



Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Металлорежущие станки и инструменты»

М. И. Михайлов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ И ИНСТРУМЕНТОВ

Учебное пособие

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2018

УДК 621.9.06-519.8(075.8)
ББК 34.63-5я73
М69

Рецензенты: зав. каф. «Материаловедение и технологии материалов»
Белорусского государственного университета транспорта
д-р техн. наук, проф. *П. Н. Богданович*;
проф. каф. «Технология машиностроения»
Белорусского национального технического университета
д-р техн. наук, проф. *И. А. Капитальян*

Михайлов, М. И.
М69 Математическое моделирование оборудования и инструментов : учеб. пособие /
М. И. Михайлов ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Су-
хого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – 284 с. – Систем. требования: РС не ни-
же Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98
и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-985-535-389-9.

Рассмотрены общие сведения о моделировании при проектировании оборудования и инст-
рументов, а также приведены математические модели оборудования и инструментов на основе
размерного анализа их параметров, каркасного моделирования и кинематики приводов.
Для студентов машиностроительных специальностей вузов.

УДК 621.9.06-519.8(075.8)
ББК 34.63-5я73

ISBN 978-985-535-389-9

© Михайлов М. И., 2018
© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2018

Оглавление

Введение	7
1. Общие сведения о моделировании при проектировании технологического оборудования	9
1.1. Режимы проектирования	9
1.2. Классификация математических моделей	10
1.3. Понятие о фундаментальных и прикладных научных исследованиях	14
1.4. Процесс автоматизированного проектирования технологического оборудования	16
1.5. Требования к математическим моделям	18
1.6. Использование фундаментальных решений на основе термодинамики	23
1.7. Моделирование задач структурного синтеза	38
2. Математическое моделирование оборудования и инструментов на основе геометрического анализа их параметров	48
2.1. Функциональные и размерные связи в оборудовании	48
2.2. Анализ размерными цепями компоновок оборудования	53
2.2.1. Качественный размерный анализ компоновок приводов станка	53
2.2.2. Предварительный размерный анализ компоновок станков	58
2.3. Размерный анализ систем управления станков	60
2.3.1. Ручная система управления	60
2.3.2. Копировальная система управления	61
2.3.3. Гидрокопировальная система управления	62
2.4. Размерный анализ робототехнического комплекса	69
2.5. Размерный анализ коробки передач	74
2.6. Моделирование размерных связей при заданной вероятности ...	77
2.6.1. Моделирование размерных связей центрированных случайных величин	78
2.6.2. Моделирование размерных связей скалярных величин	86
2.6.3. Моделирование размерных связей векторных величин	87
2.6.4. Моделирование размерных связей функционально зависимых величин	89
2.6.5. Моделирование размерных связей сопряжений деталей с зазором	91
2.7. Особенности расчёта связанных размерных цепей	102

2.8. Моделирование размерных связей элементов привода станка .	104
2.8.1. Цилиндрические зубчатые передачи	104
2.8.2. Конические зубчатые передачи	120
2.8.3. Червячные передачи	127
2.9. Моделирование технологических процессов размерными цепями	134
2.9.1. Анализ размеров деталей	134
2.9.2. Методика выявления технологических размерных цепей по размерной схеме технологического процесса	139
2.9.3. Моделирование технологических размерных цепей при помощи графов	142
2.9.4. Расчет технологических размерных цепей	149
3. Моделирование кинематических поверхностей	155
3.1. Математические модели регулярных поверхностей	155
3.2. Методы воспроизведения сложных поверхностей	160
3.3. Анализ кинематических поверхностей с помощью плоских сечений	163
3.4. Моделирование поверхностей рядами Фурье	168
3.5. Каркасное моделирование	171
3.5.1. Аппроксимация направляющих и образующих поверхностей	171
3.5.2. Моделирование сплайнами	175
3.5.3. Формирование контура детали при численном моделировании	189
3.6. Формирование поверхностей на основе сплайнов образующих и направляющих	194
3.7. Математическое моделирование кромок рабочей части инструмента и траекторий их движений	198
3.8. Алгебрологическое моделирование	206
3.9. Моделирование геометрических параметров зуба инструмента	209
3.10. Моделирование формообразующих кромок инструмента	215
3.10.1. Невращающийся инструмент	215
3.10.2. Обкатный инструмент при главном вращательном движении детали	217
3.10.3. Реечный обкатный инструмент	218
3.11. Математические модели образующих исходных инструментальных поверхностей на основе рядов Фурье	219

3.12. Моделирование геометрических и кинематических поверхностей методом преобразования систем координат	221
3.13. Моделирование погрешности позиционирования суппорта станка	241
3.14. Моделирование точности расположения узлов оборудования	244
4. Моделирование кинематики привода станка	249
5. Моделирование кинематической точности приводов оборудования	261
Литература	270
Приложения	272

Условные обозначения

ДУЧП – дифференциальные уравнения в частных производных

ДПТ – двигатель постоянного тока

ДМП – дискретное математическое программирование

ММ – математические модели

МУВП – муфта упругая втулочно-пальцевая

МДТ – метод достижения точности

МРКГП – максимальное расстояние между кинематической и геометрической поверхностями

ОиИ – оборудование и инструменты

ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения

ОА – область адекватности

РС – расчетная схема

РТК – роботизированный технологический комплекс

САПР – система автоматизированного проектирования

САУ – система автоматического управления

СМО – системы массового обслуживания

ТО – технологическое оборудование

ТП – тиристорный преобразователь

УПТ – усилитель постоянного тока

УЧПУ – устройство числового программного управления

ВВЕДЕНИЕ

Применение ЭВМ в металлообрабатывающих станках определило современный этап автоматизации производственных процессов в машиностроении. ЭВМ встраивают в систему числового программного управления отдельным станком, группой станков, станочным модулем, автоматической линией.

Сложность объектов проектирования в машиностроении непрерывно возрастает.

Так, металлорежущее оборудование оснащают следящими приводами, тончайшей измерительно-преобразующей аппаратурой, электроникой, микропроцессорной техникой, промышленными роботами и т. д. В то же время темпы обновления техники непрерывно возрастают, что приводит к быстрому моральному старению оборудования. Все это вынуждает увеличивать численность проектировщиков.

Использование ЭВМ при проектировании является единственным выходом из сложившегося положения, когда повышение производительности труда проектировщиков и ограничение их числа достигается за счет реализации возможностей ЭВМ на базе системных методов проектирования. Кроме реализации высокопроизводительной технологии проектирования, целью использования ЭВМ при автоматизации проектирования оборудования различного назначения, в том числе и металлорежущего, является повышение качества проектирования и технико-экономических показателей проектируемого оборудования; уменьшение материальных затрат и трудоемкости проектирования.

Эффективным является использование ЭВМ при выполнении проектных расчетов и при вычерчивании проектной документации. При этом уменьшается количество требуемых документов, упрощается их форма, ускоряется процесс размножения документов. Передача рутинных, утомительных работ для выполнения на ЭВМ в процессе проектирования снижает возможность появления субъективных ошибок, вызванных невнимательностью или утомлением конструктора. При необходимости на ЭВМ можно несколько раз повторить расчеты или другие действия с целью проверки правильности полученных результатов. В конечном счете все это должно приводить к уменьшению материальных затрат и снижению трудоемкости проектирования.

Повышение технико-экономических показателей проектируемого оборудования достигается за счет увеличения числа просматриваемых конструктивных решений, более точного и всестороннего анали-

за каждого проектного решения с помощью математического моделирования выбранных вариантов при различных условиях работы, вплоть до отыскания оптимальных параметров принятого варианта.

Учебное пособие посвящено проблемам математического моделирования оборудования и инструментов. Основное внимание уделено задачам математического моделирования геометрических свойств технических устройств.

Моделированию таких объектов в последние годы, судя по публикациям, уделяется значительно меньше внимания, чем моделированию больших сложных систем различного назначения. По-видимому, это связано с тем, что теория моделирования сравнительно несложных технических устройств разработана глубже, чем больших систем, и поэтому дальнейшим развитием этой теории занимается меньшее число специалистов.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

1.1. Режимы проектирования

По характеру и степени участия человека и использования ЭВМ при выполнении некоторого маршрута различают несколько режимов проектирования (рис. 1.1).

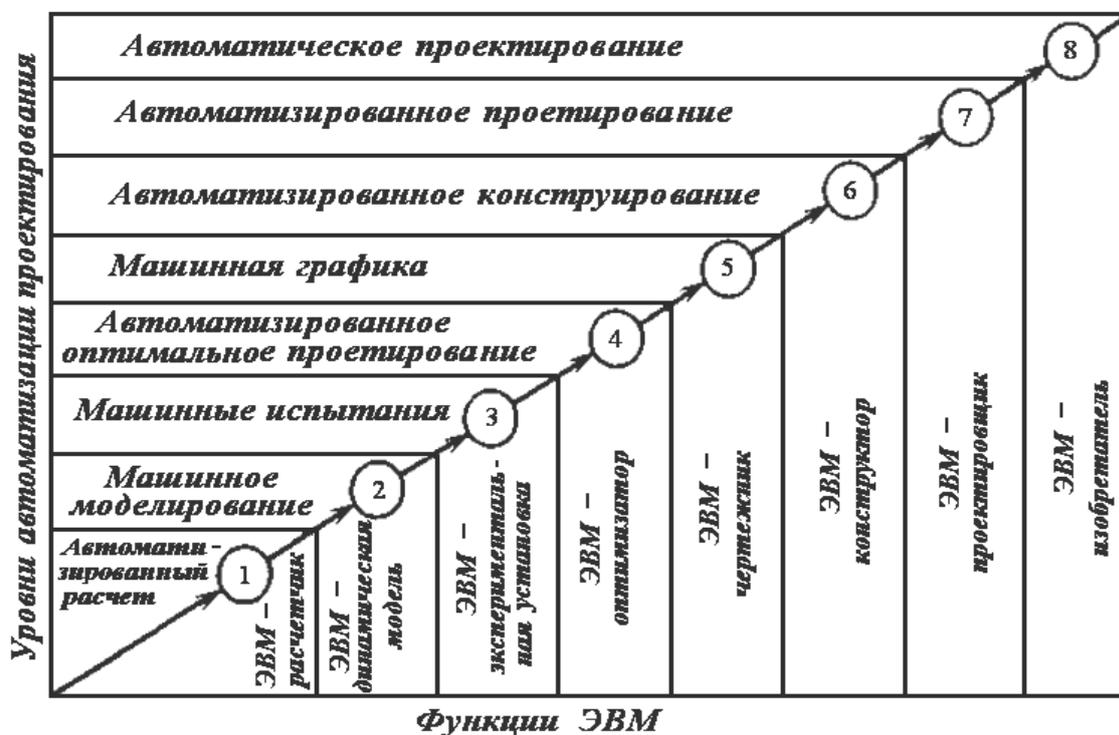


Рис. 1.1. Функции ЭВМ при различных уровнях автоматизации проектирования

Автоматический режим имеет место при выполнении маршрута проектирования по формальным алгоритмам на ЭВМ без вмешательства человека в ход решения.

Ручной (неавтоматизированный) режим характеризуется выполнением маршрута без помощи ЭВМ.

Автоматизированный режим – это такой режим, при котором часть проектных процедур в маршруте выполняется человеком вручную, а часть – с использованием ЭВМ.

Диалоговый (интерактивный) режим – это такой режим, при котором все процедуры в маршруте выполняются с помощью ЭВМ, а участие человека проявляется в оперативной оценке результатов проектных процедур или операций, в выборе продолжений и корректировке хода проектирования. Если инициатором диалога является человек, которому предоставлена возможность в любой момент прервать автоматические вычисления на ЭВМ, то диалог называется *активным*. Если прерывания вычислений происходят по командам исполняемой на ЭВМ программы в определенные, заранее предусмотренные моменты, т. е. проектировщик не может выступать как инициатор диалога, то такой диалог называют *пассивным*.

Во многих случаях пользователь САПР в режиме диалога только вводит и редактирует исходные данные для выполнения определенного маршрута проектирования, а непосредственное исполнение маршрута производится в автоматическом (пакетном) режиме работы ЭВМ. Развитие САПР происходит, в частности, в направлении повышения степени автоматизации проектирования. Однако работа в режиме диалога в САПР остается необходимой в связи с тем, что полностью процесс проектирования сложных систем формализовать не удастся и что участие человека в ряде случаев позволяет ускорить принятие решения.

1.2. Классификация математических моделей

Основные признаки классификации и типы математических моделей (ММ), применяемые в САПР, даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Типы математических моделей

Признак классификации	Математические модели
Характер отображаемых свойств объекта	Структурные; функциональные
Принадлежность к иерархическому уровню	Микроуровня; макроуровня; метауровня
Степень детализации описания внутри одного уровня	Полные; макромодели
Способ представления свойств объекта	Аналитические, алгоритмические, имитационные
Способ получения модели	Теоретические, эмпирические

По характеру отображаемых свойств оборудования и инструментов (ОиИ) ММ делятся на структурные и функциональные.

Структурные ММ предназначены для отображения структурных свойств ОиИ. Различают структурные ММ топологические и геометрические. В топологических ММ отображаются состав и взаимосвязи элементов ОиИ. Их чаще всего применяют для описания ОиИ, состоящих из большого числа элементов, при решении задач привязки конструктивных элементов к определенным пространственным позициям (например, задачи компоновки оборудования, размещения деталей, трассировки соединений) или к относительным моментам времени (например, при разработке расписаний, технологических процессов). Топологические модели могут иметь форму графов, таблиц (матриц), списков и т. п.

Канонические модели используют в тех случаях, когда удастся выделить параметры, однозначно определяющие геометрический объект и в то же время имеющие простую связь с его формой.

Например, для плоского многоугольника такими параметрами являются координаты вершин, для цилиндра – направляющие косинусы и координаты некоторой точки оси, а также радиус цилиндра.

Геометрические макромодели являются описаниями предварительно отобранных типовых геометрических фрагментов. Такими фрагментами могут быть типовые сборочные единицы, а их макромоделями – условные номера, габаритные и стыковочные размеры. При оформлении конструкторской документации макромодели используют для описания типовых графических изображений, например, зубчатых колес, винтовых соединений, подшипников и т. п.

Функциональные ММ предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в ОиИ при их функционировании. Обычно функциональные ММ представляют собой системы уравнений, связывающих фазовые переменные, внутренние, внешние и выходные параметры.

Выделение аспектов описания приводит к выделению моделей электрических, механических, гидравлических, оптических, химических и т. п., причем модели процессов функционирования изделий и модели процессов их изготовления различные.

Использование принципов блочно-иерархического подхода к проектированию приводит к появлению иерархии математических моделей проектируемых ОиИ. Количество иерархических уровней при моделировании определяется сложностью проектируемых ОиИ и возможностью средств проектирования. В зависимости от места в ие-

рархии описаний математические модели делятся на ММ, относящиеся к микро-, макро- и метауровням.

Особенностью ММ на микроуровне является отражение физических процессов, протекающих в непрерывном пространстве и времени.

Одним из эффективных подходов в разработке математических моделей на микроуровне является термодинамический.

В зависимости от использования того или иного подхода можно говорить о статистической или феноменологической термодинамике [8].

Статистическая термодинамика как равновесных, так и неравновесных процессов исходит из уравнений механики (квантовой или классической) для совокупности частиц, составляющих систему. Интегрирование этой системы уравнений практически невыполнимо из-за чрезвычайно большого числа переменных, но даже если бы это было возможно, мы все равно не смогли бы установить начальных условий для такого большого числа уравнений, это лежит далеко за пределами возможности экспериментов. Поэтому для изучения подобных систем пользуются методами статистической механики, основанными на введении функций распределения или статистических операторов.

Статистическая термодинамика составляет теоретическую базу *феноменологической термодинамики*, которая строится на основе фундаментальных принципов (начал), являющихся обобщением многочисленных наблюдений и выполняющихся независимо от конкретной природы образующих систему тел. Поэтому закономерности в соотношениях между физическими величинами, к которым приводит классическая феноменологическая термодинамика (в дальнейшем будем называть ее просто термодинамикой), имеют универсальный характер.

Типичные ММ на микроуровне – дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП). В них независимыми переменными являются пространственные координаты и время. С помощью этих уравнений рассчитываются поля механических напряжений и деформаций, электрических потенциалов, давлений, температур и т. п.

Возможности применения ММ в виде ДУЧП ограничены отдельными деталями, попытки анализировать с их помощью процессы в многокомпонентных средах, сборочных единицах, электронных схемах не могут быть успешными из-за чрезмерного роста затрат машинного времени и памяти.

На макроуровне используют укрупненную дискретизацию пространства по функциональному признаку, что приводит к представле-

нию ММ на этом уровне в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В этих уравнениях независимой переменной является время t , а вектор зависимых переменных V составляют фазовые переменные, характеризующие состояние укрупненных элементов дискретизированного пространства. Такими переменными являются силы и скорости механических систем, напряжения и силы тока электрических систем, давления и расходы гидравлических и пневматических систем и т. п.

Системы ОДУ являются универсальными моделями на макроуровне, пригодными для анализа как динамических, так и установившихся состояний. Модели для установившихся режимов можно также представить в виде систем алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений зависит от числа выделенных элементов объекта. Если порядок системы приближается к 10^3 , то оперирование моделью становится затруднительным и поэтому необходимо переходить к представлениям на метауровне.

На метауровне в качестве элементов принимают достаточно сложные совокупности деталей. Метауровень характеризуется большим разнообразием типов используемых ММ. Для многих объектов ММ на метауровне по-прежнему представляются системами ОДУ. Так как в моделях не описываются внутренние для элементов фазовые переменные, а фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов, то укрупнение элементов на метауровне означает получение ММ приемлемой размерности для существенно более сложных объектов, чем на макроуровне.

В ряде предметных областей удается использовать специфические особенности функционирования объектов для упрощения ММ. Примером являются электронные устройства цифровой автоматики станка, в которых возможно применять дискретное представление таких фазовых переменных, как напряжения и токи. В результате ММ становится системой логических уравнений, описывающих процессы преобразования сигналов. Такие логические модели существенно более экономичны, чем модели электрические, описывающие изменения напряжений и сил токов как непрерывных функций времени. Важный класс ММ на метауровне составляют модели массового обслуживания, применяемые для описания процессов функционирования производственных участков, линий и цехов.

Математические модели систем массового обслуживания (СМО) могут быть аналитическими и имитационными.

Аналитическая модель СМО представляет собой совокупность явных зависимостей выходных параметров от параметров внутренних и внешних. Однако получение аналитических моделей оказывается возможным лишь в отдельных частных случаях сравнительно простых СМО.

В общем случае используются имитационные модели, несмотря на значительные затраты вычислительных ресурсов, связанные с их реализацией.

Имитационная модель СМО представляет собой алгоритм, описывающий изменения переменных состояния на моделируемом отрезке времени. Предполагается, что изменение состояния любой переменной, называемое событием, происходит мгновенно в некоторый момент времени. Имитационное моделирование СМО – воспроизведение последовательности событий в системе при вероятностном характере параметров системы. Имитация функционирования системы при совершении большого числа событий позволяет произвести статистическую обработку накопленных результатов и оценить значения выходных параметров.

1.3. Понятие о фундаментальных и прикладных научных исследованиях

Математик-теоретик обычно выбирает для исследования уже построенную ММ, т. е. начинает работу с формулировки математической задачи, и затем уже не подвергает сомнению эту формулировку, а лишь обосновывает свои преобразования и этапы решения задачи. При этом в некоторых случаях полученные результаты удается применить непосредственно к конкретному технологическому оборудованию (ТО). Но в технике ни одну достаточно сложную задачу нельзя поставить таким образом. Любое формулирование технической задачи является условным. Если некоторое следствие формулировки такой задачи неверно или неприемлемо, то задачу приходится переформулировать, так как любая последовательность математических символов, записанных при построении ММ, является в действительности последовательностью утверждений содержательного характера, связанных с конкретным исследуемым ТО. Поэтому при математическом моделировании ТО необходимо учитывать как математическую, так и содержательную сторону задачи, связывая одну с другой. Забвение

относительного соответствия ММ реальному ТО может привести к ошибкам, связанным с приписыванием ТО свойств его ММ.

Следует отметить определяющую роль гипотез при формировании расчетных схем (РС) типовых элементов. При этом целесообразно отдавать предпочтение более простым гипотезам по сравнению с искусственными и обычно трудно проверяемыми. Если простая гипотеза верна, то ее обычно легко аргументировать и подтвердить экспериментально. Если же она вызывает сомнение, то ее нетрудно опровергнуть либо на основе контрпримеров и непосредственных наблюдений, либо исходя из соответствующим образом поставленных экспериментов, либо при получении противоречивых результатов уже на стадии количественного анализа ММ, построенной с использованием этой гипотезы. Однако принятие простой гипотезы не всегда равносильно построению простых РС и ММ изучаемого ТО.

Отмеченные особенности дают повод для того, чтобы еще раз подчеркнуть важность умения согласовывать этап формирования расчетных схем с этапом построения ММ изучаемого ТО.

Акцент на взаимной связи этапов формирования РС и построения ММ исследуемого ТО не противоречит, а дополняет совершенствование триады «модель–алгоритм–программа» и ее внедрение в современные информационные технологии. В этой триаде основное внимание уделено проблемам анализа построенных ММ, методам вычислительной математики при помощи средств вычислительной техники. Подчеркнуто, что изолирование этапов, связанных с построением ММ или разработкой алгоритмов и пакетов программ, как и обучение выполнению этих этапов по отдельности, не достаточно для эффективного использования преимуществ математического моделирования. Наличие современных ЭВМ само по себе еще не решает проблему. Необходимо «интеллектуальное ядро» вычислительной техники, которым является ее математическое обеспечение, составляющее, по некоторым оценкам, не менее 80 % общей стоимости разработки информационных технологий.

Однако метод, который годится для решения многих стандартных задач, часто не является наилучшим при решении конкретной задачи, особенно нестандартной, а нередко и вообще не применим. Но в инженерной практике решать приходится в основном нестандартные задачи. При решении новых и сложных задач, не имеющих близких аналогов, путь формального обращения к универсальным пакетам и программным комплексам может привести к получению результатов,

которые не удастся интерпретировать применительно к рассматриваемому ТО. В таких случаях анализ ММ нужно строить на умелом сочетании качественных оценок, аналитических методов и применения ЭВМ. При этом необходимо помнить, что цель расчетов – не числа, а понимание.

1.4. Процесс автоматизированного проектирования технологического оборудования

Процесс автоматизированного проектирования ТО базируется на системном подходе, использующем принципы декомпозиции, иерархичности, итеративности, локальной оптимизации и комплексного осуществления процесса проектирования, включающего функциональный, конструкторский и технологический аспекты. Схема типового маршрута проектирования ТО в среде автоматизированного проектирования представлена на рис. 1.2.

Основные компоненты маршрута предусматривают выполнение процедур анализа и синтеза, выступающих в диалектическом единстве.

Анализ ТО – это изучение его физических свойств, характеризуемых выходными параметрами. При анализе не создается новое оборудование, а исследуется известное на основе изучения процессов его функционирования. Для этого проводятся вычислительные эксперименты с использованием математических моделей объектов.

Синтез ТО – это создание новых вариантов, обеспечивающих заданный алгоритм функционирования и выполнение технических требований к оборудованию.

Если определяют наилучшие в некотором смысле структуру и параметры, то синтез называют *оптимизацией*. При определении оптимальных значений параметров говорят о *параметрической оптимизации*. Задачу выбора оптимальной структуры называют *структурной оптимизацией*.

Иерархичность и декомпозиция процесса проектирования ТО обуславливают многообразие решаемых задач, их целей и используемых ММ на различных стадиях и этапах.

В общем случае задачей синтеза является определение структуры и параметров ТО. В связи с различием ММ непрерывных и дискретных объектов методы решения задач их синтеза различны.

Рассмотрим подробнее проектирование ТО на основе маршрута, приведенного на рис. 1.2. Объектом проектирования может быть любой элемент ТО, выделенный в результате декомпозиции.

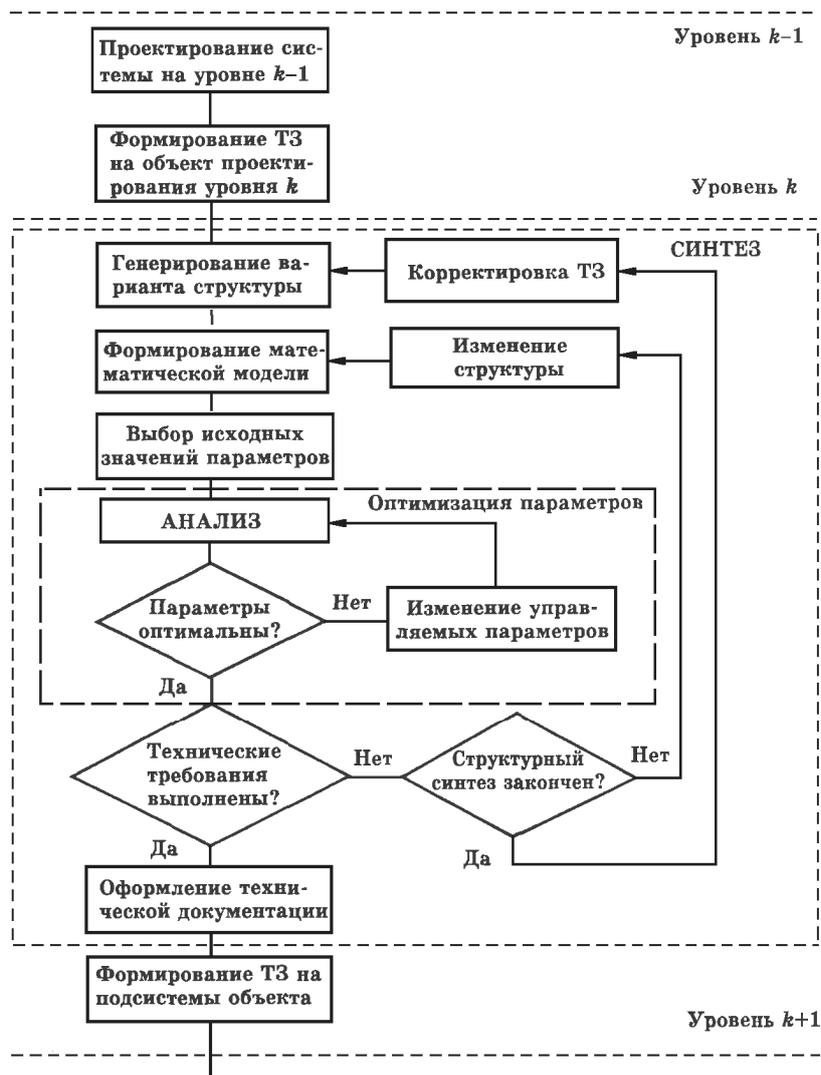


Рис. 1.2. Схема типового маршрута проектирования ТО в системе автоматического проектирования

Формализовать и автоматизировать процедуру синтеза структуры сложно, поэтому синтез структуры объекта обычно осуществляется перебором возможных вариантов, генерируемых эвристическими методами. Для каждого варианта структуры формируется своя ММ и выбираются исходные значения внутренних параметров. Сравнить альтернативные варианты структур можно лишь после определения оптимальных параметров элементов объекта.

Математические описания элементов структуры проектируемого объекта известны и хранятся в базе данных. В результате формирование ММ представляет собой синтез абстрактной модели объекта. Процедура синтеза при этом легко формализуется и может быть автоматизирована. Оптимизации подлежат обычно не все параметры

объекта, а только некоторая их часть. Это обусловлено тем, что при проектировании технических объектов широко используются стандартные и унифицированные элементы, параметры которых не могут быть изменены. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

При проектировании часто ограничиваются сравнением нескольких альтернативных вариантов структур, а иногда поиск решения заканчивают, если найден вариант, удовлетворяющий техническим требованиям. Такое проектное решение называют *допустимым*.

Если сравнивается ограниченное число вариантов структур, то основными компонентами технологического маршрута проектирования являются синтез структуры, анализ и оптимизация параметров вариантов структур, процедура оценки и принятия решения.

1.5. Требования к математическим моделям

К математическим моделям предъявляется ряд требований, таких как универсальность, адекватность, точность, экономичность и др.

Степень универсальности математической модели оборудования и инструментов характеризует полноту отображения в модели свойств ОиИ.

Пример. Математическая модель резистора в виде уравнения закона Ома характеризует свойство резистора пропускать электрический ток, но не отражает габариты резистора как детали, его цвет, механическую прочность, стоимость и т. п.

Точность ММ оценивается степенью совпадения значений параметров реального ОиИ и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью оцениваемой ММ. Пусть отражаемые в ММ свойства оцениваются вектором выходных параметров $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, тогда, обозначив истинное и рассчитанное с помощью ММ значения j -го выходного параметра через $y_{\text{ист}}$ и $y_{\text{м}}$, соответственно, определим относительную погрешность ε_j расчета параметра y_j как

$$\varepsilon_j = \frac{(y_{\text{м}} - y_{\text{ист}})}{y_{\text{ист}}}. \quad (1.1)$$

Получена векторная оценка $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. При необходимости сведения этой оценки к скалярной используют какую-либо норму вектора ε , например:

$$\varepsilon_M = |\varepsilon| = \max_{j \in [1:m]} \varepsilon_j, \quad (1.2)$$

Адекватность ММ (правильное соответствие) – способность отображать заданные свойства ОиИ с погрешностью не выше заданной. Поскольку выходные параметры являются функциями векторов параметров внешних Q и внутренних X , погрешность ε_j зависит от значений Q и X . Обычно значения внутренних параметров ММ определяют из условия минимизации погрешности ее в некоторой точке $Q_{\text{ном}}$ пространства внешних переменных, а используют модель с рассчитанным вектором X при различных значениях Q . При этом, как правило, адекватность модели имеет место лишь в ограниченной области изменения внешних переменных – области адекватности (ОА) математической модели:

$$\text{ОА} = \{Q \mid \varepsilon_M \leq \delta\},$$

где $\delta > 0$ – заданная константа, равная предельно допустимой погрешности модели.

