $\mathcal{L}_2[-1, 1]$, т.е. с интегрируемым квадратом.

Обозначим соответствующую полную ортогональную систему как

$$\{Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots\} , \tag{4.6.2}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n, причем

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\cdot Q_m(x)dx = 0, \quad n \neq m \ . \tag{4.6.3}$$

<u>Лемма.</u> С точностью до постоянного множителя имеет место соотношение

$$Q_n(x) \sim R_n = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \ . \tag{4.6.4}$$

Доказательство.

Пусть $n \geq m$. Отметим, что

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=-1} = \left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=1} = 0$$

при всех $k = 0,1,\ldots,n-1$, т.к. при дифференцировании все слагаемые будут содержать множитель $\left(x^2-1\right)$ в некоторой не нулевой степени. Далее интегрируем по частям:

$$\int_{-1}^{1} R_m(x)\cdot R_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]}_{u}\cdot \underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]dx}_{dv} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right], & du = \dfrac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]dx \\ dv = \dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n dx\right], & v = \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\left.\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]\cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\right|_{-1}^{1}}_{=0} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]\cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]dx = \ldots =$$

$$=(-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+1}}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]\cdot\left(x^2-1\right)^n dx \qquad (4.6.5)$$

Если $m<n$, то $2m<m+n$ и под знаком интеграла первый множитель тождественно обращается в 0. Это доказывается ортогональность системы $\{R_n(x)\}$.

Далее отметим, что многочлен R_n имеет степень n, т.е. каждый из многочленов лежит в подпространстве, порожденным $(n+1)$ первыми элементами $\{1, x, \ldots, x^n\}$, как и Q_n. Итак, система многочленов $\{R_n\}$ ортогональна, как и система $\{Q_n\}$, поэтому они могут отличаться только числовыми коэффициентами. ■

Для определения нормирующего множителя вычислим интеграл:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx = \int_{-1}^{1}\underbrace{(x+1)^n}_{u}\underbrace{(x-1)^n dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u=(x+1)^n, & du=n(x+1)n-1 \\ dv=(x-1)^n dx, & v=\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\end{bmatrix} =$$

$$=(x+1)^n\cdot\left.\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{1} - \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x+1)^{n-1}\cdot(x-1)^{n+1}dx =$$

$$=(-1)^n\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}dx =$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)\ldots(2n)}\cdot\left.\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^{1} = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом

$$\int_{-1}^{1}R_n^2(x)dx=(2n)!\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n=(2n)!\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\cdot(n!)^2.$$

Другими словами норма $\|R_n(x)\|$ равна

$$\|R_n(x)\| = n!2^n \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \tag{4.6.6}$$

следовательно, ортонормированная система имеет вид

$$\|Q_n(x)\| = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n\right]. \tag{4.6.7}$$

Однако обычно рассматривают не ортонормированные многочлены.

<u>Опр. 4.6.1.</u> Многочлены вида

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)\right] \tag{4.6.8}$$

называются *многочленами Лежандра*.

Система многочленов Лежандра ортогональна в пространстве функций $\mathcal{L}_2[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases} \tag{4.6.9}$$

Разложение функции f на отрезке $[-1,1]$ по многочленам Лежандра имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{4.6.10}$$

где

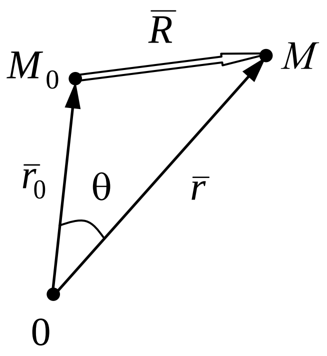
$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx. \tag{4.6.11}$$

<u>Пример 4.9.</u>

Справедливо следующее разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x), \quad |\rho| < 1. \tag{4.6.12}$$

Данное соотношение является производящим для многочленов Лежандра. Соотношение (4.6.12) широко применяется в теории потенциалов:



$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r_2^2 - 2r_0 r\cos\theta}} =$$

$$= \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos\theta}} =,$$

$$= \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), \qquad \text{где } \left|\frac{r}{r_0}\right| < 1. \;\blacktriangle$$

В заключение приведем несколько первых многочленов Лежандра:

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\\
&P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,\\
&P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.
\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

§ 7. Многочлены Чебышева

Мы пришли к многочленам Лагранжа, выполнив, по-существу, процедуру ортогонализации системы одночленов $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ на отрезке $[-1,1]$ относительно скалярного произведения специального вида, а именно,

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Выбор другого типа скалярного произведения, вообще говоря, будет приводить к другим ортонормированным системам.

Общий подход связан с теорией меры Лебега, суть которого заключается в переходе от интегрирования по dx к интегрированию по $d\mu = w(x)dx$, где $w(x)$ называется *весовой функцией*. При этом скалярное произведение будет определяться как

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \tag{4.7.1}$$

Замечание. 1) на весовую функцию естественно необходимо наложить определенные условия. Она должна быть интегрируемой и неотрицательной, согласно аксиомам скалярного произведения.

2) Безусловно, весовую функцию $w(x)$ можно представить как $w(x) = \sqrt{w(x)} \cdot \sqrt{w(x)}$, а условие ортогональности и нормированости

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)w(x)dx = \begin{cases} 1, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases} \tag{4.7.2}$$

запишется в общем виде

$$\int_{-1}^{1} \tilde{Q}_m(x)\tilde{Q}_n(x)dx = \delta_{mn}, \text{ где } \tilde{Q}_n(x) = \sqrt{w(x)}Q_n(x).$$

Однако при этом мы переходим к функциям $\tilde{Q}_m(x)$, которые уже не являются многочленами, а значит, обладают более сложными свойствами, например, относительно дифференцирования и интегрирования.

Важным с точки зрения приложений является выбор весовой функции $w(x)$ в виде

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{4.7.3}$$

При этом после процедуры ортогонализации системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$ мы приходим к следующим многочленам.

Лемма. Функция вида

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \tag{4.7.4}$$

являются многочленами, которые называются *многочленами Чебышева*.

Доказательство.
Рассмотрим тригонометрическое тождество

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cdot \cos n\theta .$$

Сделаем замену: $\theta = \arccos x$, $\cos\theta = x$, получим

$$\cos[(n+1)\arccos x] + \cos[(n-1)\arccos x] = 2x \cdot \cos[n \arccos x]$$

или

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{4.7.5}$$

где $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$.

Поскольку $T_0(x) = \cos 0 = 1$, а $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$, то при любом n функция $T_n(x)$ есть алгебраический многочлен степени n. ■

С помощью рекуррентной формулы (4.7.5) можно последовательно найти

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \\ &T_1(x) = x, \\ &T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ &T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ &T_4(x) = 4x^4 - 8x^2 + 1, \ldots \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

ТЕОРЕМА 4.7.1. Система многочленов $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x)\right\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\right\}$, $n > 1$ и $\frac{1}{\pi}T_0(x)$ является ортонормированным базисом в пространстве функции $\mathcal{L}_2[-1,1]$ относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} . \tag{4.7.7}$$

Доказательство.

Докажем только ортонормированность, полнота доказывается более сложным образом.

В первую очередь докажем ортогональность системы $\{T_n(x)\}$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I}_{nm}=\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix} x=\cos\theta \\ dx=-\sin\theta d\theta \\ \sqrt{1-x^2}=\sin\theta \\ x_2=1,\quad \theta_2=0 \\ x_1=-1,\ \theta_1=\pi \end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cdot\cos n\theta\frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta}=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cdot\cos m\theta d\theta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(n-m)\theta+\cos(n+m)\theta\right]d\theta=\begin{cases} n\neq m, & 0 \\ n=m=0, & \pi \\ n=m\neq 0, & \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, мы не только доказали ортогональность (случай $n\neq m$), но и нашли нормы многочлена Чебышева:

$$\|T_0(x)\|^2=\pi\ \Rightarrow\ \|T_0(x)\|=\sqrt{\pi},$$

$$\|T_n(x)\|^2=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \|T_n(x)\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ n\geq 1.\ \blacksquare$$

Опр. 4.7.1. Система функций

$$\left\{\hat{T}_0(x),\hat{T}_n(x)\right\}=\left\{\frac{T_0(x)}{\sqrt{\pi}};\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\ \ (n\geq 1)\right\} \tag{4.7.8}$$

называется *ортонормированной системой многочленов Чебышева первого рода*.

Из рассмотренной формулы (4.7.5) следует, что старший коэффициент многочлена $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ равен 2^{n-1}. Поэтому вводят также приведенные многочлены Чебышева с единичным старшим коэффициентом:

$$\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x),\ n\ge 1. \qquad (4.7.9)$$

При этом исходные многочлены $T_n(x)$ называются многочленами Чебышева *в стандартной форме*.

Ряд Фурье-Чебышева по системе $\{\hat{T}_0,\hat{T}_n\}$ имеет вид

$$\sum_0^{\infty} a_n\hat{T}_n(x),\quad \text{где } a_0=\int_{-1}^{1} f(x)T_0(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad (4.7.10)$$

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\hat{T}_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (4.7.11)$$

Если в интеграле (4.7.11) сделать замену $x=\cos\tau$, то получим

$$\begin{aligned} a_n&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(\cos\tau)\cos n\tau d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)\cos n\tau d\tau,\ n\ge 1\\ a_0&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(\cos\tau)d\tau=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau)d\tau. \end{aligned} \qquad (4.7.12)$$

Поэтому для четной функции $F(\tau)=f(\cos\tau)$ ряд Чебышева совпадет с рядом Фурье, так как четная функция раскладывается по косинусам. Следовательно, свойства сходимости ряда Фурье, которые хорошо изучены, переносятся на ряды Чебышева.

Замечание. Ряды Фурье-Чебышева на сегменте $[-1;1]$ обладают преимуществами по сравнению с рядами Тейлора. Так для представления функции $f(x)$ на $[-1;1]$ степенным рядом, необходимо чтобы она была аналитической в открытом круге $|z|<1$, т.е. другими словами, имела производные всех (!) порядков на интервале $(-1;1)$. Для разложения Фурье-Чебышева достаточно непрерывности первой производной. Кроме этого ряды Чебышева на $[-1;1]$ сходятся гораздо быстрее, чем ряды Тейлора, т.к. на скорость сходимости рядов Тейлора влияют особые точки, расположенные на единичной окружности, а скорость сходимости рядов Фурье-Чебышева зависит только от свойств функции на $[-1;1]$. Поэтому ряды Чебышева часто применяют для вычисления этих функций.

Пример 4.10.

Известно разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

которое очень медленно сходится на $(-1;1]$. В части при вычислении

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \text{ до } \varepsilon = 10^{-3}$$

необходимо взять 1000 (!) членов.

Из разложения

$$\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Полагая $\theta = \arccos x$, находим

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T_n(x), \quad -1 \le x \le 1.$$

Однако при $x = 1$ мы получим предыдущий результат. Для вычисления значений логарифмических функций на самом деле используется разложение

$$\ln\frac{1+2rx+r^2}{1-2rx+r^2} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{2k+1}\cdot T_{2k+1}(x), \quad -1 \le x \le 1.$$

В частности, $\dfrac{1+2rx+r^2}{1-2rx+r^2} = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1+r^2}{6r}$. При $r = \dfrac{1}{2}$ $\quad x = \dfrac{5}{12} < 1$ имеем

$$\ln 2 = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)}\cdot T_{2k+1}\left(\frac{5}{12}\right).$$

§ 8. Многочлены Эрмита

Рассмотрим пространство функций $L_2(-\infty,+\infty)$. Ортогональную систему функций на пространстве бесконечной меры нельзя построить ни из многочленов, ни из тригонометрических функций, так как они не принадлежат этому пространству. Действительно, несобственные интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 nxdx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 nxdx$$

расходятся.

«Материал» для построения базиса в $L_2(-\infty,+\infty)$ естественно искать среди функций, достаточно быстро убывающих на ∞. Такой базис можно получить ортогонализацией последовательности

$$\left\{x^n e^{-x^2/2}\right\}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

так как всякая функция вида $P_n(x)e^{-x^2/2}$, где $P_n(x)$ – многочлен, интегрируема с квадратом на всей числовой прямой. Применив к функциям $x^n e^{-x^2/2}$ процесс ортогонализации, мы получим систему функций вида

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{4.8.1}$$

где $H_n(x)$ многочлены степени *n*. Многочлены $H_n(x)$ называются *многочленами Эрмита*, а функции $\varphi(x)$ – *функциями Эрмита*.

Условие ортонормированности принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm} \tag{4.8.2}$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\cdot H_m(x)e^{-x^2} dx = \delta_{nm}. \tag{4.8.3}$$

Таким образом, мы можем сказать, что многочлены Эрмита $H_n(x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$, но относительно следующего скалярного произведения:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx. \tag{4.8.4}$$

Здесь функция $w(x) = e^{-x^2}$ является четной весовой функцией.

Перейдем к определению вида многочленов Эрмита.

Лемма. Многочлены Эрмита $H_n(x)$ с точностью до множителя совпадают с многочленами

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \tag{4.8.5}$$

Доказательство.

При дифференцировании функции e^{-x^2} каждое слагаемое будет содержать множитель e^{-x^2}, а после умножения на e^{x^2} все экспоненты взаимно сократятся. Таким образом, функции $H_n^*(x)$ являются многочленами степени n.

Докажем ортогональность многочленов $H_n^*(x)$. Используя скалярное произведение (4.8.4) и интегрируя по частям, последовательно находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^*(x)\cdot H_m^*(x) e^{-x^2}\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H_m^*(x)}_{u} \underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)dx}_{dv} =$$

$$= (-1)^n \left[H_m^*(x)\cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \right] - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*\prime}(x)\cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} dx =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*\prime}(x)\cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} dx = \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{*(n)}(x)\cdot e^{-x^2}\,dx.$$

Без потери общности можно положить $m < n$ (в противном случае необходимо было бы выбрать функции u и v другим образом), а поэтому

$$H_m^{*(n)}(x) \equiv 0 \quad (\text{при } m < n).$$

Подынтегральная функция тождественно равна 0, а значит, равен 0 и интеграл. Ортогональность доказана.

В силу теоремы об ортогонализации ортогональные системы $\{H_m(x)\}$ и $\{H_m^*(x)\}$ могут отличаться только лишь на константы. Что и требовалось доказать. ■

Для определения явного вида многочленов Эрмита найдем норму многочленов $H_n^*(x)$:

$$\left\|H_n^*(x)\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n^{*2}(x)e^{-x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H_n^{*(n)}(x)}_{=\left(2^n x^n+\ldots\right)^{(n)}} e^{-x^2}dx =$$

$$= 2^n \cdot n! \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx}_{=\sqrt{\pi}} = 2^n \cdot n!\sqrt{\pi}\,.$$

Таким образом, для ортонормированных многочленов Эрмита имеем

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n \cdot \sqrt{\pi}}} \quad H_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n \cdot \sqrt{\pi}}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \qquad (4.8.6)$$

Многочлены $H_n^*(x)$ (4.8.5) называются многочленами Эрмита в стандартной форме. Эти многочлены появляются в разложении вида

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^*(x)}{n!}t^n\,. \qquad (4.8.7)$$

При этом функция e^{2xt-t^2} называется производящей для $H_n^*(x)$. Из соотношения (4.8.7) можно получить другие разложения элементарных функций.

Ряд Фурье-Эрмита и его коэффициенты в пространстве функций $L_2 \equiv L_2\left(-\infty,+\infty;e^{-x^2}\right)$, то есть для функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2 e^{-t^2}dt < \infty\,, \qquad (4.8.8)$$

записывается как:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n H_n(x), \qquad (4.8.9)$$

где

$$a_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot H_n(t) e^{-t^2} dt. \tag{4.8.10}$$

<u>*Пример 4.11.*</u>

Разложение интеграла вероятности $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ (функция Лапласса) в ряд Фурье-Эрмита имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}^*(x)}{n! 2^{3n} (2n+1)}. \tag{4.8.11}$$

Этот ряд сходится значительно быстрее, чем соответствующий ряд Тейлора. ▲

§ 9. Многочлены Лагерра

Рассмотрим пространство $L_2[0, \infty)$, т.е. пространство функций с интегрируемым квадратом на полупрямой. В качестве линейно независимой системы функций возьмем функции вида

$$\{x^n e^{-x/2}\} \quad (n = 0,1,2,...). \tag{4.9.1}$$

Наличие экспоненты гарантирует сходимость интегралов. Применяя к системе (4.9.1) процедуру ортогонализации, получим систему функций

$$\psi_n(x) = L_n(x) e^{-x/2}, \tag{4.9.2}$$

которые называются *функциями Лагерра*, а многочлены $L_n(x)$ – *многочленами Лагерра*. Условие ортонормированности принимает вид

$$\int\limits_0^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm} \tag{4.9.3}$$

или

$$\int\limits_0^{\infty} L_n(x) \cdot L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm}. \tag{4.9.4}$$

Таким образом, многочлены Лагерра образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2\left(0,\infty;e^{-x}\right)$, то есть в пространстве функций, для которых

$$\|f\|^2=\int\limits_0^{\infty}\left|f^2(x)\right|e^{-x}dx\ <\infty. \tag{4.9.5}$$

Перейдем к определению явного вида коэффициентов Лагерра.

<u>Лемма.</u> Многочлены Лагерра с точностью до множителя совпадают с многочленами вида

$$L_n^*(x)=(-1)^n e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right). \tag{4.9.6}$$

Доказательство.

При каждом дифференцировании выражения $x^n e^{-x}$ мы будем получать общий множитель e^{-x}. Таким образом, $L_n^*(x)$ действительно являются многочленами степени n. Проверим ортогональность, интегрируя по частям:

$$\int\limits_0^{\infty}L_n^*(x)L_m^*(x)e^{-x}dx=(-1)^n\int\limits_0^{\infty}L_m^*(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)dx=$$

$$=(-1)^n\left[L_m^*(x)\cdot\left(x^n e^{-x}\right)^{(n-1)}\right]\Bigg|_0^{\infty}-(-1)^n\int\limits_0^{\infty}{L_m^*}'(x)\left(x^n e^{-x}\right)^{(n-1)}dx$$

$$\left(x^n e^{-x}\right)^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}c_n^k\left(x^n\right)^{(n-1-k)}\cdot\left(e^{-x}\right)^k=$$

$$=e^{-x}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c_{n-1}^k n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot x^{1+k}\ =\quad\Rightarrow$$

$$=x\cdot e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c_{n-1}^k\,\frac{n!}{(n-k-1)!}\,x^k$$

Проинтегрированное выражение равно 0 на верхнем пределе из-за e^{-x}, на нижнем из-за x.

$$\Rightarrow\ (-1)^{n+1}\int\limits_0^{\infty}{L_m^*}'(x)\left(x^n e^{-x}\right)^{(n-1)}dx=(-1)^{2n}\int\limits_0^{\infty}{L_m^*}^{(n)}(x)x^n e^{-x}dx.$$

Выбирая $m < n$, получим $L_m^{*\,(n)}(x) \equiv 0$, а значит, и интеграл равен нулю. Ортогональность доказана. Согласно теореме об ортогонализации многочлены $L_n(x)$ и $L_n^*(x)$ отличаются только численными коэффициентами. ■

Найдем нормирующий коэффициент:

$$\left\| L_n^*(x) \right\|^2 = \int\limits_0^\infty L_n^{*\,2}(x) e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty \underbrace{L_n^{*\,(n)}(x)}_{=(x^n+\ldots)} \cdot x^n e^{-x} dx =$$

$$= n! \int\limits_0^\infty \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} = \left[\underbrace{-x^n e^{-x} \Big|_0^\infty}_{=0} + n \int\limits_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \right] = n! \cdot n \int\limits_0^\infty x^{n-1-x} dx =$$

$$= n!\, n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot \int\limits_0^\infty \underbrace{e^{-x} dx}_{=1} = n! \cdot n! = (n!)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left\| L_n^*(x) \right\| = n!. \qquad (4.9.7)$$

Таким образом, многочлены Лагерра представимы в виде:

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right). \qquad (4.9.8)$$

Производящая функция для многочленов Лагерра имеет вид:

$$\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{1-t} = \sum_{n=0}^\infty L_n(x) \cdot t^n. \qquad (4.9.9)$$

Ряд Фурье-Лагерра и его коэффициенты:

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(x), \qquad (4.9.10)$$

где

$$a_n = \int\limits_0^\infty f(x) \cdot L_n(x) e^{-x} dx. \qquad (4.9.11)$$

Основное рекуррентное соотношение:

$$(n+1)L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0. \qquad (4.9.12)$$

Замечание. Многочлены Лагерра встречаются, например, в задачах движения электронов в кулоновском поле в квантовой механике и в других задачах, где ищется решение на полупрямой.

§ 10. Функции Радемахера и Уолша

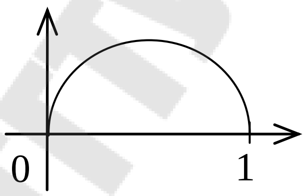
Функции Радемахера могут быть определены как

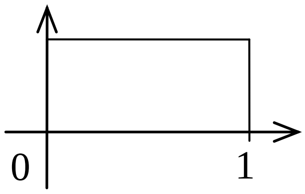
$$R(m,x)=\operatorname{sgn}\left(\sin 2^m \pi x\right), \qquad (4.10.1)$$

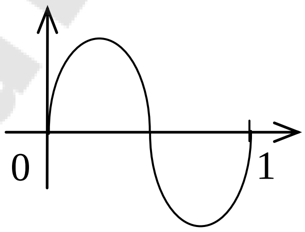
где $m=0,1,2,\ldots;\quad x\in[0,1]$, а

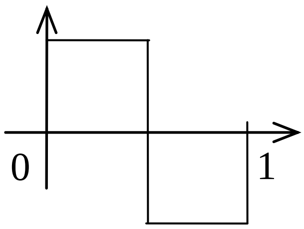
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases} \qquad (4.10.2)$$

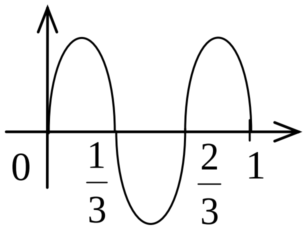
Например,

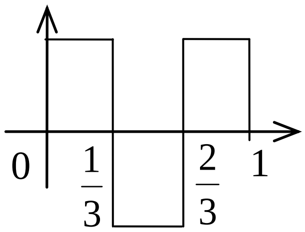
$R(0,x)=\operatorname{sgn}(\sin \pi x) \;\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

$R(1,x)=\operatorname{sgn}(\sin 2\pi x) \;\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

$R(2,x)=\operatorname{sgn}(\sin 3\pi x) \;\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

и т.д.

Функции Радемахера образуют ортонормированную в пространстве $L_2[0,1]$ систему:

$$\int_0^1 |R(m,x)|^2\,dx = 1 \text{ или } \int_0^1 R(m,x)R(n,x)\,dx = 0.$$

Первое очевидно. Для доказательства ортогональности заметим, что $\int_a^b R(m,x)dx = 0$, если $2^m(b-a)$ – четное число. Тогда для $m > n \ge 0$ получим

$$\int_0^1 R(m,x)R(n,x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} R(m,x)R(n,x)dx =$$

(на концах отрезка $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ имеем $R(n,x) = 0$, следовательно, значение функции постоянно и равно значению на середине)

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \operatorname{sgn}\left(R\left(n, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right) \cdot \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} R(m,x)dx = 0,$$

то есть все интегралы равны 0.

Последовательность функций Радемахера не полна. Действительно, так как для каждого m мы имеем $R(m,1-x) = R(m,x)$, то и каждая функция, которая представима в виде ряда по этой системе, должна обладать этим свойством!

Функции Радемахера используются для построения функций Уолша, которые образуют полную ортонормированную систему. Они обозначаются как $W(m,x)$, $m = 0,1,2,\dots$.

Для $m = 0$ положим

$$W(0,x) = 1. \tag{4.10.3}$$

Далее представим номер $m \ne 0$ в виде двоичного числа

$$m = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_k = a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_2 + \dots + 2^{n-1} a_n, \tag{4.10.4}$$

где $a_i = \{0,1\}$. Тогда определяем

$$W(m,x)=\prod_{k=1}^{n} a_k R(k,x)=(a_1 R_1(1,x))\ldots(a_n R_n(n,x)). \qquad (4.10.5)$$

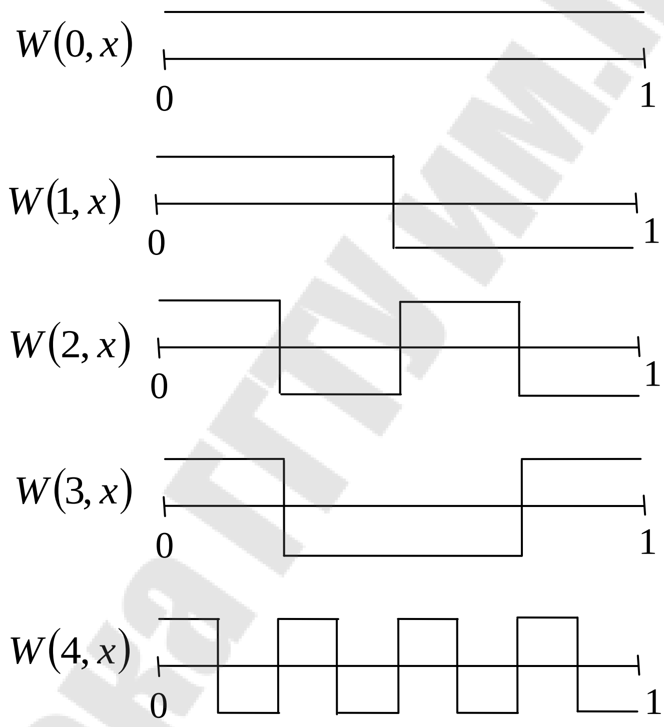
Например, так как $53=\underset{a_6}{1}\ \underset{a_5}{1}\ \underset{a_4}{0}\ \underset{a_3}{1}\ \underset{a_2}{0}\ \underset{a_1}{1}$ в двоичной системе счисления, то

$$W(53,x)=R(1,x)R(3,x)R(5,x)R(6,x).$$

Справедливо соотношение

$$W\left(2^{n-1},x\right)=R(n,x). \qquad (4.10.6)$$

На рисунках представлены некоторые функции Уолша:



ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4.

Вопросы.

1. Какой функционал называется скалярным произведением в линейных пространствах?
2. Какое пространство называется евклидовым (предгильбертовым)?
3. Записать неравенство Коши-Буняковского.
4. Привести примеры евклидовых пространств.
5. Во всяком ли нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение?