При оценке адекватности необходимо:

1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, о их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т. п.;

2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится второе условие или нет, говорят соответственно, о *количественных* или *качественных* моделях. Вместо количественной адекватности говорят также о *точности* модели.

Например, для колебательной системы с медленным затуханием модель (1.3) адекватна по отношению к частоте колебаний и в определенной степени к характеру колебаний, так как на небольшом интервале времени затуханием колебаний можно пренебречь:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0. \quad (1.3)$$

Однако если нас интересует скорость этого затухания (пусть малая, но все же существующая), то модель (1.3) неадекватна, а в качестве адекватной модели можно принять уравнение (1.4):

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f \frac{\partial x}{\partial t} + kx = 0. \quad (1.4)$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу о распространении тепла в твердом теле, материал которого *однороден* (т. е. одинаков во всех точках) и *изотропен* (т. е. одинаков во всех направлениях). Стандартные рассуждения, основанные на законе Фурье, приводят к известному *уравнению теплопроводности*:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right), \quad (1.5)$$

где θ – температура; t – время; a – коэффициент температуропроводности, характеризующий свойства материала и содержащийся в справочниках.

Уравнение с хорошей точностью описывает реальную эволюцию температуры, т. е. является в этом смысле адекватным в количественном отношении. Кроме того, из него можно вывести следствия качественного характера, также правильно описывающие реальный процесс: сохранение количества тепла и выравнивание температуры при $t \rightarrow \infty$ для теплоизолированного тела, невозможность температурных «всплесков» и т. д.

Покажем, например, как из уравнения (1.5) вытекает закон сохранения тепловой энергии для теплоизолированного тела (Ω) с поверхностью (S). Так как количество теплоты $Q = \int_{(\Omega)} c\rho \theta d\Omega$, то

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c\rho \int_{(\Omega)} \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega = c\rho a \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta d\Omega = c\rho a \int_{(S)} (\operatorname{grad} \theta)_n dS$$

(здесь мы сначала применяем правило Лейбница, а затем формулу Остроградского). Но для теплоизолированного тела имеем $c\rho a (\operatorname{grad} \theta)_n = q_n = 0$ на (S), поэтому $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$, т. е. $Q = \text{const}$.

Таким образом, относительно этих свойств процесса уравнение (1.5) адекватно и в качественном отношении. С другой стороны, известно, что из уравнения (1.5) вытекает физически абсурдный вывод о бесконечной скорости распространения тепла. Значит, если в число

целей исследования включить скорость распространения тепла (т. е. рассматривать эту скорость как существенную характеристику процесса), то уравнение (1.5) окажется неадекватным как в количественном, так и в качественном отношениях и потребуются его видоизменить.

Требование достаточной простоты. Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочитать простым. В самом деле, усложняя модель, мы можем учесть большее число факторов, которые могут так или иначе повлиять на изучаемые свойства. Так, в примере при рассмотрении частоты колебаний модель (1.4) имеет более высокую адекватность, чем (1.3), так как из уравнения (1.4) мы получаем значение частоты с учетом малого трения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{4mk}\right)^{1/2}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{8mk}\right)}$$

(при переходе к приближенному равенству применена формула Тейлора).

В данном примере решение усложненного уравнения не вызвало затруднений. Но в иных, особенно в нестандартных, ситуациях чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению.

Таким образом, мы приходим к требованию *достаточной простоты* модели по отношению к исследуемой системе ее свойств. Модель является достаточно простой, если имеющиеся в нашем распоряжении средства исследования (в частности, вычислительные) дают возможность провести в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный – в зависимости от постановки задачи – анализ исследуемых свойств и осмыслить результат. Впрочем нередки случаи, когда усложнение модели может ухудшить ее адекватность: так бывает, например, если при выписывании добавочных уравнений привлекаются параметры, известные с весьма низкой точностью, или если сами эти уравнения сомнительны. Поэтому часто бывает, что, выбрав модель, приходится ее упрощать, т. е. переходить к новой модели. При этом можно упрощать либо содержательную модель объекта, либо ее математическую модель. Опытный специалист обычно идет по первому пути, так как при этом остаются выполненными наиболее существенные физические соотношения и более ясны постулаты модели.

Пример. Пусть в (1.3) массой m_n пружины пренебрегать нельзя; как учесть это обстоятельство? Отметим, прежде всего, что если один

конец однородной пружины массы m_n закреплен, а другой движется вдоль линии ее действия со скоростью v , то, приняв растяжение равномерным и обозначив l_n ее длину в ненагруженном состоянии, получаем выражение для кинематической энергии пружины:

$$T_n = \int_0^{t_n} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_n} v \right)^2 \left(\frac{m_n}{l_n} dx \right) = \frac{1}{6} m_n v^2.$$

Поэтому закон сохранения энергии в применении к рассматриваемой системе имеет вид:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{6} m_n \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const.}$$

После дифференцирования и сокращения на $\frac{\partial x}{\partial t}$ получаем:

$$\left(m + \frac{1}{3} m_n \right) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0.$$

Сравнивая с уравнением (1.3), мы видим, что в приведенных предположениях можно считать массу пружины равной нулю – это, конечно, упростит модель, – но к массе груза добавить $\frac{m_n}{3}$. Это правочное слагаемое называется *присоединенной массой* пружины в рассматриваемой задаче.

Существенным является также свойство *полноты* математической модели состоящее в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересные нас утверждения. Так, если мы в качестве модели ограничиваемся уравнением (1.3), то для определения частоты колебаний эта модель является полной, а для определения амплитуды – неполной, так как для последнего нужны добавочные данные.

Еще одно важное требование к математической модели можно назвать ее *продуктивностью*. Оно связано с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры.

Отметим, далее, требование *робостности* (от англ. *robust* «робаст» – крепкий) модели, т. е. ее устойчивости относительно погрешностей в исходных данных. Всегда надо иметь в виду, что эти данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью и такая неопределенность не должна существенно влиять на результат

исследования. Имеется ряд правил, способствующих этой устойчивости. Так, следует избегать вычитания близких друг к другу приближенных значений величины, потому что при таком вычитании относительная погрешность резко возрастает. (Пусть, например, даны $a = 275,1 \pm 0,1$ и $b = 272,3 \pm 0,1$; тогда $a - b = 2,8 \pm 0,2$. Здесь a и b известны с точностью до 0,04 %, а $a - b$ – до 7 %; точность ухудшилась в 200 раз!).

Выражения, содержащие такие разности, следует преобразовать. (Например, вычислив на микрокалькуляторе значение $l = \sqrt{a^2 + \alpha} - a$ при $a = 15721$, $\alpha = 0,3$, получим, считая значения a и α точными, $l = 9 \cdot 10^{-6}$; если же преобразовать эту формулу к виду $l = \frac{\alpha}{(\sqrt{a^2 + \alpha} + a)}$, то получим существенно более информативное значение $l = 9,5413778 \cdot 10^{-6}$).

Неустойчивость математической модели может получиться из-за включения в нее функций, быстро изменяющихся на участке, где значение аргумента известно лишь с невысокой точностью, и т. д.

Экономичность ММ характеризуется затратами вычислительных ресурсов (затратами машинных времени T_M и памяти Π_M) на ее реализацию. Чем меньше T_M и Π_M , тем модель экономичнее. Вместо значений T_M и Π_M часто используют другие величины, например: среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к модели, размерность системы уравнений, количество используемых в модели внутренних параметров и т. п.

1.6. Использование фундаментальных решений на основе термодинамики

Всякое изменение, происходящее в термодинамической системе и связанное с изменением хотя бы одного из ее параметров, называется *термодинамическим процессом*.

Процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется *процессом релаксации*. При этом для выравнивания каждого параметра существует свое характерное время – время релаксации для данного параметра. Роль полного времени релаксации играет максимальное из этих времен.

Процесс, протекающий в термодинамической системе со скоростью, значительно меньшей скорости релаксации, представляет собой цепочку бесконечно близких равновесных состояний и называется *равновесным или квазистатическим процессом*. Для такого процесса в любой момент времени градиенты всех параметров равны нулю.

Если изменение какого-либо параметра происходит за время, равное или меньшее времени релаксации, то такой процесс называется *неравновесным (нестатическим)*.

Процесс перехода из некоторого состояния 1 к состоянию 2 называется *обратимым*, если для каждого промежуточного состояния все уравнения для бесконечно малых приращений параметров удовлетворяются также при замене знаков этих приращений на обратные. Если процесс не обладает таким свойством, то он называется *необратимым*. Обычно равновесные процессы одновременно являются и обратимыми. В то же время можно рассматривать обратимые процессы, не составленные из термодинамических равновесных состояний.

По характеру связей с внешними телами или по типу ограничений, выделяющих термодинамические системы из окружающей среды, различают три основных типа термодинамических систем:

1. Изолированная, или замкнутая система, не обменивающаяся энергией в виде теплоты с окружающей средой.

2. Адиабатически изолированная система, не обменивающаяся энергией в виде теплоты с окружающей средой.

3. Неизолированные системы.

Аксиомы термодинамики. Перейдем теперь к перечислению основных аксиом термодинамики [8].

1. *Принцип существования состояния термодинамического равновесия.* Постулируется, что изолированная система с течением времени всегда приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может.

2. *Принцип существования температуры (нулевой закон термодинамики).* Постулируется, что адиабатически изолированные, термодинамически равновесные системы образуют при приведении их в тепловой контакт общую термодинамически равновесную систему только при условии равенства температур исходных систем.

На основании этого принципа вводится эмпирическая температура θ – величина, выражающая состояние внутреннего движения равновесной системы. Все равновесные внутренние параметры термодинамической системы являются функциями внешних параметров и температуры θ .

3. *Первое начало термодинамики.* Общая мера материального движения при его превращении из одного вида в другой называется энергией.

Полная энергия термодинамической системы разделяется на внешнюю и внутреннюю. Во *внешнюю энергию* входит энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы в поле сил. Вся остальная часть энергии системы называется ее *внутренней энергией*.

Обычно в термодинамике не рассматривается движение системы как целого и изменение ее потенциальной энергии при таком движении, поэтому энергией системы в термодинамике является ее внутренняя энергия. В состав внутренней энергии системы входит энергия всех видов движения и взаимодействия входящих в систему частиц: энергия поступательного и вращательного движения молекул и колебательного движения атомов, энергия молекулярного взаимодействия, внутриатомная энергия заполненных электронных уровней и т. д.

Внутренняя энергия E при условии равновесия зависит от внешних параметров a_i и температуры θ :

$$E = E(a_1, a_2, \dots, a_n, \theta).$$

При взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой происходит обмен энергии. При этом возможны два различных способа передачи энергии системе от внешних тел: с изменением внешних параметров системы и без изменения этих параметров.

Первый способ передачи энергии, связанный с изменением внешних параметров, называется *работой*, второй способ – без изменения внешних параметров – *теплотой*, а сам процесс передачи – *теплообменом*.

Количество энергии, переданное системе с изменением ее внешних параметров, также называется *работой* A (а не количеством работы), а количество энергии, переданной системе без изменения ее внешних параметров, – количеством теплоты Q .

В термодинамике принято считать работу A положительной, если она производится системой над внешними телами, а количество теплоты считать положительным, если соответствующая энергия передается системе.

Первое начало термодинамики устанавливает, что внутренняя энергия системы является однозначной функцией ее состояния и изменяется только под влиянием внешних воздействий.

В интегральном виде, т. е. для конечного процесса, первое начало записывается в виде $E_2 - E_1 = Q - A$, где $E_2 - E_1$ – изменение внутренней энергии системы при переходе из первого состояния во второе.

Для элементарного процесса имеет место уравнение

$$dE = \delta Q - \delta A, \quad (1.6)$$

где δQ обозначает элементарное количество теплоты; δA – элементарную работу.

Буква δ выбрана для того, чтобы отметить, что они не являются точными дифференциалами, каковым является, например, dE .

4. Второе начало термодинамики устанавливает существование у любой равновесной системы еще одной однозначной функции состояния – энтропии S , которая в отличие от внутренней энергии не изменяется в изолированной системе лишь при квазистатических процессах и всегда возрастает при нестатических процессах.

Для квазистатических процессов:

$$\delta Q = TdS, \quad (1.7)$$

где T – абсолютная температура, определяемая как функция эмпирически установленной температуры.

Объединяя это уравнение с уравнением первого начала (1.6), получим основное уравнение термодинамики для квазистатических (обратимых) процессов:

$$TdS = dE + \delta A. \quad (1.8)$$

Для необратимых процессов имеет место неравенство

$$TdS > dE + \delta A. \quad (1.9)$$

Кроме того, доказывается, что приращение энтропии ΔS в любом адиабатическом процессе не может быть отрицательным:

$$\Delta S \geq 0. \quad (1.10)$$

Классическая термодинамика занимается изучением в основном равновесных процессов. При анализе неравновесных процессов она указывает лишь на их направление, не давая возможности получить количественные результаты.

В то же время именно неравновесные процессы представляют для моделирования станков и инструментов наибольший интерес. Поэтому естественным является стремление к созданию термодинамики неравновесных процессов.

Обобщение классической термодинамики основывается прежде всего на понятии *локального равновесия*. Известно, что время релаксации растет с увеличением размеров системы. Поэтому отдельные макроскопически малые части системы сами по себе приходят в равновесное состояние значительно раньше, чем устанавливается равновесие между этими малыми частями. Хотя система в целом и не находится в равновесии, можно, однако, говорить о локальном равновесии в макроскопически небольших частях системы, характеризуя эти части определенной температурой и другими термодинамическими параметрами.

Современная термодинамика необратимых процессов базируется на некоторых постулатах, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1. Соотношения термодинамики равновесных процессов (1.8), (1.9) остаются справедливыми и в случае термодинамики неравновесных процессов, но только локально (принцип локального равновесного состояния).

2. В каждом локальном объеме внутренняя энергия и энтропия, как и при равновесии, явно зависят только от термодинамических параметров и лишь через них от времени и координат.

3. Градиенты скоростей, температур, напряжений в рассматриваемой среде достаточно малы.

4. Полное изменение энергии и энтропии при деформации данного тела аддитивно складывается из изменения этих параметров в отдельных элементах объема.

Рассмотрим в некоторый момент времени t материальный объем W , ограниченный поверхностью Σ . Для локальной части объема – элемента dW – можно определить внутреннюю энергию dE и энтропию dS , если ввести понятия удельной внутренней энергии e и удельной энтропии s , отнесенных к единице массы. Тогда

$$dE = e\rho dW, dS = s\rho dW.$$

Из постулата об аддитивности этих величин для объема W имеем:

$$E = \iiint_W e\rho dW; S = \iiint_W s\rho dW. \quad (1.11)$$

Будем учитывать теперь тепловой поток через поверхность Σ . С этой целью введем *вектор теплового потока* \vec{q} , характеризующий поток тепла через единицу площади в единицу времени.

Кроме теплового потока через поверхность тела приток тепловой энергии извне может быть описан действием распределенных источников интенсивностью z . Другими словами, z – количество тепла, выделяющегося в единице массы за единицу времени вследствие взаимодействия с окружающей средой (например, вследствие индукционного нагрева тела вихревыми токами).

Тогда скорость притока тепла к среде выражается формулой

$$\frac{\delta Q}{dt} = -\iint_{\Sigma} q_n d\Sigma + \iiint_W \rho z dW. \quad (1.12)$$

Знак «минус» появился в связи с тем, что подсчитывается количество теплоты, втекающей за единицу времени в объем W (плюсу соответствует количество теплоты, вытекающей из объема).

Закон сохранения энергии запишется в виде:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{\delta A}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}. \quad (1.13)$$

$$\text{Здесь } \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_W \rho e dW = \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW.$$

Далее, $\frac{\delta A}{dt}$ – мощность внешних поверхностных и массовых сил, действующих на объем W , т. е. работа, которую внешние силы производят *над* объемом W в единицу времени. Поэтому в отличие от соотношений (1.6), (1.8) эта работа входит в правую часть уравнения энергии со знаком «плюс».

Буква « δ » означает, что приращения δA и δQ , соответствующие времени dt , не являются полными дифференциалами.

В развернутой форме уравнение (1.13) принимает вид:

$$\begin{aligned} \iiint_W \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dW + \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW &= \iint_{\Sigma} \sigma_{ni} v_i d\Sigma + \\ + \iiint_W \rho F_i v_i dW - \iint_{\Sigma} q_i n_i d\Sigma + \iiint_W \rho z dW. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Воспользуемся зависимостью Коши $\sigma_{ni} = \sigma_{ik} n_k$ и преобразуем поверхностные интегралы по объему. Получим:

$$\iiint_W \left[v_i \left(\rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho F_i \right) + \rho \frac{de}{dt} - \sigma_{ik} \xi_{ik} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho z \right] dW = 0.$$

Из уравнения движения следует, что выражение в круглых скобках равно нулю. Объем W выбран произвольно. Поэтому в каждой точке области, заполненной сплошной средой, справедливо уравнение сохранения энергии, записанное в локальной форме:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \xi_{ik} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z. \quad (1.15)$$

Или

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \xi_{ik}^B + \sigma_{ik} \xi_{ik}^P - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z. \quad (1.16)$$

Величина $\sigma_{ik} \xi_{ik}^P$ называется *диссипативной функцией*, она представляет собой *скорость диссипации* (рассеяния) энергии внутренними напряжениями в единице объема. Если в среде происходит обратимый процесс, то диссипативная функция тождественно равна нулю.

Для локального элемента объема dW можно определить конечное число внешних и внутренних термодинамических параметров. Так, для упругой среды удельная внутренняя энергия e является функцией шести внешних параметров – компонентов деформации ε_{ik} и температуры T . Приращение e при переходе от заданного состояния к бесконечно близкому состоянию деформации можно представить в виде:

$$de = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T.$$

Обозначив через δQ приращение тепла, первое начало термодинамики можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} + \delta Q).$$

В общем случае внешние термодинамические параметры локального элемента объема dW являются некоторыми функционалами процесса изменения во времени компонентов деформации и температуры.

Энтропия элемента объема dW равна $\rho s dW$, а полная энтропия объема W определится интегралом $\iiint_W \rho s dW$.

Представим изменение удельной энтропии ds в виде суммы двух слагаемых:

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}.$$

Здесь $ds^{(e)}$ – приращение удельной энтропии, вызванное взаимодействием с внешней средой; $ds^{(i)}$ – приращение, связанное с изменениями внутри системы.

Постулируя применимость второго начала термодинамики для локальных частей системы, можно утверждать, что $ds^{(i)} \geq 0$, причем знак равенства справедлив только для обратимых процессов.

Из второго начала термодинамики следует, что скорость изменения полной энтропии S сплошной среды, заполняющей объем W , никогда не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через границу объема и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками.

В интегральной форме этот закон выражается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho s dW \geq \iiint_W \rho \eta dW - \iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma, \quad (1.17)$$

где η – мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы; T – абсолютная температура.

Знак равенства относится к обратимым процессам, неравенство относится к процессам необратимым.

Введем величину скорости внутреннего производства энтропии γ , отнесенную к единице массы.

Воспользовавшись преобразованием

$$\iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma = \iiint_W \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dW$$

и учитывая произвольность объема W , получим неравенство Клаузиуса–Дюгема:

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - \eta - \frac{1}{\rho T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \geq 0. \quad (1.18)$$

Это неравенство накладывает определенные ограничения на уравнение связи напряженного и деформированного состояний.

В частности, из него следует, что диссипативная функция удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{ik} \xi_{ik}^p \gg 0. \quad (1.19)$$

Феноменологические уравнения. Во многих необратимых процессах, протекающих в сплошной среде, соответствующие закономерности выражаются линейными соотношениями между причиной и следствием. Например, закон теплопроводности о пропорциональности теплового потока градиенту температуры ($\vec{q} = -\lambda \text{grad}\vartheta$, $\lambda > 0$), закон диффузии о пропорциональности потока компоненты смеси градиенту концентрации ($\vec{j} = -D \text{grad}c$, $D > 0$), закон Ома о пропорциональности плотности тока градиенту потенциала ($\vec{j} = -\sigma \text{grad}\varphi$, $\sigma > 0$).

Причины, вызывающие необратимые явления, носят в термодинамике этих явлений названия «сил» и обозначаются через \vec{X}_i ($i = 1, 2, \dots$; градиент температуры, градиент концентрации, градиент электрического потенциала и т. д.).

Количественные характеристики соответствующих необратимых явлений, вызываемых силами \vec{X}_i , называются «потоками» \vec{J}_i ($i = 1, 2, \dots$; поток тепла, поток диффузии, вектор плотности электрического тока и т. д.).

Скорость производства энтропии определяется только необратимыми процессами и может быть записана в виде:

$$\gamma = \sum_k \vec{J}_k \vec{X}_k, \quad (1.20)$$

где \vec{J}_k – «потоки» (например, диффузионный поток \vec{j} , тепловой поток \vec{q} , тензор диссипативных напряжений σ^D_{ik} , а \vec{X}_k – сопряженные им «термодинамические силы», т. е. градиенты термодинамических параметров, вызывающих отклонение от равновесного состояния).

Положение равновесия с термодинамической точки зрения характеризуется равенством нулю действующих термодинамических сил. В этом случае выражение для скорости производства энтропии также обращается в нуль. Логично предположить, расширяя понятие равновесия, что вместе с обращением в нуль всех действующих термодинамических сил в положении равновесия в нуль обращаются также и термодинамические потоки. В этом случае в общем виде может быть записана связь термодинамических потоков и сил. Опыт показывает, что в широком диапазоне экспериментальных условий эта связь чрезвычайно проста – *необходимые потоки являются линейными функциями термодинамических сил*:

$$\vec{J}_i = \sum_k L_{ik} \vec{X}_k, \quad (1.21)$$

где L_{ik} – коэффициент переноса.

Феноменологическое уравнение (1.21) рассматривается как первый член разложения в ряд общей связи потоков и сил. В прямых процессах термодинамическая сила \vec{X}_i вызывает поток \vec{J}_i , например, градиент температуры вызывает поток тепла:

$$\vec{q} = -k \text{grad} \theta, \quad (1.22)$$

где k – коэффициент теплопроводности.

В эту же схему укладывается закон Ома, устанавливающий связь между градиентом электрического потенциала и электрическим током, закон Дарси, устанавливающий связь между градиентом концентрации и потоком вещества.

Вместе с тем термодинамическая сила \vec{X}_i может вызывать также поток \vec{J}_k при $k \neq i$. Так, градиент температуры может вызывать поток вещества в многокомпонентных системах (термодиффузия), а градиент концентрации – поток тепла (диффузионный термоэффект). Такие процессы называются *перекрестными*, или налагающимися эффектами, они характеризуются коэффициентами L_{ik} . Одной из основных теорем термодинамики необратимых процессов является *теорема Онзагера*, устанавливающая свойство симметрии коэффициентов переноса в отсутствие внешнего магнитного поля и вращения системы как целого:

$$L_{ik} = L_{ki}.$$

В качестве примера рассмотрим теоретический анализ энергетического состояния рабочего полотна ограниченного диска.

Система ограники термодинамически неустойчивая, открытая, обменивающаяся энергией и веществом с внешней средой [9]. Согласно первому закону термодинамики работа внешних сил затрачивается на накопление внутренней энергии ΔU и образование тепла Q :

$$A_{\text{внеш}} = \Delta U + Q = \Delta U_M + \Delta U_K + \Delta U_a + \Delta U_D + Q, \quad (1.23)$$

где ΔU_M – энергия механического разрушения поверхностного слоя диска и кристалла алмаза; ΔU_K – энергия контактного взаимодействия алмаз – алмазный порошок; ΔU_a – энергия деформации, накопленная в поверхностном слое кристалла алмаза; ΔU_D – энергия деформации, накопленная в поверхностных слоях диска.

Предложенное уравнение (1.23) не включает в явном виде все многообразие физических явлений, сопровождающих процесс ограни-

ки (электрические и магнитные явления, взаимодействие с внешней средой, вибрации и т. д.).

Второй закон термодинамики – закон возрастания энтропии, согласно которому изолированные макросистемы стремятся перейти из менее вероятностного состояния в более вероятностное. Иными словами, самопроизвольные процессы в системах идут в направлении уменьшения свободной энергии:

$$F = U - TS, \quad (1.24)$$

где T – температура; S – энтропия.

$$dU = \delta Q - \delta A_{\text{вн}},$$

где $\delta A_{\text{вн}}$ – работа, совершаемая системой против приложенной извне силы; δQ – неполный дифференциал, определяющий теплоту, подведенную к системе, указывающий на изменение экстенсивных параметров процесса от направления.

В свою очередь:

$$\delta A_{\text{вн}} = \sigma_k dv + \epsilon d\sigma + Hdm + Edq + Udw + \mu dc + \dots$$

Каждый член правой части этого уравнения представляет собой произведение интенсивного параметра на дифференциал экстенсивного. Причем ни один из составляющих внутренней работы не является полным дифференциалом.

Функция $U = f(s, v, m, q, w, \sigma, c$ и т. д.) имеет свойства потенциальной функции, а частная производная по одному из экстенсивных параметров равна соответствующему интенсивному σ_k, H, E, μ и т. д., где σ_k – напряжение в системе; H и E – напряженности магнитных и электрических полей; μ – химический потенциал; v – объем тел в системе; m – намагниченность; q – величина электрического заряда; w – плотность колебательной энергии; c – количество вещества.

Если все экстенсивные параметры сохраняются постоянными, то система самоорганизуется и переходит в состояние равновесия и всякое изменение внутренней энергии сводится к ее уменьшению. При равновесии системы внутренняя энергия минимальна, что может служить термодинамическим критерием устойчивого состояния системы обработки.

Степень деформации поверхностного слоя диска в локальном объеме зерна алмазного порошка можно записать в виде:

$$e = \rho b \vec{l},$$

где ρ – плотность дислокаций материала связки; b – вектор Бюргерса; \bar{l} – средняя длина свободного пробега дислокаций.

При низких температурах T энергия взаимодействия дислокаций с примесями в связке высока, что снижает скорость движения дислокаций и вызывает высокие внутренние напряжения σ_i в зоне ABC (рис. 1.3). По мере увеличения силы, действующей со стороны кристалла, происходит накопление ρ и на границе она достигает плотности, близкой к критической, что вызывает увеличение внутренних напряжений σ_i локализацию деформации (значительную l и рост ΔU до предельного значения). Ротация элементов связки способствует росту трещин и диспергированию ее частиц.

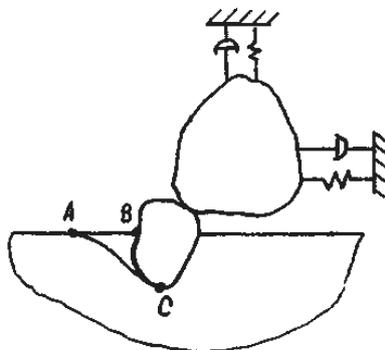


Рис. 1.3. Схема к анализу на микроуровне рабочей поверхности ограночного диска

Скоростной фактор процесса увеличивает скорость деформации и температуру, а также приводит к росту диффузионной подвижности примесей (O_2 , N_2 , H_2). Это, в свою очередь, увеличивает скорость движения и плотность дислокаций. Диссипация запасенной упругой энергии происходит путем разориентации фрагментов и образования вязких микротрещин.

Фрагментация зерен резко повышает пластичность материала в зоне крепления микропорошка, где также происходит увеличение степени деформации материала за счет роста скорости диссипации запасенной энергии ΔU . Повышение пластичности материала связки и высокие деформации в начальный момент образования диспергированного слоя обеспечивают рост гидростатического давления σ в деформируемой зоне ABC.

Увеличение силы прижима обрабатываемого алмаза к плоскости ограночного диска увеличивает плотность дислокаций и скорость их

движения в связке. Однако процесс перестройки дислокационной структуры требует определенной энергии активации для преодоления дислокациями силовых барьеров и сопровождается запаздыванием пластических деформаций, а также ростом напряжений сдвига $\sigma_{\text{сд}}$. Все это приводит к возникновению возмущений в упругой технологической системе. Рост деформаций в зоне трения диспергированных частиц связки об обрабатываемый алмаз приводит к вихревому движению структурных элементов материала связки и, соответственно, приращению амплитуды колебаний. Время запаздывания пластических деформаций можно оценить по соотношению

$$\tau_3 = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}} \approx \frac{\rho b \bar{l}}{\rho b \bar{v}}.$$

Следовательно, периодическое приращение деформации и ΔU в моменты контакта кристалла со связкой и с алмазным порошком можно рассматривать как внутренние силы системы, поддерживающие первичные колебания в технологической системе и формирующие поток ΔP_i силовых импульсов.

Процесс возникновения автоколебаний при огранке можно рассматривать с термодинамических представлений.

В момент диспергирования алмазного порошка или частиц связки с порошком в зоне контакта алмаза с диском растут плотность дислокаций, скорость деформации $\dot{\varepsilon}$, температура, силы P_z и P_y , а следовательно, запасается энергия деформации и энтропия S :

$$S = \frac{\sqrt{P_y^2 + P_z^2} l}{TJ},$$

где P_z и P_y – касательная и нормальная составляющие силы, действующей на зерно; l – перемещение в направлении действия результирующей силы; J – механический эквивалент теплоты.

Увеличение результирующей силы приводит к росту энтропии в системе и к хаосу, а значит, к снижению устойчивости процесса огранки. С ростом скорости энтропия снижается.

Процесс изнашивания алмазоносного слоя диска связан с перестройкой дислокационных структур в поверхностных слоях, а также неоднородным накоплением энергии деформации в отдельных элементах связки и порошка, что усиливает энергетическую неоднородность поверхностных слоев и интенсифицирует износ полотна диска.

В результате выхода дислокаций на поверхность полотна ограниченного диска они образуют «активные центры» воздействия на алмазное зерно и усиливают процесс его разрушения.

Кроме этого на интенсивность изнашивания рабочего полотна ограниченного диска влияют другие факторы, обусловленные термодинамической неустойчивостью процесса огранки: вибрации, инициирующие раскачку зерен связки и порошка, и рост микротрещин, а также энергия деформации, накопленная в диспергированных элементах и упругой системе крепления алмаза. Интенсивность влияния вибраций при огранке на колебания зерен в алмазонасном слое определяется размером зерен, их формой и может характеризоваться параметром:

$$K_{\text{д}} = \frac{f_{\text{кр}}}{f_{\text{з}}},$$

где $f_{\text{кр}}$ – частота тангенциальных колебаний кристалла (5...10 кГц); $f_{\text{з}}$ – собственная частота колебаний зерен (8...15 кГц).

Энергетический критерий η качества подготовки полотна ограниченного диска характеризует способность материала запасать в ней энергию деформации:

$$\eta = \frac{A}{\Delta U}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) показывает, какая доля механической работы по подготовке рабочей поверхности затрачивается на изменение энергии деформации в поверхностном слое.

Выражение (1.23) позволяет указать способы управления выходными параметрами процессов подготовки ограниченных дисков и огранки путем воздействия на систему теплом, ультразвуком, электрическими и магнитными полями, а также внешней средой, обеспечивая условие $\Delta U \rightarrow \min$, $\Delta S \rightarrow \min$ и устойчивое состояние системы.

Электрические и магнитные поля, ультразвук существенно влияют на скорость движения дислокаций, а значит, на деформационные и кинематические характеристики срезаемого слоя, на устойчивость процесса огранки и качество обработанных поверхностей.

На основе структурно-энергетического подхода интенсивность изнашивания ограниченных дисков можно определить по следующему выражению:

$$J = \frac{\mu N v}{\Delta E_{\text{пр}}},$$

где μ – коэффициент трения; N – нормальная сила; v – скорость огранки; $\Delta E_{\text{пр}}$ – предельная энергия, запасенная в рабочем полотно диска.

$$\Delta E = \int_{T_p}^{T_{\text{пл}}} C_p dT + E_0 \rho_{\text{кр}},$$

где C_p – удельная теплоемкость; T_p , $T_{\text{пл}}$ – температуры рабочая и плавления; E_0 – удельная энергия деформации на единицу длины дислокации; $\rho_{\text{кр}}$ – критическая динамическая плотность дислокаций.

Деформирование поверхностных слоев при огранке локализуется в микрообъемах отдельных зерен связки и порошка вплоть до их аморфизации. Значит, сопротивляемость изнашиванию должна быть пропорциональна энергии, требуемой на отделение частиц с поверхности полотна вследствие накопления в локальных объемах плотности $\rho_{\text{кр}}$ дислокаций. Размер частицы микроразрушения должен быть равный размеру фрагментов:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{кр}}}}.$$

Для расчета критической плотности $\rho_{\text{кр}}$ дислокаций использовали зависимость

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{2(1-\mu)}{Gb^2} \int_{T_p}^{T_{\text{пл}}} C_p dT,$$

где μ – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига; b – вектор Бюргерса.

При огранке интенсивность вибраций упругой системы в условиях установившегося процесса будет в значительной степени определяться частотой воздействия отдельных зерен порошка на кристалл l_3 . Эту частоту можно оценить по следующей зависимости:

$$f_3 = \frac{1000v}{l_3},$$

где v – скорость процесса огранки; l_3 – расстояние между зёрнами.

Для реальных условий $v = 50$ м/с; $l_3 = 10$ мкм; $f_3 = 5 \cdot 10^5$ Гц.

В процессе огранки f_3 снижается до значений $(3 \dots 5) \cdot 10^4$ Гц. Кроме того, динамическая устойчивость процесса повышается благодаря уменьшению энтропии в системе за счет роста температуры обработки. Рост температуры способствует уменьшению коэффициента трения кристалла с рабочим полотном диска, а также уменьшению величины энергии деформации ΔU_d .

Переменная сила P_y , направленная вдоль контакта кристалла с цангой, создает сдвигающее удельное давление τ , стремящееся сдвинуть кристалл массой m вдоль оси y . Дифференциальное уравнение движения кристалла имеет вид:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_y \cdot \sin \omega t.$$

В упругой системе крепления кристалла устанавливаются вынужденные колебания с частотой ω и амплитудой y_0 . Значение амплитуды y_0 будет определяться отношением

$$k_w = \frac{\omega}{\omega_0},$$

где $\omega > 0$ – частота изменения силы P_y и ω_0 – собственная частота системы.

Условием нарушения жесткости стыка и перехода зерна к микроперемещениям будет $\tau > \mu_0 g_0$, здесь μ_0 – коэффициент трения между кристаллом и цангой; g_0 – нормальное удельное давление в контакте кристалл–цанга.

1.7. Моделирование задач структурного синтеза

Рассмотрим на примере синтеза замкнутой и разомкнутой системы регулирования частоты вращения шпинделя станка. В силовую часть привода регулирования частоты вращения шпинделя n входит тиристорный преобразователь (ТП) и двигатель постоянного тока (ДПТ), который через зубчатую передачу вращает шпиндель (рис. 1.4, а). На обмотку возбуждения двигателя подается постоянное напряжение, а на якорную обмотку напряжение U_d с выхода тиристорного преобразователя, на вход тиристорного преобразователя напряжение управления U . Шпиндель нагружен моментом (M). В таком виде можно считать данный привод примером разомкнутой системы управления.

Замкнутая система регулирования частоты вращения шпинделя n показана на рис. 1.4, б. Главная отрицательная обратная связь реализуется за счет тахогенератора, якорь которого соединен с валом двигателя постоянного тока ДПТ. Напряжение U_0 на якорной обмотке тахогенератора будет пропорционально частоте вращения вала ДПТ. Сигнал рассогласования формируется на усилителе постоянного тока (УПТ).

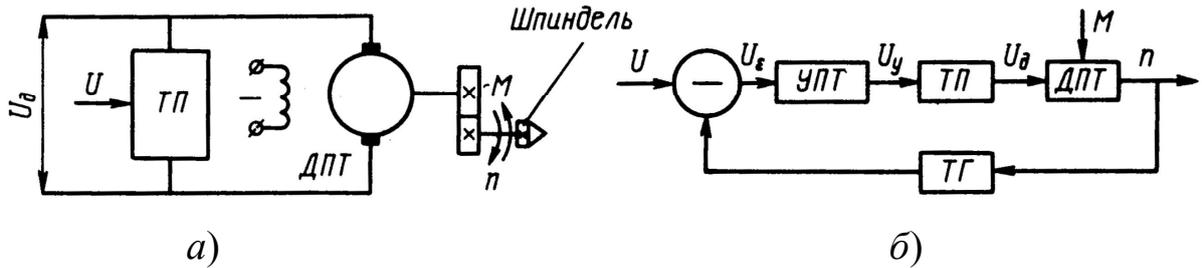


Рис. 1.4. Системы автоматического регулирования частоты вращения шпинделя станка: а – разомкнутая; б – замкнутая

Произведем оценку вариантов структуры приводов. Для разомкнутой системы управления точность регулирования будет определяться уравнением механической характеристики двигателя постоянного тока (рис. 1.5):

$$n = K_1 U_d - K_2 M,$$

где K_1 – коэффициент передачи двигателя, $K_1 = \frac{\Delta n}{\Delta U}$; K_2 – коэффициент жесткости механической характеристики, $K_2 = \operatorname{tg} \alpha$; $M = \operatorname{const}$.

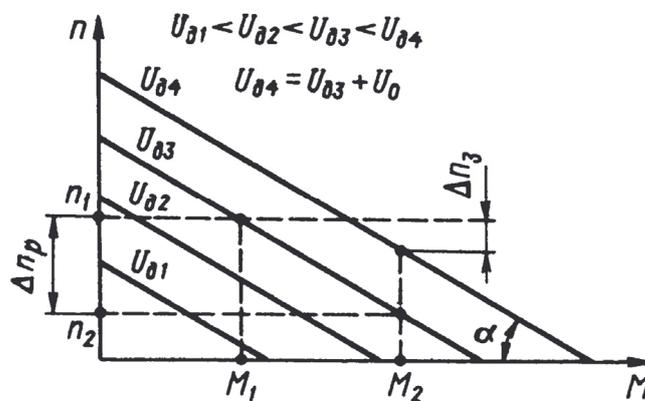


Рис. 1.5. Погрешность регулирования частоты вращения шпинделя станка с разомкнутой системой управления

Пусть $U_d = \text{const}$, тогда изменение частоты вращения шпинделя станка произойдет при изменении момента нагрузки от M_1 до M_2 . Соответственно, частота вращения шпинделя будет изменяться от n_1 до n_2 :

$$n_1 = K_1 U_d - K_2 M_1;$$

$$n_2 = K_1 U_d - K_2 M_2.$$

Вычитая нижнее уравнение из верхнего, получаем погрешность регулирования разомкнутой САУ:

$$\Delta n_p = n_1 - n_2 = K_2 (M_2 - M_1) = K_2 \Delta M.$$

Для повышения точности регулирования разомкнутой системой автоматического управления (САУ) необходимо либо уменьшать неустойчивость нагрузки ΔM , либо подбирать двигатели с более жесткой характеристикой (с меньшим значением K_2).

Замкнутую систему регулирования описывают следующие соотношения:

$$U^e = U - U_0; U_0 = K_{тг} n;$$

$$U_y = K_y U^e; U_d = U_y K_{т.п};$$

$$n = K_1 U_d - K_2 M_1,$$

где $K_{тг}$, K_y , $K_{т.п}$ – соответственно, коэффициенты передачи тахогенератора, усилителя постоянного тока и тиристорного преобразователя.

Замкнутая система управления имеет погрешность регулирования:

$$\Delta n_3 = n_1 - n_2 = \frac{\Delta M K_2}{1 + K_{тг} K_y K_{т.п} K_1}.$$

В случае замкнутой САУ, подбирая коэффициент передачи усилителя постоянного тока, теоретически можно обеспечить любую точность регулирования.

Обобщенное уравнение динамики САУ имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^q U}{dt^q} + b_1 \frac{d^{q-1} U}{dt^{q-1}} + \\ + \dots + b_{q-1} \frac{dU}{dt} + c_0 \frac{d^m f}{dt^m} + c_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + c_{m-1} \frac{df}{dt} + c_m f. \end{aligned} \quad 1.26$$

Необходимым и достаточным условием линейности САУ является выполнение принципа суперпозиции: реакция системы на сумму

входных воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий. Пользуясь принципом суперпозиции, уравнение динамики можно разбить на два уравнения:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{d^i U}{dt^i};$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = \sum_{i=0}^m c_i \frac{d^i f}{dt^i}.$$

Выходной сигнал y будет равен сумме сигналов y_1 и y_2 . При сложных воздействиях можно искусственно разбивать входное воздействие на более простые и вычислять суммарную реакцию системы на эти сигналы.

Различают нелинейности существенные и несущественные. Для анализа существенно нелинейных систем применяют специальные методы (методы теории нелинейных систем автоматического управления). В случае несущественных нелинейностей (которые описываются гладкими, дифференцируемыми функциями) допускается линеаризация уравнений, описывающих динамическую систему. Линеаризация производится разложением нелинейной функции в некоторой области в ряд Тэйлора, от которого используется лишь два члена разложения:

$$a(x) = a(x_0) + a'(x_0) \Delta x$$

или

$$\Delta a(x) = a(x) - a(x_0) = a'(x_1) \Delta x,$$

где x_0 – точка, в которой нелинейная функция заменяется отрезком касательной $a'(x_0)$; $\Delta x = x - x_0$ – отклонение от точки x_0 .

Точность линеаризации зависит от вида линеаризуемой функции $a(x)$ и от величины отклонений от точки, в которой производится линеаризация. Если отклонения по аргументу малы, то обеспечивается высокая точность линеаризации, поэтому данный метод называют линеаризацией методом малых отклонений. Линейная аппроксимация функции многих переменных имеет вид:

$$a(x, y, z, \dots) = a'_x(x_0, y_0, z_0, \dots)x + a'_y(x_0, y_0, z_0, \dots)y + a'_z(x_0, y_0, z_0, \dots)z + \dots .$$

Например, механическая характеристика гидропривода с дроссельным регулированием (рис. 1.6, а) является нелинейной от перепада давления p и смещения золотника x (рис. 1.6, б):

$$Q = K_3 x \sqrt{p_H - p},$$

где Q – объем жидкости, потребляемый гидромотором в единицу времени; K_3 – постоянный коэффициент; p_H – давление, создаваемое насосом.

Коэффициенты линеаризации:

$$K'_1 = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x_0, p_0} = K_3 \sqrt{p_H - p_0};$$

$$K'_2 = \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_{x_0, p_0} = -\frac{K_3 x_0}{2\sqrt{p_H - p_0}}.$$

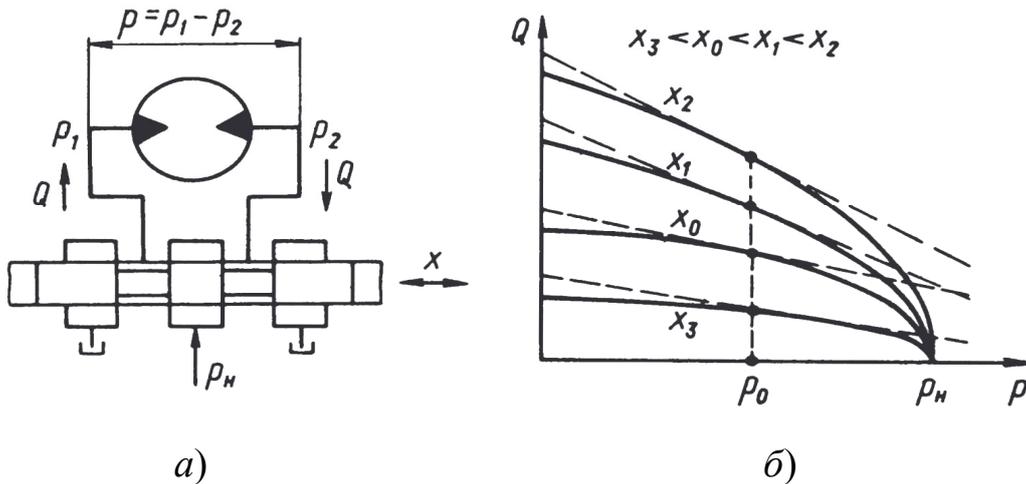


Рис. 1.6. Гидравлический привод с дроссельным регулированием: а – принципиальная схема; б – механическая характеристика

Механическая характеристика гидромотора будет иметь такой же вид, что и механическая характеристика двигателя постоянного тока (рис. 1.5):

$$Q = K'_1 x + K'_2 p, \quad (1.27)$$

где $K'_2 < 0$.

Для того чтобы выполнить анализ линейной системы автоматического управления или другой динамической системы по временным характеристикам, необходимо решить уравнение (1.26) динамики САУ. В теории автоматического управления для решения уравнений

динамики используется операторный метод на основе преобразования Лапласа. Если $f(t) = 0$ при $t \leq 0$, то ее преобразование по Лапласу:

$$f(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.28)$$

где $f(s)$ – функция, преобразованная по Лапласу; L – знак преобразования Лапласа; s – оператор Лапласа.

Обратное преобразование Лапласа позволяет перейти от изображения $f(s)$ к оригиналу $f(t)$:

$$L^{-1} [f(s)] = f(t). \quad (1.29)$$

На основании свойств преобразования Лапласа дифференциальное уравнение динамики (1.26) преобразуется в алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} & a_0 s^n y(s) + a_1 s^{n-1} y(s) + \dots + a_{n-1} s y(s) + a_n y(s) = \\ & = b_0 s^q U(s) + b_1 s^{q-1} U(s) + \dots + b_{q-1} s U(s) + b_q U(s) + \\ & + c_0 s^m f(s) + c_1 s^{m-1} f(s) + \dots + c_{m-1} s f(s) + c_m f(s). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Решение уравнения динамики, преобразованное по Лапласу, получаем в следующем виде ($q \leq n, m \leq n$):

$$\begin{aligned} y(s) = & \frac{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \dots + b_{q-1} s + b_q}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s) + \\ & + \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_{m-1} s + c_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} f(s). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Преобразования Лапласа для типовых временных функций также имеют вид дробно-рациональных функций параметра s . Например, преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции $1(t)$:

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}.$$

Таким образом, уравнение (1.31) можно представить в виде:

$$y(s) = \frac{B(s)}{D(s)} + \frac{C(s)}{D(s)}. \quad (1.32)$$

Выходной сигнал $y(t)$ можно получить с помощью разложения Хэвисайда, которое применяют для правой части уравнения (1.30).

Например, если $h(t)$ – реакция системы на $1(t)$ – единичную ступенчатую функцию (переходная функция динамической системы), то

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{D(s)} \right\} = 1(t) + \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{s_k D'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (1.33)$$

где s_1, s_2, \dots, s_n – корни многочлена $D(s)$; $D'(s) = \frac{d}{ds}[D(s)]$.

Особое место в переборных алгоритмах отводится *алгоритмам дискретного математического программирования* (ДМП). Эти алгоритмы применяют, если задачу структурного синтеза удастся сформулировать как задачу ДМП:

$$\text{extr } F(X),$$

$$X \in X(D),$$

$$X(D) = \{X \in D \mid \varphi(X) \geq 0, \varphi(X) = 0\}.$$

Приведение к задаче ДМП основано на поиске признаков структур, выражаемых количественно, и на определении функции этих признаков, которая выражала бы правило предпочтения одних вариантов перед другими. Такие признаки объединяют в вектор X , а формула предпочтения становится целевой функцией $F(X)$. Примерами параметров X_i , входящих в X , могут служить количества элементов некоторого типа в структуре, тогда X_i принадлежит множеству целых чисел; наличие или отсутствие в структуре некоторого свойства, тогда X_i есть булева величина, принимающая значения из множества $\{1 \text{ (есть)}, 0 \text{ (нет)}\}$, и т. п. Следует, однако, отметить, что сведение задачи ДМП еще не гарантирует успеха дальнейшего решения, так как существующие методы ДМП не отличаются универсальностью, надежностью и экономичностью. Последовательные алгоритмы характеризуются поэтапным решением задачи синтеза с возможностями оценки получающихся промежуточных структур. Различают два способа получения законченной структуры: наращивание; выделение.

Способ 1 – *наращивание*. При наращивании происходит поочередное добавление элементов к некоторой исходной структуре (в частном случае за исходную структуру может быть принят какой-либо элемент). Примерами алгоритмов наращивания могут служить последовательные алгоритмы компоновки и размещения оборудования. Например, при распределении оборудования по конструктивным блокам основой оценок вариантов может служить количество межблочных связей. Тогда предпочтение нужно отдавать тем промежуточным

вариантам, при которых большее число связей оказывается сконцентрированным в пределах одного блока.

В качестве примера рассмотрим задачу о загрузке оборудования. При проектировании участка механического цеха располагали двумя видами станков, из них n_1 станков типа 1 и n_2 станков типа 2. Станки могут производить обработку трех видов поверхностей: T_1, T_2, T_3 , но с разной производительностью. Данные a_{ij} производительности станков приведены в табл. 1.2 (первый индекс – тип станка, второй – вид поверхности).

Каждый мм^2 обработанной поверхности вида T_1 приносит цеху доход c_1 , вида T_2 – доход c_2 , T_3 – доход c_3 .

Цеху предписан план, согласно которому он должен производить в месяц не менее $b_1 \text{ мм}^2$ поверхности T_1 , $b_2 \text{ мм}^2$ поверхностей T_2 , $b_3 \text{ мм}^2$ поверхностей T_3 ; количество мм^2 каждого вида поверхности не должно превышать, соответственно, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ мм}^2$. Кроме того, все без исключения станки должны быть загружены. Требуется так распределить загрузку станков производством поверхностей T_1, T_2, T_3 , чтобы суммарный месячный доход был максимален. Обозначим элементы решения буквами x с двумя индексами (первый – тип станка, второй – вид поверхности). Всего будет шесть элементов решения:

$$\left. \begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \right\}$$

Здесь x_{11} – количество станков типа 1, занятых обработкой поверхности T_1 , x_{12} – количество станков типа 1, занятых обработкой поверхностей T_2 , и т. д.

Таблица 1.2

Исходные данные

Тип станка	Вид поверхности		
	T_1	T_2	T_3
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}

Запишем сначала условия-ограничения, наложенные на элементы решения x_{ij} . Прежде всего обеспечим выполнение плана. Это даст нам три неравенства-ограничения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\geq b_1; \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\geq b_2; \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} &\geq b_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

После этого ограничим перевыполнение плана; это даст нам три неравенства-ограничения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\leq \beta_1; \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\leq \beta_2; \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} &\leq \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Теперь запишем ограничения, связанные с наличием оборудования и его полной загрузкой. Суммарное количество станков типа 1, занятых изготовлением всех поверхностей, должно быть равно N_1 ; типа 2 – N_2 . Отсюда еще два условия – на этот раз равенства:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= N_1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= N_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Теперь запишем суммарный доход от производства всех видов поверхностей.

Суммарное количество мм^2 поверхности T_1 , произведенное всеми станками, будет равно $a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}$ и принесет доход $c_1 (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21})$. Рассуждая аналогично, найдем суммарный доход цеха за месяц при плане:

$$L = c_1 (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2 (a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + c_3 (a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}),$$

или, гораздо короче:

$$L = \sum_{j=1}^3 c_j \sum_{i=1}^2 a_{ij}x_{ij}. \quad (1.37)$$

Эту линейную функцию шести аргументов мы хотим обратить в максимум:

$$L \Rightarrow \max.$$

Это задача линейного программирования: найти такие неотрицательные значения переменных $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23}$, которые, во-первых, удовлетворяли бы ограничениям-неравенствам (1.34), (1.35), во-вторых – ограничениям-равенствам (1.36) и, наконец, обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных (1.37). В этой задаче линейного программирования шесть ограничений-неравенств и два ограничения-равенства.

Способ 2 – *выделение*. При выделении из некоторой избыточной обобщенной структуры постепенно удаляются лишние элементы. Алгоритмы выделения могут использоваться, если предварительно составлена обобщенная структура для рассматриваемого класса станков. Примерами таких обобщенных структур могут служить обобщенные технологические маршруты обработки деталей некоторых классов на металлообрабатывающих станках. В обобщенный маршрут включают операции, которые могут встретиться при различных сочетаниях конструктивных особенностей в деталях данного класса. Дальнейшее сопоставление чертежа конкретной детали и обобщенного маршрута позволяет убрать лишние операции и сформировать конкретный технологический маршрут.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ И ИНСТРУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ИХ ПАРАМЕТРОВ

Геометрические ММ могут выражаться совокупностью: уравнений линий и поверхностей; алгебрологических соотношений, описывающих области, составляющие тело ОиИ; графами и списками, отображающими конструкции из типовых конструктивных элементов, и т. п. Геометрические ММ применяют при решении задач конструирования в машиностроении для оформления конструкторской документации, при задании исходных данных на разработку технологических процессов изготовления деталей.

2.1. Функциональные и размерные связи в оборудовании

Требуемая точность связей исполнительных поверхностей СиИ обеспечивается в процессе их проектирования путем ограничения допусками отклонений составляющих звеньев, образующих данный вид связи.

Задачу обеспечения требуемой точности размерных связей исполнительных поверхностей ОиИ чаще всего удается решить с помощью размерных цепей с использованием одного из пяти методов достижения требуемой точности замыкающего звена. Расчеты допусков могут сопровождаться преобразованием связей, так как в конструкцию ОиИ возможность действия того или иного фактора закладывается через взаимные влияния их свойств в размерные связи.

Так, например, одним из пунктов служебного назначения токарно-винторезного станка предусмотрена его способность нарезания резьб. Параметром резьбы, непосредственно зависящим от кинематики станка, является шаг P . Образование шага резьбы осуществляется посредством кинематической цепи, структурная схема которой представлена на рис. 2.1. Связь продольного перемещения резца с вращением заготовки в образовании шага резьбы при одном обороте шпинделя может быть представлена уравнением

$$P = i_n i_{ув.ш} i_{Г} i_{К} P_{х.в},$$

где i_n – передаточное отношение коробки скоростей с постоянным по номиналу передаточным отношением; $i_{ув.ш}$ – передаточное отношение

звена увеличения шага; i_{Γ} – передаточное отношение гитары сменных колес; i_{κ} – передаточное отношение коробки подач; $P_{\text{х.в}}$ – шаг ходового винта.

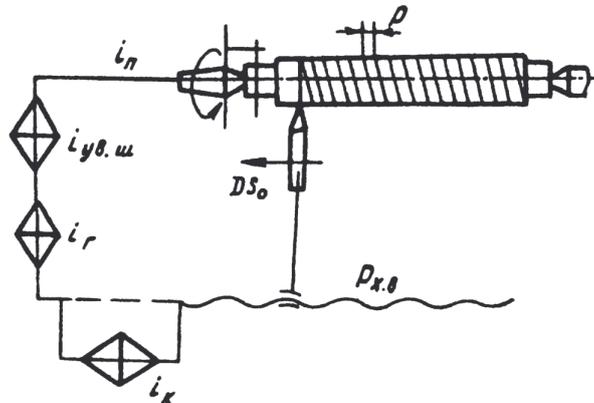


Рис. 2.1. Структурная схема токарно-винторезного станка

Служебным назначением станка заданы допуски, ограничивающие отклонения шагов резьб разных типов. Исходя из допуска T_p , обеспечение которого в станке наиболее сложно, можно ограничить допусками отклонения передаточных отношений механизмов токарно-винторезного станка:

$$T_p = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial i_n}\right)^2 T_{i_n}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial i_{\text{ув.ш}}}\right)^2 T_{i_{\text{ув.ш}}}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial i_{\Gamma}}\right)^2 T_{i_{\Gamma}}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial i_{\kappa}}\right)^2 T_{i_{\kappa}}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial P_{\text{х.в}}}\right)^2 T_{P_{\text{х.в}}}^2}.$$

Средние значения передаточных отношений могут быть приняты равными их номинальным значениям.

Так как каждое из передаточных отношений механизмов в свою очередь является замыкающим звеном цепи, состоящей из нескольких кинематических звеньев, то, воспользовавшись тем же методом, можно перейти к допускам на отклонения их передаточных отношений. Например, если $i_{\kappa} = i_1, i_2, \dots, i_n$, то, исходя из допуска $T_{i_{\kappa}}$, можно найти $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_n}$ и средние значения i_1, i_2, \dots, i_n .

Определив допуск каждого кинематического звена, необходимо задать допуски на размеры кинематического звена на основе преобразования кинематических связей в размерные. Для зубчатых передач, являющихся весьма распространенными кинематическими звеньями механизмов станков, это означает определение допусков на все раз-

мерные параметры зубчатых колес, от которых зависит точность передаточного отношения зубчатой пары. Так как передаточное отношение зубчатой передачи есть отношение радиусов делительных окружностей, находящихся в зацеплении пары колес $i_n = \frac{r_1}{r_2}$, то

$$T_{i_n} = \sqrt{\left(\frac{\partial i_n}{\partial r_2}\right)^2 T_{r_2}^2 + \left(\frac{\partial i_n}{\partial r_1}\right)^2 T_{r_1}^2}.$$

Таким образом, можно подойти к точности размеров деталей, выполняющих в станке роль кинематических звеньев.

Любой станок представляет собой не абсолютно жесткую, а упругую систему, детали которой деформируются с возникновением нагрузок, изменением температур, под действием остаточных напряжений, возникших в деталях при изготовлении и работе. Деформации деталей не постоянны, так как не постоянно во времени по величине и направлению действие сил, их моментов, температуры, остаточных напряжений. К тому же детали станков изнашиваются. Все вместе взятое приводит к тому, что точность деталей, достигнутая при изготовлении, не остается постоянной. Во времени изменяются значения всех показателей геометрической точности деталей: размеров, расстояний, относительных поворотов, формы и параметров шероховатости поверхностей, а также относительного положения самих деталей в станке.

Изменения показателей геометрической точности и положения деталей не могут превышать тех границ, за пределами которых станок перестает соответствовать своему назначению. Поэтому при расчетах точности станка должны быть установлены допустимые границы действия каждого динамического фактора исходя из допусков на показатели геометрической точности и положения деталей, а также предусмотрены средства, обеспечивающие действие факторов в установленных границах.

Так как изменение значения каждого составляющего звена A_i допустимо лишь в пределах T_{A_i} , то частями этого допуска следует ограничить проявление каждого из перечисленных факторов. Так, составляющее звено A_1 :

$$T_{A_1} \geq T_{A_{1изг}} + T_{A_{1сб}} + T_{A_{1у}} + T_{A_{1\theta}} + T_{A_{1о.н.}} + T_{A_{1изн}},$$

где частями T_{A_1} являются ограничения, соответственно, погрешностей изготовления детали и сборки, упругих и тепловых деформаций,

деформаций из-за перераспределения остаточных напряжений и изнашивания. Соблюдение допуска $T_{A_{\text{изг}}}$ целиком связано с технологией изготовления детали. Что касается других допусков, то их обеспечение зависит как от решений, принимаемых при конструировании станка, так и от технологии его изготовления. Не касаясь пока вопросов технологии, рассмотрим подход к обеспечению требуемой точности звена A_1 в процессе конструирования станка.

Точность размеров детали и ее положение в станке могут зависеть от того, как конструктивно будут оформлены основные и вспомогательные базы базирующей детали, какие требования предъявлены к точности базовых поверхностей, как конструктивно решена задача закрепления детали. В результате расчетов контактных деформаций и деформаций самой детали под действием сил закрепления конструктор должен найти решение, обеспечивающее отклонение A_1 в процессе сборки станка в пределах $T_{A_{\text{сб}}}$.

Упругие перемещения под воздействием рабочих нагрузок зависят от жесткости детали. Исходными данными для определения требуемой жесткости детали являются, с одной стороны, допуск, ограничивающий упругое перемещение в направлении размера A_1 , с другой – максимальное значение P действующих сил, обусловленное служебным назначением станка и возможное во время работы на самых тяжелых режимах. Характеристикой минимально необходимой жесткости j^{min} детали является прямая, проходящая через начало координат системы y, P и точку с координатами y^{max} и P^{max} (рис. 2.2, а). Исходя из значения j^{min} и допуска T_j , ограничивающего отклонения жесткости, конструктор должен предпринять меры по обеспечению необходимой жесткости детали.