6. Какими свойствами обладают системы ортогональных векторов?
7. Что такое ортогональное дополнение?
8. Сформулируйте теорему об ортогонализации.
9. Приведите поэтапно алгоритм процедуры ортогонализации Грама-Шмидта
10. Какое пространство называется гильбертовым?
11. Какими свойствами обладают ортонормированные системы в гильбертовом пространстве?
12. Что называется обобщенным рядом Фурье?
13. Что называется ортонормированным базисом гильбертова пространства?
14. Сформулировать теорему о тригонометрической системе функций.
15. Чему равны коэффициенты ряда Фурье по тригонометрической системе функций?
16. Записать ряд Фурье в комплексной форме.
17. Какой вид имеют дифференциальное представление (формула Родрига) и условие ортонормированности для многочленов Лежандра?
18. Какой вид имеют тригонометрическое представление и условие ортонормированности для многочленов Чебышева?
19. Какой вид имеют дифференциальное представление (формула Родрига) и условие ортонормированности для многочленов Эрмита?
20. Какой вид имеют дифференциальное представление (формула Родрига) и условие ортонормированности для многочленов Лагерра?
21. Является ли система функций Радемахера
    а) ортогональной?
    б) полной?
22. Как определяются функции Уолша?

Задачи.

4.1. В линейном пространстве непрерывных на $(-\infty,+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$$

сходится, введем скалярное произведение

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt .$$

Доказать, что выполнены все аксиомы скалярного произведения.

4.2. В линейном пространстве непрерывных на $(0,+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t} dt$$

сходится, введем скалярное произведение

$$(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t} dt.$$

Проверить аксиомы скалярного произведения.

4.3. В линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций положим:

$$(x, y) = \int_a^b \left[x(t)y(t) + x'(t)y'(t)\right] dt.$$

Является ли полученное евклидово пространство гильбертовым?

4.4. В евклидовом пространстве E^2 по базису

$$\bar{x}_1 = (1,-1), \quad \bar{x}_2 = (4,-3)$$

построить ортонормированный базис.

4.5. В евклидовом пространстве E^3 по базису

$$\bar{x}_1 = (1,0,0), \quad \bar{x}_2 = (0,1,-1), \quad \bar{x}_3 = (1,1,1)$$

построить ортонормированный базис.

4.6. В евклидовом пространстве E^4 по базису

$$\bar{x}_1 = (1,1,0,0), \quad \bar{x}_2 = (0,0,1,1), \quad \bar{x}_3 = (1,0,1,1), \quad \bar{x}_4 = (0,1,0,-1)$$

построить ортонормированный базис.

4.7. Разложить в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ функцию $y = x + \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

4.8. Ортогонализуя с-му функций $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на сегменте $[-1,1]$.

4.9. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя формулу Родрига.

4.10. Получить несколько первых многочленов Лежандра, используя производящую функцию многочленов Лежандра.

4.11. Ортогонализуя систему функций $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на сегменте $[-1,1]$ с весом $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

4.12. Найти шесть первых многочленов Чебышева используя рекуррентную формулу $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, где $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$.

4.13. Ортогонализуя с-му функций $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на промежутке $(0,+\infty)$ с весом $w(x) = e^{-x}$.

4.14. Получить четыре первых многочлена Эрмита, используя формулу Родрига для многочленов Эрмита.

4.15. Найти четыре члена ортонормированной с весом $w(x) = e^{-x^2}$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$ системы многочленов, полученной путем ортогонализации последовательности $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

4.16. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя формулу Родрига для многочленов Лагерра.

4.17. Получить четыре первых многочлена Лагерра, используя производящую функцию многочленов Лагерра.

ГЛАВА 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Понятие оператора

Большинство уравнений, встречающихся в приложениях, допускают запись в виде

$$Af = g,$$

где A – отображение, например, одного банахова или гильбертова пространства в другое. Тогда используя *полноту* пространств, можно многое узнать о решении.

Лучше всего теория операторов отвечает на вопросы качественного характера и вопросы, касающиеся общих приближенных методов решения уравнений. Вот некоторые из самых важных вопросов.

1. Имеет ли решение данное уравнение, и если да, то единственно ли оно?
2. Устойчиво ли данное уравнение в том смысле, что малое изменение «входа» g влечет за собой малое изменение «выхода» f?
3. Если уравнение линейно, то нельзя ли перенести на него методы теории линейных операторов для конечномерного случая, т.е. матриц?
4. Если существует оператор A_0 в каком-то смысле аппроксимирующий A, будет ли решение f_0 уравнения $A_0 f_0 = g$ хорошим приближением к решению уравнения $Af = g$?
5. В случае дифференциального или интегрального уравнения будет ли численное решение, полученное каким-либо численным методом, близко к этому решению и как оценить погрешность?
6. Существуют ли эффективные итерационные методы, позволяющие последовательно улучшить выбранное тем или иным способом начальное приближение?
7. В конечномерном случае диагонализация эрмитовых (симметричных) матриц приводит к простому и прозрачному описанию полезного класса операторов. Существует ли аналог этого класса для случая, скажем, линейных дифференциальных уравнений?

8. Дифференциальное уравнение $f'' + \lambda f = 0$ с граничными условиями $f(0) = f(\pi) = 0$ имеет набор решений $\{\sin nx\}$, отвечающих $\lambda = n^2$, $n = 1,2,\ldots$ Широкий класс функций, допускающих представление в виде рядов Фурье, часто оказывается очень полезным. Существуют ли соответствующие обобщения на другие дифференциальные уравнения иных типов?

Опр. 5.1.1. Пусть V и W два линейных пространства. Тогда всякое отображение A, сопоставляющее каждому элементу f из подмножества $D \subset V$ единственный элемент $g = Af \in W$, называется *оператором*, действующим из D в W. При этом элемент f называется *прообразом* элемента Af, а Af – *образом* f. Подмножество $D \subset V$, на котором определен оператор A, называется его *областью определения*.

Замечание. Если оператор A определен на всем пространстве V, то пишут $A: V \to W$.

Один важный тип операторов имеет специальное название.

Опр. 5.1.2. Пусть V – линейное пространство, а W – числовое множество ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Тогда оператор, действующий из V в W, называется *функционалом*.

Таким образом, функционал принимает числовые значения.

Примерами функционалов являются норма $\|f\|$, если V – нормированное пространство, скалярное произведение (f, f_0), где f_0 – фиксированный элемент в евклидовых пространствах.

Опр. 5.1.3. Оператор A называется *линейным*, если для любых $x, y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ справедливы равенства

1) $A(x + y) = Ax + Ay$, (аддитивность)
2) $A(\lambda x) = \lambda Ax$. (однородность)

Замечание. Линейный оператор – это многомерный аналог функции одной переменной, графиком которой служит прямая, проходящая через начало координат, т.е. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяет условию $\varphi(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В конечномерном случае, для которого теория линейных уравнений разработана очень хорошо, интересы исследователей в настоящее время почти полностью сосредоточены на нелинейных уравнениях. Иначе обстоит дело с бесконечномерным случаем, в котором бесконечномерность создает дополнительные трудности.

Важным случаем является рассмотрение отображений, действующих на одном пространстве, т.е. когда $V = W$. При этом оператор $A : V \to V$ задает по-существу преобразование пространства V в себя.

В дальнейшем под линейным пространством V будем понимать гильбертово пространство $\mathcal{H}$.

Опр. 5.1.4. Оператор A называется *ограниченным*, если существует такое число K, что

$$\|Ax\| \le K\|x\| \tag{5.1.1}$$

для любого $x \in V$.

Заметим, что для линейных операторов неравенство (5.1.1) можно переписать в виде

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le K \Rightarrow \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \le K,$$

где использовались свойства однородности нормы и линейного оператора A. Так как $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$, то имеем $\|Ay\| \le K$, где $\|y\| = 1$. Таким образом, мы приходим к понятию нормы линейного оператора.

Опр. 5.1.5. *Нормой линейного оператора A* называется наименьшее из чисел K, при котором выполняется неравенство (5.1.1), или эквивалентно

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \tag{5.1.2}$$

Перейдем к определению непрерывности, которое легко вводится на языке $\varepsilon - \delta$.

Опр. 5.1.6. Оператор $A : V \to W$, действующий в нормированных линейных пространствах V и W, называется *непрерывным в точке* f_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|Af - Af_0\| < \varepsilon$ если $\|f - f_0\| < \delta$.

Отметим, что для обычных функций $f(x)$ из непрерывности, скажем, на замкнутом отрезке $[a, b]$, следует ограниченность функции. Обратное, безусловно, неверно. Однако для линейных операторов мы имеем более простой результат.

ТЕОРЕМА 5.1.1. Всякой ограниченный линейный оператор $A: V \to V$ является непрерывным.

Доказательство.

Для всякого δ такого, что $\|x - x_0\| < \delta$ из (5.1.1) находим

$$\|Ax - Ax_0\| \le K\|x - x_0\| \le K\delta = \varepsilon,$$

что и доказывает теорему. ■

Непрерывность в точке x_0 легко переносится на непрерывность в области $D \subset V$, то есть оператор A должен быть непрерывным в каждой точке области D.

Кроме того определение непрерывности оператора A можно сформулировать на языке последовательностей:

$$\{f_n\} \to f_0 \Rightarrow \{Af_n\} \to Af_0 \Rightarrow A \text{ непрерывен в точке } f_0.$$

Перейдем к примерам.

Пример 5.1. Тождественный оператор.

Оператор I называется тождественным, если он оставляет неподвижным каждый элемент пространства V:

$$Ix = x. \tag{5.1.3}$$

Согласно определению нормы (5.1.5)

$$\|I\| = 1. \tag{5.1.4}$$

Пример 5.2. Нулевой оператор.

Оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in V$ нулевой элемент 0, называется нулевым оператором O:

$$Ox = 0. \tag{5.1.5}$$

Очевидно, что $\|O\| = 0$.

Пример 5.3.

Рассмотрим конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$ и пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – его стандартный ортонормированный базис, т.е. $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$. Определим для каждой пары $\{e_i, e_j\}$ величину

$$a_{ij} = \left(Ae_j, e_i\right). \qquad (5.1.6)$$

Если элемент x определен своими координатами, т.е.

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k ,$$

то для линейного оператора A имеем $Ax = y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Найдем координаты образа y_i:

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(Ae_k\right),$$

а значит,

$$y_i = \left(Ax, e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(Ae_j, e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{ij}$$

или

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j . \qquad (5.1.7)$$

Таким образом, в конечномерном пространстве V линейный оператор задается квадратной матрицей $\left\| a_{ij} \right\|$. И наоборот, всякая матрица определяет в соответствующем пространстве линейный оператор или линейное преобразование.

Взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и квадратными матрицами является важнейшей характеристикой конечномерных пространств.

Для нормы A находим:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2} , \qquad (5.1.8)$$

поэтому любой линейный оператор *в конечномерном гильбертовом (евклидовом) пространстве ограничен, а значит по теореме (5.1.5) и непрерывен.*

<u>*Пример 5.4.*</u> *Оператор дифференцирования.*

Один из наиболее важных операторов – это оператор дифференцирования

$$(Df)(x)=\frac{df(x)}{dx}=f'(x), \tag{5.1.9}$$

определенный на пространстве дифференцированных на некотором отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ функций. Это пространство является подпространством гильбертова пространства $L^2[a,b]$. Отметим, что оператор дифференцирования не является ограниченным. Действительно, рассмотрим последовательность

$$f_n(x)=\sin nx,\quad n=1,2,3,\ldots,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Тогда $\|f_n\|=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^2 nx\right)^2dx}=\sqrt{\pi}$, а $\|Df_n\|=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}(n\cos nx)^2}=n\sqrt{\pi}$, т.е.

$$\|Df_n\|=n\cdot\|f_n\|\Rightarrow\|Df_n\|\not\leq K\|f_n\|.$$

<u>*Пример 5.5.*</u> *Оператор интегрирования.*

Другой важный вид оператора – это оператор интегрирования, который определяется как

$$(Tf)(s)=\int\limits_a^b K(s,t)f(t)dt. \tag{5.1.10}$$

Функция $K(s,t)$ называется *ядром* оператора. Область определения оператора T безусловно зависит от ядра K. Так, если ядро интегрируемо с квадратом, т.е.

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K(s,t)|^2dsdt<\infty, \tag{5.1.11}$$

то T – ограниченный оператор в $L^2[a,b]$, причем

$$\|T\|\leq\sqrt{\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K(s,t)|^2dsdt}. \tag{5.1.12}$$

Доказательство. Последовательно находим

$$\|Tf\|^2=\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^b K(s,t)f(t)dt\right|^2ds\leq\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^b|K(s,t)|^2dt\cdot\underbrace{\int\limits_a^b|f(t)|^2dt}_{=\|f\|^2}\right)ds=$$

$$= \underbrace{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds \cdot \|f\|^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\|Tf\| \le \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dsdt} \cdot \|f\|. \ \blacktriangle$$

§ 2. Обратный оператор

Пусть A – оператор, определенный на подмножестве $D(A)$ векторного пространства E. Обозначим через $\Re(A)$ его область значений ($\Re$ – range, другое обозначение $\operatorname{Im} A$), т.е. $\Re(A) = \{A(x) \mid x \in D(A)\}$. Если A есть оператор и $D(A)$ – векторное подпространство E, то тогда $\Re(A)$ *также* есть *векторное подпространство E*.

<u>Опр. 5.2.1.</u> Оператор B, определенный на $\Re(A)$ называется *обратным к A оператором*, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} ABx &= x \ \text{ для } \ \forall\, x \in \Re(A), \\ BAx &= x \ \text{ для } \ \forall\, x \in D(A). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Оператор, который имеет обратный, называется *обратимым*. Оператор, обратный оператору A, обозначается как A^{-1}.

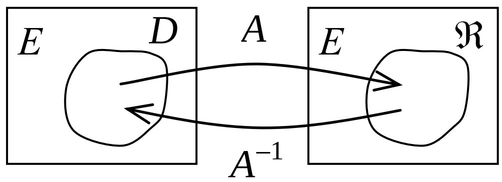
Заметим, что если оператор A имеет обратный, то A^{-1} – единственный. Действительно, предположим, что существует два обратных оператора B_1 и B_2. Тогда имеем

$$B_1 = B_1 I = B_1 A B_2 = I B_2 = B_2 .$$

(Мы использовали свойства тождественности оператора I и свойство ассоциативности отображения)

Отметим также, что

$$D(A^{-1}) = \Re(A) \quad \text{и} \quad \Re(A^{-1}) = D(A).$$



ТЕОРЕМА 5.2.1. Пусть A^{-1} – оператор, обратный оператору A. Тогда, если A – линейный оператор, то и A^{-1} также является линейным.

Доказательство.

Для $\forall x, y \in \Re(A)$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ имеем

$$A^{-1}(\alpha x + \beta y) = A^{-1}\left(\alpha A A^{-1} x + \beta A A^{-1} y\right) =$$

$$= \underbrace{A^{-1} A}_{=I}\left(\alpha A^{-1} x + \beta A^{-1} y\right) = \alpha A^{-1} x + \beta A^{-1} y. \ \blacksquare$$

ТЕОРЕМА 5.2.2. Оператор A является обратимым тогда и только тогда, когда условие $Ax = 0$ равносильно $x = 0$.

Доказательство.

Если A – обратимый оператор и $Ax = 0$, то тогда

$$x = A^{-1} A x = A^{-1} 0 = 0.$$

Предположим, что из условия $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. Если $Ax_1 = Ax_2$, то имеем $A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$, т.е. $x_1 = x_2$, что доказывает, что A имеет обратный. (Каждому $Ax \in \Re(A)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D(A)$). ■

Из теорем 5.2.1 и 5.2.2 моментально вытекает следующее утверждение (следствие).

ТЕОРЕМА 5.2.3. Если оператор A является обратимым, а система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ линейно независима, то тогда система их образов $\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n\}$ также линейно независима.

Доказательство.

Предположим, что $\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \ldots + \alpha_n A x_n = 0$, тогда

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = 0 \overset{m.5.2.2}{\Rightarrow} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0.$$

Если система $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ линейно независима, то последнее равенство выполняется только при нулевых коэффициентах: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. А значит, только при нулевых коэффициентах выполняется и первое соотношение. ■

Из данной теоремы следует, что всякий *линейно обратимый* оператор, действующий на *конечномерном* линейном пространстве E, является сюръективным, т.е. $\Re(A) = E$, а значит, он не меняет размерности пространства.

Однако это не так в бесконечномерном случае [имеется в виду нарушение сюръективности].

Пример 5.6.

Пусть $E = l_2$. Определим оператор сдвига:

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Оператор A является обратимым, но не сюръективным! В частности у последовательности с первым членом $\neq 0$ нет прообраза.

Замечание. Данный пример показывает, что в бесконечномерных пространствах нужно быть осторожным. Стандартные результаты, справедливые в конечномерных пространствах, не переносятся на случай бесконечномерных пространств. В бесконечномерном случае важную роль играют не только чисто алгебраические свойства, но и свойства анализа.

В конечномерных пространствах всякий линейный оператор ограничен и непрерывен. Если существует для него обратный A^{-1}, то он также линеен, а значит и ограничен.

Следующий пример показывает, что в бесконечномерных пространствах обратный к ограниченному оператору не обязательно будет ограниченным.

Пример 5.7.

Пусть $E = l_2$. Определим на E оператор

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots \right).$$

Для нормы находим

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \|x\|,$$

следовательно, A – ограниченный оператор. Обратным A^{-1} является оператор вида

$$A^{-1}(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n, \ldots).$$

Но A^{-1} не является ограниченным. Действительно, возьмем базисный элемент

$$e_n = \left(0,0,\ldots,\underset{(n)}{1},0,\ldots \right),$$

получим

$$A^{-1}e_n = (0,0,\ldots,n,0,\ldots),$$

следовательно,

$$\left\| A^{-1}e_n \right\| = n \text{, в то время как } \left\| e_n \right\| = 1.$$

Замечание. Ограниченность – очень важная характеристика оператора. Рассмотрим, например, уравнение $Lf = g$ (f – «отклик», g – «входной сигнал») $\Rightarrow$ $f = L^{-1}g$ – его решение. Если L^{-1} ограничен, то малому изменению g соответствует и малое изменение решения. Это свойство устойчивости решения. Если L^{-1} неограничен, то решение уравнения свойством устойчивости не обладает.

Рассмотрим уравнение вида $Lf = g$. Пусть оператор L представим в виде $L = I - A$, т.е.

$$(I - A)f = g. \tag{5.2.2}$$

Перепишем уравнение в виде

$$f = Af + g. \tag{5.2.3}$$

Идея решения основана на следующем: если A «мало», то весьма правдоподобно, что с точностью до первого порядка, членом Af можно пренебречь. Это дает первое решение $f_0 = g$. Его можно улучшить, подставляя f_0 вместо f в правую часть соотношения (5.2.3), получим $f_1 = Af_0 + g$. Продолжая эту процедуру, придем к последовательности приближений:

$$f_0 = g, \quad f_n = g + Af_{n-1}, \quad n \ge 1. \tag{5.2.4}$$

Правдоподобно, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ есть решение уравнения (5.2.2). При этом формально получим

$$f = g + Ag + A^2g + \ldots + A^ng + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A^ng = (I - A)^{-1}g, \tag{5.2.5}$$

а значит,

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n=I+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots.$$

Формально данное соотношение напоминает сумму геометрической прогрессии. В теории операторов этот ряд называется *рядом Неймана*. Условие справедливости использования данного метода решения уравнения (5.2.2) даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5.2.4. Пусть A – линейный обратимый оператор, действующий в банаховом пространстве B и $\|A\|<1$. Тогда в B существует оператор $(I-A)^{-1}$, причем

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n \text{ (ряд Неймана)} \tag{5.2.6}$$

и

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\|A\|}. \tag{5.2.7}$$

Доказательство.

Так как $\left\|A^n\right\|\le\|A\|^n$ и $\|A\|<1$, то ряд (5.2.6) абсолютно сходится. В силу полноты банаховых пространств существует линейный ограниченный оператор $B=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$.

Простые вычисления показывают, что

$$(I-A)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}A^n\right)=I=\left(\sum_{n=0}^{\infty}A^n\right)\cdot(I-A),$$

следовательно, $B=(I-A)^{-1}$. Оценка нормы производится следующим образом

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\|=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}A^n\right\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n=\frac{1}{1-\|A\|},$$

так как $\|A\|<1$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. При выполнении условий теоремы уравнение (5.2.2) имеет точно одно решение f в B, равное

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} A^n g \qquad (5.2.8)$$

или $f_0 = g$, $f_n = g + Af_{n-1}$, $n \ge 1$, и

$$\|f\| \le (1 - \|A\|)^{-1} \cdot \|g\|.$$

Пример 5.8.

Получить решение в виде ряда Неймана для интегрального уравнения (неоднородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода)

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x) f(t)dt$$

Решение. Данное уравнение имеет структуру

$$f = g + Af \;\Rightarrow\; (I - A)f = g, \text{ где } Af = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)f(t)dt = \int_{-1}^{1}K(x,t)f(t)dt.$$

Оператор A является интегральным оператором, а для его нормы справедлива оценка

$$\|A\| \le \sqrt{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(t-x)^2 dxdt} = \sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \le 1.$$

Таким образом, все условия теоремы (5.2.4) выполнены. Решение можно найти с помощью итерационной процедуры:

$$f_0 = g = x, \quad f_n = g + Af_{n-1}.$$

Находим

$$f_0(x) = x,$$

$$f_1(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)tdt = x + \frac{1}{3},$$

$$f_2(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\left(t + \frac{1}{3}\right)dt = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x,$$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2},$$

$$f_4(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{x}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$f_{2n}(x) = x + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{3^m} - x \cdot \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{3^m}.$$

В пределе $n \to \infty$ получаем $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. ▲

§ 3. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, показал, что уравнение $(I - A)f = g$ особенно хорошо поддается решению тогда, когда мала норма оператора *A*. К сожалению, для большинства задач, относящихся к линейным уравнениям, это условие является слишком ограничительным и норма оператора $\|A\|$ превышает 1. В этом случае рассматриваются уравнения вида

$$(\lambda I - A)f = g, \text{ где } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть *E* – комплексное векторное пространство.

Опр. 5.3.1. Комплексное число λ называется *собственным значением* оператора *A*, если существует ненулевой элемент $u \in E$ такой, что

$$Au = \lambda u. \tag{5.3.1}$$

Всякий вектор u, удовлетворяющий соотношению (5.3.1), называется *собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению* λ.

В случае пространств функций функции u_λ называются *собственными функциями*.

Пример 5.9. Оператор проецирования..

Пусть *S* – линейное подпространство комплексного гильбертова (евклидова) пространства *E*, и пусть *A* есть оператор проекции *E* в *S*.

Тогда для искомого собственного значения $\lambda \in \mathbb{C}$ и $u \neq 0 \in E$ мы имеем

$$Au = \lambda u.$$

С другой стороны, так как $Au \in S$, то

$$A^2 u = A(Au) = Au \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \ \text{ или } \ 1.$$

Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 0$, есть векторы из E, которые ортогональны векторам из S, то есть лежат в $S^{\perp}$.

Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1$, есть векторы из S. ▲

Предположим, что λ не является собственным значением оператора *A*, т.е. соотношения $Au = \lambda u$ выполняются только для нулевого элемента. Перепишем уравнение (5.3.1) в виде

$$(A - \lambda I)u = 0.$$

Тогда на основании теоремы (5.2.2) следует, что оператор $A - \lambda I$ обратим (!). [Верно и обратное.] Если пространство *E* конечномерно и λ не является собственным значением оператора *A*, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен (т.к. все операторы в конечномерных пространствах ограничены).

Ситуация более сложная в бесконечномерных пространствах.

Опр. 5.3.2. Пусть *A* – линейный оператор в нормированном пространстве *E*. Оператор

$$A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} \tag{5.3.2}$$

называется *резольвентой A*. Значения λ, для которых A_λ определен на всем пространстве E и ограничен, называются *регулярными точками A*. Множество всех чисел λ, которые не являются регулярными, называются *спектром A*.

Опр. 5.3.3. Множество всех *собственных значений A*, которые являются (образуют) подмножеством спектра *A*, называется *точечным спектром*. Оставшаяся часть спектра, т.е. множество всех чисел λ, для которых A_λ существует, но неограничен, называется *непрерывным спектром*.

Пример 5.10.

Для конечномерных пространств спектр линейного оператора A состоит только из точечного спектра.

Действительно, в конечномерных пространствах всякий линейный оператор задается матрицей. При этом уравнение (5.3.1) эквивалентно системе линейных уравнений. Ее можно преобразовать к виду

$$(A-\lambda I)u=0. \tag{5.3.3}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, напомним, что собственный вектор u является ненулевым вектором, система должна быть вырожденной, а значит,

$$\det(A-\lambda I)=0. \text{ (характеристическое уравнение)} \tag{5.3.4}$$

Уравнение (5.3.4) является алгебраическим уравнением порядка n, где $n=\dim E$. На множестве комплексных чисел оно имеет ровно n корней (с учетом кратности корня). ▲

Пример 5.11.

Пусть E есть пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, т.е. $E=C_{[a,b]}$. Для фиксированной функции $u\in C_{[a,b]}$ рассмотрим оператор A, определенный с помощью умножения:

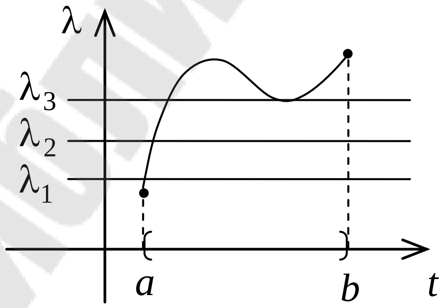
$$(Ax)(t)=u(t)x(t).$$

Тогда

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{x(t)}{u(t)-\lambda}.$$

Спектр A состоит из всех чисел λ таких, что $\lambda-u(t)=0$, т.е. $\lambda=u(t)$, $t\in[a,b]$.

Это значит, что спектр A совпадает с областью значений функции u:



Если $u(t)=c=const$, то $\lambda=c$ – собственное значение оператора A. С другой стороны, если $u(t)$ монотонно возрастает, то A не имеет собственных значений. Спектр A в этом случае есть отрезок $[f(a), f(b)]$. Это пример оператора с чисто непрерывным спектром. ▲

<u>*Пример 5.12.*</u> *Осциллятор.*

Уравнение движения в классической механике может быть записано как $\frac{d^2u}{dt^2} = Au$, где A – оператор в гильбертовом пространстве.

Если система осциллирует, то временная зависимость синусоидальна, так что

$$u = v \sin \omega t.$$

Если A – линейный оператор (гармонический), то имеем

$$Av = (-\omega^2)v.$$

Это означает, что $(-\omega^2)$ – собственное значение оператора A. Физически собственные значения A соответствуют возможным частотам осцилляций. В атомных системах частоты осцилляций видимы как яркие линии в спектре, который они излучают. Отсюда происходит термин «спектр» в теории линейных пространств. ▲

Важно отметить, что каждому собственному вектору (функции) соответствует единственное собственное значение, но существует бесконечное множество векторов для заданного собственного значения. Фактически справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.3.1. Множество всех собственных векторов (функций), соответствующих одному собственному значению оператора A образуют векторное пространство.