Обеспечение тепловых деформаций детали в пределах допуска $T_{A_{10}}$ связано с поддержанием температурного режима работающего станка на нужном уровне. Поскольку материал детали уже был выбран, то характеристика ее тепловых деформаций известна (рис. 2.2, б) и можно установить допустимый нагрев детали в работающем станке. Для соблюдения требуемого теплового режима в станке может оказаться необходимым оснащение его устройствами стабилизации температуры отдельных его частей, температуры окружающей среды и т. п.

Малоизученными и потому трудноуправляемыми являются процессы деформирования деталей из-за перераспределения остаточных

напряжений. Этого рода деформации опасны тем, что могут возникнуть спустя много времени после изготовления станка, когда он попадет к потребителю и будет находиться в эксплуатации. Пока основные мероприятия по борьбе с деформированием деталей из-за перераспределения остаточных напряжений предпринимают в процессе изготовления деталей и сборки станка. Однако накоплено довольно много данных, полученных в результате наблюдений, о связи остаточных напряжений с конструктивными формами деталей. Например, при конструировании станков, из деталей и заготовок деталей нужно использовать рекомендации по поводу того, как путем придания тех или иных форм и размеров поверхностям деталей уменьшить концентрацию остаточных напряжений в отдельных местах.

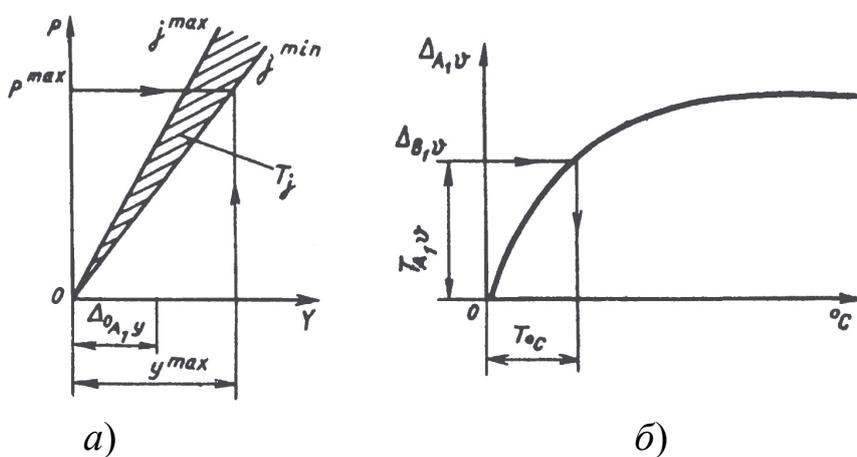


Рис. 2.2. Графики перемещений:
а – упругих; б – тепловых

Мерами предотвращения изнашивания деталей станка на протяжении установленного срока службы сверх заданных пределов являются следующие:

- выбор материала надлежащей износостойкости;
- конструирование разветвленной и надежной системы смазывания;
- выбор вида смазывающего материала, соответствующего условиям и режимам работы станка;
- создание защиты трудящихся поверхностей деталей от проникновения пыли, грязи и т. д.

Размерные связи обычно разрабатывают, начиная с определения размеров поверхностей деталей путем преобразования различного вида связей в размерные.

Например, ряд размеров деталей устанавливают в результате преобразования кинематических связей: длины плеч рычагов, шаги резьб ходовых винтов, числа зубьев зубчатых колес и т. п. Расчеты деталей на прочность, жесткость, выносливость, износостойкость в конечном счете преследуют цель установить основные размеры поверхностей деталей исходя из их служебного назначения и свойств выбранного материала. В результате таких расчетов устанавливают, например, модули, диаметры делительных окружностей и ширину венцов зубчатых колес; диаметры шеек и длины ступеней валов; типы и размеры подшипников; размеры отверстий под опоры валов в корпусных деталях и т. д. Переход от действующих нагрузок на кинематических звеньях к размерам поверхностей деталей или размерам их сечений с учетом избранных материалов является преобразованием динамических связей в размерные.

2.2. Анализ размерными цепями компоновок оборудования

2.2.1. Качественный размерный анализ компоновок приводов станка

Рассмотрим пример анализа компоновок на этапе разработки технического проекта. Для приведенной на рис. 2.3 компоновки требуется обеспечить соосность осей вращения узлов 1 и 2 отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

На рис. 2.3, а приведена схема компоновки, в которой узлы 1 и 2 устанавливают на плоскости и боковыми планками поджимают к направляющим буртикам станины 3. При такой установке каждый узел лишают пяти степеней свободы относительно станины. Требуемая точность положения узлов в направлении осей валов обычно бывает небольшой, обеспечение ее никаких затруднений в производстве не вызывает, поэтому степень свободы перемещения узла вдоль оси вала как здесь, так и в дальнейшем не рассматривается.

На этой схеме через $B_{\Delta} = B_{\Sigma}$, $B'_{\Delta} = B'_{\Sigma}$, $\beta_{\Delta} = \beta_{\Sigma}$ и $\beta'_{\Delta} = \beta'_{\Sigma}$ обозначены совпадение и параллельность осей в вертикальной и горизонтальной плоскостях. При схеме компоновки на рис. 2.3, а требования точности к относительному положению 1 и 2 можно обеспечить следующим образом:

– автоматически после их установки на базовых поверхностях станины и поджима к направляющим буртикам. Для этого необходи-

мо, чтобы линейные размеры $B'_1, B_2, B_3, B'_1, B'_2$ и B'_3 и угловые размеры (требования параллельности) $\beta_1, \beta_2, \beta'_1, \beta'_2$ и β'_3 выполнялись при обработке с такой точностью, чтобы сумма погрешностей этих размеров не превышала допусковых величин $B_\Delta, B'_\Delta, \beta_\Delta$ и β'_Δ . Сборка узлов по данной схеме наиболее проста, но механическая обработка деталей усложняется предъявляемыми к ним требованиями точности;

- пригонкой базовых плоскостей станины (или узлов 1 и 2);
- подбором компенсаторных прокладок, клиньев;
- дополнительной обработкой деталей по месту, т. е. по результатам измерений при сборке.

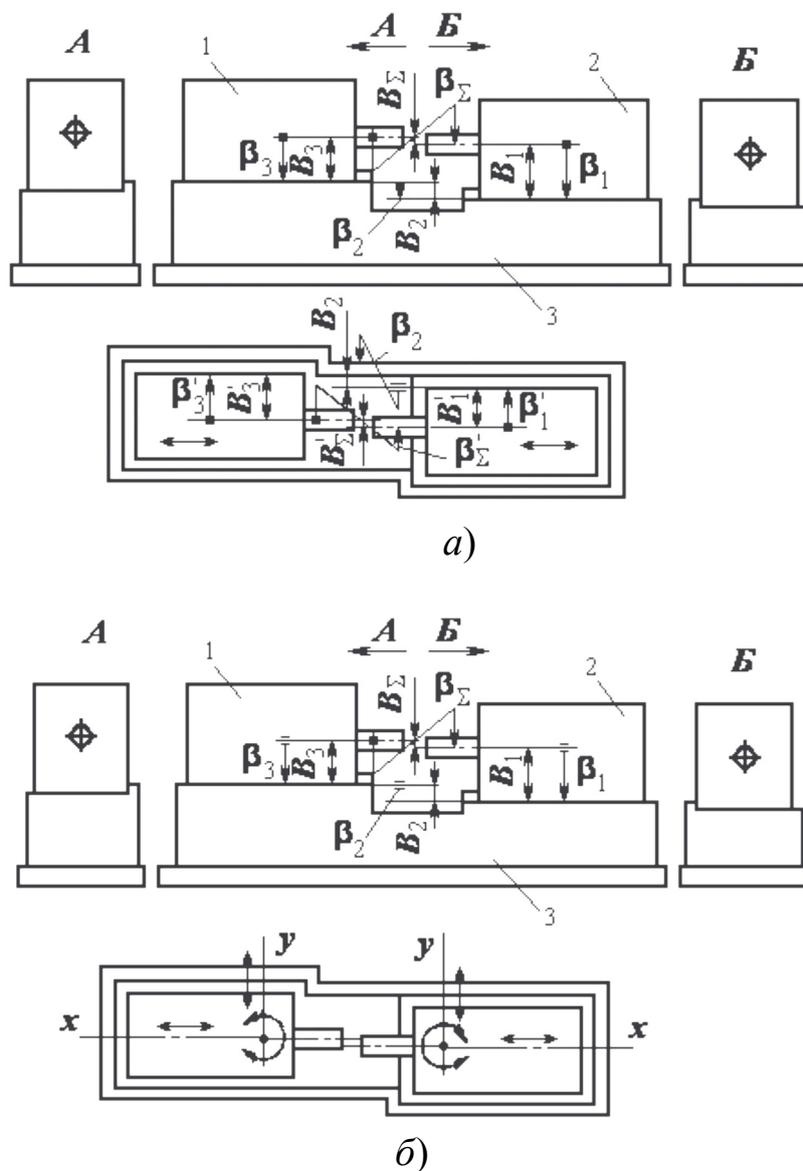
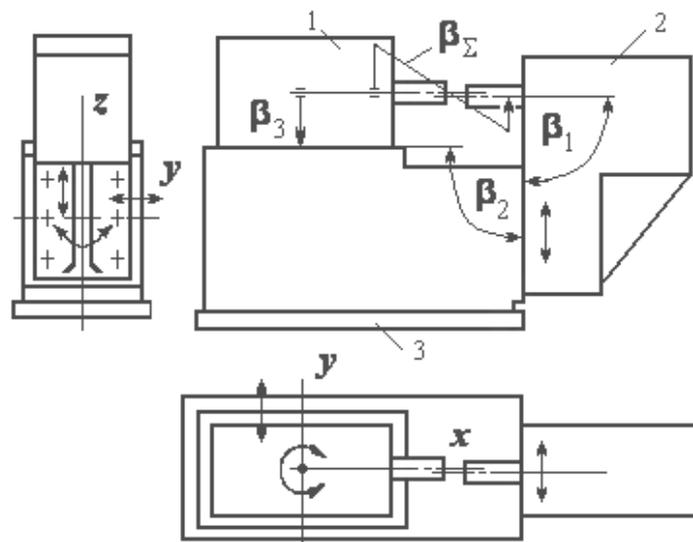
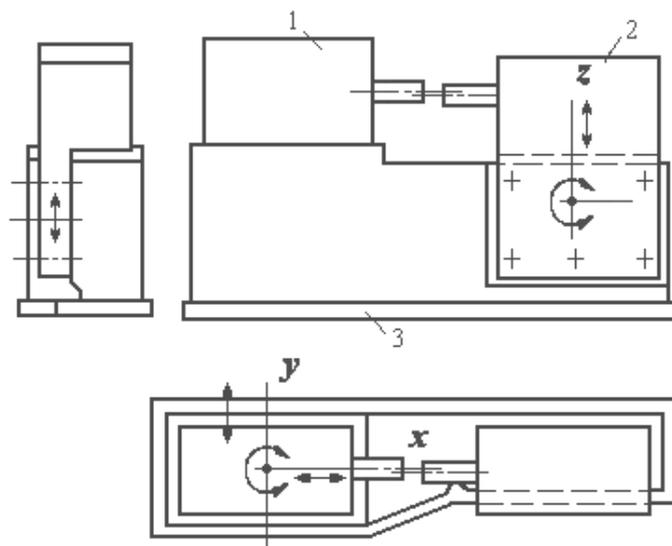


Рис. 2.3. Схема к размерному анализу компоновок привода станка (окончание см. на с. 55)



б)



г)

Рис. 2.3. Окончание (начало см. на с. 54)

На рис. 2.3, б приведена аналогичная предыдущей схема компоновки, в которой узлы не поджимают к направляющему буртику. Вследствие этого они располагают степенями свободы перемещений по осям X и Y и поворота вокруг вертикальной оси, что позволяет обеспечить требуемую точность совпадения и параллельность осей валов в горизонтальной плоскости регулировкой. Для этого перемещают и поворачивают узлы в базовой плоскости до тех пор, пока оси валов не совпадут и не будут параллельны.

Совпадение и параллельность осей валов в вертикальной плоскости, как и в предыдущей схеме, следует обеспечить точным изготовлением деталей по размерам B_1 , B_2 , B_3 , β_1 , β_2 и β_3 (рис. 2.3, б), пригонкой, дополнительной обработкой или применением компенсаторных деталей.

В схеме компоновки, приведенной на рис. 2.3, в, узел 2 крепят к вертикальной торцовой плоскости станины. Базовые плоскости станины для узлов 1 и 2 расположены взаимно перпендикулярно. Каждый из узлов имеет три степени свободы. Это дает возможность обеспечить совпадение осей валов в вертикальной и горизонтальной плоскостях и параллельность в горизонтальной плоскости выверкой положения узлов. И лишь параллельности осей валов в вертикальной плоскости достигают точным изготовлением деталей по угловым размерам β_1 , β_2 , β_3 или другими методами, описанными выше.

В схеме компоновки, изображенной на рис. 2.3, з, узел 2 закреплен на боковой вертикальной плоскости станины. Каждый из узлов 1 и 2 обладает тремя степенями свободы во взаимно перпендикулярных плоскостях. В этом случае обе базовые плоскости станины параллельны осям. Это дает возможность обеспечить все требования точности к относительному положению узлов выверкой их положения. Допустим, что показанные на рис. 2.3 варианты компоновочных схем равноценны с точки зрения удобства эксплуатации и габаритных размеров. Тогда выбор наилучшей схемы компоновки зависит от результата экономических расчетов: схема, при которой стоимость изготовления станка минимальная, и будет наилучшей.

Для достижения точности соединения узлов с наименьшими затратами при выборе схемы компоновки можно руководствоваться следующими общими рекомендациями:

– конструктор должен по возможности избегать пригонок, выверок и регулировок при сборке, так как эти ручные операции всегда являются дорогостоящими;

– в первую очередь конструктору следует выяснить, каковы требования точности к относительному положению узлов и сколько размеров деталей влияет на точность.

Если валы узлов соединяются муфтой, то величина T_Δ зависит от типа соединительной муфты. Так, соединительная муфта типа МУВП допускает весьма незначительное смещение и перекося осей соединяемых валов. При использовании кулачково-дисковой муфты могут быть допущены большие по величине погрешности, а при наличии

муфты с торцеобразным упругим элементом допускаемые смещения и перекосы осей валов еще более значительны. Следовательно, при необходимости можно подобрать стандартную или сконструировать специальную соединительную муфту и увеличить таким образом значение T_{Δ} , т. е. расширить допуск на смещение и перекосы осей валов соединяемых узлов.

Иногда удается уменьшить число влияющих размеров расчетной схемы введением некоторых конструктивных изменений. Например, по схеме компоновки, изображенной на рис. 2.3, *a*, каждая из четырех расчетных схем содержит по три влияющих размера ($B_1, B_2, B_3, B'_1, B'_2, B'_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$). Если вывести опорные поверхности плиты в одну плоскость, то влияющие размеры B_2 и β_2 из расчетных схем выпадают. При некоторых условиях такого результата можно достичь и в отношении влияющих размеров B'_2, β'_2 . Следует заметить, что в этих случаях не только уменьшается число влияющих размеров, но и упрощается конструкция станины, а также снижается стоимость ее изготовления.

Для конкретных изделий и условий производства можно выбрать компоновку, в которой часть требований точности обеспечивается регулировкой, а другую часть – точным изготовлением деталей.

При серийном производстве, как известно, широко применяют специальное оборудование, приспособление и инструменты. В этих условиях при изготовлении деталей удается выдерживать и сравнительно жесткие допуски.

На сборке ручные операции типа пригонок и регулировок при этом крайне нежелательны, поэтому в этом типе производства узлы соединяют часто гибкими связями (ремни, цепи, шарнирные муфты – карданные валы, компенсирующие муфты и др.). Если жесткие связи узлов сохраняют, то требуемую точность их относительного положения обеспечивают точным изготовлением деталей, чтобы узлы при их установке занимали точное положение и были лишены свободы перемещения и поворота (рис. 2.3, *a*).

При единичном и мелкосерийном производстве допустимо требуемую точность относительного положения узлов обеспечивать регулировкой, пригонкой и изготовлением некоторых простых деталей по месту.

2.2.2. Предварительный размерный анализ компоновок станков

На рис. 2.4 показаны схемы некоторых размерных цепей токарного станка. С помощью каждой из них решается своя конструкторская задача. Например, размерная цепь *A* определяет в вертикальной плоскости соосность переднего и заднего центров станка. Соосность центров обеспечивается размерами передней и задней бабок, а также мостика, на котором размещена задняя бабка. Размерная цепь *B* устанавливает размерную связь между поверхностью резцедержателя, на которую ставится резец, и осью переднего центра. Ее образуют размеры передней бабки, каретки, поперечного суппорта и резцедержателя. Размерные цепи *A* и *B* обеспечивают относительное положение исполнительных поверхностей токарного станка и параллельно связаны друг с другом.

Размерные цепи *B* и *Г* представляют размерные связи, соответственно, между зубчатым колесом в фартуке и зубчатой рейкой, между ходовым винтом и маточной гайкой. С помощью размерных цепей *Д* и *Е* обеспечивается параллельность оси ходового винта направляющим станины. Условием параллельности является равенство $E_{\Delta} = D_{\Delta}$.

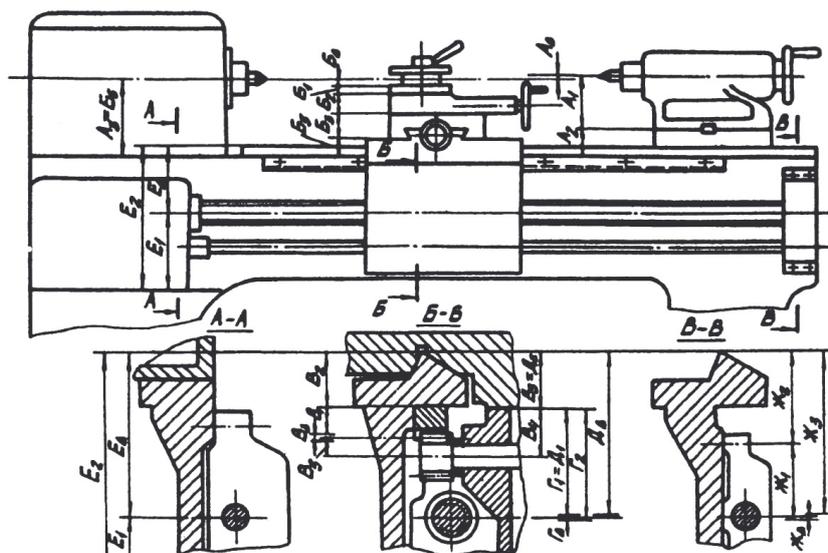


Рис. 2.4. Размерные цепи токарного станка

С помощью размерной цепи *Ж* достигается соосность ходового винта с отверстием в заднем кронштейне. Эти размерные цепи устанавливают размерные связи между сборочными единицами и деталями, составляющими станок. На рис. 2.4 можно видеть наличие параллельных связей между этими размерными цепями.

Пример. В результате размерного анализа необходимо определить численные значения технических требований к узлам. В качестве

замыкающего звена принимаем β_{Δ} – отклонение от перпендикулярности оси отверстия шпинделя относительно поверхности стола (рис. 2.5, а).

В качестве составляющих принимаем: β_1 – отклонение от линейности рабочей поверхности стола; β_2 – отклонение от параллельности нижних направляющих относительно рабочей поверхности стола; β_3 – отклонение от параллельности нижних направляющих; β_4 – отклонение от параллельности верхних направляющих поперечного суппорта; β_5 – отклонение от параллельности нижних направляющих поперечного суппорта относительно верхних; β_6 – отклонение от линейности нижних направляющих поперечного суппорта; β_7 – отклонение от линейности верхних направляющих консоли; β_8 – отклонение от перпендикулярности вертикальных направляющих относительно верхних направляющих консоли; β_9 – отклонение от линейности вертикальных направляющих консоли; β_{10} – отклонение от линейности вертикальных направляющих стойки; β_{11} – отклонение от параллельности базовой поверхности стойки относительно ее вертикальных направляющих; β_{12} – отклонение от линейности базовой поверхности стойки; β_{13} – отклонение от линейности базовой поверхности головки; β_{14} – отклонение от параллельности оси отверстий корпуса головки относительно ее базовой поверхности; β_{15} – отклонение от параллельности оси наружных колец подшипников относительно оси отверстия под подшипники; β_{16} – отклонение от параллельности оси внутренних колец подшипников относительно оси наружных; β_{17} – отклонение от параллельности оси внутренних колец подшипников относительно оси посадочных поверхностей шпинделя; β_{18} – отклонение от параллельности оси посадочных поверхностей шпинделя относительно оси его отверстия.

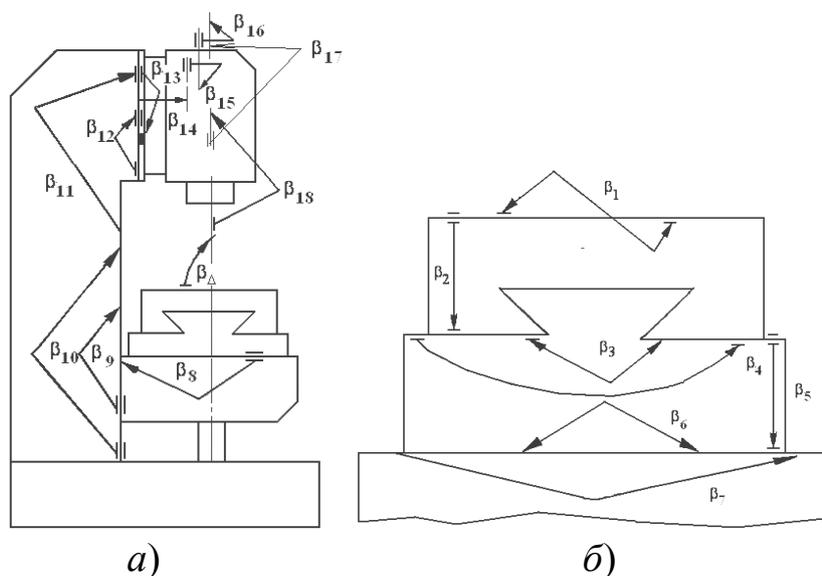


Рис. 2.5. Схема к размерному анализу компоновки станка

Для расчета допусков составляющих звеньев размерной цепи воспользуемся методом равных допусков:

$$T_{\beta i} = \frac{T_{\beta \Delta}}{n}.$$

Производим анализ полученной точности звеньев. Если требуемую точность можно обеспечить механической обработкой, то расчет закончен. Если экономически нецелесообразно, то переходим к методу неполной взаимозаменяемости или применяем регулировку – вводим регулировочные элементы: клинья, планки, съемные направляющие; либо применяем метод подгонки: шабрение направляющих.

2.3. Размерный анализ систем управления станков

2.3.1. Ручная система управления

Рассмотрим пример размерного анализа ручной системы управления приводом поперечных подач токарного станка. Используем линейную размерную цепь (рис. 2.6). В качестве замыкающего звена принимаем расстояние оси шпинделя до базовой поверхности резцедержателя (A_{Δ}). Тогда составляющими звеньями будут:

A_1 – расстояние от базовой поверхности резцедержателя до точки его контакта с фиксирующим элементом;

A_2 – расстояние между точками контакта фиксирующего элемента с поперечным суппортом и резцедержателем;

A_3 – расстояние между точками контакта поперечного суппорта с фиксирующим элементом и базовой поверхностью гайки;

A_4 – расстояние между точками контакта гайки с суппортом и ходовым винтом;

A_5 – расстояние между точками контакта винта с осевым (упорным) подшипником и гайкой;

A_6 – расстояние между точками контакта подшипника с ходовым винтом и кронштейном продольного суппорта;

A_7 – расстояние между точками контакта кронштейна с продольным суппортом и подшипником;

A_8 – расстояние между точками контакта продольного суппорта с кронштейном и станиной;

A_9 – расстояние от середины направляющих станины до оси шпинделя.

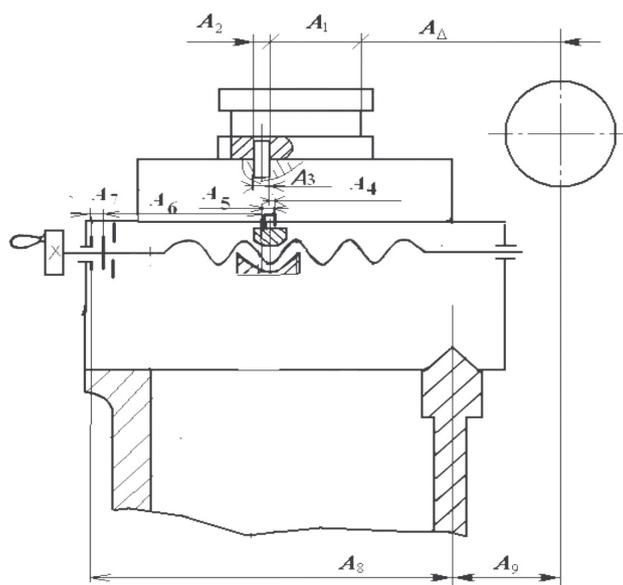


Рис. 2.6. Схема размерной цепи ручной системы управления

Допуск замыкающего звена выбираем по ГОСТу нормы точности для станка, а остальные определяем методом равных квалитетов. Зная допуски составляющих звеньев, назначаем технические требования деталей.

2.3.2. Копировальная система управления

Рассмотрим пример размерного анализа копировальной системы управления приводом поперечных подач станка. Используем линейную размерную цепь (рис. 2.7). В качестве замыкающего звена принимаем расстояние оси шпинделя до базовой поверхности резцедержателя (A_Δ). Тогда составляющими звеньями будут:

A_1 – расстояние от базовой поверхности резцедержателя до точки его контакта с фиксирующим элементом;

A_2 – расстояние между точками контакта фиксирующего элемента с поперечным суппортом и резцедержателем;

A_3 – расстояние между точками контакта поперечного суппорта с фиксирующим элементом и копировальным пальцем;

A_4 – расстояние между точками контакта копировального пальца с суппортом и рабочей поверхностью копира;

A_5 – расстояние между точками контакта копира с пальцем и кронштейном;

A_6 – расстояние между точками контакта кронштейна с копиром и станиной;

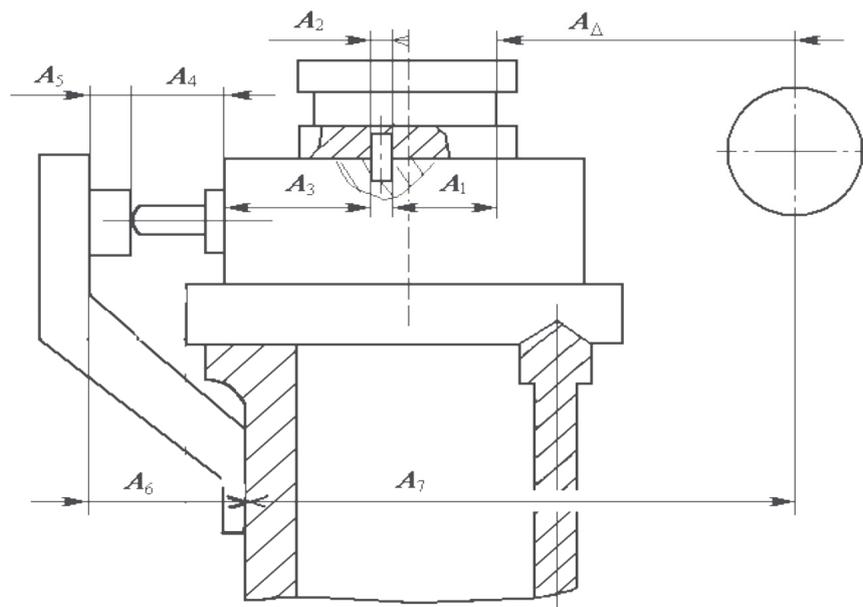


Рис. 2.7. Размерный анализ копировальной системы управления

A_7 – расстояние между точкой контакта станины с кронштейном и осью шпинделя.

2.3.3. Гидрокопировальная система управления

Рассмотрим анализ обработки одной из ступеней вала на гидрокопировальном станке. Замыкающее звено A_Δ – расстояние от оси шпинделя до базовой точки суппорта (рис. 2.8):

$$A_\Delta = (A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11}) - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6).$$

Для оценки гидрокопировальной системы введем замыкающее звено $A'_\Delta = A_6$, тогда для этого параметра размерная цепь имеет вид:

$$A'_\Delta = (A'_2 + A'_3 + A'_4 + A''_6 + A''_7 + A'_8 + A'_{11} + A'_{12} + A'_{13}) - (A'_1 + A'_9 + A'_{10} + A'_{15} + A'_{16}).$$

При нахождении гидрокопировального суппорта в исходном положении перед обработкой, что соответствует положению щупа на рабочей поверхности копира (звено A'_7), размер статической настройки:

$$A_c = -A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A''_6 - A''_7 + A''_8 + A''_9 + A''_{10} + A''_{11} + A''_{12} + A''_{13} - A''_{14}.$$

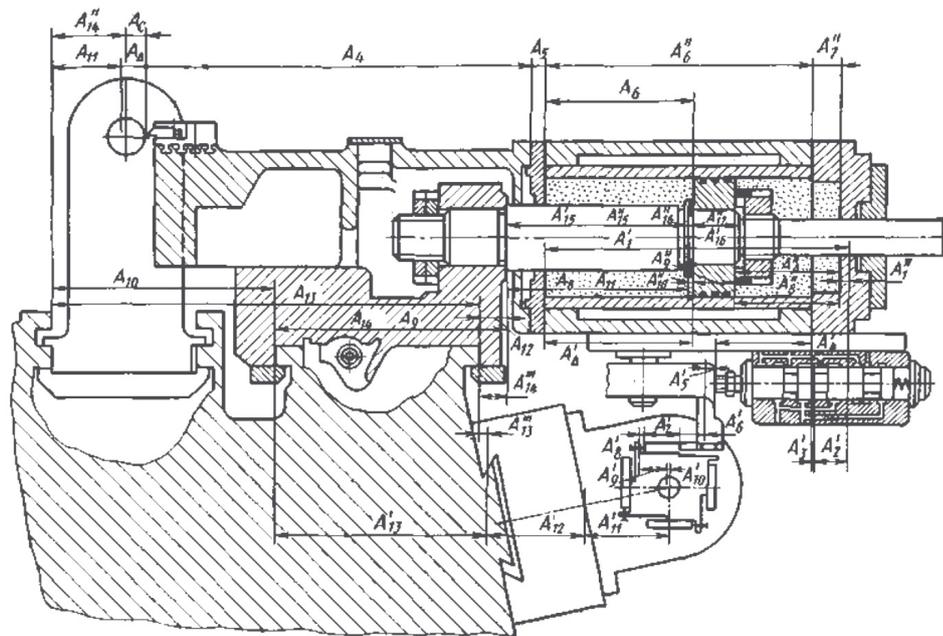


Рис. 2.8. Схема размерных цепей, иллюстрирующая обработку одной из ступеней вала на гидроконтрольном станке

По аналогии с приведенным:

$$A''_8 = A''_{\Delta} = -A''_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 + A'_5 + A'_6 + A'_7 + A'_8 - A'_9 - \\ - A'_{10} + A'_{11} + A'_{12} + A'''_{13} + A'''_{14} - A'''_{15} - A'''_{16} - A'''_{17}.$$

Так как размерная цепь есть совокупность расположенных по замкнутому контуру звеньев, то изменение каждого из них приведет к изменению размера A_c .