Размерность этого пространства для собственного значения λ называется *множественностью* λ. Собственное значение, множественность которого равна 1, называется *простым* или *невырожденным*. Если множественность >1, то λ называется вырожденным. Для вырожденных собственных значений множественность также называют *степенью вырожденности*.

<u>*Пример 5.13.*</u>

Рассмотрим интегральный оператор

$$A: L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi],$$

определенный как

$$(Au)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t-y)u(y)dy. \qquad (5.3.5)$$

Для определения собственных значений λ запишем уравнение

$$(Au)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t-y)u(y)dy = \lambda u$$

или

$$\cos t \cdot \int_0^{2\pi} \cos yu(y)dy + \sin t \int_0^{2\pi} \sin yu(y)dy = \lambda u(t). \qquad (5.3.6)$$

Таким образом, для $\lambda \neq 0$ функция $u(t)$ есть линейная комбинация косинуса и синуса:

$$u(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad (5.3.7)$$

где $a, b \in \mathcal{C}$. Подставляя выражение (5.3.7) в (5.3.6) находим

$$\pi a = \lambda a \text{ и } \pi b = \lambda b \Rightarrow \lambda = \pi.$$

Таким образом, λ имеет только одно отличное от нуля собственное значение, причем все соответствующие $\lambda = \pi$ собственные функции есть гармоники вида (5.3.7). Очевидно, они составляют двумерное пространство собственных функций, а значит, множественность $\lambda = \pi$ равна 2.

Уравнение (5.3.6) допускает еще одно решение

$$\lambda = 0,$$

при этом собственными будут являться функции, ортогональные системе $\{\sin t, \cos t\}$ на отрезке $[0,2\pi]$. Как известно, таких функций бесчисленное множество – это все оставшиеся функции из тригонометрической системы. Поэтому множественность $\lambda = 0$ равна ∞. ▲

§ 4. Сопряженные, самосопряженные и унитарные операторы

Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство.

<u>Опр. 5.4.1.</u> Оператор A^* называется *сопряженным оператором* ограниченного оператора A, если для $\forall\, x, y \in \mathcal{H}$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^* y). \tag{5.4.1}$$

Заметим, что в комплексном гильбертовом пространстве скалярное произведение (x, y) по определению обладает слеидующим свойствами:

$$\begin{aligned}(\lambda x, y) &= \lambda(x, y),\\ (x, \lambda y) &= \overline{\lambda}(x, y),\end{aligned} \quad (x, y) = \overline{(y, x)}, \tag{5.4.2}$$

где $\lambda \in \mathcal{C}$, а $\overline{\lambda}$ – его комплексно-сопряженное число.

Сопряженный оператор обладает следующими свойствами:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \tag{5.4.3}$$

$$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \tag{5.4.4}$$

$$(A^*)^* = A, \tag{5.4.5}$$

$$I^* = I, \tag{5.4.6}$$

$$(AB)^* = A^* B^*, \tag{5.4.7}$$

$$\|A^*\| = \|A\|, \tag{5.4.8}$$

$$\|A^* A\| = \|A\|^2. \tag{5.4.9}$$

Докажем, например, (5.4.8). Согласно неравенству Шварца имеем

$$|(A^* x, y)| = |(x, Ay)| \le \|x\| \cdot \|Ay\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полагая $y = A^* x$, получим

$$\|A^* x\|^2 = (A^* x, A^* x) \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^* x\| \Rightarrow \|A^* x\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Так как по определению $\|A^*\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A^* x\|$, то $\|A^*\| \le \|A\|$. Отсюда следует, что если A – ограниченный оператор, то A^* – также является ограниченным оператором. Далее, используя соотношение (5.4.5), находим

$$\|A\| = \left\|\left(A^*\right)^*\right\| \le \left\|A^*\right\|.$$

Таким образом, из выполнения двух неравенств, делаем вывод, что

$$\left\|A^*\right\| = \|A\|.$$

В общем случае $A \ne A^*$. ■

<u>*Пример 5.14.*</u>

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, точками которого является пара комплексных чисел $x = \{x_1, x_2\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. В комплексном пространстве скалярное произведение определяется как (5.4.2), причем

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

где $\bar{y}_i$ – комплексно-сопряженные величины.

Введем следующий линейный оператор

$$Ax = \{0, x_1\}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= 0 \cdot \bar{y}_1 + x_1 \cdot \bar{y}_2 = x_1 \cdot \bar{y}_2; \\ (x, Ay) &= x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot \bar{y}_1 = x_2 \cdot \bar{y}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A \ne A^*. \ \blacktriangle$$

<u>***Опр. 5.4.2.***</u> Если $A = A^*$, то есть

$$(Ax, y) = (x, Ay) \text{ для } \forall\, x, y \in \mathcal{H}, \qquad (5.4.10)$$

то оператор A называется *самосопряженным* или *эрмитовым*.

<u>*Пример 5.15.*</u>

Пусть $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертово пространство, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – стандартный ортонормированный базис, т.е. $\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}$.

Пусть $\left(a_{ij}\right)$ – матрица, соответствующая оператору A, т.е $a_{ij} = \left(Ae_j, e_i\right)$ (обратите внимание на расстановку индексов!). Тогда сопряженный оператор A^* будет представляться матрицей $b_{ij} = \left(A^* e_j, e_i\right)$. Согласно определению (5.4.1) и (5.4.5) находим

$$b_{ij}=\left(A^*e_j,e_i\right)=\left(e_j,\left(A^*\right)^*e_i\right)=\left(e_j,Ae_i\right)=\overline{\left(Ae_i,e_j\right)}=\overline{a_{ji}}\,.$$

Если оператор A, самосопряженный, то $b_{ij}=a_{ij}$, а значит

$$a_{ij}=\overline{a_{ji}}=\overline{a_{ij}^T}=\overline{a_{ij}}^T \quad\Rightarrow\quad A=\overline{A}^T. \qquad (5.4.11)$$

Матрицы A, обладающие свойством (5.4.11) называются *эрмитовыми*.

Замечание. 1. В физике операция комплексного сопряжения обозначается звездочкой «*», а операция эрмитова сопряжения крестиком «+». Поэтому в физической литературе $A^+=A^{*T}$, а условие эрмитовости записывается как $A^+=A$.

2. Для действительных гильбертовых пространств комплексное сопряжение оставляет элемент неподвижным, т.е. $A=\overline{A}$. Поэтому условие самосопряжения (5.4.11) превращается в условие симметричности: $A=A^T$.

Пример 5.16.

Рассмотрим дифференциальный оператор D в пространстве дифференцируемых на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ функций, которые стремятся к 0 на бесконечности. Тогда

$$(Dx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{d}{dt}x(t)}_{dv}\cdot\underbrace{\overline{y}(t)}_{u}dt=\underbrace{x(t)\cdot\overline{y}(t)}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\frac{d}{dt}\overline{y}(t)dt=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\frac{d}{dt}\overline{y}(t)dt=-(x,Dy),$$

следовательно, оператор $D=\dfrac{d}{dt}$ является *антиэрмитовым* $\left(A^*=-A\right)$.

В противоположность ему оператор $T=i\dfrac{d}{dt}$ является эрмитовым.

ТЕОРЕМА 5.4.1. Всякий ограниченный оператор T на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ может быть представлен в виде:

$$N = A + iB, \tag{5.4.12}$$

где A и B – самосопряженные (эрмитовы) операторы. Причем

$$T^* = A - iB. \tag{5.4.13}$$

Доказательство.

Пусть T – ограниченный оператор из $\mathcal{H}$. Определим операторы

$$A = \frac{1}{2}\left(T + T^*\right) \text{ и } B = \frac{1}{2i}\left(T - T^*\right),$$

что после проверки условия $A = A^*$, $B = B^*$ доказывает первую часть утверждения теоремы.

Далее находим

$$\left(Tx, y\right) = \left(Ax, y\right) + i\left(Bx, y\right) = \left(x, Ay\right) + i\left(x, By\right) =$$
$$= \left(x, Ay\right) + \left(x, \left(-iBy\right)\right) = \left(x, \left(A - iB\right)y\right) = \left(x, T^*, y\right). \blacksquare$$

Опр. 5.4.3. Ограниченный оператор $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется *унитарным оператором*, если

$$T^*T = TT^* = I. \tag{5.4.14}$$

Замечание. 1. Оператор, который коммутирует со своим сопряженным, называется *нормальным*.

2. Для действительных гильбертовых пространств конечной размерности сопряженный оператор представляется транспонированной матрицей $A^* \equiv A^T$, поэтому (5.4.14) перепишется в виде

$$T^TT = TT^T = I. \tag{5.4.15}$$

Действительные матрицы, удовлетворяющие условию (5.4.15) называются *ортогональными*.

Свойства унитарных операторов.

1. Оператор T является унитарным тогда и только тогда, когда для него существует обратный оператор T^{-1}, причем

$$T^* = T^{-1}. \tag{5.4.16}$$

2. Если T – унитарный оператор, то тогда T^{-1} и T^{*} также унитарные операторы.
3. Унитарный оператор является изометрическим, т.е.

$$\|Tx\| = \|x\|. \tag{5.4.17}$$

Доказательство.

$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = \left(x, T^{*}Tx\right) = (x, x) = \|x\|^2$, что и требовалось доказать. ■

Замечание. В действительности евклидовых (конечномерных) пространствах изометрия означает сохранение расстояния между точками. Следовательно, ортогональные преобразования сохраняют расстояния и наоборот.

§ 5. Спектр самосопряженных и унитарных операторов

Спектры самосопряженных операторов обладают целым рядом важных для гильбертовых пространств свойств. По этой причине самосопряженные операторы образуют один из важнейших классов операторов, имеющих прямое прикладное значение для многих задач, в частности, для теории дифференциальных уравнений, для квантовой механики, для теории оптимизации и т.д.

Свойства спектра самосопряженных и унитарных операторов.

I. *Все собственные значения* самосопряженного оператора A, действующего на произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, *действительны*.

Доказательство.

Пусть $Au = \lambda u$ и $A = A^{*}$.

Тогда имеем

$$\lambda(u,u) = (\lambda u, u) = (Au, u) = \left(u, A^{*}u\right) = (u, Au) = (u, \lambda u) = \overline{\lambda}(u,u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)(u,u) = 0.$$

Так как $(u,u) > 0$ [$u_\lambda \neq 0$ по определению], то $\lambda - \overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda$, что и требовалось доказать. ■

II. Все собственные значения унитарного оператора, действующего на произвольном гильбертовом пространстве, имеют модуль равный 1, т.е. $|\lambda| = 1$.

Доказательство.

Пусть $Au = \lambda u$ и $AA^* = I$.
Тогда

$$(Au, Au) = (\lambda u, \lambda u) = \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot (u, u) = |\lambda|^2 \cdot \|u\|^2.$$

$$\left(u, A^* A u\right) = (u, u) = \|u\|^2,$$

т.е. $|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$, что и требовалось доказать. ■

III. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряженного $\left(A = A^*\right)$ или унитарного $\left(AA^* = I\right)$ оператора, ортогональны.

Доказательство.

Пусть $Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $\left(A = A^*\right)$. Тогда последовательно находим

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, u_2) = (Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = (u_1, \lambda_2 u_2) =$$

$$= \overline{\lambda}_2 (u_1, u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2.$$

Пусть $AA^* = A^* A = I$. Тогда по формуле (5.4.17) $\|Ax\| = \|x\|$.
Заметим, что если $\lambda_1 \overline{\lambda}_2 = 1$, то

$$\lambda_2 = \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda}_2}_{=1} \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \underbrace{|\lambda_2|^2}_{=1} = \lambda_1.$$

Поэтому $\lambda_1 \overline{\lambda}_2 \neq 1$ (!), так как по условию $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Далее

$$\lambda_1 \overline{\lambda}_2 (u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2) = (Au_1, Au_2) = \left(u, A^* A u_2\right) = (u_1, u_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 \overline{\lambda}_2 - 1)(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0, \text{ т.е. } u_1 \perp u_2. \ ■$$

IV. *Теорема Гильберта-Шмидта.*

Для каждого *самосопряженного компактного* оператора A в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существует ортонормированная система собственных векторов $\{u_n\}$, соответствующих ненулевым собственным значениям $\{\lambda_n\}$ такая, что всякий элемент $x \in \mathcal{H}$ имеет единственное представление в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n + v, \tag{5.5.1}$$

где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, а v удовлетворяет уравнению

$$Av = 0, \tag{5.5.2}$$

т.е. является ядром оператора А.

Замечание. Оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *компактным*, если для *любой последовательности точек* $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ последовательность образов $\{Ax_n\}$ *содержит сходящуюся подпоследовательность* (в $\mathcal{H}$ естественно).

Эквивалентный термин *полностью непрерывный оператор*.

В конечномерном пространстве любой ограниченный оператор автоматически компактен. В бесконечномерных пространствах это не так.

V. *Спектральная теорема для самосопряженных компактных операторов.*

Пусть A – самосопряженный компактный оператор на бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда в $\mathcal{H}$ существует полная ортонормированная система $\{v_n\}$ (ортонормированный базис), состоящая из собственных векторов оператора A. Более того, для любого $x \in \mathcal{H}$ справедливо разложение

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, v_n) v_n , \tag{5.5.3}$$

где λ_n – собственные значения, соответствующие собственным векторам v_n.

Замечание. Разница между двумя теоремами заключается в том, что полную ортонормированную систему $\{v_n\}$ образуют собственные векторы, в том числе и соответствующие нулевому собственному значению. Поэтому в теореме Гильберта-Шмидта система $\{u_n\}$ может и не быть полной.

VI. Пусть A и B – самосопряженные компактные операторы, действующие на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда, если A и B коммутируют, т.е. $AB = BA$, то в $\mathcal{H}$ существует ортонормированный базис, составленный из их общих собственных векторов.

Доказательство.

Для коммутируемых операторов A и B имеем

$$ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx,$$

то есть Bx есть собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ при условии, что $Bx \neq 0$. Согласно спектральной теореме $\mathcal{H}$ имеет ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора B. Но эти векторы также являются собственными и для A, что и доказывает теорему (свойство). ■

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5.

Вопросы.

1. Что называется оператором?
2. Что называется областью определения оператора?
3. Какой оператор называется функционалом?
4. Какой оператор называется
   а) линейным?
   б) ограниченным?
5. Как определяется норма линейного оператора?
6. Какой оператор называется непрерывным?
7. Является ли линейный ограниченный оператор непрерывным?
8. Является ли оператор дифференцирования ограниченным?
9. Какой оператор называется обратным к заданному оператору?
10. Сформулировать критерий обратимости оператора.
11. Является ли оператор обратный к линейному оператору линейным?
12. Какой вид имеет ряд Неймана?
13. Что называется собственным значением и собственным вектором линейного оператора?
14. Что называется резольвентой оператора A?
15. Какие точки называются регулярными точками оператора A?
16. Что называется точечным и непрерывным спектром оператора?
17. Может ли линейный оператор в конечномерных пространствах иметь непрерывный спектр?
18. Какой оператор называется сопряженным к оператору A?
19. Какой оператор называется самосопряженным?
20. Какие матрицы называются эрмитовыми, ортогональными?
21. Могут ли собственные значения самосопряженного оператора быть комплексными?
22. Каким свойством обладают собственные векторы самосопряженного или унитарного оператора?

23. Образует ли система собственных векторов самосопряженного компактного оператора базис в соответствующем гильбертовом пространстве?

Задачи.

5.1. Является ли линейным оператор $f:\ \boldsymbol{R_n}(x) \to \boldsymbol{R_n}(x)$, если $\forall P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad f(P(x)) = P'(x)$?

5.2. Является ли линейным оператор $f:\ \boldsymbol{R}_{n\times n}(x) \to \boldsymbol{R}_{n\times n}(x)$, если $\forall A \in \boldsymbol{R}_{n\times n}(x)$:

а) $f(A) = E + A$, где E - единичная матрица порядка n;

б) $f(A) = \alpha A \quad (\alpha \in \boldsymbol{R})$;

в) $f(A) = A^2$.

5.3. Найти в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ матрицу линейного оператора $f:\ \boldsymbol{E}_3 \to \boldsymbol{E}_3$, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y} = [\vec{x}, \vec{a}]$, если $\vec{a} = (2,1-1)$.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

5.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

5.5. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5.6. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

5.7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$.

5.8. Выяснить, является ли ортогональным оператор симметрии относительно плоскости OYZ в пространстве свободных векторов.

5.9. Пусть оператор $f:\ \boldsymbol{E}_n \to \boldsymbol{E}_n$ имеет в некотором ортонормированном базисе матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора в том же базисе, если: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

ГЛАВА 6. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

§ 1. Линейные дифференциальные операторы

Наиболее важный тип дифференциальных уравнений (ДУ) с точки зрения приложений – это ДУ второго порядка. А среди ДУ второго порядка выделяются линейные ДУ.

Общий вид линейного ДУ второго порядка:

$$a_2(x)u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u(x)=f(x), \qquad (6.1.1)$$

где $a_0(x)\neq 0$ в рассматриваемой области.

Уравнение (6.1.1) можно записать в операторной форме

$$Lu=f, \qquad (6.1.2)$$

где

$$L\equiv a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x) \text{ – линейный оператор.} \qquad (6.1.3)$$

Будем анализировать уравнение на промежутке $[a,b]$. Уравнение (6.1.1) должно быть дополнено граничными условиями. Общий вид граничных условий

$$B_1(n)=\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)+\beta_{11}u(b)+\beta_{12}u'(b)=b_1, \qquad (6.1.4)$$

$$B_2(n)=\alpha_{21}u(a)+\alpha_{22}u'(a)+\beta_{21}u(b)+\beta_{22}u'(b)=b_2, \qquad (6.1.5)$$

где α_{ij}, β_{ij}, $b_{1,2}$ – действительные константы.

Чтобы граничные условия были *существенно различными,* необходимо потребовать линейной независимости двух векторов $(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})$ и $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})$.

Существует два общих типа граничных условий. Первый тип называется *раздельными граничными условиями*:

$$\beta_{11}=\beta_{12}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=0, \text{ т.е.}$$

$$B_1(n)=\alpha_{11}u(a)+\alpha_{12}u'(a)=b_1,$$
$$B_2(n)=\beta_{11}u(a)+\beta_{12}u'(a)=b_2. \qquad (6.1.6)$$

Другой тип граничных условий, которые часто встречаются на практике, называется *периодическими граничными условиями*:

$$u(a) = u(b),$$
$$u'(a) = u'(b). \qquad (6.1.7)$$

Важно отметить, что говорить о решении ДУ без задания граничных условий бессмысленно. Понятно также, что граничные условия и формы ДУ должны быть согласованы, объединены в одну систему.

Опр. 6.1.1. Пусть L будет дифференцируемым оператором в пространстве функций $L^2[a,b]$. Тогда *областью определения оператора* L называется подмножество $D(L) \subset L^2[a,b]$, состоящее из все функций, для которых производные, определяющие порядок уравнения, квадратично интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют *однородным* граничным условиям $B_1(u) = B_2(u) = 0$.

Напомним, что дифференциальные операторы не являются ограниченными.

Опр. 6.1.2. Пусть L – дифференциальный оператор в $L^2[a,b]$. Тогда оператор L^* называется *сопряженным* L, если

$$(Lu, v) = (u, L^* v) \qquad (6.1.8)$$

для $\forall\, u \in D(L)$ и $v \in D(L^*)$.

Найдем оператор L^*, сопряженный оператору L (6.1.3):

$$(Lu, v) = \int_a^b (Lu)(x) \cdot v(x) dx =$$

$$= \int_a^b \left(a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x)\right) \cdot v(x) dx \overset{\left[\substack{\text{интегрир.} \\ \text{по частям}}\right]}{=}$$

$$= \left[a_2(x)\left(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right) + \left(a_1(x) - a_2'(x)\right)u(x)v(x)\right]\Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b u(x)\left(\left(a_2(x)v(x)\right)'' - \left(a_1(x)v(x)\right)' + a_0(x)v(x)\right)dx.$$

Таким образом,

$$\left(u, L^{*}v\right)=\int_{a}^{b} u(x)\cdot\left[\left(a_2(x)v(x)\right)''-\left(a_1(x)v(x)\right)'+a_0(x)v(x)\right]dx+$$

$$+\left[a_2(x)(u'v-uv')+\left(a_1(x)-a_2'(x)\right)uv\right]\Big|_{a}^{b}.$$

Оператор L^{*} состоит из оператора второго порядка и нескольких граничных членов. Выполняя под знаком интеграла дифференцирование, получаем для оператора L

$$L=a_2\frac{d^2}{dx^2}+a_1\frac{d}{dx}+a_0.$$

сопряженный оператор L^{*} в виде

$$L^{*}=a_2\frac{d^2}{dx^2}+\left(2a_2'-a_1\right)\frac{d}{dx}+\left(a_2''-a_2'+a_0\right). \qquad (6.1.9)$$

Выражение, определяющее проинтегрированные слагаемые

$$J(u,v)=a_2(vu'-uv')+\left(a_1-a_2'\right)uv \qquad (6.1.10)$$

называется *билинейным конкомитантом (concomitant)* u и v.

Мы можем сказать, что $v\in D\left(L^{*}\right)$, если v – дважды дифференцируемая функция и $J(u,v)\big|_{a}^{b}=0$ для $\forall u\in D(L)$.

Из (6.1.10) следует, что последнее условие выполняется только, если v удовлетворяет двум однородным граничным условиям

$$B_1^{*}(v)=B_2^{*}(v)=0.$$

Другими словами, задаче Коши с однородными граничными условиями

$$Lu=f, \quad B_1(u)=B_2(u)=0$$

соответствует сопряженная задача Коши

$$L^{*}u=f, \quad B_1^{*}(u)=B_2^{*}(u)=0.$$

<u>Опр. 6.1.3.</u> Дифференциальный оператор L называется *самосопряженным*, если

1) $L = L^*$;
2) $D(L) = D(L^*)$.

Дифференциальный оператор L называется *формально самосопряженным*, если выполняется только первое равенство: $L = L^*$.

Сравнивая L (6.1.3) и L^* (6.1.9), мы приходим к выводу, что равенство $L = L^*$ имеет место, если

$$a_1 = a_2'. \qquad (6.1.11)$$

Подставляя это соотношение в (6.1.3), для самосопряженного дифференциального оператора L получаем

$$L = \frac{d}{dx}\left(a_2 \frac{d}{dx}\right) + a_0, \qquad (6.1.12)$$

при этом

$$J(u,v) = a_2(u'v - uv') = -a_2\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}. \qquad (6.1.13)$$

<u>*Пример 6.1*</u>.

Рассмотрим дифференцируемый оператор

$$Lu = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Исследуем следующую задачу Коши:

$$Lu = 0, \qquad a \le x \le b,$$
$$B_1(u) = u(a) = 0; \quad B_2(u) = u'(a) = 0.$$

Здесь $a_0(x) \equiv 0$, $a_1(x) \equiv 0$, $a_2(x) \equiv 1$, поэтому $a_2' = a_1$ и $L = L^*$. Определим сопряженное граничное условие:

$$\left[J(u,v)\right]\Big|_a^b = (u'v - uv')\Big|_a^b = u'(b)v(b) - u(b)v'(b) -$$
$$-\underbrace{u'(a)}_{=0}v(a) + \underbrace{u(a)}_{=0}v'(b) = u'(b)v(b) - u(b)v'(b).$$

Следовательно, $J(u,v)\big|_a^b = 0$ для $\forall u \in D(L)$, если

$$B_1^*(v) = v(b) = 0 \text{ и } \quad B_2^*(v) = -v'(b) = 0.$$

Таким образом, $D(L) \neq D(L^*)$ и оператор L является только формально самосопряженным оператором. ▲

Если оператор L (6.1.3) не является самосопряженным и $a_2(x) \neq 0$ на $[a, b]$, то умножив его на множитель $\frac{1}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$ его можно сделать формально самосопряженным.

§ 2. Задача Штурма-Лиувилля

В предыдущем параграфе были рассмотрены некоторые специальные типы ДУ с самосопряженными дифференцируемыми операторами и их собственные значения и функции. Сейчас мы более подробно проанализируем полную задачу, т.е. задачу решения ДУ, удовлетворяющего определенным граничным условиям.

Рассмотрим ДУ вида:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + (q(x) + \lambda\omega(x))u(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, \qquad (6.2.1)$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ и $\omega(x)$, а также $p'(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Кроме этого, $q(x)$ и $\omega(x)$ – положительны.

Зададим однородные граничные условия:

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \qquad (6.2.2a)$$

$$b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \qquad (6.2.2b)$$

где $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$.

<u>Опр. 6.2.1.</u> Задача решения ДУ (6.2.1) при заданных граничных условиях (6.3.2.*a*,*b*) называется *задачей Штурма-Лиувилля*, а система соотношений (6.2.1) и (6.2.2) называется *регулярной системой Штурма-Лиувилля*.

<u>Пример 6.2.</u>

Рассмотрим регулярную систему Штурма-Лиувилля:

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Пусть $\lambda < 0$. Положим $\nu = \sqrt{|\lambda|} = \sqrt{-\lambda}$. Тогда общее решение уравнения представляется в виде

$$u(x) = Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x}$$

(в чем нетрудно убедиться, решая характеристическое уравнение).

Данное решение должно удовлетворять заданным граничным условиям, из которых получаем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\nu\pi} + Be^{-\nu\pi} = 0. \end{cases}$$

Так как $\nu > 0$, то $e^{\nu\pi} \neq e^{-\nu\pi}$, экспоненты – линейно-независимые функции и соотношения выполняются только при нулевых коэффициентах:

$$A = B = 0 \text{ (!)} \;\Rightarrow\; u(x) \equiv 0 \text{ (!)}$$

Таким образом, задача при $\lambda < 0$ не имеет ненулевых (нетривиальных) решений.

Легко проверить, что и $\lambda = 0$ тоже приводит к нулевому решению, а значит, не может быть собственным значением.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда находим

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Граничные условия дают

$$A = 0,$$
$$B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

При $B = 0$ опять получаем тривиальное решение.

Поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = \pi n \Rightarrow \lambda_n = n^2, \quad n = 1,2,\ldots$$

При этом $u_n = \sin nx$ – собственные функции.

Заметим, что при $n \to \infty$ собственные значения $\lambda_n \to \infty$, откуда следует, что оператор в данной задаче некомпактен. В случае компактности оператора собственные значения λ_n должны стремиться к нулю. ▲

На практике также встречаются и сингулярные системы Штурма-Лиувилля. При этом $p > 0$ на (a, b), причем $p(a) = p(b) = 0$. Граничные условия формулируются как

а) $u(x)$ – ограничена на (a, b);

б) если $p(a)\neq 0$, $p(b)\neq 0$, то $p(x)$ должна удовлетворять условиям типа (6.2.2).

Пусть граничные условия периодические

$$\begin{aligned} p(a) &= p(b), \\ u(a) &= u(b), \\ u'(a) &= u'(b). \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Тогда соответствующая задача называется *задачей Штурма-Лиувилля с периодически граничными условиями*.

<u>*Пример 6.3.*</u>

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля

$$u'' + \lambda u = 0,\ -\pi \le x \le \pi,$$
$$u(-\pi) = u(\pi),\ u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Заметим, что $p(x)=1$, а значит, $p(-\pi)=p(\pi)=1$. Пусть $\lambda > 0$ имеем общее решение

$$u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases} 2B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \\ 2A\sqrt{\pi}\sin\sqrt{\lambda}\pi \end{cases} \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2,\ n = 1,2,3.$$

Для каждого собственного значения λ_n мы имеем 2 линейно-независимых решения $\cos nx$ и $\sin nx$.

Можно легко показать, что система не имеет отрицательных собственных значений $\lambda < 0$, т.е. оператор положительный. Однако при $\lambda = 0$ имеем $u(x)=1$.▲

Свойства оператора Штурма-Лиувилля

$$Lu = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u.$$

I. Для любых $u, v \in D(L)$ справедливо тождество (*тождество Лагранжа)*

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}\left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]. \tag{6.2.4}$$

Доказательство.

$$uLv - vLu = u\frac{d}{dx}\left[p\frac{dv}{dx}\right] + quv - v\frac{d}{dx}\left[p\frac{du}{dx}\right] - quv =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]. \blacksquare$$

II. Если u и v являются решениями уравнения $Lu + \lambda\omega u = 0$ на отрезке $[a,b]$, то тогда справедливо соотношение (*формула Абеля)*

$$p(x)\cdot W(x;u,v) = const, \tag{6.2.5}$$

где $W(x;u,v) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$ – вронскиниан системы $\{u(x), v(x)\}$.

Доказательство.

Имеем

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + (q(x) + \lambda\omega(x))u = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dv}{dx}\right] + (q(x) + \lambda\omega(x))v = 0.$$

Используя эти соотношения, получаем: $u\,Lv - v\,Lu = 0$. Поэтому согласно тождеству Лагранжа

$$[p(uv' - vu')]' = 0 \;\Rightarrow\; p\cdot\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = const. \blacksquare$$

III. Собственные функции регулярной системы Штурма-Лиувилля, соответствующие собственному значению λ, могут отличаться только на константу.

Доказательство.

Пусть u и v – собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, соответствующие одному собственному значению λ. Согласно формуле Абеля имеем

$$p(x)\cdot W(x;u,v) = const.$$

Так как $p(x) > 0$, то тогда, если $W(x_0; u, v) = 0$, то $W(x; u, v) = 0$ в любой точке $x \in [a, b]$. Из граничных условий получаем

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0,$$
$$a_1 v(a) + a_2 v'(a) = 0, \text{ причем } a_1^2 = a_2^2 \neq 0 \ (!)$$

Поэтому в точке $x_0 = a$ вронскиниан равен нулю:

$$W(a; u, v) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0 \ [\text{вторая и первая строчки пропорциональны}]$$

Но тогда, как было установлено выше, и в любой точке $x \in [a, b]$ $W(x; u, v) = 0$, что означает линейную зависимость функций $u(x)$ и $v(x)$. ■

IV. Оператор Штурма-Лиувилля является самосопряженным.

Доказательство.

Так как все константы, входящие в граничные условия действительны, то $v, \bar{v} \in D(L)$.

Так как p, q и ω действительны, то $\overline{Lv} = L\bar{v}$. Следовательно,

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_a^b (\bar{v}Lu - uL\bar{v})dx \overset{\substack{\text{тождество} \\ \text{Лагранжа}}}{=} \left[p(u\bar{v}' - \bar{v}u')\right]\Big|_a^b = 0 \ (\text{ф-ла Абеля}),$$

$$\text{т.к. } u\bar{v}' - \bar{v}u' = \begin{vmatrix} u & \bar{v} \\ u' & \bar{v}' \end{vmatrix}_{|a,b} = 0. \ ■$$

V. Собственные значения системы Штурма-Лиувилля действительны.

Доказательство.

$$0 = (Lu, u) - (u, Lu) = (-\lambda\omega u, u) - (u, -\lambda\omega u) = (\bar{\lambda} - \lambda)\int_a^b \omega(x)|u(x)|^2 dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}. \ ■$$

VI. Собственные функции для различных собственных значений системы Штурма-Лиувилля ортогональны по отношению к скалярному произведению с весовой функцией $\omega(x)$.

Доказательство.

Пусть

$$Lu_1 = -\lambda\omega u_1; \quad Lu_2 = -\lambda\omega u_2 .$$

Тогда имеем

$$u_1 L u_2 - u_2 L u_1 = -\lambda_2 \omega u_1 u_2 + \lambda_1 \omega u_1 u_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\omega u_1 u_2 .$$

С другой стороны имеет место тождество Лагранжа (6.2.4):

$$u_1 L u_2 - u_2 L u_1 = \frac{d}{dx}\left[p\left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right)\right].$$

Приравнивая правые части и интегрируя, получаем:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \omega(x) u_1(x) u_2(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left[p\left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right)\right] dx =$$

$$= p(u_1 u_2' - u_2 u_1')\Big|_a^b = 0 .$$

Таким образом,

$$(u_1, u_2) = \int_a^b \omega(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0 \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2 . \ \blacksquare$$

§ 3. Специальные типы ДУ и задач Штурма-Лиувилля

В этом параграфе мы рассмотрим часто встречающиеся на практике задачи Штурма-Лиувилля, решениями которых являются специальные функции и многочлены. Напомним, что ДУ имеет вид

$$(Lu)(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0, \quad a \le x \le b, \qquad (6.3.1)$$

где L – самосопряженный оператор

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x). \qquad (6.3.2)$$

Функция $\omega(x)$ называется весовой функцией.

Для заданного параметра λ функция u_λ, являющаяся решением ДУ (6.2.1) – (6.2.2) с заданными граничными условиями, называется *собственной функцией, соответствующей собственному значению* λ.

Заранее неизвестно, что для каждого значения λ существует собственная функция u_λ. На практике часто встречаются следующие ДУ.

I. *Дифференциальное уравнение Лежандра.*

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \tag{6.3.3}$$

Здесь $p(x)=1-x^2$, $q(x)=0$, $\omega(x)=1$.

Собственные функции этого уравнения есть полиномы Лежандра:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_n=n(n+1),\ n=1,2,3. \tag{6.3.4}$$

Дифференциальный оператор Лежандра:

$$L=\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}\right].$$

II. *Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра.*

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{du}{dx}\right]-\frac{m^2u}{1-x^2}+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \tag{6.3.5}$$

Здесь $p(x)=1-x^2$, $q(x)=-\dfrac{m^2}{1-x^2}$, $\omega(x)=1$.

Собственным значениям λ_n (6.3.4) соответствуют собственные функции:

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),\ n>m, \tag{6.3.6}$$

которые называются *присоединенными многочленами Лежандра*.

III. *Дифференциальное уравнение Чебышева.*

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -1\le x\le 1. \tag{6.3.7}$$

Здесь $p(x)=\sqrt{1-x^2}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Собственным значениям

$$\lambda = n^2 \tag{6.3.8}$$

соответствуют собственные функции – многочлены Чебышева:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Дифференциальный оператор Чебышева:

$$Lu=-\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx}\right]. \tag{6.3.9}$$

IV. *Дифференциальное уравнение Лагерра.*

$$e^x\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ 0<x<\infty. \tag{6.3.10}$$

Здесь $p(x)=xe^{-x}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=e^{-x}$.

Собственным значениям

$$\lambda = n, \tag{6.3.11}$$

соответствуют собственные функции – многочлены Лагерра:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{x^k}{k!}.$$

V. *Присоединенное дифференциальное уравнение Лагерра.*

$$x^{-\alpha}e^x\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ 0\le x\le\infty. \tag{6.3.12}$$

Здесь $p(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, α – натуральный параметр ДУ ($\alpha\in\mathbb{N}$).

Собственным значениям

$$\lambda_n = n-\alpha \tag{6.3.13}$$

соответствуют собственные функции – *присоединенные многочлены Лагерра*:

$$L_n^{\alpha}(x)=(-1)^n\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left[L_{n+\alpha}(x)\right]=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right). \qquad (6.3.14)$$

VI. *Дифференциальное уравнение Эрмита.*

$$e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right]+\lambda u=0,\ -\infty<x<\infty. \qquad (6.3.15)$$

Здесь $p(x)=e^{-x^2}$, $q(x)=0$, $\omega(x)=e^{-x^2}$.

Собственным значениям

$$\lambda_n=2n, \qquad (6.3.16)$$

соответствуют собственные функции – многочлены Эрмита:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Дифференциальный оператор Эрмита:

$$Lu=-\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right]. \qquad (6.3.17)$$

<u>*Пример 6.4.*</u>

Рассмотрим ДУ вида

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E-x^2\right)\psi=0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Это уравнение Шрёдингера для квантового одномерного гармонического осциллятора (в соответствующих единицах).

Сделаем подстановку

$$\psi=ye^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Последовательно находим:

$$\left(e^{-x^2/2}\right)'=-x^{-x^2/2}$$

$$\psi' = y'e^{-x^2/2} - y\cdot x\cdot e^{-x^2/2} = (y' - yx)e^{-x^2/2}$$

$$\psi'' = (y'' - xy' - y)e^{-x^2/2} - (y' - yx)\cdot xe^{-x^2/2} =$$

$$= \left(y'' - 2xy' + \left(x^2 - 1\right)y\right)e^{-x^2/2}.$$

Таким образом, ДУ принимает вид:

$$\left[y'' - 2xy' + \left(x^2 - 1\right)y\right]\cdot e^{-x^2/2} + \left(E - x^2\right)y\cdot e^{-x^2/2} = 0$$

$$y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0.$$

Проводя дифференцирование в ДУ (6.3.15), получаем

$$e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0 \Rightarrow u'' - 2xu' + \lambda u = 0.$$

Таким образом, уравнение, полученное для функции y, есть уравнение Эрмита.

Собственные значения:

$$E - 1 = 2n \;\Rightarrow\; E_n = 2n + 1,\; n = 0,1,2,\ldots.$$

Соответствующие решения:

$$J_n = H_n(x) \text{ – многочлены Эрмита.}$$

Окончательно, исходное ДУ имеет действительные решения только для $E_n = 2n + 1$. Сами решения имеют вид вида

$$\psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2},\;\; n = 0,1,2,\ldots \text{ – } \textit{функции Эрмита}. \;\blacktriangle$$

§ 4. Основные уравнения математической физики

Задача Штурма-Лиувилля, как правило, возникает при решении уравнений математической физики по методу Фурье. Уравнения математической физики – это класс ДУ в частных производных, которые возникают при описании физических явлений, и которые, как правило, являются линейными ДУ 2-го порядка.

Без углубления в теорию ДУ в частных производных и их классификации (гиперболические, эллиптические, параболические уравнения) приведем основные ДУ в трехмерном пространстве.

I. <u>*Уравнение Лапласа.*</u>

$$\nabla^2 u = 0, \tag{6.4.1}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta \text{ – оператор Лапласа.} \quad (6.4.2)$$

Этому уравнению удовлетворяет электростатический потенциал в отсутствии зарядов, гравитационный потенциал вне массового тела, равновесная конфигурация мембраны с граничными условиями по краям, потенциал скорости идеальной жидкости в ламинарном потоке, распределение температуры в области, где нет источников и т.п.

II. *Уравнение Пуассона*

$$\nabla^2 u = -f(x, y, z). \quad (6.4.3)$$

Этому уравнению удовлетворяет электрический потенциал в пространстве с зарядом, гравитационный потенциал в области, где есть гравитирующая масса, конфигурация мембраны при действии вынуждающей силы (постоянной!), потенциал скорости в потоке идеальной жидкости при наличии источников, распределение температуры в теле опять же при наличии источников.

III. *Неоднородное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = -f(x, y, z). \quad (6.4.4)$$

Это уравнение описывает колебания струны, мембраны, акустические явления в жидкостях, продольные колебания балок, распространение электромагнитных волн в области, где нет источников.

IV. *Неоднородное уравнение распространения тепла или диффузии.*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = -f(x, y, z) \quad (6.4.5)$$

V. *Телеграфное уравнение.*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + a\frac{\partial \phi}{\partial t} + b\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (6.4.6)$$

Это уравнение возникает при изучении распространения электрических сигналов по проводам или кабелям. Уравнению (6.4.6) удовлетворяют как ток I, так и напряжение U.

Это уравнение также возникает при распространении волн давления при изучении пульсаций крови в артериях, а также при изучении одномерного случайного движения.

VI. *Неоднородное уравнение Гельмгольца.*

$$\nabla^2\psi + \lambda\psi = -f(x, y, z). \qquad (6.4.7)$$

Это неоднородное волновое уравнение, которое существенно не зависит от времени.

VII. *Бигармоническое волновое уравнение.*

$$\nabla^4\psi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (6.4.8)$$

В теории упругости колебания тонкой упругой пластины описывается этим уравнением. В случае, когда ψ не зависит от времени, имеем *бигармоническое уравнение*:

$$\nabla^4\psi = 0. \qquad (6.4.9)$$

Это уравнение описывает распределение напряжений в упругой среде. Здесь ψ – так называемая *функция Эйри*. Уравнение также появляется в динамике жидкостей с эффектом вязкости.

Замечание: 1) Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца относятся к классу эллиптических уравнений. Волновые уравнения – уравнения гиперболического типа, а уравнения диффузии и распространении тепла – параболические уравнения.

2) Оператор Лапласа (лапласиан) $\left(\nabla^2 \equiv \Delta\right)$ обладает во многом теми же свойствами, что и оператор Штурма-Лиувилля.

3) $L = \dfrac{\partial}{\partial t} \Rightarrow L^* = -\dfrac{\partial}{\partial t}$, а оператор $\left(\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ формально самосопряжен.

§ 5. Метод Фурье для решения уравнений математической физики

Существует несколько общих подходов к анализу и исследованию ДУ в частных производных. Один из наиболее универсальных из них – это *метод Фурье*.

Суть метода Фурье заключается в разделении переменных. А именно:

1) искомая функция, которая зависит от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, которые в свою очередь зависят только от одной переменой.
2) После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается система из нескольких ОДУ и краевых условий. Эта система представляет собой совокупность задач Штурма-Лиувилля.
3) Искомое решение представляется в виде ряда по собственным функциям этих задач.

В качестве примера рассмотрим задачу о колебании струны.

<u>Пример 6.5.</u>

Найти поперечные отклонения $u(x,t)$ от положения равновесия струны, закрепленной на концах, при заданной начальной конфигурации.

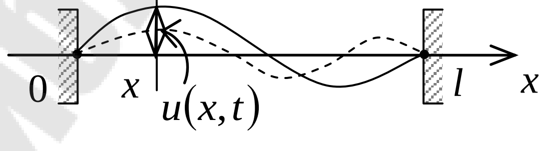
Решение. По существу требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0 \qquad (6.5.1)$$

с граничными и начальными условиями вида:

$$u(0,t) = u(l.t) = 0, \qquad (6.5.2)$$

$$\begin{aligned} &u(x,0) \equiv u\big|_{t=0} = \varphi(x) - \textit{начальная конфигурация}, \\ &u'(x,0) \equiv u'\big|_{t=0} = 0 - \textit{начальная скорость отсутствует} \end{aligned} \qquad (6.5.3)$$



Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (6.5.4)$$

Подставляя $u(x,t)$ в ДУ (6.5.1) и используя линейность уравнения, получаем

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

Каждая часть этого уравнения (равенства) зависит только от своей переменной. Поэтому равенство возможно, только если оба выражения будут константами:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda. \qquad (6.5.5)$$

Подставляя формулу решения (6.5.4) в граничные условия (6.5.2), получаем

$$X(0)\cdot T(t)=X(l)\cdot T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=X(l)=0.$$

Таким образом, функция $X(x)$ должна быть решением следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} &X''+\lambda X=0, \quad 0\le x\le l, \\ &X(0)=X(l)=0. \end{aligned} \qquad (6.5.6)$$

При $\lambda<0$. Положим $\nu=\sqrt{|\lambda|}=\sqrt{-\lambda}$. Тогда общее решение уравнения представляется в виде

$$X(x)+Ae^{\nu x}+Be^{-\nu x},$$

в чем нетрудно убедиться, решая характеристическое уравнение $k^2+\lambda=0 \Rightarrow k^2=-\lambda \Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$.

Решение должно удовлетворять граничным условиям. Поэтому имеем

$$\begin{cases} A+B=0, \\ Ae^{\nu l}+Be^{-\nu l}=0. \end{cases}$$

Так как $\nu>0$, то $e^{\nu l}\ne e^{-\nu l}$; экспоненты линейно независимы, следовательно, $A=B=0 \Rightarrow X(x)=0$ (!).

Таким образом, задача при $\lambda<0$ имеет только нулевое решение и нетривиальных решений нет.

Легко проверить, что $\lambda=0$ также дает нулевое решение.

Пусть $\lambda>0$. Тогда находим

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Граничные условия дают

$$\begin{cases} A = 0, \\ B\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

При $B = 0$ опять получаем тривиальное решение. Поэтому второе равенство выполняется если

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}n^2,\ n = 1,2,... \tag{6.5.7}$$

Собственным значениям λ_n соответствуют собственные функции:

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{6.5.8}$$

Заметим, что при $n \to \infty$ и $\lambda_n \to \infty$, что соответствует некомпактности оператора $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Возвращаясь к уравнению (6.5.5) для функции $T(t)$ получаем

$$\frac{T''}{a^2 T} = -\lambda_n \Rightarrow T'' + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 T = 0. \tag{6.5.9}$$

Общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B\sin\frac{\pi n a t}{l}, \tag{6.5.10}$$

при этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем решение исходного ДУ:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\left[A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n\sin\frac{\pi n a t}{l}\right].$$

В силу однородности граничных условий и уравнения сумма $u_n(x,t)$ также будет решением ДУ (6.5.1). Более того, предположим, что сумму можно распространить на все натуральные *n*, т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\left[A_n\cos\frac{\pi nat}{l}+B_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right]. \qquad (6.5.11)$$

Найдем коэффициенты A_n и B_n, удовлетворяющие начальным условиям (4.5.3):

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot A_n=\varphi(x),\\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot B_n\cdot\frac{\pi na}{l}=0.\end{cases}$$

То есть мы, по-существу, получили разложение функций $\varphi(x)$ и 0 по собственным функциям оператора $D^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Оператор D^2 является самосопряженным, его собственные функции образуют ортонормированный базис в пространстве дважды дифференцируемых функций.

Из второго уравнения получаем, что все $B_n=0$. Из первого уравнения находим коэффициенты A_n:

$$A_n=\frac{1}{\|\cdot\|^2}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$$

$$\left\|\sin\frac{\pi nx}{l}\right\|^2=\int_0^l\sin^2\frac{\pi nx}{l}\,dx=\frac{l}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx. \qquad (6.5.12)$$

Здесь следует отметить, что $\varphi(x)$ – не любая функция, а должна, по крайней мере, быть дважды дифференцируемой (!).

Окончательно, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\cos\frac{\pi nat}{l},$$

где $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$. ▲

§ 6. Функции Бесселя

Функции Бесселя являются, по-видимому, наиболее часто употребляемыми высшими трансцендентными функциями. Они чаще всего встречаются при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, а также при вычислении некоторых определенных интегралов.

Уравнение вида

$$x^2u'' + xu' + \left(x^2 - \nu^2\right)u = 0, \tag{6.6.1}$$

где ν – параметр уравнения, называется *уравнением Бесселя*, а всякое решение этого уравнения, не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*.

После деления на x уравнение (6.6.1) можно привести к форме Штурма-Лиувилля. Добавляя однородные граничные условия, получаем следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu,\ 0 < x < a, \tag{6.6.2}$$

$$u(x) = O\left(x^{\gamma}\right) \text{ при } x \to 0, \tag{6.6.3}$$

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \tag{6.6.4}$$

где $\gamma = \min(\nu,1)$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha + \beta > \nu$.

Очевидно, здесь $p(x) = x$, $q(x) = -\dfrac{\nu^2}{x}$, $\omega(x) = x$.

Чаще всего параметр уравнения ν есть целое число. В этом случае собственными функциями задачи являются *функции Бесселя* $J_\nu(\mu_k, x)$, соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = \mu_k^2,\ k = 1,2,3,\ldots, \tag{6.6.5}$$

где $a \cdot \mu_k$ – положительные нули функции Бесселя $J_\nu(t)$, т.е.

$$J_\nu(a\mu_k) = 0. \tag{6.6.6}$$

Дифференциальный оператор Бесселя имеет вид

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] + \frac{\nu^2}{x}u\,. \qquad (6.6.7)$$

Он положительно определен, а его собственные функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $L^2([0,a])$ относительно скалярного произведения с весовой функцией $\omega(x) = x$:

$$(f,g) = \int_0^a f(x)g(x)\cdot x dx\,. \qquad (6.6.8)$$

Для целочисленного параметра $\nu = n$ функция Бесселя $J_n(x)$ раскладывается в степенной ряд вида:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \qquad (6.6.9)$$

В частности,

$$J_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \qquad (6.6.10)$$

При этом справедливы также соотношения:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\,; \qquad (6.6.11)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)\,; \qquad (6.6.12)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)\,. \qquad (6.6.13)$$

Складывая последние два равенства, дополнительно находим

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) + J_n'(x)\,, \qquad (6.6.14)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_n'(x)\,, \qquad (6.6.15)$$

В частности,

$$J_0'(x) = -J_1(x)\,. \qquad (6.6.16)$$

Замечание: В случае, когда порядок функций Бесселя $\nu \notin \mathbb{Z}$, т.е. не является целочисленным, функции $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ не являются линейно зависимыми и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

Как было отмечено выше функции Бесселя $\{J_n(\mu_k x)\}$ образуют ортонормированный базис на промежутке $[0, a]$. При этом μ_k связаны с нулями функций (см. формулу (6.6.6)).

Разложение Фурье-Бесселя имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n(\mu_k x). \tag{6.6.17}$$

С учетом условия ортонормированности функций Бесселя

$$\int_0^a J_n(\mu_k x) J_n(\mu_l x) x dx = \delta_{kl} \frac{a^2}{2} [J_{n+1}(\mu_k a)]^2. \tag{6.6.18}$$

Коэффициент разложения вычисляется по формуле

$$c_k = \int_0^a f(x) J_n(\mu_n x) \cdot x dx \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{2}[J_{n+1}(\mu_k a)]^2}. \tag{6.6.19}$$

Нули функций Бесселя затабулированы и их можно найти в соответствующих справочниках. Некоторые из них равны:

$$\begin{aligned} &J_0(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 2{,}40;\ x_2 \approx 5{,}52;\ x_3 \approx 8{,}65 \ldots \\ &J_1(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 3{,}83;\ x_2 \approx 7{,}02;\ x_3 \approx 10{,}17 \ldots \\ &J_2(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 5{,}14;\ x_2 \approx 8{,}42;\ x_3 \approx 11{,}62 \ldots \end{aligned} \tag{6.6.20}$$

Пример 6.6.

Найти свободные колебания закрепленной по краю однородной круглой мембраны радиуса *R*.

Решение. Малые колебания мембраны описываются волновым уравнением

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6.6.21}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа.

Исследуем периодические решения, описывающие собственные (нормальные) колебания мембраны. Они имеют в комплексной форме вид

$$u(x, y; t) = u(x, y) e^{-i\omega t}. \qquad (6.6.22)$$

Подставляя данную функцию в уравнение (6.6.21), для функции $u(x, y)$ получим

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \text{ – уравнение Гельмгольца,} \qquad (6.6.23)$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}$ – волновое число.

Симметрия задачи предполагает переход в полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6.6.24)$$

В полярной системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad (6.6.25)$$

так что уравнение (6.6.23) приобретает вид

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + k^2 u = 0. \qquad (6.6.26)$$

Решение ищем с помощью метода разделения переменных:

$$u(r, \varphi) = R(r)\cdot \Phi(\varphi). \qquad (6.6.27)$$

Далее находим

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)\Phi + k^2 R\Phi + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \Bigg| \times \frac{r^2}{R\cdot\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + k^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2 \ (!)$$

Только при положительной константе функция Φ будет удовлетворять условию периодичности $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$. Таким образом, приходи к системе ОДУ

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + n^2\Phi = 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial R}{\partial r}\right) + \dfrac{n^2}{r}R = k^2 rR. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет периодическое решение $\Phi(\varphi)=e^{\pm in\varphi}$, а второе совместно с граничным условием $R(r)=0$ (условие закрепления на концах) представляет собой задачу (6.6.2) – (6.6.4). Поэтому

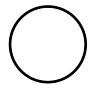
$$R(r)=J_n(\mu r),$$

$$J_n(\mu r)=0 \quad \Rightarrow \quad \mu \to \mu_k,\ k=1,2,\ldots.$$

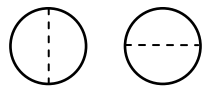
Другими словами,

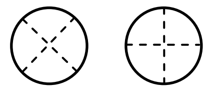
$$u_k = J_n(\mu_k r)\cdot \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm i\omega t}.$$

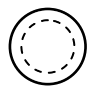
Итак, колебания мембраны с наинизшими частотами описываются функциями

$u_1 \sim J_0(\mu_1 r)=J_0\left(2{,}40\dfrac{r}{R}\right),\ \omega = 2{,}40\dfrac{c}{R}$ 

$\Rightarrow$

$u_1 \sim J_1(\mu_1 r)=J_1\left(3{,}83\dfrac{r}{R}\right),\ \omega = 3{,}83\dfrac{c}{R}\times\begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow$ 

$u_1 \sim J_2(\mu_1 r)=J_2\left(5{,}14\dfrac{r}{R}\right),\ \omega = 5{,}14\dfrac{c}{R}\times\begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow$ 

$u_2 \sim J_0(\mu_2 r)=J_0\left(5{,}52\dfrac{r}{R}\right),\ \omega = 5{,}52\dfrac{c}{R}$ $\Rightarrow$ 

На условных рисунках пунктирными линиями показаны узлы, то есть точки, в которых $u=0$ (неподвижные точки). ▲

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6.

Вопросы.