Для решения задачи автоматической настройки, поднастройки и перенастройки технологической системы прежде всего необходимо иметь измерительное устройство, датчики которого должны измерять по возможности все погрешности, возникающие в размере статической настройки. Такое измерительное устройство должно быть встроено в соответствующую размерную цепь. При этом могут иметь место два случая: датчики, фиксирующие положение базы станка, несущей обрабатываемую деталь, и режущий инструмент расположены на одном и на различных звеньях размерной цепи. В последнем случае из-под контроля выпадают звенья, которые расположены между установочными базами датчиков. На рис. 2.9, а показан случай, когда датчик, фиксирующий положение вершины резца, расположен на звене A''_8 , а датчики, определяющие положение оси центров, – на звене A''_{13} . При таком способе измерения звенья A''_{13} , A''_{12} , A''_{11} , A''_{10} , A''_9 , A''_8

(здесь $\overline{A''_{13}}$ и $\overline{A''_8}$ – части звеньев A''_{13} и A''_8) не фиксируются. Вследствие этого погрешность, которая может быть внесена в размер статической настройки, для рассматриваемого случая:

$$\Delta A_{\text{изм}\Delta} = \Delta A''_{13} + \Delta A''_{12} + \Delta A''_{11} + \Delta A''_{10} + \Delta A''_9 + \Delta A''_8$$

при сведении к нулю погрешностей, возникающих как результат изменения остальных звеньев, образующих A_c .

При расположении датчиков измерительного устройства на одном звене, например на звене A_{13} (рис. 2.9, б), но в разных местах:

$$\Delta A_{\text{изм}\Delta} = \Delta(A''_{13} - \overline{A''_{13}} - \overline{\overline{A''_{13}}}).$$

Таким образом, для измерения всех составляющих A_c звеньев необходимо датчики измерительного устройства, фиксирующие положение баз станка, несущих обрабатываемую деталь, и режущего инструмента располагать на одном звене, причем так, чтобы они имели одну общую базу, т. е. $\Delta A_{\text{изм}\Delta} = 0$. Таким звеном может быть любое звено цепи, образующей A_c , а выбор его диктуется в основном конструктивными особенностями станка и удобством монтажа измерительного устройства на выбранном звене. Пусть звенья A''_8 и A''_{13} (рис. 2.9, в) являются такими. При этом погрешности, отдельно зафиксированные соответствующими датчиками:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \overline{A}_{c1} &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4 + \\ &+ \Delta A_5 + \Delta A''_6 + \Delta A''_7 + \Delta A''_8; \\ \Delta \overline{\overline{A}}_{c1} &= \Delta \overline{A''_8} + \Delta A''_9 + \Delta A''_{10} + \\ &+ \Delta A''_{11} + \Delta A''_{12} + \Delta A''_{13} + \Delta A''_{14} \end{aligned} \right\}$$

при расположении измерительного устройства со всеми датчиками в месте K звена A''_8 ;

$$\left. \begin{aligned} \Delta \overline{A}_{c2} &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4 + \\ &+ \Delta A_5 + \Delta A''_6 + \Delta A''_7 + \Delta A''_8 \\ &+ \Delta A''_9 + \Delta A''_{10} + \\ &+ \Delta A''_{11} + \Delta A''_{12} + \Delta A''_{13} \end{aligned} \right\}$$

при расположении измерительного устройства со всеми датчиками в месте Л звена A_{13}'' .

$$\Delta \bar{A}_{c2} = \Delta A_{14}''.$$

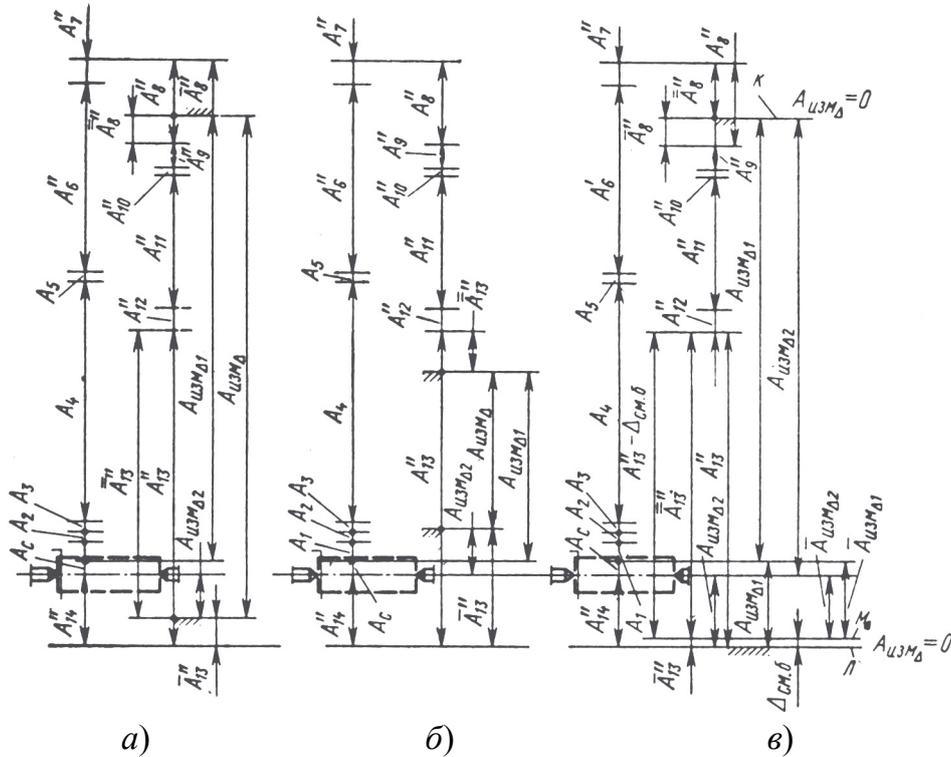


Рис. 2.9. Схемы встройки датчиков в размерную цепь:
 а – датчик, фиксирующий положение вершины резца, расположен на звене A_8'' ; б – на звене A_{13} ; в – на звеньях A_8'' и A_{13}'' .

Нетрудно показать, что для обоих рассмотренных вариантов:

$$\Delta \bar{A}_{c1} + \Delta \bar{A}_{c1} = \Delta \bar{A}_{c2} + \Delta \bar{A}_{c2} = \Delta A_c = \text{const},$$

что указывает на возможность выбора в качестве базировочного звена для монтажа на нем измерительного устройства любого из составляющих звеньев размерной цепи, определяющей получение A_c .

В рассмотренном случае любое, даже самопроизвольное смещение базы измерительного устройства в направлении размера A_c не отразится на результатах измерения. Действительно, смещение базы на величину $\Delta_{\text{см.б}}$ из положения Л в положение М равносильно рассмотренному случаю, когда измерительное устройство со всеми датчиками расположено на одном звене, но в разных его точках. При указанном смещении датчики, фиксирующие положение базы, несущей об-

рабатываемую деталь, дополнительно будут фиксировать изменение части звена A''_{13} , т. е. $A''_{13} = \Delta_{\text{см.б}}$. Изменение другой его части фиксируется другим датчиком. Указанное смещение измерительного устройства не отразится на показаниях датчиков только в том случае, если их характеристики останутся неизменными в зоне, превышающей или равной $\Delta_{\text{см.б}}$.

Применительно к гидрокопировальному полуавтомату 1722 все датчики, фиксирующие положение резца, а также оси центров станка расположены на звене A''_{13} в месте Л, т. е. на нижней направляющей станины для передней и задней бабок. Этот выбор обусловлен конструктивными особенностями станка и относительным удобством монтажа измерительного устройства.

В связи с вышеизложенным следует указать на весьма существенное обстоятельство, связанное с расположением измерительного устройства для измерения размера A_c . Оно заключается в том, что измерительное устройство может быть смонтировано на любом звене технологической системы и даже вне ее. Возможно, например, расположение его на фундаменте станка. При этом смещение измерительного устройства со всеми датчиками в направлении размера A_c не вызовет погрешности в указанном размере, так как при постоянстве наклона характеристик датчиков сигнал, снимаемый с них, будет постоянным.

Рассмотренный принцип по встройке измерительного устройства в размерную цепь, определяющую размер статической настройки A_c на диаметральные размеры, полностью справедлив и для линейных размеров, т. е. для другого взаимно перпендикулярного направления. При этом правильность измерения требуемого расстояния может быть обеспечена при условии, что именно данная цепь вскрывает все звенья, участвующие в образовании размера статической настройки.

При получении как диаметральных, так и линейных размеров деталей, т. е. в двух взаимно перпендикулярных направлениях, датчики измерительного устройства фиксируют относительное положение трех элементов технологической системы: режущего инструмента вместе с исполнительным органом, базы станка, несущей обрабатываемую деталь, и программносителя, тем самым охватывая все размерные цепи, определяющие соответствующие размеры статических настроек.

Осуществление автоматического перехода с обработки одного типоразмера детали на другой требует автоматического управления размером динамической настройки, так как размер динамической настройки от одного типоразмера к другому может меняться по указанным выше причинам. В этой связи могут быть использованы два

принципиально различных пути управления упругими перемещениями технологической системы.

Первый из них заключается в том, что в процессе формообразования поверхностей детали в зависимости от колебания припуска, твердости, затупления режущего инструмента и других факторов постоянно поддерживается размер динамической настройки с точностью $\omega_{т.в.}$, определяемой в основном качеством спроектированной системы автоматического управления. При этом действительный размер (радиус детали для токарной обработки валов): $A_{\Delta} = A_c + A_{д.р.}$, где $A_{д.р.}$ – размер динамической настройки, поддерживаемый САУ упругими перемещениями.

Поддержание постоянным размера $A_{д.р.}$, может быть осуществлено изменением различных регулирующих параметров, из которых наиболее часто используется подача.

При необходимости перехода на новый силовой режим при обработке другого типоразмера детали величина $A_{д.р.}$, должна быть изменена. При этом требуется внесение поправок в размер $A_{с.о}$ статической настройки. Использование САУ упругими перемещениями позволяет рабочему в зависимости от требуемого режима оперативно вносить соответствующие коррективы в установку по $A_{с.о}$, пропорциональные величине $A_{д.р} = A_{д.р1} \pm A_{д.р2}$. При этом необходимо иметь функциональную зависимость силового режима и соответствующего ему аналога (например, в виде напряжения, тока и др.), вводимого в задающее устройство системы автоматического управления.

Второй путь заключается в том, что в процессе формообразования поверхностей детали независимо от колебания припуска, твердости, затупления режущего инструмента и других факторов управление получаемым размером осуществляется посредством изменения размера статической настройки. Физическая сущность этого способа состоит в том, что установленный размер статической настройки A_c приравнивается к рабочему настроечному размеру A_p . Это условие обеспечивается системой автоматического управления. Как только начинается процесс формообразования (т. е. появляется A_d), включается в работу САУ упругими перемещениями, задача которой состоит в обеспечении условия $A_d = \text{const}$. Это означает, что за счет изменения A_c происходит компенсация приращений, порождаемых изменяющимся размером динамической настройки и его погрешностями, т. е.

$$A_{\Delta} = A_p = A_c + A_d - A_d(\Delta A_c),$$

где $A_d = \Delta A_c$.

На первый взгляд кажется, что недостатком данного способа является изменение размера статической настройки. Однако учитывая, что A_c каждый раз стабилизируется ($A_{c.0}$) перед обработкой очередной детали посредством САУ размерной настройкой и перенастройкой, данный способ следует признать более универсальным. В этом случае не требуется внесения рабочим соответствующих поправок в размер статической настройки.

Таким образом, автоматический переход с обработки одного типоразмера детали на другой с обеспечением при этом заданной точности требует снабжения станков системами автоматического управления размерами статической и динамической настроек.

Задача получения точности линейного размера K_{Δ} по схеме, приведенной на рис. 2.10, решается с помощью размерных цепей K и Y :

$$K_1 + K_2 - K_3 + K_4 - K_5 + K_6 - K_7 + K_8 + K_9 + K_{10} + K_{\Delta} = 0.$$

В свою очередь, составляющее звено цепи K_6 , входящее в указанную цепь K , определяется размерной цепью Y , в которой $K_6 = Y_{\Delta}$.

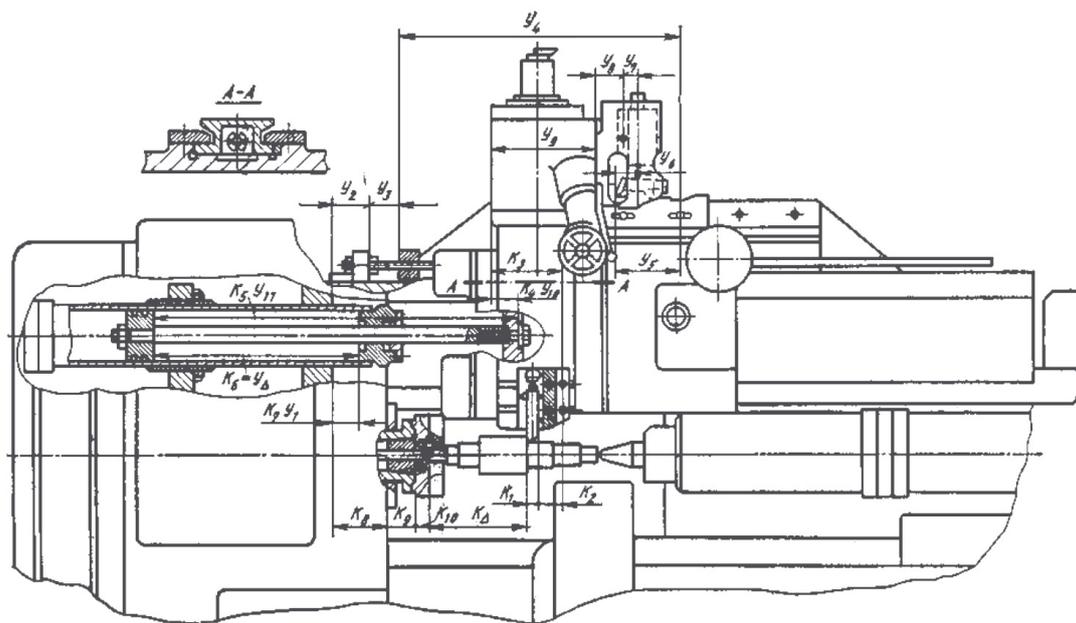


Рис. 2.10. Схема размерных цепей для обеспечения точности линейного размера K_{Δ}

2.4. Размерный анализ робототехнического комплекса

На рис. 2.11 показан роботизированный технический комплекс (РТК). Он содержит токарный станок, промышленный робот, индексирующий стол, подающий заготовки в позицию для захвата их роботом и установки в шпиндель станка после открывания защитного экрана. Кроме смены заготовок робот может заменять режущие инструменты в револьверной головке станка из магазина.

Рассмотрим размерные связи, возникающие при автоматической установке заготовки короткого вала в самоцентрирующий патрон токарного станка. Установку заготовки в патрон и съем детали осуществляет робот (рис. 2.11, а). Робот берет заготовку схватом из ячейки кассеты, вносит заготовку в рабочую зону станка так, чтобы ось заготовки совпадала с осью раскрытых кулачков патрона, и затем задвигает заготовку в патрон, после чего подается команда на зажим кулачков патрона.

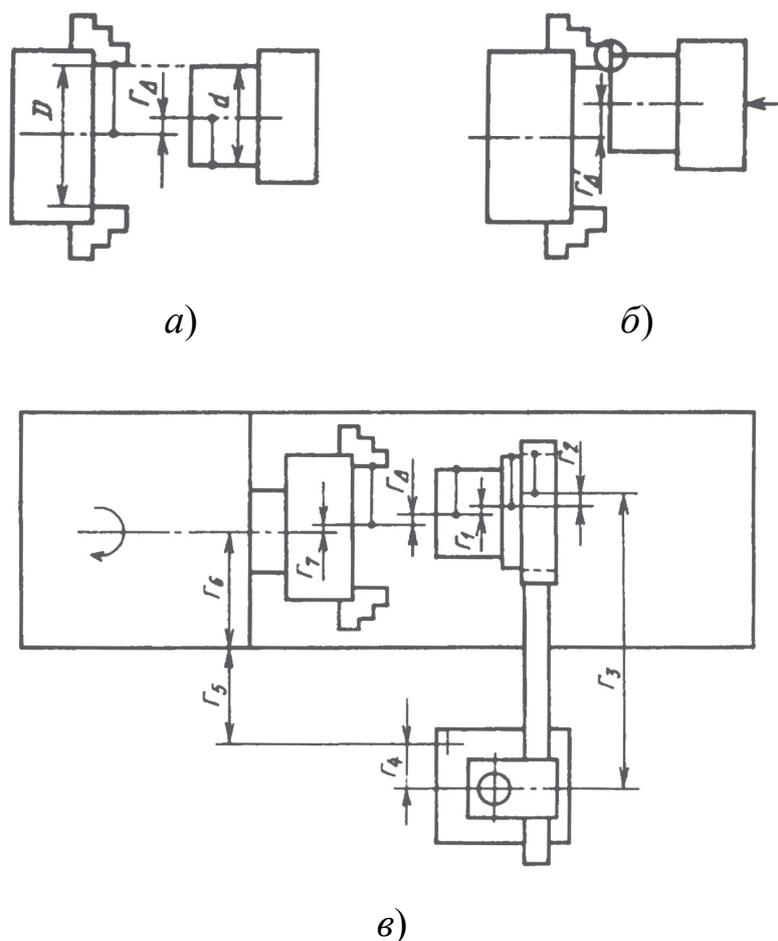


Рис. 2.11. Схема размерных связей при автоматической загрузке станка

На рис. 2.11, б видно, что вход заготовки в раскрытые кулачки патрона возможен, если отклонение Γ_{Δ} от соосности позиционируемой заготовки относительно оси кулачков патрона не превышает следующего значения: $\Gamma_{\Delta\max} = \frac{1}{2}(D - d)$, где D – диаметр раскрытых кулачков патрона; d – диаметр устанавливаемой в патрон заготовки.

Если в момент установки размер Γ_{Δ} окажется больше этого предельно допустимого значения, то при движении схвата робота вдоль оси шпинделя заготовка торцом упрется в патрон (рис. 2.11, в) и автоматическая установка заготовки будет невозможна.

Следовательно, обеспечение требуемого значения Γ_{Δ} является условием возможности автоматической установки заготовки в патрон. Допустимое значение Γ_{Δ} рассчитывается исходя из размеров Γ_{Δ} , D и d по вышеприведенной формуле. Из этой формулы вытекает предельно допустимое отклонение $\Gamma_{\Delta\max}$ от соосности, которое позволяет роботу ввести заготовку в раскрытый патрон. Поскольку для большинства патронов с механическим приводом диапазон раскрытия кулачков может быть достаточно большим, то, как правило, не возникает трудности в обеспечении раскрытия кулачков по диаметру, например, на 20 мм больше диаметра заготовки, тогда предельно допустимое отклонение от соосности будет равно $\Gamma_{\Delta\max} = \pm 10$ мм. Значение исходного звена при желании обеспечить соосность в этом случае можно записать в виде $\Gamma_{\Delta} = 0 \pm 10$ мм. Это означает, что желательно, чтобы $\Gamma_{\Delta} = 0$, но допустимое отклонение ± 10 мм. Допуск на размер Γ_{Δ} в данном случае $T_{\Delta} = 20$ мм.

Однако проведенного расчета для выявления допустимых отклонений от соосности не достаточно. Рассчитанное значение Γ_{Δ} позволяет лишь обеспечить ввод заготовки внутрь кулачков и является необходимым, но недостаточным условием.

Представим себе, как произойдет закрепление заготовки при рассчитанном отклонении от соосности. Кулачки, сдвигающиеся к оси патрона, при наличии отклонения от соосности будут стремиться переместить заготовку в новое положение. Заготовка же пока еще закреплена в схвате робота. Следовательно, возникнут силы, при передаче заготовки от робота в патрон. Сила может быть определена по формуле

$$P = j\Gamma_{\Delta}, \quad (2.1)$$

где j – жесткость системы робот – заготовка – патрон.

При жесткости робота $j = 500$ Н/мм в случае отклонения от соосности $\Gamma_{\Delta} = \Gamma_{\Delta\max} = 10$ мм сила, действующая в момент закрепления на робот, заготовку и кулачки патрона, составляет $P = 5000$ Н. Если бы такую силу могли создать кулачки патрона, что-нибудь обязательно бы сломалось: патрон, робот или заготовка. Поэтому очевидно, вторым не менее важным условием определения предельно допустимого отклонения от соосности является ограничение силы P до допустимого значения, определяемого конкретными условиями установки: моделью станка, размерами и прочностью заготовки, параметрами робота. Допустим, что в конкретном примере для установки валика диаметром 100 мм и длиной 400 мм необходимо, чтобы $P \leq 100$ Н, тогда допустимое отклонение от соосности:

$$\Gamma'_{\Delta\max} = \frac{P}{j} = \frac{100}{500} = 0,2.$$

В данном случае второе условие значительно жестче первого, так как

$$\Gamma'_{\Delta\max} \ll \Gamma_{\Delta\max}.$$

Далее, необходимо построить размерную цепь, показанную на рис. 2.11, в. Размерная цепь Γ описывается уравнением $\Gamma_{\Delta} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4 - \Gamma_5 - \Gamma_6 - \Gamma_7$, где Γ_1 – отклонение от соосности технологической базы заготовки, устанавливаемой в патрон, и базы, определяющей положение заготовки в схвате робота; Γ_2 – отклонение от соосности поверхности заготовки в схвате, вызванное погрешностью установки заготовки в схвате Γ_{2y} и погрешностью центрирования схвата $\Gamma_{2ц}$; $\Gamma_2 = \Gamma_{2y} + \Gamma_{2ц}$; Γ_3 – расстояние от оси схвата робота до базы отсчета размеров при автоматическом перемещении схвата робота по программе УЧПУ (запрограммированное значение размера позиционирования схвата); Γ_4 – расстояние от базы отсчета размеров до основной базы робота, определяющее его положение относительно станка; Γ_5 – расстояние между станком и роботом; Γ_6 – расстояние от оси шпинделя станка до основной базы станка; Γ_7 – отклонение от соосности кулачков патрона по отношению к оси шпинделя, вызванное погрешностью центрирования кулачков патрона $\Gamma_{7ц}$ и погрешностью установки патрона на шпиндель Γ_{7y} ; $\Gamma_7 = \Gamma_{7y} + \Gamma_{7ц}$.

Размерная цепь G характеризует связь размеров станка, робота и отклонения от соосности. Эта связь может быть отображена математически тремя уравнениями: уравнением размерной цепи в номиналах; уравнением допусков этих размеров, которое соответствует методу достижения точности; уравнением средних отклонений размеров.

При наладке РТК (рис. 2.11) размер G_3 при программировании роботу подбирают так, чтобы G_Δ было в пределах допустимых значений, т. е. при наладке используют метод регулирования. Однако при автоматической загрузке-выгрузке деталей необходимо применение метода полной взаимозаменяемости.

При работе РТК действительное значение размера G_Δ будет меняться в основном вследствие погрешностей позиционирования робота, тепловых деформаций, погрешностей установки заготовки в захвате. Так, например, погрешность позиционирования загрузочных роботов может составлять $\leq 0,5$ мм и больше; шпиндель токарного станка, например, 16К20РФ3 при нагреве передней бабки на 20°C при работе РТК смещается в вертикальной плоскости на $0,04$ мм, а в горизонтальной – на $0,02$ мм. Какие требования к точности робота нужно в данном случае предъявить? Какой робот следует использовать: с точностью позиционирования ± 1 ; $\pm 0,1$ или $\pm 0,01$ мм, если учесть, что с увеличением точности позиционирования увеличивается и стоимость робота? Ответы на эти вопросы можно получить, проведя размерный анализ.

При автоматической работе РТК необходимо обеспечить, чтобы каждую заготовку робот устанавливал в патрон станка без поднастройки и регулировки, поэтому соосность G_Δ нужно обеспечивать по методу полной взаимозаменяемости. При полной взаимозаменяемости допуск замыкающего звена должен быть равен сумме полей допусков звеньев составляющих:

$$T_\Delta = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7,$$

где $T_1 - T_7$ – допуски размеров G соответствующего номера.

Допуск соосности $G_\Delta = \pm 0,2$ мм составляет $T_\Delta = 0,4$ мм.

Рассмотрим допуски составляющих размеров. Допуск соосности T_1 указан на чертеже заготовки, которую предлагается обрабатывать на РТК. Для необработанной поковки допуск может превысить допуск исходного звена. Допуск T_2 определяется погрешностью установки заготовки в схвате робота и погрешностью центрирования схвата. Для необработанной поковки погрешность установки может быть существенна. В результате сумма допусков значительно превысит допуск T_Δ замыкающего звена.

Следовательно, при принятых допусках обеспечить необходимые условия для автоматической установки заготовки нельзя. Возможно несколько путей решения поставленной задачи. Во-первых, можно сократить допуски размеров составляющих звеньев, для этого, например, применяют более точный схват с меньшей погрешностью центрирования; использовать предварительно обработанные заготовки для уменьшения погрешности установки; робот следует располагать не на отдельном основании, а непосредственно на станине станка; нужно ограничить диапазон рабочих температур при эксплуатации РТК и таким образом уменьшить составляющие допусков $T_2 - T_6$.

Во-вторых, можно расширить допуск замыкающего звена T_Δ . В соответствии с (2.1), из которой было получено значение допуска, следует, что расширение допуска при той же допустимой силе может быть обеспечено снижением жесткости закрепления заготовки в схвате робота. Этот путь наиболее удобен и поэтому схваты роботов делают подпружиненными. Однако чрезмерно уменьшать жесткость тоже вредно, так как при установке изделий различной массы будет большая погрешность позиционирования оси заготовки в схвате по высоте, выбрав наиболее дешевый робот с точностью позиционирования ± 1 мм, можно определить ожидаемое поле рассеяния ω_Δ размера T_Δ по формуле $\omega_\Delta = \sum \omega_i$, ω_i – поля рассеяния составляющих звеньев, пусть $\omega_\Delta = 2,4$ мм. Следовательно, в схвате требуется обеспечить максимальное смещение заготовки $T'_{\Delta\max} = \pm 1,2$ мм. Для этого жесткость крепления должна быть не больше:

$$j_{\max} = \frac{P}{T'_{\Delta\max}} = \frac{100}{1,2} = 83,3 \text{ Н/мм.}$$

Примем $j = 80$ Н/мм. При заданных жесткости и необходимом значении смещения можно сконструировать пружинный упругий подвес схвата робота.

В третьих, можно использовать робот с автоматической поисковой системой управления. При этом могут изменяться структура и параметры размерной связи, изменится метод достижения точности (МДТ) замыкающего звена: вместо полной взаимозаменяемости будет использоваться автоматическое регулирование размера. Компенсатором в размерной цепи может быть размер позиционирования схвата робота, который управляется от УЧПУ.

Робот необходимо оснастить техническим зрением и техническим интеллектом с использованием ЭВМ для анализа полученного изображения и управления положением схвата с деталью, т. е. нужна система адаптивного управления роботом.

Однако такой робот будет стоить намного дороже, чем обычно применяемый загрузочный робот, и при современном уровне развития техники вряд ли будет конкурентоспособным для автоматической загрузки рассматриваемого токарного станка.

Для этого достаточно подсчитать срок окупаемости дополнительного оснащения робота техническим зрением и учесть таким образом разницу в стоимости интеллектуального и обычного загрузочного робота. Но если все же понадобится использовать интеллектуальный робот для автоматизации установки заготовок, то, чтобы определить необходимые требования к датчикам информации такого робота, к системе управления, точности позиционирования, необходимо выявить и рассчитать размерные связи. Иначе невозможно ни разработать, ни выбрать подходящий робот из числа имеющихся, ни запрограммировать его работу.

Таким образом, при автоматизации процессов необходим анализ возникающих в автоматизируемом процессе размерных связей.

Рассмотренная задача автоматической установки заготовки роботом в патрон аналогична многим другим, возникающим при сборке, например, при установке вала во втулку, или наоборот, автоматической установке режущего инструмента в шпиндель станка или гнездо инструментального магазина.

2.5. Размерный анализ коробки передач

Рабочие поверхности зубьев зубчатых колес должны занимать друг относительно друга такое положение, при котором зубчатое колесо с надлежащей точностью было бы способно передавать вращательное движение. Относительное положение рабочих поверхностей зубьев характеризуется точностью шага, направлением зуба и другими показателями.

Положение же зубчатого венца в целом определяют относительно основных баз зубчатого колеса, в связи с чем выдвигают требования к соосности зубчатого венца с отверстием в ступице, отсутствию перекоса оси венца в двух координатных плоскостях и др.