1. Какой общий вид имеет линейное дифференциальное уравнение второго порядка?
2. Что называется разделенными граничными условиями, периодическими граничными условиями?
3. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля
4. Каким свойством обладает оператор Штурма-Лиувилля?
5. Могут ли собственные значения системы Штурма-Лиувилля быть комплексными?
6. Каким свойством обладают собственные функции системы Штурма-Лиувилля?
7. Какие функции являются собственными для дифференциального уравнения Лежандра, Чебышева?
8. Каковы собственные значения дифференциального уравнения Лаггера, Эрмита?
9. Какой вид имеет уравнение Лапласа?
10. Какие процессы описывает уравнение Лапласа, Пуассона?
11. Какой вид имеет неоднородное волновое уравнение?
12. В чем суть метода Фурье?
13. Какие функции называются цилиндрическими?
14. Можно ли функции Бесселя разложить в степенной ряд?
15. Образовывают ли функции Бесселя ортонормированный базис?

Задачи.

6.1. Решить методом Фурье задачу о малых продольных колебаниях стержня длины l, один конец которого закреплен, а другой свободен. Плотность стержня равна ρ_0, а коэффициент упругости - k_0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \dfrac{k_0}{\rho_0}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi}{2l}x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2l}x. \end{cases}$$

6.2. Решить методом Фурье задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 1 + \cos 3x. \end{cases}$$

6.3. Решить методом Фурье задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 4\sin\dfrac{2\pi}{l}x. \end{cases}$$

6.4. Найти отклонение $u(x,t)$ закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x = l/2$ и отклонением от положения равновесия h, а начальные скорости отсутствовали:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

6.5. На концах однородного изотропного стержня длины l поддерживается нулевая температура. Предполагая, что стенки стержня теплоизолированы от окружающей среды, найти закон распределения температуры в стержне, если известно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = u_0 \frac{x(l-x)}{l^2}, \quad \text{где} \quad u_0 = const.$$

ГЛАВА 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Интеграл Фурье

В курсе математического анализа были рассмотрены условия, при которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т.е. представлена как суперпозиция гармонических колебаний. Напомним достаточный признак сходимости.

ТЕОРЕМА 7.1.1.

Если для интегрируемой функции $f(x)$ при фиксированной точке x и некотором $\delta > 0$ интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty, \tag{7.1.1}$$

то есть существует, то частичные суммы

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{7.1.2}$$

ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся в этой точке к $f(x)$.

Условие сходимости интеграла (7.1.1) называется *условием Дини*. Оно, в частности, выполнено, если в данной точке x функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную, или хотя бы левую и правую производные.

Перенесем этот результат на *непериодические* функции.

Пусть функция $f(x)$ на каждом конечном интервале удовлетворяет условиям **теоремы 7.1.1**. Рассмотрим функцию $f(x)$ на симметричном отрезке $[-l, l]$. Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье на этом отрезке записывается как

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{7.1.3}$$

где коэффициенты разложения вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}tdt,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}tdt. \tag{7.1.4}$$

Подставляя коэффициенты (7.1.4) в разложение (7.1.3), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}tdt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}tdt\right],$$

или после тригонометрических преобразований:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt. \tag{7.1.5}$$

Дополним условие **теоремы 7.1.1.** еще одним требованием, а именно, пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной оси, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dt < \infty. \tag{7.1.6}$$

Перейдем в (7.1.5) к пределу $l \to \infty$. На основании последнего требования первое слагаемое стремиться к 0. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму, распространенную на бесконечный промежуток для интеграла

$$\int_{0}^{\infty} F(\lambda)d\lambda,$$

где $F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)dt$, если положить $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$.

Таким образом, формальный предельный переход дает

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \qquad (7.1.7)$$

Далее введем обозначения

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t dt,\quad b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t dt. \qquad (7.1.8)$$

Тогда равенство (7.1.7) можно записать в виде

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda. \qquad (7.1.9)$$

Равенство (7.1.7) называется *формулой Фурье*.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.1.2.

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место формула (равенство) Фурье (7.1.7).

Замечание: Для доказательства теоремы необходимо обосновать справедливость предельного перехода $l\to\infty$.

Заметим, что в интегральной формуле Фурье (7.1.7) подынтегральная функция является четной по λ. Это позволяет переписать (7.1.7) в симметричной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}dt f(t)\cos\lambda(t-x). \qquad (7.1.10)$$

Далее, из абсолютной интегрируемости функции f следует, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)dt$ существует и представляет собой нечетную функцию по λ. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)dt=0. \qquad (7.1.11)$$

Замечание: Интегралы по λ принимаются в виде главного значения, т.е. пределы вида

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} .$$

После умножения соотношения (7.1.11) на $-i$ и сложения его с соотношением (7.1.10) получим формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt. \qquad (7.1.12)$$

§ 2. Преобразование Фурье

Введем следующую функцию

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt. \qquad (7.2.1)$$

Тогда соотношение (7.1.12) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}dx. \qquad (7.2.2)$$

Определение (7.2.1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции. Таким образом, каждой функции $f\in L_1(-\infty,+\infty)$ мы сопоставляем единственную функцию g, заданную опять же на всей прямой.

Опр. 7.2.1. Функция g, определенная формулой (7.2.1), называется *изображением Фурье* функции f. Связь между функциями f и g, определенная соотношением (7.2.1), называется *интегральным преобразованием Фурье*. Формула (7.2.2), выражающая f через ее изображение Фурье g, называется *формулой обращения* для преобразования Фурье.

Замечание. Иногда коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ разбивают на два множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и формулы (7.2.1) и (7.2.2) записывают в симметричной форме:

$$g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}dx.$$

Однако при всем внешнем сходстве формулы эти по-существу различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле, т.к. $f\in L_1(-\infty,+\infty)$; во второй интеграл существует только в смысле главного значения к

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} \ (!).$$

Кроме этого, первая формула – это определение функции $g(\lambda)$, а вторая – утверждение. Для справедливости второй формулы кроме интегрируемости функции f необходимо наложить еще условие Дини.

<u>*Пример 7.1.*</u>

Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=e^{-\gamma|x|},\quad \gamma>0.$$

Решение. Последовательно находим

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|}(\cos\lambda x)-i\sin\lambda x dx=$$

$$=2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x dx=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.\ \blacktriangle$$

<u>*Пример 7.2.*</u>

Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ ïðè } |x|\le a,\\ 0 \text{ ïðè } |x|>a.\end{cases}$$

Решение. Последовательно находим

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}\notin L_1(-\infty,+\infty).\ \blacktriangle$$

<u>*Пример 7.3.*</u>

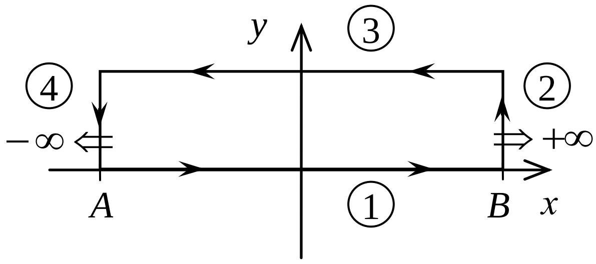
Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x)=e^{-ax^2}.$$

Решение. Имеем

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx.$$

Под интегралом стоит аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости и стремящаяся к нулю вдоль каждой параллельной действительной оси.



$\Rightarrow$ по теореме Коши $\int\limits_{\tilde{A}} e^{-az^2} \cdot e^{-a\lambda z} dz = 0$.

Интеграл по путям 2 и 4 в пределах $A \to -\infty$, $B \to +\infty$ обращается в 0, следовательно,

$$\int\limits_1 + \int\limits_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1 = -\int\limits_3$$

Поменяв направление интегрирования, мы получим: исходный интеграл равен интегралу вдоль любой прямой $z = x + iy$ параллельной оси $0x$. Таким образом

$$g[\lambda] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+iy)^2} \cdot e^{-i\lambda(x+iy)} dx = e^{ay^2 + \lambda y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - 2aixy - i\lambda x} dx =$$

$$= e^{ay^2 + \lambda y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ix(2ay + \lambda)} dx.$$

Выберем $y = -\dfrac{\lambda}{2a}$. Тогда

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx}_{=\sqrt{\pi/a}} = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

При $a = \dfrac{1}{2}$ имеем

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g(\lambda) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Другими словами, функция $f(x)$ при преобразовании Фурье переходит в себя с точностью до постоянного множителя. ▲

§ 3. Свойства преобразования Фурье

Удобно в дальнейшем обозначать преобразование Фурье как $\mathcal{F}(f)$. По-существу $\mathcal{F}$ представляет собой линейный оператор, определенный на пространстве функций $L_1(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим основные свойства этого оператора.

I. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(-\infty,+\infty)$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty,+\infty)$, то последовательность их образов $\{\mathcal{F}[f_n]\}$ (изображений Фурье) сходится на прямой равномерно.

Доказательство.

Результат следует из оценки интегралов:

$$\left|\mathcal{F}[f_n]-\mathcal{F}[f_m]\right| = \left|g_n(\lambda) = g_m(\lambda)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|dx.$$

В полных пространствах всякая фундаментальная последовательность сходится. ■

II. Изображение Фурье $g=\mathcal{F}[f]$ абсолютно интегрируемой функции f есть ограниченная непрерывная функция, которая стремиться к нулю при $|\lambda|\to\infty$.

III. Если f есть абсолютно непрерывная на каждом конечном интервале функция и $f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$, то справедливо равенство

$$\mathcal{F}[f']=i\lambda\mathcal{F}[f]. \qquad (7.3.1)$$

Если $f^{(k-1)}$ есть абсолютно непрерывная на каждом интервале функция и $f,\ldots,f^{(k)}\in L_1(-\infty,+\infty)$, то

$$\mathcal{F}\left[f^{(k)}\right]=(i\lambda)^k\mathcal{F}[f]. \qquad (7.3.2)$$

IV. Если $f^{(k)}$ есть абсолютно интегрируемая функция, то

$$\left|\mathcal{F}[f]\right| = \frac{\left|\mathcal{F}\left[f^{(k)}\right]\right|}{|\lambda|^k}\underset{\lambda\to\infty}{\to}0,$$

то есть $\mathcal{F}[f]$ убывает на ∞ быстрее, чем $\dfrac{1}{|\lambda|^k}$. *Чем больше производных имеет функция f в L, тем быстрее на ∞ убывает ее изображение Фурье.*

V. Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемые функции. Тогда функция $g = \mathcal{F}[f]$ дифференцируема, и имеет место равенство

$$g'(\lambda) = \mathcal{F}[-ixf(x)]. \qquad (7.3.3)$$

Если абсолютно интегрируемыми являются функции $f, xf(x), \ldots, x^p f(x)$, то справедлива формула

$$g^{(k)}(\lambda) = \mathcal{F}\left[(-ix)^k f(x)\right], \quad k = 0,1,\ldots, p. \qquad (7.3.4)$$

Замечание. Доказательство основано на взаимности дифференцирования $\int$ по параметру λ при выполнении условий свойства.

VI. Пусть f_1 и f_2 – интегрируемые на всей прямой функции. Тогда для их свёртки

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \qquad (7.3.5)$$

справедливо равенство

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2]. \qquad (7.3.6)$$

§ 4. Приложение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности

Применение преобразования Фурье к решению дифференциальных уравнений основано на том факте, что оно преобразует операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную. Действительно, пусть требуется решить дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x). \qquad (7.4.1)$$

Тогда, выполняя преобразование Фурье, получим

$$(i\lambda)^{(n)}z + a_1(i\lambda)^{(n-1)}z + \ldots + a_{n-1}i\lambda z + a_n z = g(\lambda), \tag{7.4.2}$$

где $z = \mathcal{F}[y]$, а $g = \mathcal{F}[f]$.

Однако для линейных ДУ с постоянными коэффициентами этот прием не имеет преимуществ перед обычными методами. Кроме того, переход от (7.4.1) к (7.4.2) возможен, только если неизвестная функция $y(x)$ интегрируема на всей числовой прямой (!), а для решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами это, вообще говоря, не имеет места.

Более существенно применение преобразования Фурье к решению ДУ с частными производными, где оно позволяет свести задачу к решению однородного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{7.4.3}$$

где $-\infty < x < +\infty$, $t \ge 0$.

Определим начальное условие:

$$u(x,t_0) = u_0(x) \tag{7.4.4}$$

Далее предположим, что $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $u_0''(x)$ $\in L_1(-\infty,+\infty)$ и будем искать решение поставленной задачи в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $u(x,t)$, $u_x'(x,t)$, $u_{xx}''(x,t)$ $\in L_1(-\infty,+\infty)$ при любом $t \ge 0$;

2) функция $u_t'(x,t)$ имеет в каждом интервале $[a,T]$ интегрируемую можоранту $f(x)$, т.е.

$$|u_t'(x,t)| \le f(x), \text{ где } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty.$$

Выполним в уравнении (7.4.3) преобразование Фурье по переменной x:

$$\mathcal{F}[u_{xx}''(x,t)] = -\lambda^2 v(\lambda,t), \text{ где } v(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(x,t)],$$

$$\mathcal{F}[u_t'(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t'(x,t)e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx\right] = \frac{\partial v}{\partial t} \equiv v_t'(\lambda t).$$

В результате получаем

$$v_t'(\lambda,t) = -\lambda^2 v(\lambda,t) \Rightarrow \frac{\partial v}{v} = -\lambda^2 dt \Rightarrow v(\lambda,t) = v_0(\lambda)e^{-\lambda^2 t},$$

где $v_0(\lambda) = \mathcal{F}[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)e^{-i\lambda x}dx$.

Далее воспользуемся результатом *Примера 7.3*:

$$e^{-\lambda^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\right].$$

Поэтому

$$v(\lambda,t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}\right]\cdot\mathcal{F}[u_0(x)] = \mathcal{F}\left[\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t} * u_0(x)}_{=u(x,t)}\right],$$

т.е.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}u_0(x-\xi)d\xi .$$

Решение уравнения теплопроводности получено в форме *интеграла Пуассона*.

Замечание. Аналогичный прием можно использовать и для других типов уравнений математических функций, где преобразование Фурье приводит к появлению функций Грина.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7.

Вопросы.

1. При каком достаточном условии (условие Дини) тригонометрический ряд Фурье сходится?
2. Какой тип функций можно разложить в ряд Фурье, и какие функции не представляются в виде суммы ряда Фурье?
3. Какой вид имеет интегральная формула Фурье?
4. Запишите формулу Фурье в комплексной форме.
5. Что называется преобразованием Фурье?
6. Является ли преобразование Фурье ограниченной, непрерывной функцией?

7. При каких условиях преобразование Фурье есть дифференцируемая функция? Чему равна производная этой функции?
8. Записать формулу свертки.
9. Целесообразно ли применять преобразование Фурье для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
10. Для каких уравнений применение преобразования Фурье целесообразно?

Задачи.

Представить функцию $f(x)$ в виде интеграла Фурье:

7.1. $f(x)=\begin{cases}1-|x|/a, & \text{если } |x|\le a,\\ 0, & \text{если } |x|>a.\end{cases}$

7.2. $f(x)=1/(x^2+a^2), \quad a\ne 0.$

7.3. $f(x)=\begin{cases}\sin\omega x, & \text{если } |x|\le 2\pi n/\omega,\\ 0, & \text{если } |x|>2\pi n/\omega, \quad n\in N, \omega>0.\end{cases}$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

7.4. $f(x)=x^2e^{-|x|}.$

7.5. $f(x)=\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right).$

7.6. $f(x)=\begin{cases}e^{ix}, & \text{если } |x|\le\pi,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi.\end{cases}$

7.7. $f(x)=e^{-x^2/2}\cos ax.$

7.8. $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right).$

7.9. $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{если } |x|\le 1,\\ 1, & \text{если } 1<|x|<2,\\ 0, & \text{если } |x|\ge 2.\end{cases}$

7.10. Пусть $f(y)=F[f(x)]$. Доказать, что

$$F[e^{iax}f(x)]=f(y-a), a\in R.$$

7.11. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^{12}}$ имеет непрерывную производную десятого порядка.

ГЛАВА 8. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента *f*, определенного для $t \ge 0$.

Опр. 8.1.1. Числовая последовательность вида

$$a_n = f(n),\ n = 1,2,\ldots \tag{8.1.1}$$

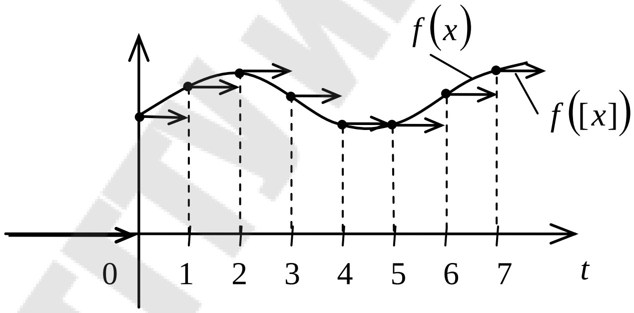
называется *решетчатой функцией*. При этом функция $f(t)$ называется *порождающей функцией*.

Замечание. 1) В дальнейшем будем предполагать, что при $n < 0$ $f(n) \equiv 0$.

2) Иногда решетчатую функцию называют ступенчатой, при этом

$f(x) \Rightarrow f([x])$, [*x*] – целое число.

Ее график



Опр. 8.1.2. *Изображением* решетчатой функции f_n называется комплекснозначная функция $D\{f_n\}$ комплексного переменного *p*, которая определяется как

$$D\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f_n. \tag{8.1.2}$$

Переход от функции $f(n)$ к функции $f^*(p) = D\{f_n\}$ по формуле (8.1.2) называется *дискретным преобразованием Лапласа*.

Выполним замену

$$z = e^p. \tag{8.1.3}$$

Тогда ряд (8.1.2) запишется в виде

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \equiv z\{f_n\}. \qquad (8.1.4)$$

Опр. 8.1.3. Переход от функции $f(n)$ к функции $F^*(z)$ по формуле (8.1.4) называется *z-преобразованием*.

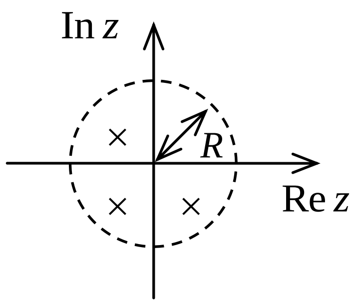
Обозначение: z-преобразование будем обозначать как $f_n \doteq F^*(z)$

Замечание. Таким образом, дискретное z-преобразование и преобразования Лапласа связаны соотношением

$$D\{f_n\} = Z\{f_n\}_{z = e^p} = F^*(e^p).$$

Как известно из теории аналитических функций ряд (8.1.4) сходится вне некоторого круга в комплексной плоскости, то есть при

$$|z| > R \geq 0.$$



Необходимым и достаточным условием существования такого круга, т.е. чтобы радиус R не был равен ∞, является наличие двух положительных постоянных K и k таких, что

$$|f_n| < K \cdot k^n. \qquad (8.1.5)$$

При выполнении этих условий изображение F^* представляет собой в области $|z| > R$, в том числе и в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, аналитическую функцию, следовательно, все особенности лежат внутри круга $|z| \leq R$.

Пример 8.1.

Найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = e^{\alpha n}$.

Решение. Имеем

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}} \quad \text{при} \quad |z| > e^{\operatorname{Re}\alpha}.$$

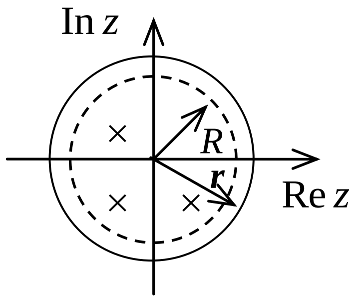
В частности, при $\alpha = 0$ получаем

$$f_n = 1 \doteq \frac{z}{z-1}. \ \blacktriangle$$

§ 2. Обращение z-преобразования

Согласно формуле для коэффициентов ряда Лорана, имеем

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C F^*(z)\cdot z^{n-1}dz,\; n = 0,1,2,\ldots, \qquad (8.2.1)$$



где интеграл следует взять по окружности радиуса $r > R$, или по эквивалентной замкнутой кривой, содержащей внутри себя все особые точки.

Положим в формуле (8.2.1) $z = re^{i\varphi}$, получим

$$f_n = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^*\left(re^{i\varphi}\right)e^{in\varphi}d\varphi$$

или

$$\frac{f_n}{r^n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^*\left(re^{i\varphi}\right)e^{in\varphi}d\varphi. \qquad (8.2.2)$$

Таким образом, величины $\frac{f_n}{r^n}$ суть коэффициенты Фурье функций $F^*\left(re^{i\varphi}\right)$.

Далее, рассмотрим функцию $F^*\left(\frac{1}{z}\right) = F^*\left(z^{-1}\right)$. Ее разложение имеет вид ряда Тейлора:

$$F^*\left(z^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots.$$

Таким образом, используя формулу для коэффициентов ряда Тейлора, имеем соотношение

$$f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}F^*\left(z^{-1}\right)\Bigg|_{z=0} \quad (n = 0,1,\ldots). \qquad (8.2.3)$$

На практике функция $F^*(z)$ часто представляет собой рациональную функцию:

$$F^*(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)},\ n\le m. \qquad (8.2.4)$$

Выполняя формальное деление $P_n(z)$ на $Q_m(z)$, можно восстановить сколь угодно большое число значений f_n.

<u>*Пример 8.2.*</u>

Пусть $F^*(z)=\dfrac{z}{z-2}$. Вычисляем

$$\begin{array}{r|l} z & z-2 \\ \cline{2-2} -\ z-2 & 1+2\cdot\frac{1}{z}+4\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots \\ \hline 2 & \\ -\ 4-\frac{4}{z} & \\ \hline \frac{4}{z} & \\ -\ \frac{4}{z}-\frac{8}{z^2} & \\ \hline \frac{8}{z^2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z-2}=1+2\cdot\frac{1}{z}+4\cdot\frac{1}{z^2}+8\cdot\frac{1}{z^3}+\ldots,$$

то есть

$$f_0=1,\ f_1=2,\ f_2=4,\ f_3=8,\ \ldots$$

▲

§ 3. Свойства z-преобразования

I. <u>*Линейность.*</u>

Если $f_n \doteq F^*(z)$ и $g_n \doteq G^*(z)$, то

$$\alpha f(n)+\beta g(n) \doteq \alpha F^*(n)+\beta G^*(n), \qquad (8.3.1)$$

где правая часть является аналитической функцией при $|z|>\max\{R_f, R_g\}$.

II. <u>*Теорема запаздывания*</u> (первая теорема смещения).

Если $f_n \doteq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \doteq z^{-k}F^*(z),\ k=1,2,\ldots \qquad (8.3.2)$$

Доказательство.

Обозначим $\Phi^*(z) \doteq f_{n-k}$. Тогда

$$\Phi^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} .$$

Но при отрицательных индексах все $f_{n-k} = 0$. Поэтому суммирование необходимо начинать с $n = k$:

$$\Phi^*(z) = \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \begin{bmatrix} n-k=m \\ n=k+m \end{bmatrix} = \sum_{n=k}^{\infty} f_m z^{-m} \cdot z^{-k} = F^*(z) \cdot z^{-k},$$

что и требовалось доказать. ■

III. *Теорема опережения* (вторая теорема смещения).

Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то для любого целого $k > 0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \risingdotseq z^k \left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \right]. \tag{8.3.3}$$

Доказательство.

Пусть $f_{n+k} \risingdotseq F^*(z)$. Тогда находим

$$f_{n+k} \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{n=-k}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} - \sum_{n=-k}^{-1} f_{n+k} z^{-n} = \begin{bmatrix} n+k=m \\ n=m-k \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m} \cdot z^k - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m} \cdot z^k = z^k \cdot \left[F^*(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot z^{-m} \right]. \ ■$$

IV. *Дифференцирование изображения*.

Справедливо соотношение

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} f_n \risingdotseq (-z)^k \cdot \frac{d^k}{dz^k} F^*(z), \quad k = 1,2,... \tag{8.3.4}$$

В частности,

$$n\, f_n \risingdotseq -zF^*(z), \tag{8.3.5}$$

$$n(n+1)\, f_n \risingdotseq -z^2 [F^*(z)]'', \tag{8.3.6}$$

V. *Изображение суммы.*

Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то

$$\sum_{m=0}^{n-1} f_m \risingdotseq \frac{1}{z-1} F^*(z). \qquad (8.3.7)$$

Доказательство.

Обозначим $S_n = \sum_{m=0}^{n-1} f_m$, тогда

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-2} f_m + f_{n-1} = S_{n-1} + f_{n-1}.$$

Используя теорему смещения, находим $\Phi^*(z) \risingdotseq S(z)$:

$$\Phi^*(z) = z^{-1} \cdot \Phi^*(z) + z^{-1} \cdot F^*(z) \quad \Rightarrow \quad \Phi^*(z) = \frac{1}{z-1} F^*(z). \ \blacksquare$$

VI. <u>*Теорема подобия.*</u>

Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то справедливо соотношение

$$\alpha^{-n} f_n \risingdotseq F^*(\alpha z), \qquad (8.3.8)$$

где $\alpha \neq 0$.

VII. <u>*Теорема о свертке оригиналов - последовательностей.*</u>

Пусть $f_n \risingdotseq F^*(z)$, $g_n \risingdotseq G^*(z)$, тогда справедливо соотношение

$$\sum_{m=0}^{n} f_m g_{n-m} \risingdotseq F^*(z) G^*(z). \qquad (8.3.9)$$

VIII. <u>*Теорема о свертке изображений.*</u>

Пусть $f_n \risingdotseq F^*(z)$, $g_n \risingdotseq G^*(z)$, тогда справедливо соотношение

$$f_n g_n \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int_C F^*(\xi) G^*\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \qquad (8.3.10)$$

Здесь интеграл берется по окружности $|\xi| = r$, где r удовлетворяет неравенству $R_F < r < \dfrac{z}{R_G}$.

IX. *Теорема о начальном значении.*

Если изображение $F^*(z) \doteq f_n$ существует, то

$$f_0 \doteq \lim_{z\to\infty} F^*(z) \tag{8.3.11}$$

независимо от пути стремления к ∞.

Следствие.

$$\begin{aligned} f_1 &= \lim_{z\to\infty} z\left(F^*(z) - f_0\right), \\ f_2 &= \lim_{z\to\infty} z^2\left(F^*(z) - f_0 - f_1 z^{-1}\right) \text{ и т.д.} \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

X. *Теорема о конечном значении.*

Если изображение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1+0} (z-1)F^*(z). \tag{8.3.13}$$

Замечание. Условие существования предела очень важно. Так, например,

$$Z\{(-1)^n\} = \frac{z}{z+1} \Rightarrow \quad \lim_{z\to 1+0} (z-1)\cdot\frac{z}{z+1} = 0,$$

но числовая последовательность $\{(-1)^n\}$ предела не имеет!

Пример 8.3.

Найти изображение $f_n = n$.

Решение. Заметим, что

$$Z\{1\} = \frac{z}{z-1}.$$

Тогда, используя свойство дифференцирования изображения (8.3.5), находим

$$n = n\cdot 1 \doteq (-z)\cdot\left(\frac{z}{z-1}\right)' = (-z)\cdot\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \ \blacktriangle$$

Пример 8.4.

Найти изображение $f_n = \sin an$.

Решение. Имеем

$$\sin an = \frac{e^{ian} - e^{-ian}}{zi}; \quad e^{ian} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \frac{z}{z - e^{i\alpha}}; \quad e^{i-an} \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \frac{z}{z - e^{-i\alpha}}.$$

Тогда

$$\sin an \mathrel{\stackrel{\bullet}{-}} \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i\alpha}} - \frac{z}{z - e^{-i\alpha}}\right] = \frac{z}{2i} \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{\left(z - e^{i\alpha}\right)\left(z - e^{-i\alpha}\right)} = \frac{z \sin\alpha}{z^2 + 2z\cos\alpha + 1}. \blacktriangle$$

Таблица 8.1

Таблица соответствия для z-преобразований

№	$\boldsymbol{f_n}$	$\boldsymbol{F^*(z)}$
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
3	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	a^n	$\frac{z}{z-a}$
6	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
7	C_n^k	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8	$a^n \sin n\tau$	$\frac{az\sin\tau}{z^2 - 2az\cos\tau + a^2}$
9	$a^n \cos n\tau$	$\frac{z(z - a\cos\tau)}{z^2 - 2az\cos\tau + a^2}$
10	$a^n \operatorname{sh} n\tau$	$\frac{az\operatorname{sh}\tau}{z^2 - 2az\operatorname{ch}\tau + a^2}$
11	$a^n \operatorname{ch} n\tau$	$\frac{z(z - a\operatorname{ch}\tau)}{z^2 - 2az\operatorname{ch}\tau + a^2}$
12	$T_n(x) = \cos(n\arccos x)$	$\frac{z(z-x)}{z^2 - 2xz + 1}$
13	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$

§ 4. Разностные уравнения

<u>Опр. 8.4.1.</u> *Разностью первого порядка* решетчатой функции f_n называется величина, обозначаемая как Δf_n, и равная

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n. \tag{8.4.1}$$

Разностью второго порядка $\Delta^2 f_n$ называется величина, определяемая как

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n. \tag{8.4.2}$$

Разностью k *-го порядка* $\Delta^k f_n$ называется величина

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n. \tag{8.4.3}$$

Найдем явные выражения для $\Delta^k f_n$. Последовательно 163ычисляяем

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - f_{n+1} + f_n = f_{n+2} - 2 f_{n+1} + f_n;$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_n = \Delta^2 f_{n+1} - \Delta^2 f_n &= \left(f_{n+3} - 2 f_{n+2} + f_{n+1}\right) - \left(f_{n+2} - 2 f_{n+1} + f_n\right) = \\ &= f_{n+3} - 3 f_{n+2} + 3 f_{n+1} - f_n. \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \quad \text{где } C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}. \tag{8.4.4}$$

<u>Пример 8.5.</u>

Найти разность k -го порядка ($k = 1,2,\ldots$) для решетчатой функции $f_n = 3n^2 - n$.

Решение. Находим

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = 3(n+1)^2 - (n+1) - 3n^2 + n = \underbrace{6n+4}_{g_n};$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = 6(n+1) + 4 - 6n - 4 = 6;$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta\left(\Delta^2 f_n\right) = 6 - 6 = 0;$$

$$\Delta^4 f_n = \Delta^5 f_n = \ldots = 0.$$

Здесь для конкретных расчетов удобно пользоваться не общей формулой (8.4.4), а рассматривать разности как тоже решетчатые функции:

$$\Delta f_n = f_n^{(1)};\ \Delta^2 f_n = \Delta f_n^{(1)} = f_n^{(2)} \text{ и т.д. } \blacktriangle$$

ТЕОРЕМА 8.4.1. (о z-преобразовании разности)

Пусть $f_n \doteq F^*(z)$. Тогда z-преобразования разностей равны

$$\Delta f_n \doteq (z-1)F^*(z) - zf_0, \tag{8.4.5}$$

$$\Delta^k f_n \doteq (z-1)^k F^*(z) - z\sum_{m=0}^{k-1}(z-1)^{k-m-1}\left(\Delta^m f\right)_0, \tag{8.4.6}$$

Доказательство.

Используя определение разностей, соотношение (8.4.4) и теорему опережения (8.3.3), получаем

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n \doteq z\left(F^*(z) - f(0)\right) - F^*(z) = (z-1)F^*(z) - zf(0).$$

Пусть при $k = l$ формула (8.4.6) верна. Найдем $\Delta^{l+1} f(n)$. Обозначим $\Delta^l f_n \doteq \Phi_l^*(z)$, где $\Phi_l^*(z)$ – правая часть формулы (8.4.6). Тогда последовательно находим

$$\Delta^{l+1} f(n) = \Delta^l f(n+1) - \Delta^l f(n) \doteq (z-1)\Phi_l^*(z) - z\Delta^l f(0), \text{ т.е.}$$

$$\Phi_{l+1}^*(z) = (z-1)\Phi_l^*(z) - z\Delta^l f(0)$$

$$\Phi_l^*(z) = (z-1)\Phi_{l-1}^*(z) - z\Delta^{l-1} f(0) \text{ и т.д.}$$

Поэтому

$$\Phi_{l+1}^*(z) = (z-1)\left[(z-1)\Phi_{l-1}^*(z) - z\Delta^{l-1} f(0)\right] - z\Delta^l f(0) =$$

$$= (z-1)^2\Phi_{l-1}^*(z) - z\left[(z-1)\Delta^{l-1} f(0) + \Delta^l f(0)\right] =$$

$$= (z-1)^3\Phi_{l-2}^*(z) - z\left[(z-1)^2\Delta^{l-2} f(0) + (z-1)\Delta^{l-1} f(0) - \Delta^l f(0)\right] =$$

$$= \ldots = (z-1)^{l+1} \underbrace{\Phi_0^*(z)}_{=F^*(z)} - z\left[(z-1)^l \Delta^0 f(0) + \ldots + (z-1)^{l-1} \Delta^l f(0)\right] =$$

$$= (z-1)^{l+1} F^*(z) - z \sum_{m=0}^{l} (z-1)^{l-m} \Delta^m f(0),$$

что совпадает с (8.4.6) при $k = l+1$. Таким образом, согласно методу математической индукции соотношение (8.4.6) справедливо для любого k. ■

Следствие. Если $\Delta^m f(0) = 0$, $m = 0,1,2,\ldots,k-1$, то

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (z-1)^k F^*(z). \qquad (8.4.7)$$

<u>Опр. 8.4.2.</u> Уравнение вида

$$F\left(n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)\right) = 0, \qquad (8.4.8)$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция, называется *разностным уравнением k-го порядка*.

Безусловно всякое разностное уравнение, используя формулу (8.4.4) можно записать как

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}) = 0. \qquad (8.4.9)$$

Уравнения в форме (8.4.9) называют *рекуррентными уравнениями k-го порядка*.

Решение разностных уравнений аналогично решению ДУ с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Рассмотрим рекуррентное уравнение:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = \varphi(n). \qquad (8.4.10)$$

Применяя z-преобразования

$$f(n) \risingdotseq F^*(z),\ \varphi(n) \risingdotseq \Phi^*(z),$$

получим линейное уравнение относительно $F^*(z)$.

После определения $F^*(z)$ необходимо вернуться назад к оригиналу – последовательности. Общее решение будет содержать неопределенные константы $f(0)$, $f(1)$, … , $f(k-1)$, которые фиксируются после наложения начальных условий

$$f(0)=f_0\,,\ f(1)=f_1,\ \dots\,,\ f(k-1)=f_k\,. \qquad (8.4.11)$$

<u>*Пример 8.6.*</u>

Решить уравнение $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$, $x_0=1$, $x_1=2$.

Решение. Пусть $x_n \mathrel{\overset{\bullet}{-}} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} z\left(X^*(z)-x_0\right)=z\left(X^*(z)-1\right)=zX^*(z)-z\,,$$

$$x_{n+2} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} z^2\left(X^*(z)-x_0-x_1z^{-1}\right)=z^2X^*(z)-z^2-2z\,.$$

Изображение уравнения:

$$\left(z^2-z+1\right)X^*(z)=z^2+z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X^*(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z+1}=\frac{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}z}{z^2 2\cdot z\cdot\frac{1}{2}+1}=\left[\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\right]=$$

$$=\frac{z^2-z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2-2z\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1}+\sqrt{3}\,\frac{z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{z^2-2z\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} \cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}=$$

$$=2\sin\frac{(2n+1)\pi}{6}\,.$$

Ответ: $x_n=2\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{6}$. ▲

<u>*Пример 8.7.*</u>

Решить уравнение $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3^n$.

Решение. Пусть $x_n \mathrel{\overset{\bullet}{-}} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} z\left(X^*(z)-x_0\right),$$

$$x_{n+2} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} z^2\left(X^*(z)-x_0-x_1z^{-1}\right),$$

$$3^n \risingdotseq \frac{z}{z-3}.$$

Имеем

$$z^2X^*(z) - z^2x_0 - zx_1 - 4zX^*(z) + 4zx_0 + 4X^*(z) = \frac{z}{z-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (z-2)^2X^*(z) - z^2x_0 - (x_1 - 4x_0)z = \frac{z}{z-3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^*(z) = x_0\frac{z^2}{(z-2)^2} + (x_1 - 4x_0)\frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{(z-3)(z-2)^2}.$$

Преобразуем слагаемые следующим образом

$$\frac{z^2}{(z-2)^2} = z \cdot \frac{(z-2)+2}{(z-2)^2} = \frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{(z-2)^2}$$

$$\frac{z}{(z-3)(z-2)^2} = z \cdot \frac{1}{(z-3)(z-2)^2} = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-2)^2}.$$

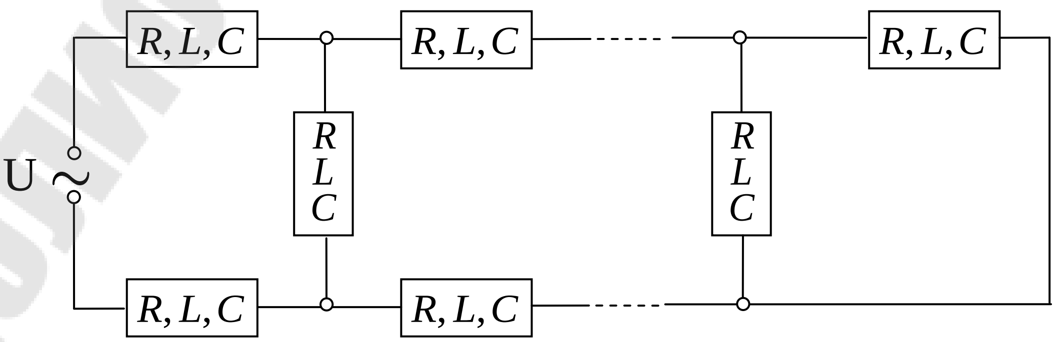
Так как $\frac{z}{z-2} \fallingdotseq 2^n$; $\frac{z}{(z-2)^2} \fallingdotseq n \cdot 2^{n-1}$; $\frac{z}{z-3} \fallingdotseq 3^n$, то

$$x_n = x_0\left(2^n + n \cdot 2^n\right) + (x_1 - 4x_0) \cdot n \cdot 2^{n-1} + 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1} =$$

$$= 3^n + 2^n\underbrace{(x_0 - 1)}_{C_1} + n \cdot 2^n\underbrace{\left(x_0 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_0 - \frac{1}{2}\right)}_{C_2} = 3^n + (C_1 + nC_2) \cdot 2^n.$$

Ответ: $x_n = 3^n + (C_1 + nC_2) \cdot 2^n$. ▲

<u>Замечание.</u> Разностные уравнения используются для определения системы токов и напряжений в теории фильтров:



ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 8.

Вопросы.

1. Что называется решетчатой функцией?
2. Что называется изображением решетчатой функции?
3. Что называется z-преобразованием?
4. Сформулировать свойства z-преобразования.
5. Что называется разностью k-го порядка решетчатой функции?
6. Какой вид имеет z -преобразование разности k-го порядка?
7. Что называется разностным уравнением k-го порядка для решетчатой функции?

Задачи.

Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

8.1. $f_n = e^{-n}$.

8.2. $f_n = n^2$.

Используя свойства дискретного преобразования Лапласа, найти изображения следующих функций:

8.3. $f_n = \cos an$.

8.4. $f_n = \operatorname{sh} n$.

8.5. $f_n = (n+2)^2$.

8.6. $f_n = n^2 e^{2n}$.

Найти разности k -го порядка ($k = 1,2,\ldots$) для решетчатых функций:

8.7. $f_n = 3n + 2$.

8.8. $f_n = n^2 - n$.

Пользуясь теоремой об изображении суммы, найти сумму:

8.9. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m^2$.

8.10. $\sum\limits_{m=0}^{n-1} m \cos am$.

Найти оригиналы для следующих изображений:

8.11. $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$.

8.12. $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейные разностные уравнения:

8.13. $x_{n+1} - 2x_n = 0, \qquad x_0 = 1.$

8.14. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$

8.15. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$

8.16. $x_{n+2} - 4x_n = 4^n, \qquad x_0 = x_1 = 1.$

8.17. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n3^n, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$

ГЛАВА 9. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Задачи вариационного исчисления

I. *Задача о брахистохроне*.

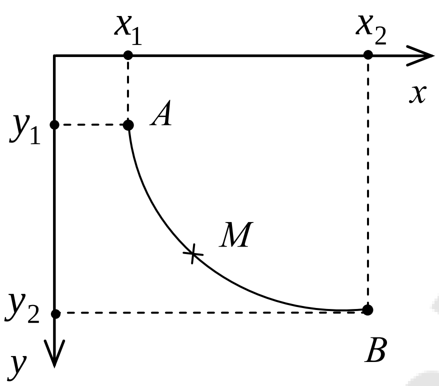
Замечание. $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ – кратчайший; $\chi\rho o\nu o\varsigma$ – время.

Это задача, с которой по-существу, связано начало вариационного исчисления.

Считается, что в июне 1696 г. Йоган Бернулли перед своими учениками поставил следующую задачу:

«Даны две точки A и B в вертикальной плоскости. Найти для движущейся частицы M путь AMB, спускаясь вдоль которого под действием силы тяжести, она может в кратчайшее время достичь из точки A точку B».

Предположим, что точки A и B лежат в плоскости X0Y с осью 0X, направленной вниз.



Положим $A = A(x_1, y_1)$, $B = B(x_2, y_2)$ и пусть $y = y(x)$ – уравнение дуги, соединяющей точки A и B так, что

$$x_1 < x_2,\ \ y_1 = y(x_1),\ \ y_2 = y(x_2),\ \ y_1 < y_2.$$

Скорость движения вдоль кривой равна $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Тогда время спуска равно

$$T = \int_{AB} \frac{ds}{dv} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx.$$

Определим скорость v как функцию координаты x из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy - mgy_1 \text{ (начальная скорость равна 0).}$$

Отсюда $v = \sqrt{2g(y-y_1)}$ (ось $0Y$ направлена вниз), поэтому получим

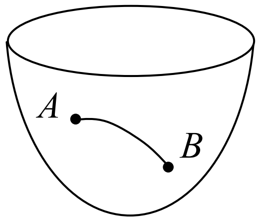
$$N = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} dx. \qquad (9.1.1)$$

Задача сводится к определению функции $y(x)$, для которой интеграл (9.1.1) достигает наименьшего возможного значения.

II. *Задача о геодезических*.

На заданной поверхности Ф требуется найти линию, соединяющую две фиксированные точки поверхности, имеющую наименьшую длину. Такие кривые называются *геодезическими*.

Пусть поверхность Ф задана параметрически



$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \tag{9.1.2}$$

Выразим дифференциал длины дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{9.1.3}$$

Последовательно находим

$$\begin{cases} dx = x'_u du + x'_v dv \\ dy = y'_u du + y'_v dv \\ dz = z'_u du + z'_v dv \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$ds^2 = P(u,v)du^2 + 2Q(u,v)dudv + R(u,v)dv^2, \tag{9.1.4}$$

где

$$\begin{aligned} P(u,v) &= x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \\ Q(u,v) &= x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v \\ R(u,v) &= x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2. \end{aligned} \tag{9.1.5}$$

Параметры u и v называются координатами точек поверхности. Зафиксируем на поверхности точки $P_1(u_1, v_1)$ и $P_2(u_2, v_2)$. Считая $u_1 < u_2$, рассмотрим кривую, лежащую на поверхности и соединяющую точки P_1 и P_2. Зададим ее явно:

$$v = v(u), \;\; u \in [u_1, u_2].$$

Тогда длина дуги P_1P_2 дается интегралом:

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}\, du\,. \tag{9.1.6}$$

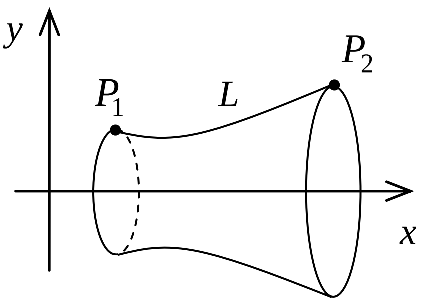
Задача свелась к выбору функции $v = v(u)$ так, чтобы интеграл (9.1.6) имел наименьшее возможное значение.

III. *Задача о наименьшей поверхности*.

Даны две точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ плоскости $X0Y$, причем $x_1 < x_2$. Пусть $y = y(x)$ – уравнение кривой, соединяющей точки P_1 и P_2, т.е.

$$y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2).$$

Кривая L вращается вокруг оси $0X$. Требуется найти линию L такую, чтобы площадь поверхности была наименьшей.



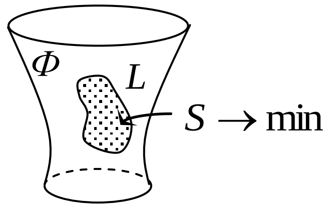
Площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{9.1.7}$$

Таким образом, требуется определить функцию $y(x)$, которая минимизирует интеграл (9.1.7). Такие поверхности называются *катеноидами*.

Проблема Плато.

Найти поверхность, проходящую через заданную пространственную замкнутую кривую так, чтобы площадь, ограниченная кривой, была наименьшей. (Обобщение предыдущей задачи)



Все приведенные задачи сводятся к определению (отысканию) гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей начальным условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \tag{9.1.8}$$

которая минимизирует интеграл типа

$$I[\gamma] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx, \qquad (9.1.9)$$

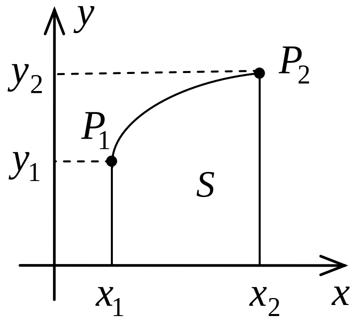
где F – заданная функция трех аргументов.

Такие задачи называются *простейшими задачами вариационного исчисления*.

IV. *Изопериметрическая задача.*

Рассмотрим следующую задачу, которую приписывают первой карфагенской царице Дидо (задача Дидоны из «Энеиды» Вергилия), около 850 года до Рождества Христова.

Среди всех гладких кривых длины L, соединяющих заданные точки P_1 и P_2 ($L > |P_1P_2|$) найти ту, которая ограничивает наиболее возможную площадь, заключенную между отрезками двух перпендикуляров, опущенных из точек P_1, P_2 на ось $0X$.



По-существу, требуется найти функцию $y(x)$ такую, что

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = L, \qquad (9.1.10)$$

а интеграл

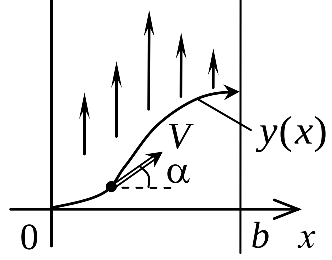
$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \to \max. \qquad (9.1.11)$$

Такие задачи называются *изопериметрическими*. Отличие этих задач от простейших вариационных заключается в наличие дополнительных условий (9.1.10).

Здесь мы имеем дело с вариационной задачей на условный экстремум.

V. *Задача навигации.*

Пусть имеется река ширины b с прямыми параллельными берегами. Считая один берег совпадающим с осью $0X$,обозначим через $v = v(x)$ скорость течения реки.



Лодка с постоянной скоростью V ($V > \max\limits_{[0,b]} v(x)$) за кратчайшее время должна пересечь реку, отчалив из фиксированной точки $O(0,0)$.

Обозначим через α – угол курса лодки. Тогда компоненты скорости лодки в реке будут определяться равенствами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = v + V\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v + V\sin\alpha}{V\cos\alpha}.$$

Разрешая это уравнение, находим:

$$\left(y' - \frac{v}{V\cos\alpha}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{V\cos\alpha} = \frac{\sqrt{V^2\left(1 + y'^2\right) - v^2} - vy'}{V^2 - v^2}.$$

Для времени пересечения реки получаем

$$dt = \frac{dx}{V\cos\alpha} \quad \Rightarrow t = \int_0^b \frac{\sqrt{V^2\left(1 + y'^2\right) - v^2(x)} - v(x)\cdot y'}{V^2 + v^2(x)}\,dx. \qquad (9.1.12)$$

Последний интеграл должен быть минимизирован за счет выбора функции $y(x)$ при условии

$$y(0) = 0. \qquad (9.1.13)$$

В данном типе задач правый конец искомой кривой заранее не определен.

Здесь мы имеем дело с *вариационной задачей со свободными концами*.

§ 2. Функционал. Вариация функционала

Опр. 9.2.1. Если каждому элементу $y = y(x)$ множества G из некоторого функционального пространства X поставлено в соответствие определенное число J, то говорят, что на множестве $G \subset X$ задан *функционал* $J(y) \equiv J[y]$.

В качестве функциональных пространств X в вариационном исчислении используются пространства $C_n[a,b]$, в которых норма определяется как

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left|y^{(k)}(x)\right|. \qquad (9.2.1)$$

При этом метрика $\rho(y_1, y_2)$ задается в виде

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left|y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)\right|. \qquad (9.2.2)$$

Пример 9.1.

Пусть

$$J[y] = \int_0^1 y(x)dx, \text{ а } X = C[0,1].$$

Тогда X – пространство непрерывных, а значит и интегрируемых на отрезке $[0,1]$ функций. В частности, имеем

$$J[1] = \int_0^1 1dx = 1,$$

$$J\left[e^x\right] = \int_0^1 e^x dx = e - 1,$$

$$J[\cos\pi\alpha] = \int_0^1 \cos\pi\alpha dx = \frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big|_0^1 = 0. \ \blacktriangle$$

Опр. 9.2.2. *Вариацией* δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими выбранному классу G функций:

$$\delta y = y(x) - y_0(x). \qquad (9.2.3)$$

Для класса k раз дифференцируемых функций по определению имеем:

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x). \qquad (9.2.4)$$

Понятно, что вариация δy сама есть функция.

Опр. 9.2.3. пусть функционал $J[y]$ задан на множестве G функций $y(x)$. *Приращением функционала* $J[y]$, соответствующим приращению аргумента δy называется величина, определяемая как

$$\Delta J = J[y+\delta y]-J[y]. \qquad (9.2.5)$$

<u>Пример 9.2.</u>

Найти приращение функционала

$$J[y]=\int_0^1 y(x)y'(x)dx,$$

определенного в пространстве $C_1[a,b]$, если $y_0(x)=x$, $y(x)=x^2$.

Решение. Имеем

$$\Delta J = J\left[x^2\right]-J[x]=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx-\int_0^1 x\cdot 1dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^3-x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1. \ \blacktriangle$$

С приращением функционала связано понятие непрерывности, а также понятие дифференцируемости.

<u>Опр. 9.2.4.</u> Функционал $J[x]$ называется *дифференцируемым по Фреше в точке* $y(x)$ некоторого нормированного пространства *Y*, если его приращение можно представить в виде

$$\Delta J = L[y,\delta y]+o(\|\delta y\|), \qquad (9.2.6)$$

где $L[y,\delta y]$ – линейный относительно вариации δy функционал, а $O(\|\delta y\|)$ – бесконечно малая функция (б.м.ф.) порядка малости выше, чем $\|\delta y\|$.

<u>Замечание.</u> Данное определение по-существу аналогично определению дифференцированности в математическом анализе:

$$\Delta f(x)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x).$$

<u>Опр. 9.2.5.</u> Линейная часть приращения $L[y,\delta y]$ называется *дифференциалом Фреше* функционала $J[y]$ и обозначается как δJ.

<u>Пример 9.3.</u>

Рассмотрим функционал вида

$$J[y]=\int_a^b y(x)dx, \text{ где } y(x)\in C[a,b].$$

Для приращения находим

$$\Delta J[y]=J[y-\delta y]-J[y]=\int_a^b \delta y(x)dx.$$

Таким образом, $\Delta J[y]$ содержит только линейную часть, поэтому

$$\delta J=\int_a^b \delta y(x)dx. \ \blacktriangle$$

Пример 9.4.

Рассмотрим функционал

$$J[y]=\int_a^b f(x,y,y')dx,$$

определенный в пространстве $C_1[a,b]$.

Для приращения получим

$$\Delta J[y]=\int_a^b [f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')]=\left[\begin{array}{c}\textit{используя}\\ \textit{формулу Тейлора}\end{array}\right]=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'+R_1\right]dx,$$

где R_1 – остаточный член в формуле Тейлора.

Пусть все вторые производные функции f ограничены. Тогда справедливы оценки:

$$\int_a^b |R_1(x,y,y',\delta y,\delta y')|\le 2M\int_a^b \|\delta y\|^2 dx=2M|b-a|\|\delta y\|^2,$$

где $\|\delta y\|=\max\limits_{[a,b]}(|\delta y|,|\delta y'|)$, т.е. третье слагаемое в интеграле имеет вид $O\left(\|\delta y\|^2\right)$, следовательно,

$$\delta J[y]=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right]dx. \ \blacktriangle$$

Для функций нескольких переменных, кроме определения дифференцируемости, связанного с приращением Δf вводится понятие производной по направлению. Данная возможность имеет свое обобщение и в теории функциональных пространств.

Опр. 9.2.6. *Дифференциалом Гато* функционала $J[y]$ в точке $y = y(x)$ называется предел вида

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial t} J[y + t\delta y]\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{J[y + t\delta y] - J[y]}{t}. \tag{9.2.7}$$

Замечание. Для существования дифференциала Гато достаточно только линейности пространства, поэтому иногда дифференциал Гато называют слабым дифференциалом, а дифференциал Фреше – сильным.