Положение свободных поверхностей определяют также в соответствии с задачами, возлагаемыми на них. Например, в корпусной

детали коробчатого типа ее стенка образуется сочетанием двух плоских поверхностей. Задание толщины стенки – это привязка положения одной из поверхностей к другой в их совокупности. Вместе с тем положение одной из стенок, обычно наружной, определяют относительно основных баз детали. Иногда положение совокупности свободных поверхностей необходимо задать относительно вспомогательных баз детали или ее плоскостей симметрии или определить положение одной совокупности свободных поверхностей относительно другой.

Что касается поверхностей основных и вспомогательных баз, то каждый комплект баз представляет собой прямоугольную систему координат. Поэтому увязка относительного положения поверхностей, составляющих комплект баз, сводится к определению относительного положения координатных плоскостей системы. Для определения же относительного положения комплектов баз используют правила аналитической геометрии об определении относительного положения систем координат.

Деталь любого назначения имеет один комплект основных баз и столько комплектов вспомогательных баз, сколько деталей к ней должно быть присоединено. В зависимости от функций, выполняемых деталью в станке, могут быть самые различные варианты увязки относительного положения комплектов баз как координатных систем.

В одних случаях оказывается необходимым за начало отсчета избрать систему координат, совмещенную с основными базами, и относительно нее задать положение систем, связанных со всеми вспомогательными базами. В других случаях необходима цепная увязка относительного положения систем координат. Часты и такие случаи, когда приходится сочетать оба метода, выбирать в качестве начала отсчета какой-то комплект вспомогательных баз, а не основных, иметь несколько начал отсчета, связанных цепным способом или имеющих общую систему отсчета.

В качестве примера рассмотрим размерные цепи, определяющие работоспособность коробки передач станка (рис. 2.12).

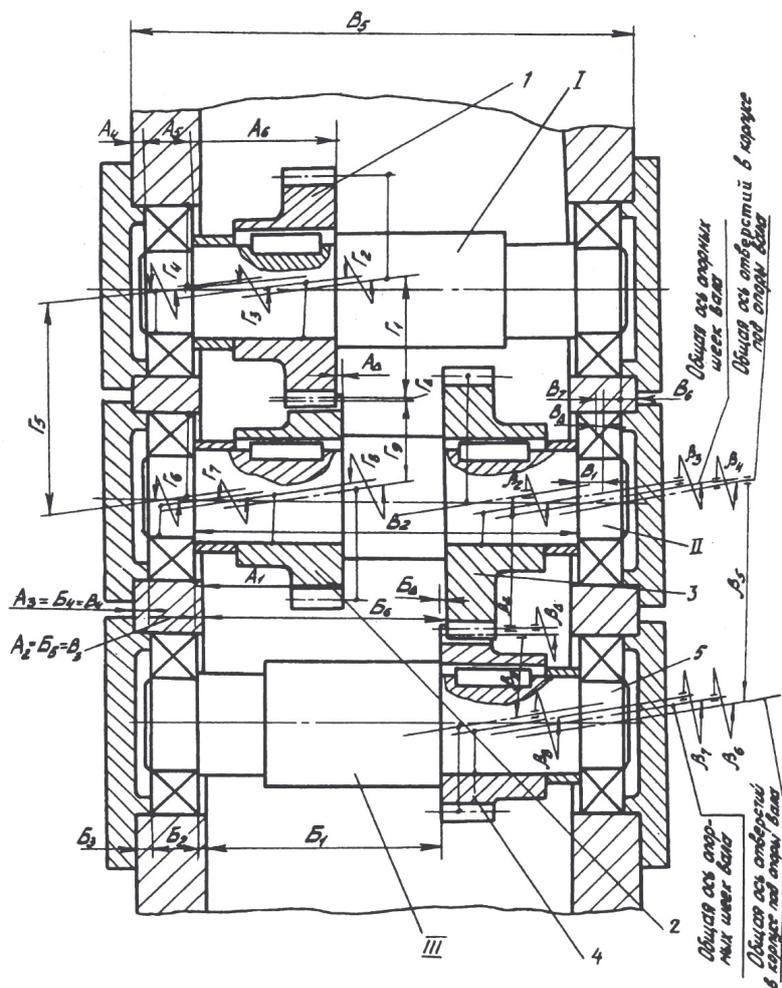


Рис. 2.12. Размерные цепи коробки передач

Перечень задач, решение которых обеспечивает работоспособность коробки передач, приведен в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Перечень задач, решение которых обеспечивает работоспособность коробки передач

Задача	Размер вала, участвующий в решении задачи
1. Совмещение A_{Δ} торцов зубчатых колес 1 и 2	$A_1 = x_2$
2. Совмещение B_{Δ} торцов зубчатых колес 4 и 3	$B_6 = x_1$
3. Создание натяга (зазора) B_{Δ} в подшипниках	B_6
4. Совмещение Γ_{Δ} делительных окружностей зубчатых колес	$\Gamma_7 = y_2$

Задача	Размер вала, участвующий в решении задачи
5. Обеспечение параллельности β_Δ образующих делительных цилиндров зубчатых колес в одной из координатных плоскостей	$\beta_3 = \varepsilon_1$
6. Обеспечение правильности сопряжения вала с подшипником	A_2
7. Обеспечение требуемой прочности и жесткости вала	Диаметры цилиндрических поверхностей, длина вала и его ступеней

2.6. Моделирование размерных связей при заданной вероятности

Принимаем, что замыкающее звено есть некоторая функция

$$Y_\Sigma = \varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n), \quad (2.2)$$

где Y_Σ – замыкающее звено; Y_1, Y_2, \dots, Y_n – аргументы функции (влияющие факторы, функциональные параметры).

Некоторые из аргументов не только переменны, но и случайны. Они могут быть независимыми, функционально зависимыми или попарно коррелированными. Кроме того, аргументы функции (2.2) могут быть функциями других случайных аргументов.

Считаем, что функция в малой окрестности рассматриваемой точки почти линейна, и при разложении ее в ряд Тейлора можно сохранить только члены первого порядка, а члены второго и более высоких порядков отбросить. Тогда функция (2.2) после ряда преобразований примет вид:

$$Y_\Sigma = \varphi(M_{Y_1}, M_{Y_2}, \dots, M_{Y_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_m \overset{\circ}{Y}_i, \quad (2.3)$$

здесь первое слагаемое правой части и частные производные во втором слагаемом – постоянные величины.

2.6.1. Моделирование размерных связей центрированных случайных величин

Аргументами функции (2.3) являются центрированные случайные величины $Y_i^\circ = Y_i - M_{Y_i}$. Произведем анализ основных числовых характеристик случайных величин: математического ожидания и дисперсии. В табл. 2.2 приведены формулы для определения математического ожидания и дисперсии некоторых функций.

Таблица 2.2

Математическое ожидание и дисперсия некоторых функций

Величины случайные	Математические ожидания	Дисперсия
1. Неслучайная величина C	$M[C]=C$	–
2. Произведение CX , где X – случайная величина	$M[CX]=MC[X]$	$D[CX]=C^2D[X]$
3. Сумма независимых случайных величин $\sum_i X_i$	$M\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i M[X_i]$	$D\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i D[X_i]$
4. Линейная функция $\sum_i a_i X_i + b$, где X_i – независимые случайные величины; a, b – неслучайные величины	$M\left[\sum_i a_i X_i + b\right] = \sum_i a_i M[X_i] + b$	$D\left[\sum_i a_i X_i + b\right] = \sum_i a_i^2 D[X_i]$
5. Сумма коррелированных случайных величин $\sum_i X_i$	$M\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i M[X_i]$	$D\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i D[X_i] + 2\sum_{i < j} K_{ij}$ где K_{ij} – корреляционный момент
6. Линейная функция $\sum_i a_i X_i + b$, где X_i – коррелированные случайные величины; a и b – неслучайные величины	$M\left[\sum_i a_i X_i + b\right] = \sum_i a_i M[X_i] + b$	$D\left[\sum_i a_i X_i + b\right] = \sum_i a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i < j} a_i \times a_j K_{ij}$ $K_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$, где r_{ij} – коэффициент корреляции

Величины случайные	Математические ожидания	Дисперсия
7. Произведение двух независимых случайных величин X, Y	$M[XY] = M[X]M[Y]$	$D[XY] = D[X]D[Y] + M^2[X]D[Y] + M^2[Y]D[X]$
8. Произведение нескольких независимых случайных величин $\prod_i X_i$	$M\left[\prod_i X_i\right] = \prod_i M[X_i]$	—
9. Произведение двух коррелированных случайных величин XY	$M[XY] = M[X]M[Y] + K_{xy}$, где K_{xy} – корреляционный момент	—

Математическое ожидание функции (2.3) (табл. 2.2, п. 6):

$$M[Y_\Sigma] = \varphi[M_{Y_1}, M_{Y_2}, \dots, M_{Y_n}] + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_m M\left[\overset{\circ}{Y}_i \right],$$

но так как $M\left[\overset{\circ}{Y}_i \right] = 0$, то

$$M[Y_\Sigma] = \varphi(M_{Y_1}, M_{Y_2}, \dots, M_{Y_n}). \quad (2.4)$$

Дисперсия:

$$D[Y_\Sigma] = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_m^2 D[Y_i] + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right)_m K_{ij}, \quad (2.5)$$

где K_{ij} – корреляционный момент.

Для независимых случайных величин $K_{ij} = 0$,

тогда

$$D[Y_\Sigma] = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_m^2 D[Y_i]. \quad (2.6)$$

Здесь индекс m означает, что в выражении частной производной вместо аргументов Y_i подставляют их математические ожидания.

Для расчета точностных параметров станков используют линейную функцию

$$Y_{\Sigma} = \sum_i \xi_i Y_i, \quad (2.7)$$

где Y_{Σ} – показатель точности узла станка; Y_i – показатель точности узла (детали), являющийся аргументом функции и называемый также влияющим размером; ξ_i – постоянная при случайной величине Y_i , называемая в дальнейшем коэффициентом приведения.

Математическое ожидание и дисперсия функции (2.7) согласно табл. 2.2 имеют вид:

$$M[Y_{\Sigma}] = \sum_i \xi_i M[Y_i];$$

$$D[Y_{\Sigma}] = \sum_i \left(\frac{\partial Y_{\Sigma}}{\partial y_i} \right)_m^2 D[Y_i] + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial Y_{\Sigma}}{\partial y_i} \right)_m \left(\frac{\partial Y_{\Sigma}}{\partial y_j} \right)_m K_{ij}. \quad (2.8)$$

При независимых аргументах:

$$D[Y_{\Sigma}] = \sum_i \left(\frac{\partial Y_{\Sigma}}{\partial y_i} \right)_m^2 D[Y_i].$$

Частные производные линейной функции (2.7) $\left(\frac{\partial Y_{\Sigma}}{\partial y_i} \right)_m$ равны постоянной ξ_i , тогда

$$D[Y_{\Sigma}] = \sum_i \xi_i^2 D[Y_i] + 2 \sum_{i < j} \xi_i \xi_j K_{ij}. \quad (2.9)$$

Для некоррелированных случайных величин:

$$D[Y_{\Sigma}] = \sum_i \xi_i^2 D[Y_i]. \quad (2.10)$$

Отклонения размеров деталей обуславливаются производственными причинами (погрешностями оборудования, приспособлений, инструмента, измерений и др.).

В большинстве случаев причины возникновения погрешностей проявляются случайно, поэтому отклонения размеров деталей представляют собой случайные величины.

Так как оборудование предназначено для выполнения определенной работы, то большее или меньшее число деталей всегда под-

вергается силовым и температурным воздействиям. В связи с этим при расчете допусков необходимо также учитывать те силовые и температурные деформации деталей, которые могут влиять на точность работы оборудования.

Под воздействием различных случайных причин фактические значения параметров имеют некоторое рассеивание, поэтому силы, размеры деталей можно отнести к случайным величинам.

Рассеивание случайной величины x характеризуется функцией $y = f(x)$ плотности вероятности этой величины и может быть выражено также с помощью основных числовых характеристик.

Характеристикой положения случайной величины является математическое ожидание:

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины x .

Характеристикой рассеивания случайной величины около ее математического ожидания является дисперсия D_x , или среднее квадратическое отклонение σ_x :

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 f(x) dx, \text{ или } D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M_x^2; \sigma_x = \sqrt{D_x},$$

эти числовые характеристики достаточно полно характеризуют любую случайную величину.

В технической документации случайную величину (показатель точности оборудования) задают обычно двумя предельными отклонениями: верхним $es(ES)$ и нижним $ei(EI)$. Для удобства изложения будем условно обозначать через es и ei отклонения всех размеров. Тогда среднее отклонение em и допуск размера определяют по соотношениям $em = 0,5(es + ei)$; $T = es - ei$. Однако для характеристики случайной величины значений em и T недостаточно.

Математическое ожидание случайной величины можно определить по выражению (рис. 2.13):

$$M_x = N + em + \alpha T,$$

где N – номинальное значение случайной величины; αT – величина асимметрии рассеивания размера; α – коэффициент относительной асимметрии рассеивания размера.

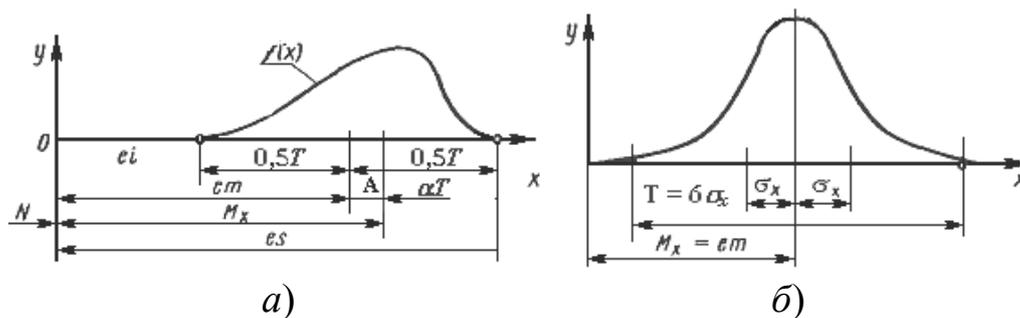


Рис. 2.13. Кривые распределения:
a – асимметричная; *б* – симметричная

Удобнее изучать не сами случайные величины, а их отклонения от номинального значения.

Тогда математическое ожидание согласно схемы на рис. 2.13:

$$M_x = em + \alpha T. \quad (2.11)$$

Связь между D , σ и T определяют соотношения:

$$\sigma = \frac{1}{6}KT; \quad (2.12)$$

$$D = \frac{1}{36}K^2T^2,$$

где K – коэффициент относительного рассеивания размера.

При хорошо отлаженном технологическом процессе, особенно когда при обработке деталей получение размера обеспечивается автоматически, распределение отклонений подчиняется обычно закону Гаусса. Плотность вероятности для этого распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Среднее квадратическое отклонение обычно принимают равным $\sigma = \frac{T}{6}$. Величина $T = 6\sigma$ соответствует 0,9973 площади под кривой распределения (рис. 2.13, б). Так как согласно (2.12) $K = \frac{6\sigma}{T}$, то для нормального распределения коэффициент относительного рассеивания $K = 1$. В связи с тем что $M_x = em$ (рис. 2.13, б), коэффициент относительной асимметрии $\alpha = 0$.

В табл. 2.3 показаны некоторые теоретические законы рассеивания и соответствующие значения коэффициентов α и K .

Таблица 2.3

Значения коэффициентов

Коэф- фициент	Значения коэффициента при законе рассеивания				
	Гаусса	Симпсона	равновероятном	равномерно возрастающей вероятности	равномерно убывающей вероятности
K	1,0	1,22	1,73	1,41	1,41
α	0	0	0	1/3	1/3

Значения коэффициентов α и K на практике обычно получают опытным путем после математической обработки результатов измерения размеров достаточно большой партии деталей.

Опыт показывает, что для проектных расчетов можно пользоваться следующими средними значениями этих коэффициентов: коэффициент относительного рассеивания для всех размеров $K_i = 1,2$; коэффициент относительной асимметрии для размеров охватывающих поверхностей $\alpha_i = -0,1$; охватываемых $\alpha_i = 0,1$; прочих $\alpha_i = 0$.

Как видно на рис. 2.13, $\alpha T = M_x - et$ есть величина асимметрии, имеющая размерность случайной величины (мм, м).

Если математическое ожидание M_x располагается правее координаты et (рис. 2.13), то асимметрия положительна ($\alpha > 0$); если левее, то асимметрия отрицательна ($\alpha < 0$). Для распределений, в которых $M_x = et$, коэффициент $\alpha = 0$.

Точность оборудования зависит от точности изготовления деталей. Показатель точности станка Y_Σ связан с размерами деталей линейной функцией (2.7). Он задается техническими требованиями и является исходным для расчета допусков, поэтому размер $Y_\Sigma \equiv Y_\Delta$ называют также исходным размером. При сборке станка размер Y_Δ формируется последним, поэтому его называют иногда конечным или замыкающим размером. На рис. 2.14 в виде примера приведен график распределения отклонений исходного размера Y_Δ . По горизонтальной оси отложены значения случайной величины Y_Δ , а по вертикальной – плотности вероятностей этой величины.

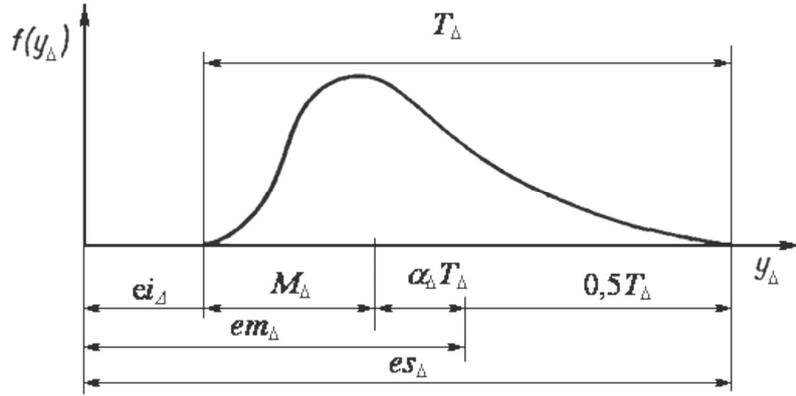


Рис. 2.14. Расчетная схема параметров распределения

Подставив математическое ожидание (2.11) в уравнение (2.7), получим:

$$em_{\Delta} + \alpha_{\Delta} T_{\Delta} = \sum_i \xi_i (em_i + \alpha_i T_i).$$

Откуда среднее отклонение исходного размера можно рассчитать по формуле

$$em_{\Delta} = \sum_i \xi_i (em_i + \alpha_i T_i) - \alpha_{\Delta} T_{\Delta}. \quad (2.13)$$

Подставив (2.12) в уравнение (2.10), получим:

$$\frac{1}{36} K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 = \sum_i \frac{1}{36} \xi_i^2 K_i^2 T_i^2 + 2 \sum_{i < j} \xi_i \xi_j r_{ij} \frac{1}{6} K_i T_i \frac{1}{6} K_j T_j.$$

Откуда выразим допуск замыкающего размера:

$$T_{\Delta} = \frac{1}{K_{\Delta}} \sqrt{\sum_i \xi_i^2 K_i^2 T_i^2 + 2 \sum_{i < j} \xi_i \xi_j r_{ij} K_i K_j T_i T_j}. \quad (2.14)$$

При отсутствии корреляции между случайными величинами получим:

$$T_{\Delta} = \frac{1}{K_{\Delta}} \sqrt{\sum_i \xi_i^2 K_i^2 T_i^2}, \quad (2.15)$$

где em_i и T_i – среднее отклонение и допуск влияющего i -го размера; α_i и K_i – коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеивания i -го влияющего размера; ξ_i и ξ_j – коэффициенты приведения; r_{ij} – коэффициент корреляции; em_{Δ} и T_{Δ} – среднее отклонение и

допуск замыкающего размера; α_Δ и K_Δ – коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеивания замыкающего размера.

Приближенные значения коэффициентов α_Δ и K_Δ вычисляют по следующим формулам:

$$\alpha_\Delta = \frac{0,29 \sum_i \xi_i \alpha_i T_i}{\sum_i |\xi_i| T_i}; \quad (2.16)$$

$$K_\Delta = 1 + \frac{0,55}{\sum_i |\xi_i| T_i} \left(\sqrt{\sum_i \xi_i^2 K_i^2 T_i^2} - \sqrt{\sum_i \xi_i^2 T_i^2} \right). \quad (2.17)$$

Точность коэффициентов α_Δ и K_Δ , определяемых по этим формулам, для практических расчетов вполне достаточна. Если необходимо, то более точные значения этих коэффициентов определяют по результатам компонирования функций $f(y_i)$ плотности вероятностей влияющих размеров. Эти функции попарно компонируют (обычно на ЭВМ) и получают в итоге функцию $f(y_\Delta)$ плотности вероятностей конечного размера.

На рис. 2.15 приведен в качестве примера график функции плотности вероятностей, построенный по результатам машинного компонирования функций влияющих размеров.

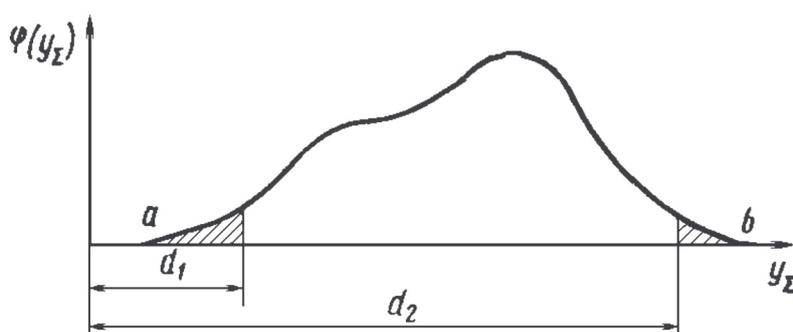


Рис. 2.15. График функции плотности вероятности

Коэффициенты α_Δ и K_Δ определяют по соотношениям:

$$\alpha_\Delta = \frac{M_\Delta - em_\Delta}{T_\Delta}; \quad K_\Delta = \frac{6\sigma_\Delta}{T_\Delta},$$

где $em_\Delta = 0,5(d_2 + d_1)$; $T_\Delta = d_2 - d_1$.

Величины d_1 и d_2 фиксируют для определенного значения 2β , которым заранее задаются; обычно принимают $2\beta = 0,0027$.

Значения M_Δ и σ_Δ вычисляют на ЭВМ по соотношениям:

$$M_\Delta = \sum_i^n Y_{\Delta i} P_i \text{ и } \sigma_\Delta = \sqrt{\sum_i^n (Y_{\Delta i} - M_\Delta)^2 P_i}, \quad (2.18)$$

где $Y_{\Delta i}$ – значения случайной величины Y_Δ ; P_i – статистические вероятности значений $Y_{\Delta i}$.

По формулам (2.18) суммируют значения случайной величины Y_Δ во всем диапазоне рассеивания от a до b .

При рассеивании исходного размера по закону Гаусса (или близкому к нему) значение коэффициента $K_\Delta = 1$ соответствует 0,27 % выхода исходного размера за пределы поля допуска. Если для каких-либо конкретных условий возможен процент выхода, отличный от 0,27 %, то принимают одно из следующих значений K_Δ (для закона Гаусса):

Процент риска	0,02	0,05	0,1	0,2	0,27	0,5	1,0	1,5
K_Δ	0,81	0,86	0,91	0,97	1,00	1,06	1,16	1,23
Процент риска	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0	
K_Δ	1,29	1,38	1,46	1,52	1,60	1,71	1,82	

2.6.2. Моделирование размерных связей скалярных величин

Математическое ожидание функции (2.7) $M_{Y_\Sigma} = \sum_i \xi_i M_{Y_i}$. Заменяя M_{Y_i} другими числовыми характеристиками, получим:

$$M_\Sigma = \sum_i \xi_i (em_i + \alpha_i T_i). \quad (2.19)$$

Дисперсия функции (2.7): $D_{Y_\Sigma} = \sum_i \xi_i^2 D_{Y_i} + 2 \sum_{i < j} \xi_i \xi_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j$.

Заменяем дисперсии их выражениями:

$$K_\Sigma^2 T_\Sigma^2 = \sum_i \xi_i^2 K_i^2 T_i^2 + 2 \sum_{i < j} \xi_i \xi_j r_{ij} K_i K_j T_i T_j. \quad (2.20)$$

При отсутствии корреляции между случайными величинами $r_{ij} = 0$ и

$$K_\Sigma^2 T_\Sigma^2 = \sum_i \xi_i^2 K_i^2 T_i^2. \quad (2.21)$$

2.6.3. Моделирование размерных связей векторных величин

Аргументами функции (2.3), наряду с другими, могут быть погрешности, имеющие случайную величину и направление. Встречаются также случаи, когда все аргументы функции – векторные величины.

Рассмотрим первоначально случай, когда в расчетной схеме кроме векторных имеются и другие виды ошибок.

На рис. 2.16 показан торец втулки, в которой оси отверстия и наружной поверхности смещены.

Если необходимо оценить погрешность в направлении Oy конечного размера, то в расчет принимают величину Y – проекцию ошибки T_x на направление Oy .

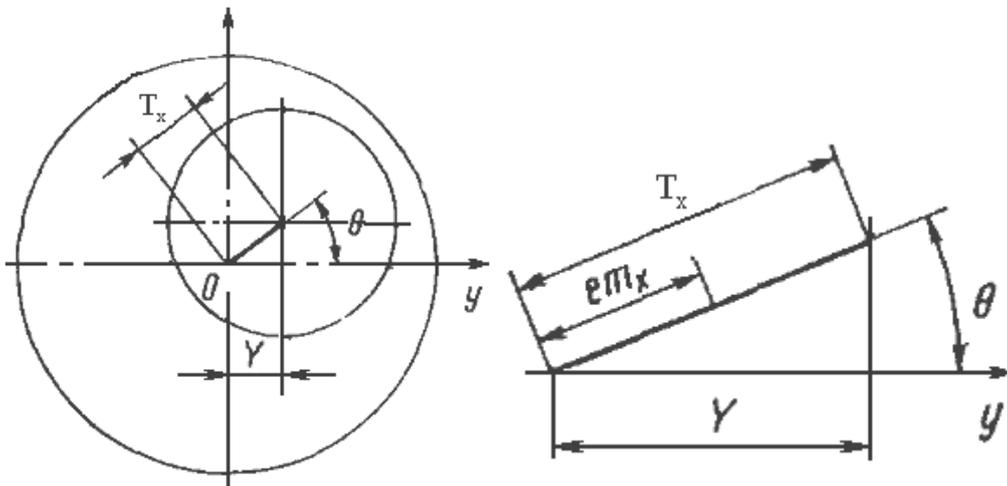


Рис. 2.16. Размерный анализ втулки

Уравнение функциональной зависимости имеет вид:

$$Y = T_x \cdot \cos \theta, \quad (2.22)$$

где T_x и θ – случайные величины – соответственно, модуль и аргумент вектора.

Величины T_x и θ независимые. Тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y (табл. 2.2, п. 7):

$$M_y = M_{T_x} M(\cos \theta);$$

$$D_Y = D_{T_x} D(\cos \theta) + D_{T_x} (M(\cos \theta))^2 + D(\cos \theta) (M_{T_x})^2. \quad (2.23)$$

При угле θ , изменяющемся равномерно в пределах от 0 до 2π или от 0 до π , $M(\cos\theta) = 0$ и $D(\cos\theta) = 0,5$. С учетом этого получим:

$$M_y = 0; D_y = 0,5(D_{T_x} + (M_{T_x})^2), \text{ но}$$

$$D_{T_x} = \frac{1}{36}K_x^2T_x^2; M_{T_x} = em_x + \alpha_x T_x.$$

Кроме того, для векторных ошибок $em_x = 0,5T_x$.

Тогда после подстановки найдем:

$$K_{vy}^2 T_{vy}^2 = 0,5(K_x^2 + 36(0,5 + \alpha_x)^2)T_x^2 = K_{vx}^2 T_{vx}^2,$$

здесь T_{vy} – биение (удвоенное смещение осей); T_{vx} – модуль вектора – смещение осей ($\frac{1}{2}$ биения).

Для получения T_y в виде смещения осей уменьшим в два раза коэффициент K_v . Тогда $K_y^2 T_y^2 = K_v^2 T_v^2$, где

$$K_v^2 = 0,125[K_x^2 + 36(0,5 + \alpha_x)^2].$$

Для суммы векторных величин с учетом коэффициента приведения найдем:

$$K_{\Sigma v}^2 T_{\Sigma v}^2 = \sum_i \xi_{vi}^2 K_{vi}^2 T_{vi}^2. \quad (2.24)$$

Поскольку в зависимости (2.24) векторные величины представлены в виде смещения осей, то законы их распределения, например, нормальный (рис. 2.17, а) или Симпсона (рис. 2.17, б), относят не ко всему полю рассеивания, а только к его половине.

Приведенный коэффициент относительного рассеивания при распределении модуля вектора по этим законам колеблется в пределах $K_v = 0,7 \dots 0,9$. Для проектных расчетов можно принимать $K_v = 0,75$. Тогда окончательно для случая, когда в расчетной схеме кроме векторных имеются другие виды ошибок:

$$K_{\Sigma v}^2 T_{\Sigma v}^2 = 0,75^2 \sum_i \xi_{vi}^2 T_{vi}^2. \quad (2.25)$$

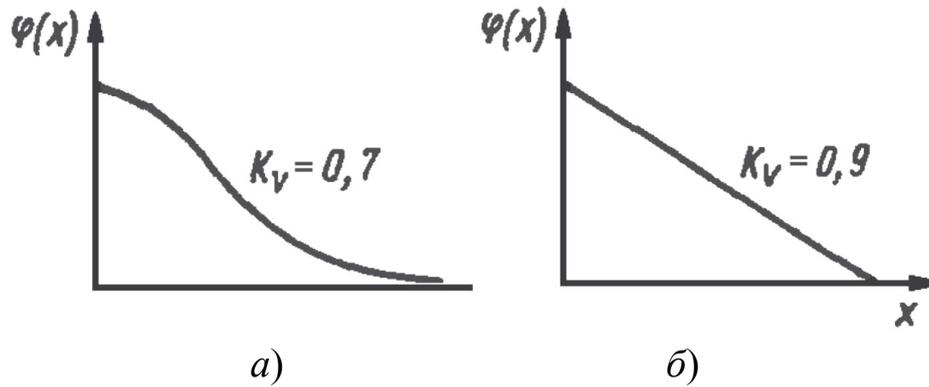


Рис. 2.17. Законы распределения векторных величин:
a – закон Гаусса; *б* – закон Симпсона

Если расчетная схема содержит только векторные величины, то при проектных расчетах суммарный вектор определяют по формуле

$$T_{\Sigma v} = 0,85 \sqrt{\sum_i \xi_{vi}^2 T_{vi}^2}, \quad (2.26)$$

где коэффициент перед корнем получен по опытным данным.