Отметим, что дифференциал (9.2.6) может существовать даже тогда, когда дифференциал Фреше не существует.

Пример 9.5.

Для функционала

$$J[y] = \int_a^b y^2(x)dx, \quad y \in [a,b]$$

найти дифференциалы Фреше и Гато.

Решение. Дифференциал Фреше:

$$\Delta J = \int_a^b \left[(y + \delta y)^2 - y^2\right]dx = \int_a^b \left(2y\delta y + (\delta y)^2\right)dx =$$

$$= \int_a^b 2y\delta y dx + o\left(\left|\delta y^2\right|\right) \Rightarrow \delta J = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx$$

.

Дифференциал Гато:

$$J[y + t\delta y] = \int_a^b (y + t\delta y)^2 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} J[y + t\delta y]\Big|_{t=0} =$$

$$= 2\int_a^b (y + t\delta y)\Big|_{t=0} \cdot \delta y dx = 2\int_a^b y\delta y dx.$$

Таким образом, оба определения дифференциалов совпадают. ▲

Пример 9.6.

Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Эта функция непрерывна всюду на плоскости, включая точку $(0{,}0)$. В точке $(0{,}0)$ ее слабый дифференциал существует и равен 0:

$$Df(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+th)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}=0\text{, где } h=(h_1,h_2).$$

Вместе с тем этот дифференциал не является главной линейной частью приращения функции в точке $(0{,}0)$. Действительно, пусть $h_2=h_1^2$, тогда

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(h_1,h_0)-f(0{,}0)}{\|h\|}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

т.е. $\Delta f=\frac{1}{2}\|h\|+o\|h\|$. ▲

Таким образом, из существования производной $\frac{d}{dt}f(x+th)$ не следует сильной дифференцируемости.

Замечание. Аналогия – из существования частных производных функции $f(x_1,...,x_n)$ не следует существование полного дифференциала, т.е. по-существу дифференцируемости. Необходимо дополнительно потребовать непрерывности всех частных производных!

§ 3. Экстремум функционалов

Опр. 9.3.1. Функционал $J[y]$ достигает на кривой $y_0(x)$ *локального* или *относительного минимума* (*максимума*), если для всех $y(x)$ из некоторой ε-окрестности кривой $y_0(x)$ выполняется неравенство

$$J[y_0(x)]\le J[y(x)]\qquad (J[y_0]\ge J[y])\,. \tag{9.3.1}$$

Локальные максимумы и минимумы называются локальными экстремумами. Если неравенства (9.3.1) выполняются для всех функций из множества $G\subset C_n[a,b]$, то говорят, что на кривой $y_0(x)$ функционал достигает *абсолютного экстремума*.

Пример 9.7.

Показать, что функционал

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx$$

На кривой $y_0(x) \equiv 0$ достигает строго min.

Решение. Для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $y(x)$ имеем

$$\Delta J = J[y(x)] - J[0] = \int_0^1 (x^2 + y^2)dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 y^2 dx \geq 0.$$

Причем 0 достигается только на кривой $y(x) \equiv 0$. ▲

Если функционал определен на множестве функций из пространства $C_1[a,b]$, то можно при этом рассматривать эти же функции и как элементы множества $C_0[a,b]$.

<u>Опр. 9.3.2.</u> Локальный экстремум функционала $J[y(x)]$ в пространстве $C_0[a,b]$ называется *сильным*, а в пространстве $C_1[a,b]$ – *слабым*.

Всякий сильный экстремум, безусловно, является и слабым, обратное неверно.

<u>Пример 9.8.</u>

Рассмотрим функционал $J[y] = \int_0^{\pi} y^2 (1 - y'^2) dx$ в пространстве $C_1[0,\pi]$, причем $y(0) = y(\pi) = 0$.

Для функции $y(x) \equiv 0$ $J[y] = 0$, а для кривых, расположенных в ε-окрестности:

$$\rho_1(y,0) \equiv \max_{[0,\pi]} \{|y(x)|, |y'(x)|\} < \varepsilon$$

при $\varepsilon < 1$ имеем $|y'| < 1$, а значит $y^2(1 - y'^2) > 0$ (!). Поэтому на функции $y(x) \equiv 0$ достигается слабый минимум.

Сильный минимум не достигается. Действительно, положим

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, \; y'(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

Тогда

$$J[y] = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^2 nx (1 - n\cos^2 nx) dx =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^2 nx dx - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^2 2nx dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8} < 0.$$

С другой стороны $|y_n(x) \to 0|$, т.е. находится в ε-окрестности $y \equiv 0$. Сильного минимума нет. ▲

В математическом анализе доказывается, что необходимое условие существования экстремума для функций нескольких переменных $f(\bar{x})$ может быть записано как равенство нулю ее дифференциала

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Аналогичный результат имеет место и в теории функционалов.

ТЕОРЕМА 9.3.1. (*необходимое условие экстремума функционала*)

Для того чтобы дифференцируемый функционал $J[y(x)]$ достигал в точке $y_0(x)$ экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал (по Фреше) в этой точке равнялся нулю при всех вариациях δy:

$$\delta J[y_0(x)] = 0. \tag{9.3.2}$$

Доказательство.

По определению дифференцируемости (по Фреше) имеем

$$J[y_0 + \delta y] - J[y_0] = \underbrace{L[y_0, \delta y]}_{=\delta y} + 0(\|\delta y\|).$$

Если $\delta J[y_0] \equiv L[y_0, \delta y] \neq 0$, то для некоторого δy при достаточно малых действительных t знак всего выражения в правой части совпадает со знаком его главного члена . Но L – линейный функционал, следовательно, $L[y_0, t\delta y] = tL[y_0, \delta y]$. Поэтому при разных знаках параметра t функционал L, а значит и приращение $\Delta J[y_0]$, будут принимать разные знаки. Таким образом, экстремума в точке $y_0(x)$ быть не может. ■

§ 4. Уравнение Эйлера-Лагранжа

Лемма 9.4.1. Пусть $y(x)$ фиксированная непрерывная функция, определенная на интервале $[a, b]$. Тогда если

$$\int_a^b y(x)\delta y(x) = 0 \tag{9.4.1}$$

при произвольном выборе непрерывно дифференцируемой функции $\delta y(x)$, удовлетворяющей условиям

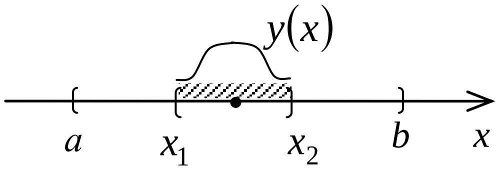
$$\delta y(a)=\delta y(b)=0, \qquad (9.4.2)$$

то функция $y(x)\equiv 0$ на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.

Пусть $y(x)\not\equiv 0$, то есть существует точка x_0, в которой функция $y(x_0)\neq 0$. Так как $y(x)$ по условию функция непрерывная, то $y(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, причем в этой окрестности она имеет определенный знак.

Пусть $y(x)>0$. Далее выберем функцию δy так



$$\delta y(x)=\begin{cases}(x-x_1)^2(x-x_2)^2, & x\in(x_1,x_2)\\ 0, & x\notin(x_1,x_2)\end{cases}$$

Функция $\delta y(x)$ имеет непрерывную производную, а на концах интервала $[a,b]$ обращается в 0, но

$$\int_a^b y(x)\delta y(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\cdot(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx>0 \ (!)$$

что противоречит условию (9.4.1). Следовательно, наше предположение неверно, и $y(x)\equiv 0$ на отрезке $[a,b]$. ■

Пусть известно, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, которая минимизирует интеграл простейшей вариационной задачи

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx, \qquad (9.4.3)$$

где

$$y(a)=y_0,\ y(b)=y_1. \qquad (9.4.4)$$

Требуется найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая функция $y(x)$.

ТЕОРЕМА 9.4.1. Для того, чтобы функционал (9.4.3), определенный на множестве функций из $G\in C_1[a,b]$ и удовлетворяющих граничным условиям (9.4.4), достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо чтобы эта функция удовлетворяла *уравнению Эйлера-Лагранжа*:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \qquad (9.4.5)$$

Доказательство.

Согласно необходимому условию экстремума (**теорема 9.3.1**) имеем

$$\delta J[y] = \delta \int_a^b F(x, y, y')dx = 0.$$

Для вариации функционала находим

$$\delta J[y] = \delta \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \left[\begin{matrix} \textit{второе} \\ \textit{слагаемое} \\ \textit{интегрируем} \\ \textit{по частям} \end{matrix} \right] =$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] \Bigg|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx.$$

Так как на концах отрезка $[a, b]$ вариации δy обращаются в 0 (на концах функция фиксирована граничными условиями (9.4.4)), то первое слагаемое зануляется, следовательно, получим

$$\delta J[y] = \int_a^b \left[F'_y - \frac{d}{dx} \left(F'_{y'} \right) \right] \delta y(x) dx.$$

Далее согласно лемме (9.4.1) получаем

$$F'_y = \frac{d}{dx} \left(F'_{y'} \right) = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

<u>Опр. 9.4.1.</u> Решения уравнений Эйлера-Лагранжа называются *экстремалями функционала* (9.4.3).

Дифференциальные уравнения (9.4.5) в развернутом виде есть ДУ 2-го порядка

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0, \qquad (9.4.6)$$

где использованы обозначения $F_y \equiv \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv F'_y$, т.е. штрих для производных функции F опущен.

<u>Замечание.</u> Условие $\delta J = 0$ не является достаточным для экстремума. Поэтому экстремали могут приводить как к минимуму, так и к максимуму и более того вообще не быть экстремумами. (!)

Если $F_{y'y'} \equiv 0$, то общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые определяют из граничных условий.

<u>Пример 9.9.</u>

Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2 - 12xy\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = y(1) = 1$.

Решение. В данном случае $F(x, y, y') = y'^2 - 12xy$, поэтому $F_y = -12x$, $F_{y'} = 2y'$, следовательно,

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = -12x - 2y'' = 0 \Rightarrow y''(x) + 6x = 0.$$

Последовательно интегрируя, находим

$$y'(x) = -3x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -x^3 + C_1 x + C_2.$$

Определим константы C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 1; \;\; y(1) = -1 + C_1 + 1 = C_1 = 1.$$

Следовательно, имеем единственную экстремаль

$$y(x) = -x^3 + x + 1. \; \blacktriangle$$

В вариационном исчислении функцию $F_y - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)$ называют *вариационной производной* функционала J и пишут

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \qquad (9.4.7)$$

Отметим также, что вариационная задача может и не иметь решений или иметь бесконечное множество решений.

§ 5. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера-Лагранжа

Безусловно, уравнение Эйлера-Лагранжа не всегда интегрируется в квадратурах, а в ряде случаев его решение может вызвать затруднение. Рассмотрим простейшие случаи.

I. *F не зависит явно от y.*

Пусть $F = F(x, y')$. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 = const. \qquad (9.5.1.)$$

Мы получили ДУ первого порядка, не содержащее явно $y(x)$. Если его возможно разрешить относительно y', то далее получаем

$$y' = \varphi(x, C_1) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \varphi(x, C_1)\, dx.$$

II. *F не зависит явно от x.*

Пусть $F = F(y, y')$. Тогда ДУ (9.4.6) примет вид

$$y''_{(x)} F_{y'y'} + y'(x) F_{yy'} - F_y = 0 \quad \big| \times y'.$$

$$y'(x) y''_{(x)} F_{y'y'} + y'^2(x) F_{yy'} - y'(x) F_y = 0.$$

Заметим, что при этом

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dt}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = F_y y' + F_{y'} y''$$

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = F_{yy'} y' + F_{y'y'} y''.$$

Поэтому

$$y' y'' F_{y'y'} + y'^2 F_{yy'} - y' F_y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'\left(y'' F_{y'y'} + y' F_{yy'}\right) + y'' F_{y'} - y'' F_{y'} - y' F_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{dy'}{dx}\cdot F_{y'}-\frac{dF}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y'F_{y'}\right)-\frac{dF}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y'F_{y'}-F\right)=0.$$

Окончательно получаем

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C_1 \text{ – первый интеграл уравнения.} \qquad (9.5.2)$$

Далее, если это уравнение удается явно разрешить относительно производной

$$y'=\psi\left(y,C_1\right), \qquad (9.5.3)$$

то получаем экстремали в виде

$$x=\int\frac{dy}{\psi\left(y,C_1\right)}. \qquad (9.5.4)$$

III. *Случай полной производной.*

Пусть $F=\frac{d}{dx}G(x,y)$. Тогда интеграл J не зависит от выбора функции y

$$J=G\left(x_2,y_2\right)-G\left(x_1,y_1\right). \qquad (9.5.5)$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа будет выполняться тождественно и любая функция из $C_1[a,b]$ будет экстремалью. Вариационная задача теряет свой смысл.

IV. *F не зависит от y'.*

Пусть $F=F(x,y)$. Тогда имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0. \qquad (9.5.6)$$

Это алгебраическое уравнение. Его решение не содержит произвольных констант, и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям только в исключительных случаях.

V. *F зависит только от y'.*

Пусть $F=F(y')$. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{y'}\right)=0 \Rightarrow F_{y'y'} \cdot y''(x)=0\,. \qquad (9.5.7)$$

Если $F_{y'y'} \not\equiv 0$, то имеем

$$y''(x)=0 \Rightarrow y(x)=C_1 x+C_2\,, \qquad (9.5.8)$$

то есть экстремалями являются всевозможные прямые линии.

<u>*Пример 9.10.*</u>

Решить задачу о геодезических на плоскости.

Решение. Для задачи о геодезических на плоскости имеем:

$$I[y]\equiv l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-y'^2}\,dx \to \min \quad \Rightarrow (9.5.8)\ y(x)=C_1 x+C_2\,,$$

т.е. геодезическими являются прямые линии. ▲

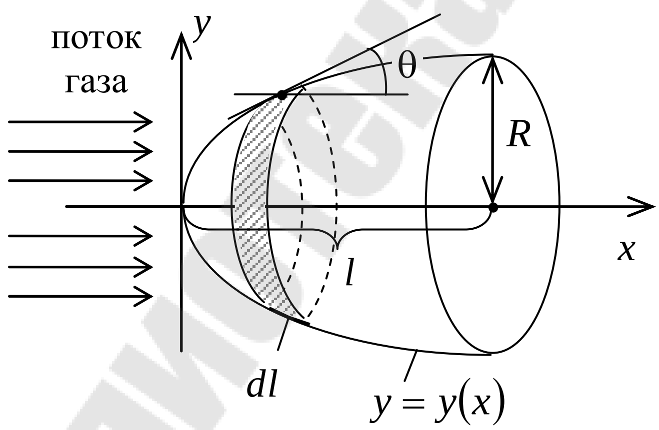
<u>*Пример 9.11.*</u> *Наименьшее сопротивление потоку.*

Определить форму твердого тела, движущегося в потоке газа с наименьшим сопротивлением. Рассмотреть тело вращения.

Решение. Считая, что плоскость газа достаточно мала и молекулы отражаются от поверхности зеркально, для нормальной составляющей давления будем иметь следующее выражение

$$p=2\rho v^2\sin^2\theta\,,$$

где ρ – плотность газа, v – скорость газа относительно тела, θ – угол между скоростью и ее тангенциальной составляющей. Давление перпендикулярно к поверхности, так что можно записать составляющую силы по оси $0x$, действующей на кольцо шириной



$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

и радиусом $y(x)$ в виде

$$d\tilde{F}=2\rho v^2\sin^2\theta\left[2\pi y\sqrt{1+y'^2}\right]\sin\theta\,dx\,.$$

Полная сила, действующая в положительном направлении оси $0x$, равна

$$\tilde{F} = \int_0^l 4\pi\rho v^2 \sin^3\theta y\left(1+y'^2\right)^{1/2} dx.$$

Сделаем упрощение

$$\sin\theta \frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}} \approx y'.$$

Тогда сила сопротивления будет равна

$$\tilde{F} = 4\pi\rho v^2 \int_0^l y'^3 y dx.$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $y(x)$, при который F принимает наименьшее возможное значение, причем

$$y(0)=0,\ y(l)=R.$$

Так как функция $F = 4\pi\rho v^2 y'^3 y$ явно от x не зависит, то согласно (9.5.2) запишем первый интеграл

$$4\pi\rho v^2\left(y'\cdot 3y'^2 y - y'^3 y\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad y'^3 y = \tilde{C}_1 = const.$$

Отсюда

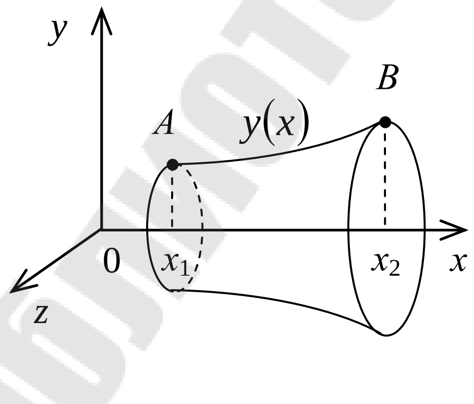
$$y' = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt[3]{y}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4}.$$

Используя граничные условия, находим

$$y = R\left(\frac{x}{l}\right)^{3/4}$$

– контур с заданными конечными точками, при которых сопротивление тела минимально. ▲

<u>*Пример 9.12.*</u> *О наименьшей поверхности вращения.*



Как следует из § 1 требуется минимизировать функционал

$$S = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Подынтегральная функция не зависит от x, поэтому первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид:

$$F - y'F_{y'} = C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Проще всего это ДУ интегрируется подстановкой $y' = \operatorname{sh} t$, тогда

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2} = C_1 \operatorname{ch} t, \text{ а } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt \;\Rightarrow$$

$$x = C_1 t + C_2.$$

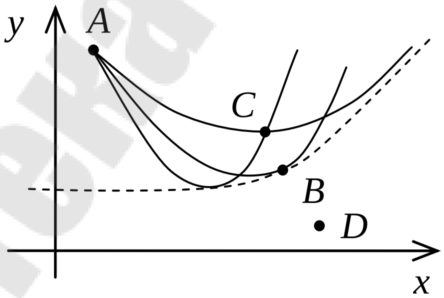
Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_1 \operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получим

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_1}{C_2} \text{ – цепная линия.}$$

Замечание. Существует однако одна проблема в связи с найденным решением. Оказывается, если мы фиксируем точку $A(x_1, y_1)$ и начнем проводить через нее различные цепные линии найденного вида, т.е. построим, как говорят, пучок экстремалей, то будет существовать огибающая этого пучка.

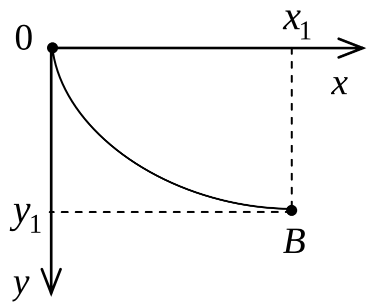


Это означает, что если точка второго конца не лежит на этой огибающей (как точка типа B), то через нее вообще нельзя провести цепную линии (точки типа D), или можно провести целых две цепных линии (точка типа C), лишь одна из которых будет доставлять min площади поверхности вращения.

В отношении точки типа D можно сказать, что полученный результат вовсе не означает, что в этом случае min поверхности нет. Просто min доставляется не гладкой кривой (!) и такая min поверхность не будет катеноидом. ▲

Пример 9.13. Задача о брахистохроне.

Из задачи 1 §1 следует, что требуется минимизировать функционал



$$T[y(x)] = \frac{1}{2g}\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx, \quad y(0)=0,$$

$$y(x_1) = y_1.$$

Подынтегральная функция опять не зависит от x, следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$F - y'F_{y'} = C_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1 - y'^2\right)}} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{y\left(1 - y'^2\right)}} = C_1 \ \Rightarrow \ \ y\left(1+y'^2\right) = \tilde{C}_1.$$

Проще всего это уравнение интегрируется с помощью подстановки

$$y' = \operatorname{ctg} t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\tilde{C}_1}{1+y'^2} = y = \frac{\tilde{C}_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \tilde{C}_1 \sin^2 t = C_1(1-\cos 2t).$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1-\cos 2t)dt \Rightarrow$$

$$x = \int C_1(1-\cos 2t)dt = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Преобразовав параметр $2t = t_1$, получим

$$\begin{cases} x - \underbrace{C_2}_{=0} = \dfrac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1) \\ \quad y = \dfrac{C_1}{2}(t_1 - \cos t_1) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - x_0 = a(t - \sin t), \\ y - y_0 = a(t - \sin t). \end{cases} \text{ – уравнение циклоиды,}$$

если начальная точка имеет координаты (x_0, y_0).

Константа a находится по координатам точки $B(x_1, y_1)$. Итак, брахистохроной является циклоида. ▲

§ 6. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи

I. *Функционал от вектор-функции.*

Пусть функционал простейшей вариационной задачи зависит от вектор-функции $\bar{y}(x) = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$:

$$J[\bar{y}(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))dx. \tag{9.6.1}$$

Вектор-функция представляет собой совокупность независимых функций $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Поэтому в этом случае мы имеем, по-существу, простейшую вариационную задачу, в которой функция F зависит от набора функций:

$$J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx. \tag{9.6.2}$$

При этом граничные условия записываются как

$$y_k(x_1) = y_k^{(0)},\ y_k(x_2) = y_k^{(1)},\ k = \overline{1, n}. \tag{9.6.3}$$

Вариация функционала (9.6.2) имеет вид

$$\delta J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1' \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2' \right) + ... + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n + \frac{\partial F}{\partial y_n'}\delta y_n' \right) \right] dx.$$

Поскольку на концах отрезка $[x_1, x_2]$ все вариации равны нулю (концы закреплены), то интегрирование по частям дает

$$\delta J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(F_{y_1} + \frac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right) \right)\delta y_1 + ... + \left(F_{y_n} + \frac{d}{dx}\left(F_{y_n'}\right) \right)\delta y_n \right] dx. \tag{9.6.4}$$

Как обычно, необходимое условие экстремума требует, чтобы

$$\delta J[\bar{y}(x)] = 0$$

Учитывая, что вариации δy_1, $\delta y_2, \ldots, \delta y_n$ не зависят друг от друга, из Леммы §4 получаем систему дифференциальных уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_k}\right) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{9.6.5}$$

<u>*Пример 9.14.*</u>

Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a,b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J = [y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2\right) dx$$

При граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение. Система уравнений Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + y_2 = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = -y_1'' \Rightarrow y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Общее решение

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$y_2(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $C_4 = 1$. Поэтому

$$J_1(x) = \sin x,$$
$$J_2(x) = \sin x. \ \blacktriangle$$

<u>Замечание</u>. Справедливо следующее тождество

$$\frac{d}{dx}\left(y_1' \frac{\partial F}{\partial y_1'} + \ldots + y_n' \frac{\partial F}{\partial y_n'} - F\right) =$$

$$y_1'' \frac{\partial F}{\partial y_1'} + y_1' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) + \ldots + y_n'' \frac{\partial F}{\partial y_n'} + y_n' \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right) -$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y_1}y_1'-\frac{\partial F}{\partial y_n}y_n'-\frac{\partial F}{\partial y_1}y_1''-\ldots-\frac{\partial F}{\partial y_n}y_n''=$$

$$=-y_1'\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right)\right)-\ldots-y_n'\left(\frac{\partial F}{\partial y_n}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right)\right)-\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Если F явно от x не зависит, то $F_x'=0$. Поэтому на экстремалях получаем

$$\frac{d}{dx}\left(y_1'\frac{\partial F}{\partial y_1'}+\ldots+y_n'\frac{\partial F}{\partial y_n'}-F\right)=0,$$

Откуда находим первый интеграл системы (9.6.5)

$$y_1'\frac{\partial F}{\partial y_1'}+\ldots+y_n'\frac{\partial F}{\partial y_n'}-F=C_1. \qquad (9.6.6)$$

Пример 9.15.

Найти первый интеграл системы уравнений Эйлера-Лагранжа из предыдущего примера.

Решение.

Для функции $F(y_1,y_2)=y_1'^2+y_2'^2-2y_1y_2$ получим (9.6.6):

$$y_1'\cdot 2y_1'+y_2'\cdot 2y_2'-y_1'^2-y_2'^2+2y_1y_2=y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2=C_1.\ ▲$$

II. *Вариационная задача в параметрической форме.*

Во многих вариационных задачах решение удобно искать в параметрическом виде. Пусть при исследовании на экстремум некоторого функционала

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

оказалось более целесообразным искать решение в параметрической форме

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases} \qquad (9.6.7)$$

Тогда исходный функционал преобразуется к виду

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)dt \qquad (9.6.8)$$

Заметим, что функция F явно параметр t не содержит и является по отношению к переменным $\dot{x}$ и $\dot{y}$ однородной функцией первой степени однородности. Таким образом, данный случай является специальным случаем вариационной задачи от двух функций.

Если перейти к другой параметризации $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, то форма функционала (9.6.8) не изменится. Таким образом, функционал $J[x, y]$ зависит от формы кривой, а не от ее параметрического задания.

Перейдем к определению уравнений. Требуется найти экстремум функционала

$$J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(x, y, \dot{x}, \dot{y})d\tau, \qquad (9.6.9)$$

где

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau},\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tau},\ G = F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}. \qquad (9.6.10)$$

Система (9.6.5) примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \text{ и } \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\right) = 0. \qquad (9.6.11)$$

Однако функция G имеет специальный вид (9.6.11).

Последовательно находим

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \dot{x};$$

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \left(-\frac{\dot{y}}{\dot{x}^2}\right) \cdot \dot{x} + F = F - y'\frac{\partial F}{\partial y'};$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right) \cdot \dot{x} = \dot{x}\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) =$$

$$\dot{x}\left[\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}-y''\frac{\partial F}{\partial y'}-y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]=$$

$$=\dot{x}\left[y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]+\frac{\partial F}{\partial x}\right].$$

Таким образом,

$$\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\dot{x}-\dot{x}y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial x}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)=-\dot{y}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]. \qquad (9.6.12)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\dot{x};\ \frac{\partial G}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{1}{\dot{x}}\dot{x}=\frac{\partial F}{\partial y'},\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\dot{x}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\right)=\dot{x}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]. \qquad (9.6.13)$$

Сравнивая полученные выражения, находим

$$\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)=-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left[\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\right)\right]. \qquad (9.6.14)$$

Следовательно, уравнения в системе (9.6.11) линейно зависимы.

Окончательно, для поиска экстремалей вариационной задачи в параметрической форме необходимо взять одно из уравнений Эйлера-Лагранжа (9.6.11) и проинтегрировать его совместно с уравнением, определяющим выбор параметра.

Например, к уравнению

$$G_x-\frac{d}{d\tau}G_{\dot{x}}=0$$

можно присоединить уравнение

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=1,$$

смысл которого заключается в том, что за параметр взята длина дуги кривой.

§ 7. Вариационная задача с подвижными границами

Пусть одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых в вариационной задаче расширяется. Кроме кривых сравнения, которые имеют общие граничные точки можно брать и кривые с подвижными границами. Поэтому если на какой-нибудь кривой $y=y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум достигается и по отношении к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с этой кривой $y=y(x)$, и следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие, а именно, функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера-Лагранжа

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0.$$

Итак, *кривые* $y=y(x)$, *на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалями*.

Общее решение Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо задать два условия. В задаче с неподвижными границами условия записывались как

$$y(x_1)=y_1 \text{ и } y(x_2)=y_2.$$

В задаче с подвижными границами одно или даже два граничных условия отсутствуют. Поэтому соотношения на определение неизвестных констант должны следовать из исходного необходимого условия

$$\delta J[y]=0.$$

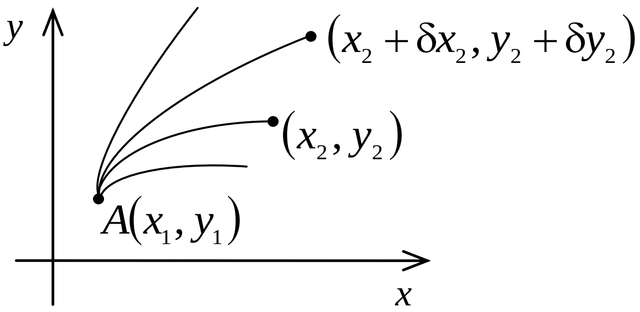
Итак, будем рассматривать функционал $J[y]$ на экстремалях $y=y(x,C_1,C_2)$. Тогда он превращается в функцию от констант C_1,

C_2 и пределов интегрирования x_1, x_2, то есть, по-существу, является функцией

$$J\left(y(x, C_1, C_2), x_1, x_2\right).$$

При этом его вариация δJ переходит в дифференциал dJ.

Пусть для простоты левый конец кривых закреплен в точке $A(x_1, y_1)$.



Приращения координат правого конца по-прежнему будем обозначать, как δx и δy вместо Δx и Δy.

Для приращения (вариации) функционала находим

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx =$$

$$= \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_1}^{x_2} \left[F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')\right]dx =$$

$$= \Delta J_1 + \Delta J_2.$$

Полное приращение представляет собой сумму двух слагаемых. В первом слагаемом воспользуемся теоремой о среднем для определенного интеграла:

$$\Delta J_1 = \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F\big|_{x=x_2+\theta\delta x_2} \cdot \delta x_2, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Далее в силу непрерывности функции F имеем

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= \left(F(x, y, y')\big|_{x=x_2} + O(\delta x_2)\right)\delta x_2 = \\ &= F(x, y, y')\big|_{x=x_2}\delta x_2 + o(\delta x_2). \end{aligned} \tag{9.7.1}$$

Вторая часть приращения после интегрирования по частям и учета закрепления левого конца кривой дает

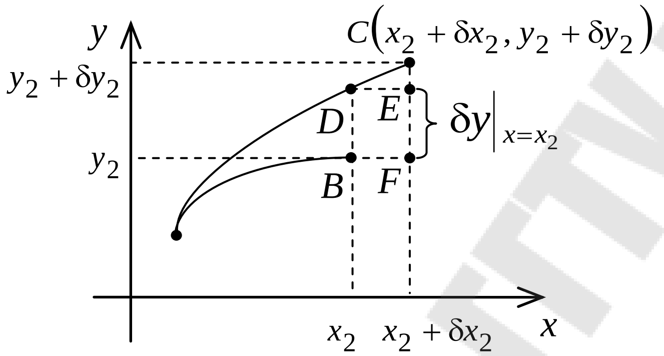
$$\Delta J_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')\right]dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[F_y\delta_y + F_{y'}\delta_{y'} + R_1\right]dx =$$

$$= \left[F_{y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right)\delta y dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} R_1 dx =$$

$$= \left[F_{y'}\delta y\right]_{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} R_1 dx,$$

где R_1 – остаток в формуле Тейлора, а $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) \equiv 0$.

Замечания. Во-первых, $\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_1} = 0$, т.к. $\delta y\big|_{x = x_1} = 0$. Во-вторых, $\delta y\big|_{x = x_2} \ne \delta y_2$ (!), т.к. δy_2 – это приращение ординаты, δy – функции.



Из рисунка следует
$\delta y_2 = FE + EC \Rightarrow FE = \delta y_2 - EC$.
Но $FE = BD = \delta y\big|_{x=x_2}$,
а $EC \approx y'(x_2)\delta x_2$,
следовательно,

$$\delta y\big|_{x=x_2} \approx \delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2. \quad (9.7.2)$$

Пренебрегая остатком R_1, главная линейная часть приращения ΔJ_2, будет иметь вид:

$$\Delta J_2 \approx F_{y'}\big|_{x=x_2} \cdot \left(\delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2\right). \quad (9.7.3)$$

Суммируя приращения ΔJ_1 (9.7.1) и ΔJ_2 (9.7.3), получаем для вариации (дифференциала, главной линейной части по δx_2 и δy_2):

$$\delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 = F\big|_{x=x_2}\delta x_2 + F_{y'}\big|_{x=x_2}\left(\delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2\right) \Rightarrow$$

$$\delta J = \left(F - F_{y'}\cdot y'\right)\big|_{x=x_2}\delta x_2 + F_{y'}\big|_{x=x_2}\delta y_2 = 0. \quad (9.7.4)$$

Если вариации δx_2 и δy_2 независимы, то имеем

$$\begin{cases} F - y'F_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0, \\ F_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0. \end{cases} \qquad (9.7.5)$$

Однако на практике часто встречаются случаи, когда один из концов движется по некоторой фиксированной кривой

$$y_2 = \varphi(x_2). \qquad (9.7.6)$$

Так как $\delta y_2 \approx \varphi'(x_2)\delta x_2$, то из условия (9.7.4) находим

$$F + (\varphi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0\,. \qquad (9.7.7)$$

Это условие, устанавливающее связь между угловыми коэффициентами экстремали и функции φ, называется *условием трансверсальности*.

Если и левая граничная точка движется вдоль кривой $y_1 = \psi(x_1)$, то аналогично получаем второе условие трансверсальности

$$F + (\psi' - y')F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0\,. \qquad (9.7.8)$$

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти: 1) общее решение $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера; 2) из условий трансверсальности (9.7.7) и (9.7.8) и уравнений

$$\begin{aligned} y(x_1, C_1, C_2) &= \psi(x_1) \\ y(x_2, C_1, C_2) &= \varphi(x_2) \end{aligned} \qquad (9.7.9)$$

определить постоянные C_1, C_2 и конца отрезка $[x_1, x_2]$.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой, например, $x_2 = b$, но граничное условие в точке $x = b$ отсутствует. В этом случае $\delta x_2 = 0$ и из соотношения (9.7.4) мы получаем *естественное граничное условие*

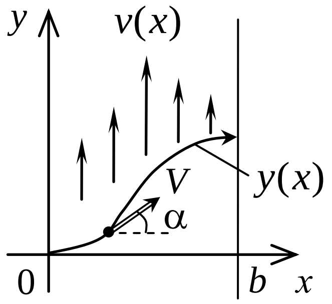
$$\left[F_{y'}\right]_{x=b} = 0\,, \qquad (9.7.10)$$

<u>Пример 9.16.</u> *Задача о навигации.*

Согласно задаче 5 **§1** необходимо минимизировать функционал

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{V^2\left(1 + y'^2\right) - v^2} - vy'}{V^2 - v^2}\, dx$$

с граничными условиями:



$y(0) = 0$ и естественным граничным условием

$$\left[F_{y'}\right]\Big|_{x=b} = 0.$$

Так как функция F явно от $y(x)$ не зависит, то выписываем первый интеграл

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1.$$

Но в силу естественного граничного условия $\left[F_{y'}\right]\Big|_{x=b} = 0$, следовательно, $C_1 = 0$.

Далее находим

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V^2 - v^2}\left[\frac{V^2 y'}{\sqrt{V^2\left(1 - y'^2\right) - v^2}} - v\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^4 y'^2 = v^2\left(V^2\left(1 + y'^2\right) - v^2\right) \Rightarrow V^4 y'^2 = v^2 V^2\left(1 + y'^2\right) - v^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2\left(V^2 - v^2\right) y'^2 = v^2\left(V^2 - v^2\right) \Rightarrow y'^2 = \frac{v^2}{V^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{v(x)}{V} \Rightarrow y(x) \int_0^x v(t)\, dt.$$

Если $v(t) = v_p$ – константа, то получим $y(x) = \dfrac{v_p}{V} x$ – плыть надо по прямой. Если у берега скорость реки падает до 0, т.е. $v(b) = 0$, то получим $y'(b) = 0$, т.е. «приставать» к берегу необходимо перпендикулярно! ▲

§ 8. Задачи на условный экстремум

Задачи вариационного исчисления, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения называются *вариационными задачами на условный экстремум*.

Рассмотрим *задачу Лагранжа*.

Пусть требуется исследовать на экстремум функционал от вектор-функции $\bar{y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$:

$$J[y_1,\ldots,y_n]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx \tag{9.8.1}$$

с граничными условиями

$$y_k(a)=y_k^{(1)},\ y_k(b)=y_k^{(2)},\ k=\overline{1,n}, \tag{9.8.2}$$

при дополнительных ограничениях, заданных условиями связи

$$\begin{cases}\varphi_1(x;y_1,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n')=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_m(x;y_1,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n')=0, \quad m<n\end{cases} \tag{9.8.3}$$

В механике связи, не зависящие от производных функций $y_1',\ldots,y_n'$, называются *голономными*, а связи вида (9.8.3) – *неголономными*.

Одним из универсальных и широко используемых методов решения такой задачи является *метод множителей Лагранжа*.

Введем *функцию Лагранжа:*

$$\begin{gathered}L(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n',\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')+\\ +\sum_{i=1}^m\lambda_i(x)\cdot\varphi(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'),\end{gathered} \tag{9.8.4}$$

где $\lambda_i(x)\in C_1[a,b]$ – произвольные функции – *множители Лагранжа*.

Тогда, если функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (9.8.1) при условиях (9.8.2) и (9.8.3), то существуют множители Лагранжа $\lambda_i(x)$ $i=\overline{1,m}$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L_{y_k}-\frac{d}{dx}\left(L_{y_k'}\right)=0,\ k=\overline{1,n}, \tag{9.8.5}$$

записанных для функционала

$$I[y_1,...,y_n]=\int\limits_a^b L dx. \qquad (9.8.6)$$

При этом множители Лагранжа $\lambda_i(x)$ определяются из $n+m$ уравнений (9.8.5) и (9.8.3).

Пример 9.17.

Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J[y_1, y_2]$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J[y_1, y_2]=\int\limits_0^1 \left(y_1'^2+y_2'^2\right)dx;$$

$$y_1(0)=2;\ y_2(0)=0;\ y_1(1)=2\operatorname{ch}1,\ y_2(1)=2\operatorname{sh}1;\ y_1'-y_2=0.$$

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$L=y_1'^2+y_2'^2+\lambda(x)(y_1'-y_2).$$

Для определения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $\lambda(x)$ запишем систему уравнений, состоящую из уравнений Эйлера (9.8.5) и условия связи:

$$\begin{matrix} L_{y_1}-\dfrac{d}{dx}\left(L_{y_1'}\right)=0\Rightarrow \\ L_{y_2}-\dfrac{d}{dx}\left(L_{y_2'}\right)=0\Rightarrow \end{matrix}\begin{cases} 2y_1''+\lambda'=0, \\ 2y_2''+\lambda=0, \\ y_1'-y_2=0. \end{cases}$$

Исключая из системы сначала $\lambda(x)$, а затем $y_1(x)$, получим

$$y_2'''-y_2'=0 \quad\Rightarrow\quad k^3-k=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0, k_2=1, k_3=1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y_2(x)=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}, \\ y_1(x)=\int y_2(x)dx=C_1+C_2e^x-C_3e^{-x}+C_4. \end{cases}$$

Для определения неизвестных констант используем граничные условия:

$$\left.\begin{array}{lll} y_1(0)=2 & \Rightarrow & C_2-C_3+C_4=2, \\ y_2(0)=0 & \Rightarrow & C_1-C_2+C_3=0, \\ y_1(1)=2\,\mathrm{ch}1 & \Rightarrow & C_1+C_2e-C_3e^{-1}+C_4=2\,\mathrm{ch}1, \\ y_2(1)=2\,\mathrm{sh}1 & \Rightarrow & C_1+C_2e+C_3e^{-1}=2\,\mathrm{sh}1. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=C_4=0 \\ C_2=1, C_3=-1 \end{array}$$

Таким образом, экстремум может достигаться на функциях

$$y_1(x)=e^x+e^{-x}=2\,\mathrm{ch}\,x,$$
$$y_2(x)=e^x-e^{-x}=2\,\mathrm{sh}\,x. \qquad \blacktriangle$$

§ 9. *Изопериметрическая задача*

Вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала (9.8.1)

$$J[y_1,\ldots,y_n]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx$$

при наличии *изопериметрических условий*

$$\int_a^b F_i(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx=C_i,\ i=\overline{1,m} \tag{9.9.1}$$

называются *изопериметрическими задачами*.

Замечание. 1) В изометрических задачах в отличие от задач Лагранжа количество условий вида (9.9.1) может быть больше n (!)

2) К изометрическим задачам относится задача Дидо (см. § 1).

При решении изометрической задачи используют следующее необходимое условие экстремума.

Введем *функцию Лагранжа для изопериметрической задачи*:

$$\begin{aligned} \tilde{L}=(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')=F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n'), \end{aligned} \tag{9.9.2}$$

где множители Лагранжа $\lambda_i(x)$ $i=\overline{1,m}$ действительные числа.

Тогда если функции $y_1(x),\ldots,y_2(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (9.8.1) при условиях (9.8.2) и (9.9.1), то существуют такие числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

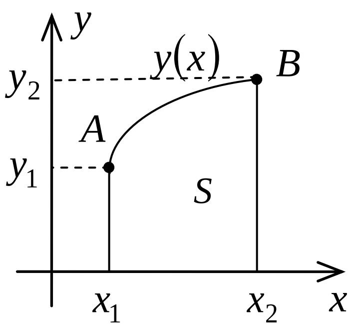
$$\widetilde{L}_{y_k} - \frac{d}{dx}\left(L_{y'_k}\right) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (9.9.3)$$

Множители Лагранжа λ_i и функции $y_1(x), \ldots, y_2(x)$ находятся из системы $n + m$ уравнений (9.9.3) и (9.9.1).

Пример 9.18. Задача Дидо.

Найти кривую $y = y(x)$ заданной длины l, для которой площадь S под кривой достигает максимума. Кривая проходит через две фиксированные точки плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Решение.



Согласно **§1** необходимо исследовать на экстремум функционал

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y dx; \; y(x_1) = y_1; \;\; y(x_2) = y_2$$

при изопериметрическом условии

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Функция Лагранжа (9.9.2) имеет вид

$$\widetilde{L} = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Так как она не содержит явно x, то первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа (9.9.3) дает

$$F - y'F_{y'} = 0 \Rightarrow y + \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Будем искать решение вида $y'(x) = tgt$. Тогда получим

$$y - C_1 = -\lambda \cos t.$$

Далее

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \lambda \cos t dt = \lambda \sin t + C_2.$$

Итак, уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x - C_2 = \lambda \sin t \\ y - C_1 = -\lambda \cos t \end{cases} \Rightarrow \quad (x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Константы C_1, C_2 и λ находятся из граничных условий. ▲

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 9.

Вопросы.

1. Сформулируйте задачу о брахистохроне.
2. Сформулируйте задачу о геодезических.
3. Сформулируйте задачу о наименьшей поверхности.
4. Какая поверхность называется катеноидом?
5. Сформулируйте задачу Плато.
6. Сформулируйте изопериметрическую задачу.
7. Сформулируйте задачу о навигации.
8. Что называется функционалом?
9. Что называется вариацией аргумента функционала, приращением функционала?
10. Равносильна ли дифференцируемость функционала Фреше дифференцируемости по Гато?
11. Что называется экстремумом функционала?
12. Сформулировать необходимое условие экстремума функционала?
13. Записать уравнение Эйлера-Лагранжа.
14. Что называется экстремалью функционала?
15. Что называется функцией Лагранжа?
16. Сформулировать вариационную задачу с подвижными границами.
17. Что такое условие трансверсальности?
18. Какое граничное условие называется естественным?
19. Сформулировать задачу Лагранжа.
20. Что такое функция Лагранжа?

Задачи.

В следующих примерах найти расстояния между данными кривыми на указанных интервалах.

9.1. $f_1(x) = xe^{-x}, \quad f_2(x) = 0, \quad [0,2].$

9.2. $f_1(x) = \sin 2x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad [0, \pi / 2].$

9.3. $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \ln x, \quad [e^{-1}, e].$

Найти экстремали следующих функционалов:

9.4. $J[y] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx; \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$

9.5. $J[y] = \int\limits_{1}^{2} (y'^2 + 2yy' + y^2)dx; \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 0.$

9.6. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} (4y\cos x + y'^2 - y^2)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

9.7. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$

9.8. $J[y] = \int\limits_{1}^{e} (xy'^2 + yy')dx; \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$

9.9. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (x + y'^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

9.10. $J[y] = \int\limits_{a}^{b} (xy' + y'^2)dx.$

9.11. $J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} (y'^2 - y^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1.$

9.12. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (2e^y - y^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

9.13. *Задача о положении равновесия тяжелой однородной нити под действием силы тяжести.* Среди всех плоских линий длины l, концы которых лежат в заданных точках $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.

Найти экстремали в следующих изопериметрических задачах.

9.14. $J[y] = \int\limits_{0}^{1} (x^2 + y'^2(x))dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

при условии $\int\limits_{0}^{1} y^2(x)dx = 2.$

9.15. Найти минимум интеграла $J[y]=\int_0^{\pi} y'^2(x)dx$ при условии $\int_0^{\pi} y^2(x)dx=1, \quad y(0)=y(\pi)=0.$

9.16. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,0,-1)$ и $B(1,0,1)$, лежащими на поверхности $x+y+z=0$.

9.17. Найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

9.18. Найти расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y=\frac{2}{x}\,(x>0)$.

9.19. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

9.20. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,5)$ до параболы $y^2=x$.

9.21. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(0,0,3)$ до поверхности $z=x^2+y^2$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ.

Глава 1.

1.2. Не вытекает.
1.3. **а)** верно; **б)** не верно; **в)** не верно.
1.5. С помощью функции $y = 2x$, где $x \in \boldsymbol{N}, y \in \boldsymbol{S}$.
1.8. С помощью функции $x = (b-a)t + a$.
1.9. С помощью функции $x = ctg\,\pi t$.
1.11. Отобразить $[0,1]$ на $]0,1[$, а затем $]0,1[$ на $]-\infty,+\infty[$.
1.14. Множество счетно.
1.15. Множество счетно.
1.16. Множества счетны.
1.21. Мощность континуума.
1.22. Мощность континуума.

Глава 2.

2.1. Нет.
2.2. Да.
2.3. Да.
2.4. Да.
2.5. Да.
2.9. Да.

Глава 3.

3.4. а) Нельзя. б) Нельзя. в) Можно.
3.6. Система линейно зависима, $6 + 4t - 5t^2 + 5t^3$.
3.7. Система линейно независима.
3.8. Система линейно зависима.
3.9. Система линейно независима.
3.10. Система линейно независима.
3.11. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
3.12. а) $(1,-1,-1,1,-1,1)$; б) $(2,-1,-1,1,-1,1)$.

Глава 4.

4.3. Нет.
4.4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
4.5. $(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
4.6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
4.7. $\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

Глава 5.

5.1. Да.

5.2. а) Нет; б) да; в) нет.

5.3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

5.4. $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1;\ \vec{a}_1 = (2{,}5),\ \vec{a}_2 = (1,-1)$.

5.5. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3;\ \vec{a}_1 = C(1{,}1{,}1),\ \vec{a}_2 = C(1{,}0{,}1),\ \vec{a}_3 = C(1{,}1{,}0),\ C \neq 0$.

5.6. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 6;\ C(0{,}1,-1),\ C(3{,}4,-2),\ \ C \neq 0$.

5.7. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 6;\ C_1(-7{,}5,-6) + C_2(6,-3{,}3),\ C_1(1{,}1,-3)$.

5.8. Да.

5.9. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Глава 6.

6.1. $u(x,t) = \frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi}{2l}x \cdot \sin\frac{\pi a}{2l}t + \sin\frac{3\pi}{2l}x \cdot \cos\frac{3\pi a}{2l}t.$

6.2. $u(x,t) = 1 + \cos 3x \cdot e^{-9a^2 t}$.

6.3. $u(x,t) = 4\sin\frac{2\pi}{l}x \cdot e^{-\left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 t}$.

6.4. $u(x,t) = \dfrac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi(2k+1)at}{l}}{(2k+1)^3}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}$.

6.5. $u(x,t) = \dfrac{8u_0}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi x}{l}}{(2m+1)^3}e^{-\left(\frac{(2m+1)\pi a}{l}\right)^2 t}$.

Глава 7.

7.1. $f(x) = \frac{2}{\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ay}{y^2}\cos xy\,dy.$

7.2. $f(x) = \frac{1}{|a|}\int_0^{+\infty} e^{-|a|y}\cos xy\,dy.$

7.3. $f(x) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2\pi ny/\omega)}{y^2-\omega^2}\sin xy\,dy.$

7.4. $4 \cdot \frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$.

7.5. $-i\pi y^3 e^{-|y|}$.

7.6. $\frac{2\sin\pi y}{1-y}$.

7.7. $e^{-(y^2+a^2)/2}\operatorname{ch} ay$.

7.8. $i\frac{4y^3}{(1+y^2)^2}$.

7.9. $\frac{2y^2\sin 2y + 4\sin y - 4y\cos y}{y^3}$.

Глава 8.

8.1. $\frac{ez}{ez-1}$.

8.2. $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$.

8.3. $\frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$.

8.4. $\frac{z\,\mathrm{sh}\,1}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,1+1}$.

8.5. $\frac{z(4z^2-3z+1)}{(z-1)^3}$.

8.6. $\frac{ze^2(z+e^2)}{(z-e^2)^3}$.

8.7. $\Delta f_n = 3,\ \Delta^k f_n = 0\ (k = 2,3\dots)$.

8.8. $\Delta f_n = 2n,\ \Delta^2 f_n = 2,\ \Delta^k f_n = 0\ (k = 3,4\dots)$.

8.9. $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

8.10. $\frac{(n-1)\sin\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

8.11. $n3^{n-1}$.

8.12. $\sin\frac{n\pi}{2}$.

8.13. 2^n.

8.14. $(-1)^n(1-n)$.

8.15. $(-1)^n\frac{n^2-n}{2}$.

8.16. $\frac{4^{n-1}+15\cdot 2^{n-3}-7(-2)^{n-3}}{3}$.

8.17. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 3^{n-3}$.

Глава 9.

9.1. $\rho = e^{-1}$.

9.2. $\rho = 1$.

9.3. $\rho = e-1$.

9.4. $y = -x^3$.

9.5. $y = \frac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}1}$.

9.6. $y = (C+x)\sin x$, где $C = const$.

9.7. $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + (1+e)xe^{-x} - 1)$.

9.8. $y = \ln x$.

9.9. $y = x+1$.

9.10. $y = C_1 + C_2x - x^2/4$.

9.11. $y = \cos x + C\sin x$, где $C = const$.

9.12. Нет экстремалей.

9.13. $y(x) = C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1} - \lambda$. Постоянные C_1, C_2 и λ определяются из условий
$y_0 = C_1 \operatorname{ch}\frac{x_0-C_2}{C_1} - \lambda,\ y_1 = C_1 \operatorname{ch}\frac{x_1-C_2}{C_1} - \lambda,$
$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = C_1\left(\operatorname{sh}\frac{x_1-C_2}{C_1} - \operatorname{sh}\frac{x_0-C_2}{C_1}\right) = l.$
9.14. $y(x) = \pm 2\sin n\pi x,\ \ n \in Z.$
9.15. $J[y] = 1.$
9.16. $\sqrt{6}.$
9.17. $\frac{19\sqrt{2}}{8}.$
9.18. 2.
9.19. $\frac{4}{\sqrt{5}}.$
9.20. $\sqrt{20}.$
9.21. $\frac{\sqrt{11}}{2}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа./ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин – Москва : Наука, 1976. – 544 с.
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: Учеб. Для студентов университетов и вузов./ Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Высшая школа, 1989. – Т.3. – 352 с.
3. Толстов, Г. П. Ряды Фурье./ Г. П. Толстов. – Москва : Наука, 1980. – 384 с.
4. Князев, П. Н. Интегральные преобразования./ П. Н. Князев. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 198 с.
5. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены./ П. К. Суетин. – Москва: Наука, 1979. – 415 с.
6. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. / В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – Т.3. – Ч.2. – 672 с.
7. Эксгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление./ Л. Э. Эксгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.
8. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования/ Г. Деч. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
9. Беллман, Р. Введение в теорию матриц./ Р. Беллман. – Москва : Мир, 1969. – 352 с.
10. Ланкастер, П. Теория матриц./ П. Ланкастер. – Москва : Наука, 1973. – 269 с.
11. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов.: Учебное пособие. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др./ под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – Москва : Наука, 1986. – Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – 386 с.
12. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. : Учебное пособие/ Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др./ под. Ред. А.В. Ефимова. – Москва : Наука, 1990. – Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения – 304 с.
13. Коллатц, Л. Функциональный анализ и вычислительная математика./ Л. Коллатц. – Москва : Мир, 1969. – 447 с.
14. Гельфанд, А.О. Исчисление конечных разностей./ А. О. Гельфанд. – Москва : Гл. изд. физ.-мат. лит.,1959. – 400 с.
15. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями./ Л. Коллатц. – Москва: Наука, 1968. – 504 с.
16. Гельфанд, А.О. Вариационное исчисление./ А. О. Гельфанд, С. В. Фомин. – Москва : Гл. изд. физ.-мат. лит.,1961. – 228 с.

17.Смирнов, В. И. Курс высшей математики./ В. И. Смирнов. – Москва : Наука, 1974. – Т.4. – Ч.1. – 336 с.
18. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики./ В. С. Владимиров. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.

Бабич Александр Антонович
Корсун Лидия Дмитриевна
Емелин Анатолий Владимирович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

**Учебно-методическое пособие
по одноименному курсу для студентов
специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника»
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 16.06.11.
Рег. № 8Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by