Коэффициенты 0,75 и 0,85 соответствуют проценту риска $2\beta = 0,27\%$. Если брать $2\beta \neq 0,27\%$, то коэффициенты 0,75 и 0,85 умножают на коэффициент C_0 , который принимают по следующим данным:

$2\beta, \%$	0,05	0,10	0,20	0,27	0,50	1,00	2,00	3,00	5,00
C_0	1,13	1,07	1,02	1,00	0,95	0,89	0,81	0,77	0,71.

В формулах (2.25), (2.26) T_i – допуск модуля влияющего вектора; $T_{\Sigma v}$ – то же, для исходного (суммарного) вектора.

2.6.4. Моделирование размерных связей функционально зависимых величин

С одной случайной величиной x могут быть функционально связаны m аргументов, т. е. $Y_1 = \varphi_1(x)$, $Y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $Y_m = \varphi_m(x)$. С учетом коэффициентов приведения можно записать:

$$\xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \dots + \xi_m Y_m = \xi_1 \varphi_1(x) + \xi_2 \varphi_2(x) + \dots + \xi_m \varphi_m(x),$$

или

$$\sum_i \xi_i Y_i = \sum_i \xi_i \varphi_i(x).$$

Функция (2.7) в общем случае может содержать несколько групп аргументов, функционально зависимых от x . Будем отличать их порядковыми номерами в виде индекса j от $j = 1$ до $j = l$.

Тогда в более общем виде $\sum_j^l \sum_i^m \xi_{ij} Y_{ij} = \sum_j^l \sum_i^m \xi_{ij} \varphi_i(x_j)$. Примем

для функционально зависимых величин индекс f . Тогда математическое ожидание и дисперсия:

$$M_{\Sigma f} = \sum_j^l \sum_i^m \xi_i M[\varphi_i(x_j)]; \quad D_{\Sigma f} = \sum_j^l \sum_i^m \xi_i^2 D[\varphi_i(x_j)]. \quad (2.27)$$

Функция $\varphi_i(x_j)$ в общем случае может иметь любой вид. Для определения математического ожидания и дисперсии этой функции ее предварительно линеаризируют.

В практике расчета допусков изделий машиностроения в основном встречаются линейные функции. К ним относятся, например, функции, учитывающие силовые и температурные деформации деталей.

Функция связи для этих случаев имеет вид $Y_i = a_i x$. Математическое ожидание и дисперсия этой функции:

$$M_{Y_i} = a_i M_x = a_i (em_x + \alpha_x T_x);$$

$$D_{Y_i} = a_i^2 D_x \quad \text{или} \quad K_{Y_i}^2 T_{Y_i}^2 = a_i^2 K_{x_i}^2 T_{x_i}^2.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (2.27), найдем:

$$M_{\Sigma f} = \sum_j^l \left((em_{x_j} + \alpha_{x_j} T_{x_j}) \left(\xi_{x_j} + \sum_i^m \xi_i a_i \right) \right); \quad (2.28)$$

$$K_{\Sigma f}^2 T_{\Sigma f}^2 = \sum_j^l \left(K_{x_j}^2 T_{x_j}^2 \left(\xi_{x_j}^2 + \sum_i^m \xi_i^2 a_i^2 \right) \right). \quad (2.29)$$

Под знаком суммы \sum_i^m располагаются коэффициенты зависимых величин.

Если функция (2.7) содержит только одну группу аргументов, функционально зависимых от x , то $l = 1$; тогда:

$$M_{\Sigma f} = \left(em_x + \alpha_x \frac{T_x}{2} \right) \left(\xi_x + \sum_i^m \xi_i a_i \right); \quad (2.30)$$

$$K_{\Sigma f}^2 T_{\Sigma f}^2 = K_x^2 T_x^2 \left(\xi_x^2 + \sum_i^m \xi_i^2 a_i^2 \right). \quad (2.31)$$

Если только один аргумент функционально связан с x , то $m = 1$, и тогда:

$$M_{\Sigma f} = \left(em_x + \alpha_x \frac{T_x}{2} \right) (\xi_x + a\xi); \quad (2.32)$$

$$K_{\Sigma f}^2 T_{\Sigma f}^2 = K_x^2 T_x^2 (\xi_x^2 + \xi^2 a^2). \quad (2.33)$$

2.6.5. Моделирование размерных связей сопряжений деталей с зазором

Примем для сопряжений с зазором индекс z . Сопряжения деталей с зазором часто встречаются в изделиях машиностроения. Это сопряжения не только цилиндрических поверхностей типа отверстие–вал, но и плоских типа паз–выступ. Наличие зазоров создает возможность относительного смещения как деталей, образующих сопряжение, так и других смежных с ними деталей. Это в конечном итоге может приводить к нарушению точности относительного положения деталей, определяющих качество изделия.

По характеру относительного расположения деталей в поле зазора можно выделить следующие основные случаи:

- зазоры полностью выбираются в одном направлении;
- зазоры полностью выбираются так, что детали соприкасаются равновероятно в любой точке окружности;
- зазоры, в пределах которых сопряженные детали могут занимать любое относительное положение.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Зазоры полностью выбираются в одном направлении. Зазоры могут быть полностью выбраны при относительном смещении деталей в одну сторону под действием веса, давления пружины, давления винта и т. д. или при нереверсивном движении механизмов.

Зазоры, полностью выбираемые попеременно в одну и другую сторону, встречаются главным образом в кинематических цепях при реверсивном движении механизмов. При изменении направления

движения меняют свое направление силы трения и инерции. Это приводит к тому, что детали сопряжения смещаются попеременно то в одну, то в другую сторону. При этом влияние зазоров на точность исходного размера оказывается максимальным. В связи с этим, когда нет уверенности в действительном характере выборки зазора, необходимо за расчетную принять схему, при которой зазоры полностью выбираются попеременно то в одну, то в другую сторону.

На рис. 2.18 приведена схема сопряжения вала с отверстием, где зазор выбран в одну сторону.

Смещение осей сопряженных поверхностей $Z = 0,5(X_a - X_b)$, где X_a и X_b – случайные величины диаметра, соответственно, отверстия и вала; Z – случайная величина – смещение осей сопряженных поверхностей.

Математическое ожидание смещения осей $M_z = 0,5(M_{xa} - M_{xb})$. Заменяя математические ожидания другими характеристиками, получим:

$$M_z = 0,5((d_a + em_a + \alpha_a T_a) - (d_b + em_b + \alpha_b T_b)).$$

Дисперсия смещения осей $D_z = \frac{1}{4}(D_{xa} + D_{xb})$. Заменяя дисперсии другими характеристиками, найдем:

$$\frac{1}{36} K_z^2 T_z^2 = \frac{1}{4 \cdot 36} (K_a^2 T_a^2 + K_b^2 T_b^2),$$

или

$$K_z^2 T_z^2 = \frac{1}{4} (K_a^2 T_a^2 + K_b^2 T_b^2).$$

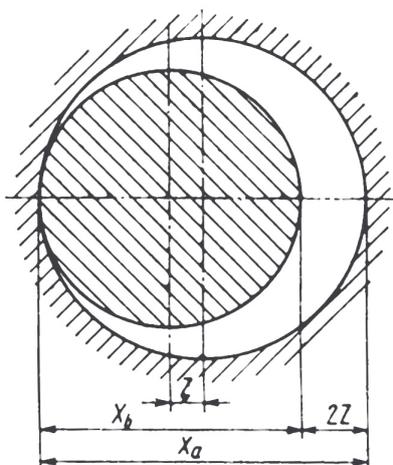


Рис. 2.18. Схема к расчету соединения с односторонним зазором

В расчетной схеме может быть несколько сопряжений с зазором. Направление линии смещения осей в общем случае составляет с линией исходного (конечного) размера угол θ .

Тогда, после введения коэффициента приведения, получим:

$$M_{\Sigma z} = \frac{1}{2} \sum_z |\xi_z| \cos \theta_z ((d_a - d_b) + (em_a - em_b) + (\alpha_a T_a - \alpha_b T_b)); \quad (2.34)$$

$$K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \frac{1}{4} \sum_z \xi_z^2 \cos^2 \theta_z (K_a^2 T_a^2 + K_b^2 T_b^2). \quad (2.35)$$

В этих формулах em_a и em_b – средние отклонения размеров отверстия и вала; T_a и T_b – допуски этих размеров; K_a , K_b , α_a и α_b – коэффициенты рассеивания; d_a и d_b – номинальные значения диаметров отверстия и вала.

При совпадении направлений линии смещения осей и линии конечного размера $\theta = 0$ и $\cos \theta = 1,0$. Часто $d_a = d_b$, тогда в формуле (2.34) разность $d_a - d_b$ обращается в нуль.

Зазоры полностью выбираются так, что детали соприкасаются равновероятно в любой точке окружности.

На рис. 2.19 показано одно из возможных положений деталей. Смещение, совпадающее с направлением исходного размера (осью Oy), $Y = Z \cdot \cos \theta$. Считаем, что угол θ распределен равновероятно в пределах от 0 до 2π . Для этих условий $M(\cos \theta) = 0$ и $D(\cos \theta) = 0,5$.

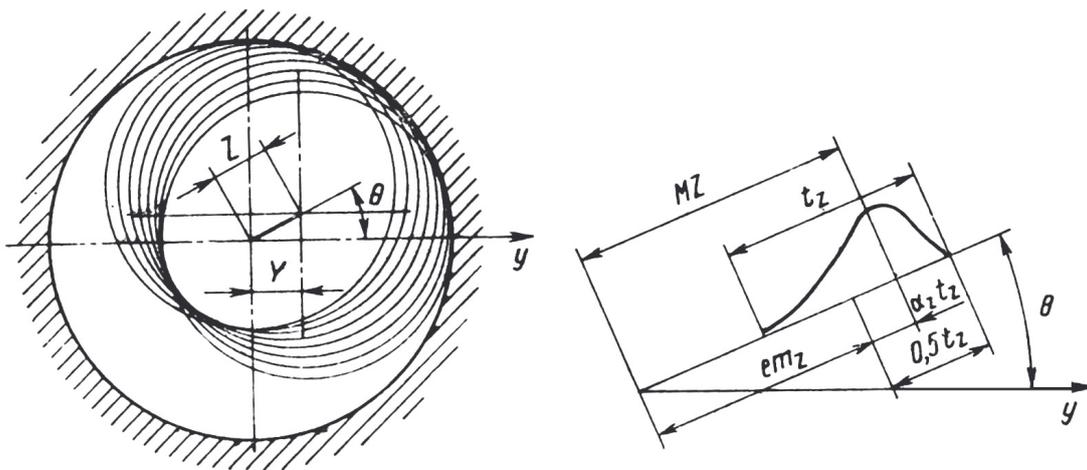


Рис. 2.19. Схема к расчету соединения с равновероятностным зазором

Тогда математическое ожидание и дисперсия величины Y : $M_Y = 0$; $D_Y = 0,5(D_z + M_z^2)$. Математическое ожидание и дисперсия зазора:

$$M_z = em_z + \alpha_z T_z = T_z \left(\frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right);$$

$$D_z = \frac{1}{36} K_z^2 T_z^2.$$

$$\text{Тогда } D_Y = 0,5 \left(\frac{1}{36} K_z^2 T_z^2 + T_z^2 \left(\frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right).$$

Полагая, что $D_Y = \frac{1}{36} K_y^2 T_y^2$, получим:

$$K_y^2 T_y^2 = 0,5 \left[K_z^2 + 36 \left(\frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right] T_z^2.$$

В расчетной схеме может быть несколько таких сопряжений. Введя коэффициент приведения, окончательно получим:

$$M_{\Sigma z} = 0; K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \sum_z \xi_z^2 K_{xz}^2 T_z^2, \quad (2.36)$$

где K_{xz} – приведенный коэффициент относительного рассеивания,

$$K_{xz}^2 = 0,5 \left[K_z^2 + 36 \left(\frac{em_z}{T_z} + \alpha_z \right)^2 \right]. \quad (2.37)$$

Значения em_z и T_z вычисляют по формулам:

$$em_z = \frac{1}{2} ((d_a - d_b) + (em_a - em_b) + (\alpha_a T_a + \alpha_b T_b)) - \alpha_z T_z; \quad (2.38)$$

$$T_z = \frac{1}{2K_z} \sqrt{K_a^2 T_a^2 + K_b^2 T_b^2}. \quad (2.39)$$

Распределение зазора Z обычно близко к нормальному, поэтому для практических расчетов принимают $\alpha_z = 0$; $K_z = 1,0$ и

$$K_{xz}^2 = 0,5 \left[1 + 36 \left(\frac{em_z}{T_z} \right)^2 \right]. \quad (2.40)$$

Зазоры, в пределах которых сопряженные детали могут занимать любое относительное положение. Возможны два варианта.

Вариант 1. Детали занимают относительное положение в поле зазора на линии, совпадающей с направлением исходного размера или расположенной по отношению к нему под некоторым постоянным углом.

Пусть имеем функцию $\varphi_1(z)$ плотности вероятности радиально-го зазора и функцию $\varphi_2(y)$ плотности вероятности положения вала в отверстии по оси y (рис. 2.20). Требуется определить функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ плотности условных вероятностей положения вала в отверстии по оси $x = y$. Для схемы на рис. 2.20, а $\varphi_3(x) = \varphi_2(y)$ при $x = \overline{0, a}$ и $\varphi_4(x) = \varphi_2(y) \int_a^b \varphi_1(z) dz$ при $x = \overline{a, b}$.

В практике машиностроения наиболее часто встречаются законы распределения случайных величин – равновероятный и Гаусса.

Пусть функции $\varphi_1(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - M_z)^2}{2\sigma_z^2}\right]$, а функция $\varphi_2(y) = \frac{1}{b}$ – равновероятная (рис. 2.20, б). Тогда $\varphi_3(x) = \varphi_2(y) = \frac{1}{b}$;

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{b\sigma_z \sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^b \exp\left[-\frac{(z - M_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz.$$

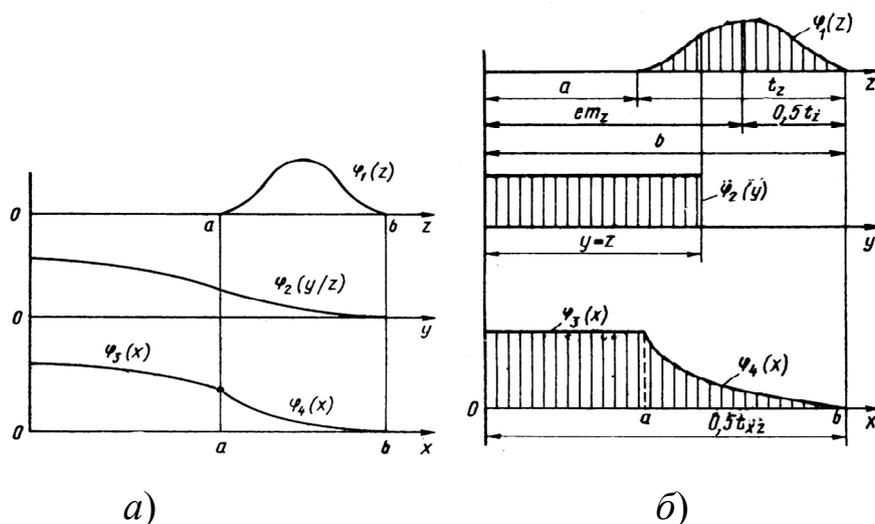


Рис. 2.20. Схемы к расчету соединения с различными законами распределения зазора и положения вала:
 а – функции распределения; б – схемы компонирования законов распределения

При симметричном смещении вала в обе стороны $M_x = 0$, и дисперсия величины x :

$$D_x = 2 \int_0^a x^2 \varphi_3(x) dx + 2 \int_a^b x^2 \varphi_4(x) dx.$$

Приведенный коэффициент относительного рассеивания:
 $K_{xz} = 3 \sqrt{D_x} \frac{1}{b}.$

По результатам вычислений на ЭВМ для приведенных сочетаний функций построен график (рис. 2.21, а) для определения коэффициента K_{xz} .

Если зазор выбирается под углом θ к направлению исходного размера, то коэффициент приведения ξ_z умножают на $\cos \theta$.

Вариант 2. Детали занимают любое относительное положение в пределах зазора. Положим, что зазор выбирается по направлению оси x , которая относительно интересующего нас направления u может занимать равновероятное положение по углу θ от 0 до 2π . В этом случае $u = x \cdot \cos \theta$ (рис. 2.21, б). Так как величины x и $\cos \theta$ независимы, то $M_u = M_x M(\cos \theta)$. Но $M(\cos \theta) = 0$; тогда $M_u = 0$.

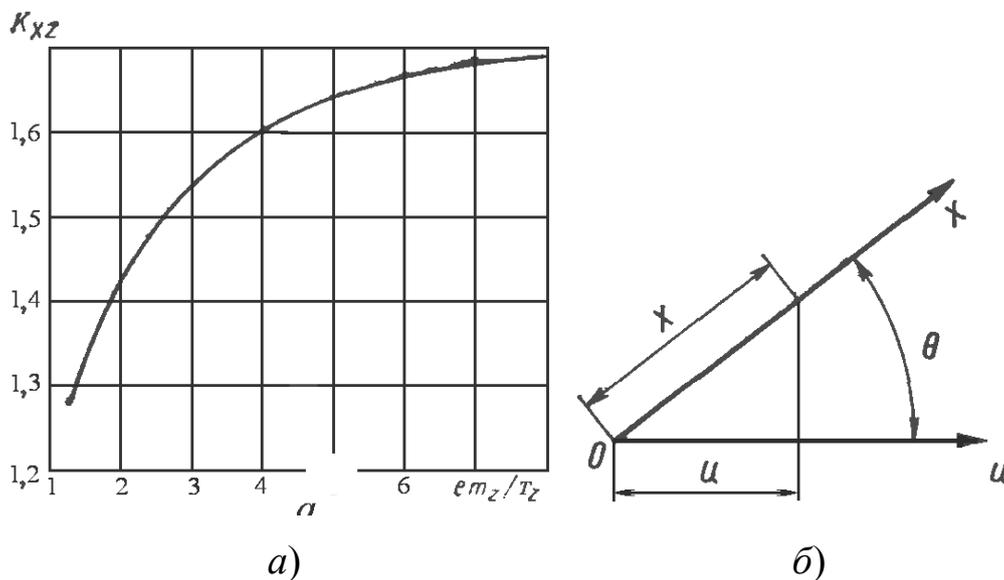


Рис. 2.21. Схемы к расчету параметров распределения:

а – графическая зависимость $K_{xz} = f \frac{em}{T_z}$; б – схема связи параметров

Дисперсия произведения двух независимых величин:

$$D_u = D_x D(\cos \theta) + D_x \left[M(\cos \theta)^2 \right] + D(\cos \theta) M,$$

но $M(\cos \theta) = 0$, а $D(\cos \theta) = 0,5$; тогда $D_u = 0,5D_x + 0,5M_x^2$. Как и ранее, $M_x = 0$. Следовательно, $D_u = 0,5D_x$ и $K_u^2 = 0,5K_{xz}^2$, или $K_u \approx 0,7K_{xz}$.

Таким образом, если в расчетной схеме имеются сопряжения с зазором, а относительное смещение деталей происходит по линии, совпадающей с направлением исходного размера или расположенной по отношению к нему под некоторым постоянным углом, то расчет производят по формулам:

$$M_x = 0; K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \sum_z \xi_z^2 K_{xz}^2 T_{xz}^2, \quad (2.41)$$

здесь коэффициент K_{xz} принимают по графику (рис. 2.21).

$$T_{xz} = 2em_z + T_z, \quad (2.42)$$

где $2em_z$ и T_z вычисляют по формулам (2.38) и (2.39).

Если сопряженные детали могут занимать любое относительное положение в пределах зазора, то вместо коэффициента K_{xz} в формулу (2.41) подставляют коэффициент K_u .

Относительное смещение вала и отверстия в поле зазора с учетом погрешностей размеров и формы. Сопряженные вал и отверстие могут иметь погрешности не только размеров, но и формы. Относительное смещение вала и отверстия определяют по формулам (2.38) и (2.39), в которые входят коэффициенты α_a, K_a , относящиеся к отверстию, и α_b, K_b , относящиеся к валу. Для практических целей удобно сохранить эти формулы без изменений, а погрешности формы учитывать приведенными коэффициентами $\alpha'_a, \alpha'_b, K'_a, K'_b$.

Для вывода формул допустим, что поперечные сечения отверстия и вала представляют собой эллипс или близкую к нему фигуру. Эллипс имеет большую и малую оси, размеры которых можно условно назвать большим и малым диаметром отверстия или вала. Разность диаметров является погрешностью формы детали в данном сечении, поля рассеивания большого и малого диаметров – погрешностями размеров.

Примем следующие условия:

1. Допуски размеров вала и отверстия заданы.

2. Величина погрешности формы составляет некоторую долю допуска размера. Известны среднее отклонение em_{ϕ} и допуск формы T_{ϕ} .

3. Известны коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеивания погрешностей размера и формы ($\alpha, K, \alpha_{\phi}, K_{\phi}$).

4. Номинальные размеры отверстия d_a и вала d_b равны.

Примем в качестве размеров вала и отверстия длину малой оси эллипса.

Введем обозначения величин, относящихся к отверстию (рис. 2.22), приняв номинальное значение отверстия d_a за начало координат: X_a – случайная величина погрешности размера; \bar{X}_a – математическое ожидание этой величины; em_a, T_a, α_a, K_a – характеристики рассеивания случайной величины X_a ; $Y_{\phi a}$ – случайная величина погрешностей формы; $\bar{Y}_{\phi a}, em_{\phi a}, T_{\phi a}, \alpha_{\phi a}, K_{\phi a}$ – характеристики рассеивания этой случайной величины; d_a – случайная величина погрешности текущего размера эллипса, т. е. разность между номиналом и любым диаметром эллипса; $\bar{d}_a, em_{0a}, T_{0a}, \alpha_{0a}, K_{0a}$ – характеристики рассеивания этой случайной величины; r_a – коэффициент корреляции между погрешностями размера и формы отверстия.

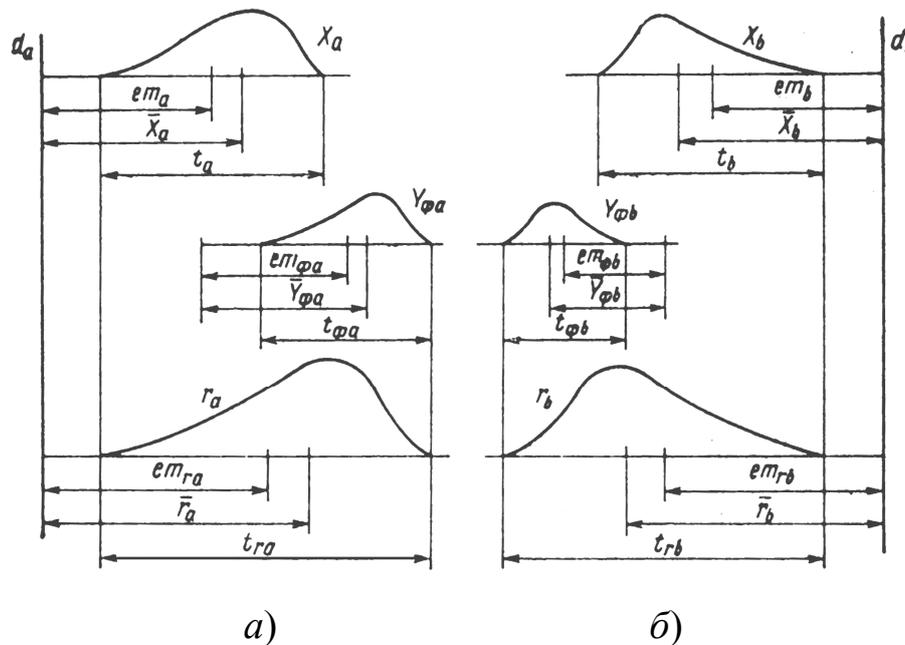


Рис. 2.22. Схема к расчету соединения с зазором с учетом погрешностей формы:
 а – для отверстия; б – для вала

Для вала примем такие же обозначения, но с индексом b .
 Смещение осей вала и отверстия в направлении оси x (рис. 2.23):

$$Z = \frac{1}{2} \left((X_a + Y_{\phi a} \cdot \cos \theta_a) - (X_b + Y_{\phi b} \cdot \cos \theta_b) \right).$$

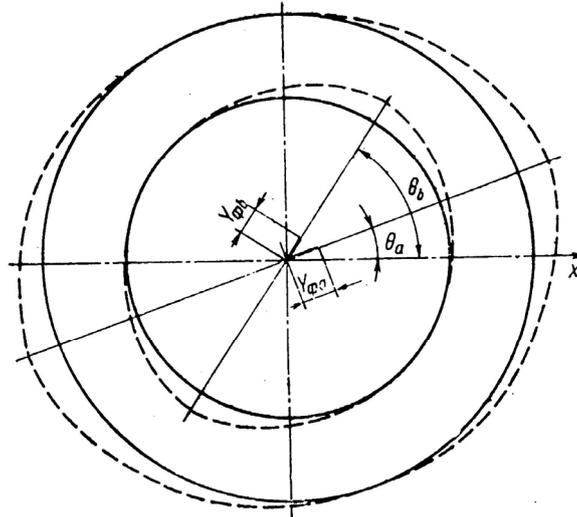


Рис. 2.23. Схема к расчету соединения с однонаправленным зазором с учетом погрешностей формы

Среднее значение Z :

$$M_z = \frac{1}{2} \left(M_{X_a} + M(Y_{\phi a} \cdot \cos \theta_a) - M_{X_b} - M(Y_{\phi b} \cdot \cos \theta_b) \right).$$

Так как $M(Y \cdot \cos \theta) = M_y M(\cos \theta)$, то

$$M_z = \frac{1}{2} \left(M_{X_a} + M_{Y_{\phi a}} M(\cos \theta_a) - M_{X_b} - M_{Y_{\phi b}} M(\cos \theta_b) \right).$$

При равновероятном изменении угла θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$M(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$. В других четвертях окружности будет изменяться только знак $M(\cos \theta)$.

Заменив $M = em + \alpha T$, получим:

$$M_z = \frac{1}{2} \left\{ (em_{0a} - em_{0b}) + \left[\alpha_a T_a + 0,64 (em_{\phi a} + \alpha_{\phi a} T_{\phi a}) \right] - \left[\alpha_b T_b + 0,64 (em_{\phi b} + \alpha_{\phi b} T_{\phi b}) \right] \right\}.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\alpha'_a &= \alpha_a + 0,64 \left(\frac{T_{\phi a}}{T_a} \right) \left(\frac{em_{\phi a}}{T_{\phi a}} + \alpha_{\phi a} \right); \\ \alpha'_b &= \alpha_b + 0,64 \left(\frac{T_{\phi b}}{T_b} \right) \left(\frac{em_{\phi b}}{T_{\phi b}} + \alpha_{\phi b} \right),\end{aligned}\tag{2.43}$$

где α'_a и α'_b – приведенные коэффициенты относительной асимметрии рассеивания размеров отверстия и вала.

Дисперсию случайной величины Z определим, полагая, что случайные величины размера и формы коррелированы:

$$\begin{aligned}D_z &= \frac{1}{4} \left[D(X_a) + D(Y_{\phi a} \cdot \cos \theta_a) + D(X_b) + D(Y_{\phi b} \cdot \cos \theta_b) + \right. \\ &\quad \left. + 2r_a \sigma_a \sigma_{\phi a} + 2r_b \sigma_b \sigma_{\phi b} \right].\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно $D(Y \cdot \cos \theta)$. При равновероятном изменении угла θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$: $D(Y \cdot \cos \theta) = 0,5D_y + 0,095M_y^2 \approx 0,5D_y + 0,1M_y^2$.

После подстановки в исходное выражение получим:

$$\begin{aligned}D_z &= \frac{1}{4} \left[D(X_a) + 0,5D_{\phi a} + 0,1M_{\phi a}^2 + D(X_b) + 0,5D_{\phi b} + \right. \\ &\quad \left. + 0,1M_{\phi b}^2 + 2r_a \sigma_a \sigma_{\phi a} + 2r_b \sigma_b \sigma_{\phi b} \right].\end{aligned}$$

Заменив дисперсию, $D = \frac{1}{36} K^2 T^2$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = \frac{1}{6} KT$ и математическое ожидание $M = em + \alpha T$, после подстановки и преобразований получим:

$$K_z^2 T_z^2 = \frac{1}{4} \left[(K'_a)^2 T_a^2 + (K'_b)^2 T_b^2 \right],$$

где K'_a и K'_b – приведенные коэффициенты относительного рассеивания, определяемые по формулам:

$$(K'_a)^2 = K_a^2 + \left(\frac{T_{\phi a}}{T_a}\right)^2 \left[0,5K_{\phi a}^2 + 3,6 \left(\frac{em_{\phi a}}{T_{\phi a}} + \alpha_{\phi a} \right)^2 \right] + 2r_a K_a K_{\phi a} \left(\frac{T_{\phi a}}{T_a} \right);$$

$$(K'_b)^2 = K_b^2 + \left(\frac{T_{\phi b}}{T_b}\right)^2 \left[0,5K_{\phi b}^2 + 3,6 \left(\frac{em_{\phi b}}{T_{\phi b}} + \alpha_{\phi b} \right)^2 \right] + 2r_b K_b K_{\phi b} \left(\frac{T_{\phi b}}{T_b} \right). \quad (2.44)$$

Пример. Определить параметры смещения осей вала и отверстия в поле зазора с учетом погрешностей размера и формы для сопряжения $\varnothing 60H11/d11$ со следующими характеристиками: $\varnothing 60H11 = \varnothing 600,19$ мм; $\varnothing 60d11 = \varnothing 60_{-0,29}^{0,1}$ мм; $em_a = 0,095$ мм; $T_a = 19$ мм; $\alpha_a = -0,1$; $K_a = 1,2$; $em_{a\phi} = 0,05$ мм; $T_{\phi a} = 0,1$ мм; $\alpha_{\phi a} = -0,5$; $K_{\phi a} = 1,2$; $r_a = 0,4$; $em_b = -0,195$ мм; $T_b = 0,19$ мм; $\alpha_b = 0,05$; $K_b = 1,2$; $em_{\phi b} = 0,05$ мм; $K_{\phi b} = 1,2$; $r_b = 0,4$.

Приведенные коэффициенты относительной асимметрии и относительного рассеивания (2.43) и (2.44):

$$\alpha'_a = -0,1 + 0,64 \left(\frac{0,1}{0,19} \right) \left(\frac{0,05}{0,1} - \frac{0,05}{2} \right) = 0,05;$$

$$\alpha'_b = -0,05 + 0,64 \left(\frac{0,1}{0,19} \right) \left(\frac{0,05}{0,1} + \frac{0,05}{2} \right) = 0,235.$$

$$(K'_a)^2 = 1,2^2 + \left(\frac{0,1}{0,19} \right)^2 \left[0,5 \cdot 1,2^2 + 3,6 \left(\frac{0,05}{0,1} - \frac{0,05}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \frac{0,1}{0,19} = 2,47;$$

$$(K'_b)^2 = 1,2^2 + \left(\frac{0,1}{0,19} \right)^2 \left[0,5 \cdot 1,2^2 + 3,6 \left(\frac{0,05}{0,1} + \frac{0,05}{2} \right)^2 \right] + 2 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \frac{0,1}{0,19} = 2,52.$$

По формулам (2.38) и (2.39) определим среднее смещение осей и характеристику рассеивания:

$$em_{\Sigma z} = \frac{1}{2} \left[(0,095 + 0,195) + (0,05 \cdot 0,19 - 0,235 \cdot 0,19) \right] = 0,127 \text{ мм};$$

$$K_{\Sigma z}^2 T_{\Sigma z}^2 = \frac{1}{4} (2,47 \cdot 0,19^2 + 2,52 \cdot 0,19^2) = 0,045 \text{ мм}^2.$$

2.7. Особенности расчета связанных размерных цепей

В любом оборудовании может быть несколько размерных цепей, причем все они или часть их может иметь общие звенья. Такие размерные цепи называются связанными размерными цепями. По характеру связи их можно разделить на три группы:

а) размерные цепи с одним общим звеном. В одной цепи общее звено является замыкающим, а в другой – составляющим (рис. 2.24, а);

б) размерные цепи с несколькими общими звеньями. Все общие звенья являются составляющими как у первой, так и у второй размерной цепи (рис. 2.24, б);

в) размерные цепи с несколькими общими звеньями, одно из этих звеньев у одной цепи является замыкающим, а у другой – составляющим (рис. 2.24, в).

Связанные размерные цепи первой и второй группы рассчитывают обычным способом, как независимые размерные цепи. Но в первую очередь рассчитывается та размерная цепь, у которой замыкающее звено имеет меньшую величину.

Связанные размерные цепи третьей группы рассчитываются в следующем порядке. В первую очередь рассчитывается та цепь, у которой общее звено является замыкающим. Затем рассчитывается вторая цепь, общие звенья в которой заменяются независимыми звеньями из первой цепи.

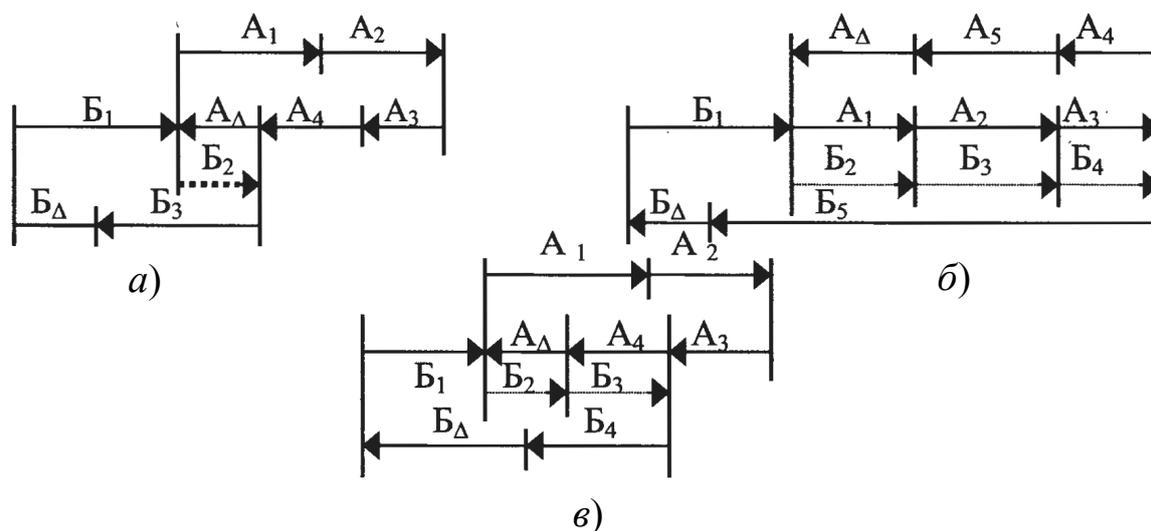


Рис. 2.24. Схемы связанных размерных цепей:

- а – с одним общим звеном; б – с несколькими общими звеньями;
в – с несколькими общими комбинированными звеньями

Определение наличия и количества взаимосвязанных размерных цепей, а также характера их связи непосредственно по чертежу изделия затруднительно. Поэтому рекомендуется пользоваться графическим изображением схем размерных цепей, которые позволяют быстро и надежно определять как наличие связей, так и принадлежность замыкающих звеньев к тем или иным размерным цепям.

Связанные размерные цепи встречаются при решении прямой и обратной задачи. При решении обратной задачи каждая из связанных размерных цепей рассчитывается самостоятельно в любой последовательности. При решении прямой задачи рекомендуется предварительно составить таблицу для всех связанных размерных цепей, в которой необходимо указать обозначение размерной цепи, количество составляющих звеньев, допуски на замыкающие звенья, среднюю величину допуска на составляющие звенья и метод достижения точности замыкающего звена. На основании анализа данных этой таблицы ориентировочно устанавливается, в каких связанных цепях допуски на общие звенья будут наименьшими, и в зависимости от этого намечается очередность расчета размерных цепей.

В процессе выполнения расчетов могут быть внесены изменения, нарушающие принятую очередность их расчета, что потребует пересчета одной или нескольких размерных цепей. Однако составление таблицы в большинстве случаев исключает необходимость в таких пересчетах.

Например, имеется группа связанных размерных цепей, данные которых сведены в табл. 2.4.

На основании анализа величин $T_{\text{ср}}$ можно установить, что ввиду малых значений $T_{\text{ср}}$ для цепей B и E достижение точности замыкающих звеньев для них следует принять по методу пригонки или регулирования. Учитывая назначение и конструкцию сборочной единицы, для цепи B принят метод пригонки, а для цепи E – метод регулирования.

Так как средний допуск для составляющих звеньев размерных цепей G и H достаточно велик, то достижение точности замыкающих звеньев для этих цепей принято по методу взаимозаменяемости. Учитывая, что допуск на замыкающее звено у цепи G является более жестким, чем у цепи H , цепь G должна быть рассчитана в первую очередь, во вторую очередь – цепь H , в третью – цепь B и в четвертую – цепь E .

Цепь E рассчитывается в последнюю очередь, потому что при подвижном компенсаторе можно назначить допуски на составляющие звенья значительно шире, чем при неподвижном компенсаторе, особенно если пригонка будет осуществляться посредством шабрения.

Расчет связанных размерных цепей

Размерная цепь	Число звеньев n	Допуск, мм		Метод достижения точности замыкающего звена	Очередность расчета
		замыкающего звена T_{Δ}	средний составляющих звеньев $T_{срi}$		
<i>Б</i>	8	0,30	0,0375	Пригонка	3
<i>Г</i>	3	0,25	0,083	Полная взаимозаменяемость	1
<i>Е</i>	6	0,10	0,01667	Регулирование	4
<i>И</i>	5	0,40	0,08	Неполная взаимозаменяемость	2

2.8. Моделирование размерных связей элементов привода станка

2.8.1. Цилиндрические зубчатые передачи

Анализ точности межосевого расстояния зубчатой передачи

По ГОСТ 1643–81 и 9178–81 показателями, обеспечивающими гарантированный боковой зазор зубчатых цилиндрических передач с нерегулируемым положением осей, являются предельные верхнее $+f_a$ и нижнее $-f_a$ отклонения межосевого расстояния.

Допуск межосевого расстояния в передаче $T_{\Delta} = 2f_a$ следует рассматривать как допуск расстояния между осями вращения валов в плоскости зубчатых колес. Точность межосевого расстояния определяется точностью расстояния между осями отверстий корпусной детали, отклонением от соосности наружных колец подшипников качения, зазорами между наружными кольцами подшипников и стенками отверстий в корпусе и др.

На рис. 2.25 приведен эскиз зубчатой передачи. Опорами валов передачи являются подшипники качения, установленные наружными кольцами в переходных втулках. Втулки вставлены в отверстия корпуса. Такое конструктивное исполнение позволяет рассмотреть наиболее общий случай и учесть ошибки возможно большего числа деталей зубчатой передачи. В дальнейшем при отсутствии каких-либо деталей, например втулок, соответствующие погрешности из расчетных формул следует исключить.

На рис. 2.25, б приведена расчетная схема, на которой обозначены: $B_{\Delta} = B_{\Sigma}$ – исходный размер – расстояние между осями вращения валов в средней плоскости зубчатых колес; B_1 и B_5 – отклонения от соосности наружных колец подшипников одного вала; B_{10} и B_{14} – отклонения от соосности наружных колец подшипников другого вала; B_2 и B_6 – смещения осей наружных колец подшипников одного вала в пределах посадочного зазора в отверстии корпуса; B_{11} и B_{15} – то же, в отверстии корпуса подшипников другого вала; B_9 – расстояние между осями отверстий корпуса; B_3, B_7, B_{12} и B_{16} – смещения центров дорожек качения внутренних колец подшипников, вызванные наличием зазоров в подшипниках; B_4, B_8, B_{13} и B_{17} – отклонения от соосности наружных и внутренних цилиндрических поверхностей втулок. При наличии осевых сил зазоры в самих подшипниках с той или другой стороны вала выбираются и, следовательно, размеры B_3 и B_{12} или B_7 и B_{16} из расчетной схемы исключаются. Влияющий размер B_9 – скалярная величина. Размеры $B_1, B_4, B_5, B_8, B_{10}, B_{13}, B_{14}$ и B_{17} – векторные величины. Размеры B_2, B_6, B_{11}, B_{15} , а также B_3 и B_{12} или B_7 и B_{16} относятся к сопряжениям с зазорами, полностью выбираемыми в определенном направлении действующими на опоры валов силами.

Влияние отклонений от соосности колец подшипников и втулок на межосевое расстояние зависит от расположения передачи относительно опор. Коэффициенты приведения (рис. 2.25, а) $\xi_1 = \xi_4 = \xi_{14} = \xi_{17} = \frac{l_1}{l}$; $\xi_5 = \xi_8 = \xi_{10} = \xi_{13} = \frac{l_2}{l}$. Коэффициенты влияющих размеров в сопряжении с зазором определяем с учетом направления выборки зазоров:

$$\xi_2 = \xi_3 = \frac{l_1}{l} \cos \beta_1; \quad \xi_6 = \xi_7 = \frac{l_2}{l} \cos \beta_2;$$

$$\xi_{11} = \xi_{12} = \frac{l_2}{l} \cdot -\cos \beta_3; \quad \xi_{15} = \xi_{16} = \frac{l_1}{l} \cos \beta_4,$$

где l_1 и l_2 – расстояния от опор до середины венцов зубчатых колес; l – расстояние между опорами вала; $\beta_1 - \beta_4$ – углы между направлениями сил, действующих на опоры, и плоскостью, в которой расположены оси валов.

Коэффициент положительный, если сила, действующая на опору, увеличивает межосевое расстояние. Направление сил определяют по сверткам приводов.

При отсутствии специальных устройств для регулирования межосевого расстояния точность исходного размера достигают по методу взаимозаменяемости.

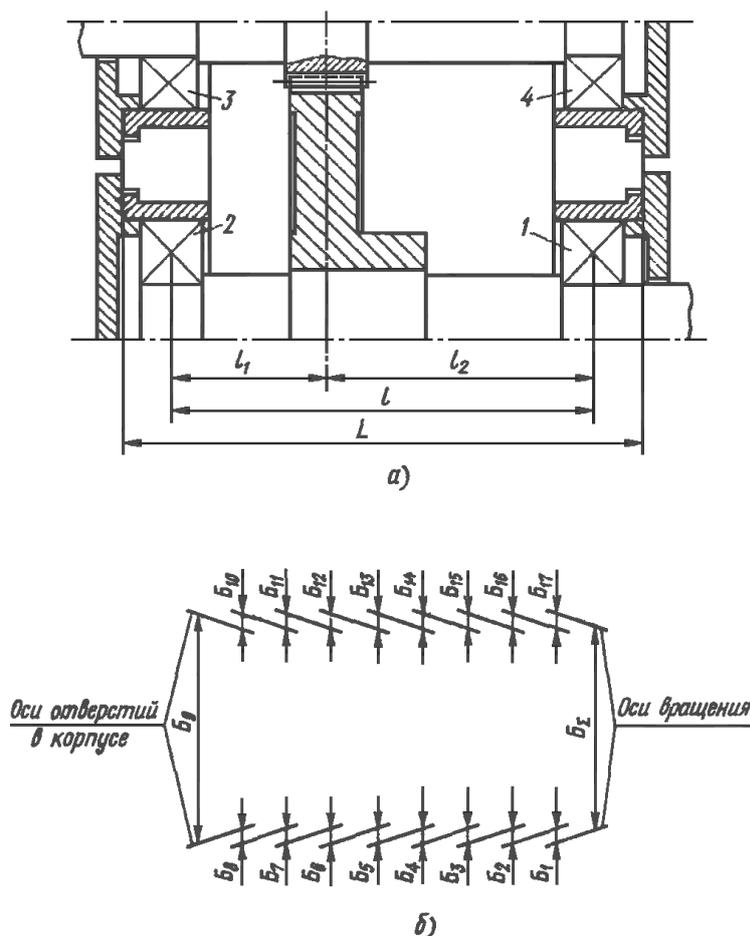


Рис. 2.25. Схема к анализу цилиндрической передачи:

a – эскиз передачи; *б* – размерная щель

Так как у всех влияющих размеров, кроме B_9 , номинальные значения равны нулю, то номинальный размер межосевого расстояния $B_{\Delta} = B_9$.

Конкретизируем общие расчетные формулы (2.7) и (2.20) для рассматриваемого случая $M_{\Delta} = em_9 + \alpha_9 T_9$.

Можно принять $em_9 = 0$ и $\alpha_9 = 0$, тогда $M_{\Delta} = 0$. Во всех сопряжениях с зазорами $d_a = d_b$, тогда

$$M_{\Delta z} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \xi_i ((em_{ai} + \alpha_{ai} T_{ai}) - (em_{bi} + \alpha_{bi} T_{bi})) \right\},$$

$$i = 2, 3, 6, 7, 11, 12, 15, 16.$$

Положение центра дорожки качения внутреннего кольца зависит от посадочного зазора в подшипнике. Натяг в соединении подшипника с валом уменьшает начальный зазор. Наихудшим является сочетание минимального натяга N_{\min} между подшипником и валом и максимального зазора в самом подшипнике Z_{\max} . Считают, что диаметр дорожки качения внутреннего кольца подшипника увеличивается на $(0,55 \div 0,75) N$, где N – натяг в соединении подшипника с валом. На эту же величину уменьшится зазор в подшипнике.

При установке наружного кольца в корпусе без натяга наибольший посадочный зазор в подшипнике $Z_{n\max} = Z_{\max} - (0,55 \div 0,75) N_{\min}$.

Рассеивание смещения центра дорожки качения внутреннего кольца подшипника и центра дорожки качения наружного кольца $T_z = Z_{n\max}$, а $em_z = 0,5T_z$. Следовательно, для влияющих размеров B_3, B_7, B_{12} и B_{16} $em_z = 0,5T_z$; $T_z = Z_{n\max}$. Для этих размеров можно принять $\alpha = 0$. Тогда формула для $M_{\Delta z}$ принимает вид:

$$M_{\Delta z} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \xi_i ((em_{ai} + \alpha_{ai} T_{ai}) - (em_{bi} + \alpha_{bi} T_{bi}) + T_{zi+1}) \right\},$$

$$i = 2, 6, 11, 15.$$

Формулы (2.7), (2.13) и (2.21) для данного случая имеют вид:

$$K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 = K_9^2 T_9^2;$$

$$K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 = 0,75^2 \left(\sum_i \xi_i^2 T_i^2 + \sum_j \xi_j^2 T_j^2 \right),$$

$$i = 1, 4, 14, 17; j = 5, 8, 10, 13.$$

Если подшипники качения установлены непосредственно в корпусе и втулки отсутствуют, то

$$K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 = 0,75^2 \sum_i \xi_i^2 T_i^2,$$

$$i = 1, 5, 10, 14;$$

$$K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_i \xi_i^2 \left[(K_{ai}^2 T_{ai}^2 + K_{bi}^2 T_{bi}^2) + K_{zi+1}^2 T_{zi+1}^2 \right] \right\},$$

$$i = 2, 6, 11, 15.$$

В некоторых случаях может оказаться необходимым учет влияния сил, действующих в зацеплении и вызывающих прогиб валов. Так как прогибы функционально зависят от сил, то характеристики рассеивания для них ($M_{\Delta f}$ и $K_{\Delta f}^2 T_{\Delta f}^2$) в рассматриваемом примере определяем по формулам (2.18) и (2.19). Учитывая, что $K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 = K_9^2 T_9^2$, запишем формулу (2.40) в виде:

$$K_{\Delta}^2 \omega_{\Delta}^2 = K_9^2 T_9^2 + K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 + K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 + K_{\Delta f}^2 T_{\Delta f}^2.$$

Характеристики $K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2$ и $K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2$ известны, так как они определяются погрешностями подшипников, втулок и посадочными зазорами. Известны также и характеристики рассеивания функционально связанных величин. Тогда, заменив $\omega_{\Delta} = T_{\Delta}$, можно определить допуск расстояния между осями отверстий корпусной детали:

$$T_9 = \frac{1}{K_9} \sqrt{K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 - K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 - K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 - K_{\Delta f}^2 T_{\Delta f}^2},$$

где T_{Δ} – допуск межосевого расстояния зубчатой цилиндрической передачи в плоскости расположения колес. Координата середины допуска размера B_9 определится по выражению

$$em_9 = em_{\Delta} - (M_{\Delta f} + M_{\Delta z}) = -(M_{\Delta f} + M_{\Delta z}).$$

Пример. Межосевое расстояние зубчатой цилиндрической передачи $a_w = 180$ мм (рис. 2.26). Сопряжение зубьев B . Определить допуск расстояния между осями отверстий корпусной детали. По ГОСТ 1643–81 предельные отклонения межосевого расстояния передачи $f_a = \pm 0,080$ мм. Следовательно, характеристики исходного размера $em_{\Delta} = 0$ мм; $T_{\Delta} = 0,16$ мм. Опоры валов – шариковые радиальные однорядные подшипники класса точности 0; размеры подшипников: для вала шестерни $d = 35$ мм и $D = 80$ мм; для вала колеса $d = 45$ мм и $D = 100$ мм.

Подшипники установлены непосредственно в корпусе без промежуточных втулок.

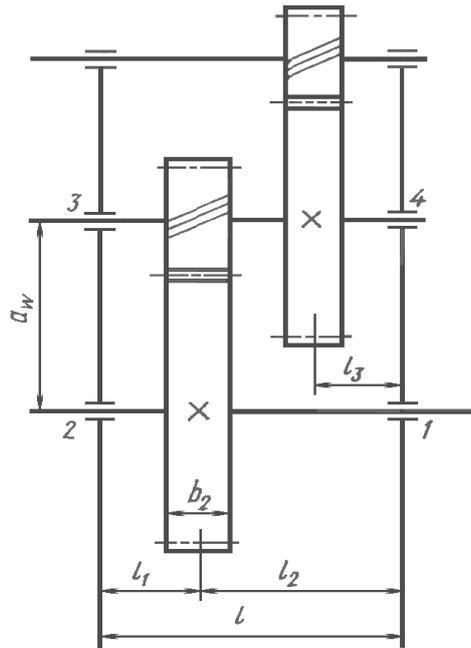


Рис. 2.26. Схема к расчету допуска расстояния между осями корпуса

Расчетная схема для рассматриваемого примера такая же, как на рис. 2.25, б, из которой следует исключить влияющие размеры B_4 , B_8 , B_{13} и B_{17} , относящиеся к промежуточным втулкам. Расстояние от опор до средней плоскости зубчатых колес $l_1 = l_3 = 45$ мм, $l_2 = 90$ мм, и, следовательно, расстояние между опорами $l = 135$ мм.

Для определения углов $\beta_1 - \beta_4$ между плоскостью, в которой расположены валы, и направлением действия сил на опоры валов применим по свертке привода. Последовательно определим: вращающие моменты на валах, силы в зацеплении колес, реакции в опорах в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, их равнодействующие и равные им по величинам, но противоположно направленные силы давления вала на опоры и, наконец, углы между силами давления вала на опоры и плоскостью расположения валов (рис. 2.27). Под действием осевых сил выбираются зазоры в подшипниках опор 2 и 4, и, следовательно, размеры B_7 и B_{16} из расчетной схемы исключаются. После выполнения перечисленных операций найдем: $\beta_1 = 71^\circ 30'$, $\beta_2 = 54^\circ 10'$, $\beta_3 = 85^\circ 20'$, $\beta_4 = 67^\circ 50'$. Силы, действующие на опоры 2, 3 и 4, увеличивают межосевое расстояние, а силы, действующие на опоры 1, уменьшают его, поэтому коэффициенты:

$$\xi_2 = \xi_3 = -\frac{l_1}{l} \cos \beta_1 = -\frac{45}{135} \cos 71^\circ 30' = -0,106;$$

$$\xi_6 = \frac{l_2}{l} \cos \beta_2 = \frac{90}{135} \cos 54^\circ 10' = 0,391;$$

$$\xi_{11} = \xi_{12} = \frac{l_2}{l} \cos \beta_3 = \frac{90}{135} \cos 85^\circ 20' = 0,054;$$

$$\xi_{15} = \frac{l_1}{l} \cos \beta_4 = \frac{45}{135} \cos 67^\circ 50' = 0,126.$$

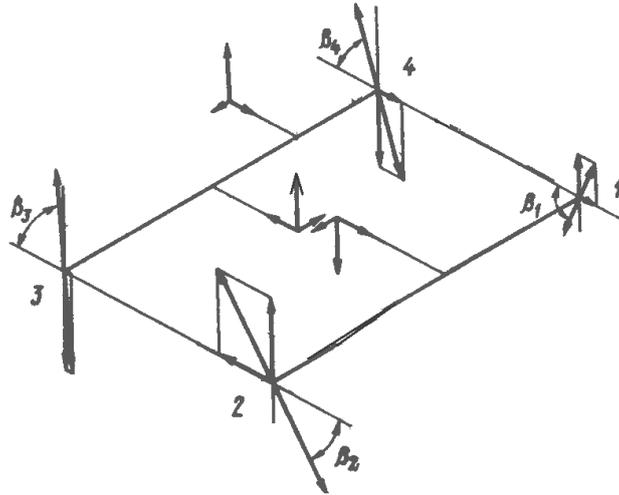


Рис. 2.27. Схема к определению направления выбора зазоров

Для всех влияющих размеров принимаем коэффициенты α_i и K_i по приведенным выше рекомендациям. Точность исходного размера следует обеспечивать методом взаимозаменяемости.

Определим допуски влияющих размеров.

Радиальное биение дорожки качения наружных колец подшипников (класс точности 0, $D = 80 \dots 120$ мм) $R_a = 0,035$ мм. Отклонение от соосности численно равно половине радиального биения. Однако это отклонение может быть направлено в любую сторону, поэтому в расчетные формулы подставляем $em = 0$, $T_v = 0,035$ мм.

Для этих подшипников при $d = 30 \dots 50$ мм начальный зазор от 0,012 до 0,029 мм.

Натяг в сопряжении подшипников с валом при отклонениях вала $k6$ может изменяться от 0,002 до 0,030 мм. Тогда $T_z = [0,029 - (0,55 \dots 0,75)0,002] \approx 0,028$ мм.

Так как размеры B_3 и B_{12} комплексные и относятся к изделиям массового производства с хорошо отлаженным процессом изготовления, то примем для них $\alpha_i = 0$ и $K_i = 1,0$.

Предельные отклонения наружных колец всех подшипников $0 - 0,015$ мм.

Следовательно, $em_b = -0,0075$ мм; $T_b = 0,015$ мм; $\alpha_b = 0,1$; $K_b = 1,2$.
 Предельные отклонения отверстий корпуса $+0,035/0$ мм. Тогда для размеров B_2, B_6, B_{11} и B_{15} $em_a = -0,0175$ мм; $T_a = 0,035$ мм; $\alpha_a = -0,1$; $K_a = 1,2$. Полученные данные занесем в табл. 2.5.

Рассчитаем величины, входящие в формулу для определения T_g .

Сумма характеристик рассеивания векторных величин:

$$K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 = 0,75^2 (2 \cdot 0,333^2 \cdot 0,035^2 + 2 \cdot 0,667^2 \cdot 0,035^2) = 0,000764 \text{ мм}^2.$$

Сумма характеристик рассеивания сопряжений с зазором:

$$K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \left[(-0,106)^2 + 0,391^2 + 0,054^2 + 0,126^2 \right] 1,2^2 (0,035^2 + 0,015^2) + \left[(-0,106)^2 + 0,054^2 \right] 0,028^2 \right\} = 0,0001 \text{ мм}^2.$$

Для распорных сил в зацеплении зубчатых колес 3 и 4 (рис. 2.26), вызывающих прогиб в плоскости расположения валов, примем:

$$F_{y3} = F_{y4} = 2500 \pm 400 \text{ Н}; em_F = 0; T_F = 800 \text{ Н}; \alpha_F = 0;$$

$$K_F = 1,2; \xi_3 = \xi_4 = 1,0; \xi_F = 0.$$

Функция связи для прогиба вала в месте расположения зубчатого колеса 4:

$$y_4 = a_4 F_{y4},$$

где

$$a_4 = \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI_4 l} = \frac{45^2 \cdot 90^2}{3 \cdot 2,15 \cdot 10^5 \cdot 20,3 \cdot 10^4 \cdot 135} = 0,093 \cdot 10^{-5} \text{ мм/Н}.$$

Таблица 2.5

Результаты расчета размерных цепей

Раз- мер	С	Характеристика размеров						Кэф- фициенты	
		известные			расчетные			α	К
		Y_{ei}^{es}	em	T	Y_{ei}^{es}	em'	T		
B_{Δ}	–	$180 \pm 0,080$	0	0,16				0	1,12
B_1	0,333	$0^{+0,035}$	0	0,035				0	0,75
B_2	–0,106	$100 \frac{+0,035}{-0,015}$	$\frac{0,0175}{-0,0075}$	$\frac{0,035}{-0,015}$				$\frac{-0,1}{0,1}$	1,2
B_3	–0,106	$0^{+0,028}$	–	0,028				0	1,0
B_5	0,667	$0^{+0,035}$	0	0,035				0	0,75
B_6	0,391	$100 \frac{+0,035}{-0,015}$	$\frac{0,0175}{-0,0075}$	$\frac{0,035}{0,015}$				$\frac{-0,1}{0,1}$	1,2
B_9	1,0	–	–	–	$180 \pm$ \pm 0,052	0	0,104	0	1,2
B_{10}	0,667	$0^{+0,035}$	0	0,035				0	0,75
B_{11}	0,054	$80 \frac{+0,035}{-0,015}$	$\frac{0,0175}{-0,0075}$	$\frac{0,035}{0,015}$				$\frac{-0,1}{0,1}$	1,2
B_{12}	0,054	$0^{+0,28}$	–	0,028				0	1,0
B_{14}	0,333	$0^{+0,035}$	0	0,035				0	0,75
B_{15}	0,126	$80 \frac{+0,035}{-0,015}$	$\frac{0,0175}{-0,0075}$	$\frac{0,035}{0,015}$				$\frac{-0,1}{0,1}$	1,2

Для прогиба вала в месте установки шестерни 3 с учетом того, что распорная сила в зацеплении зубчатых колес 1 и 2 уменьшает прогиб в рассматриваемом сечении, в соответствии с принятыми величинами можно записать выражение для функции связи:

$$y_3 = a_2 F_{y3} = 0,21 \cdot 10^{-5} F_{y3} \text{ мм.}$$

По формулам (2.28) и (2.29) находим:

$$M_{\Delta f} = (em_F + \alpha_F T_F) \left(\xi_F + \sum \xi_i \alpha_i \right) = (0 + 0 \cdot 800) \left(0 + 0,21 \cdot 10^5 + \right. \\ \left. + 0,093 \cdot 10^{-5} \right) = 0;$$

$$K_{\Delta f}^2 T_{\Delta f}^2 = K_F^2 T_F^2 (\xi_F^2 + \sum \xi_i^2 \alpha_i^2) = 1,2^2 \cdot 800^2 \left[0 + (1 \cdot 0,21 \cdot 10^{-5})^2 + 0 + (1 \cdot 0,21 \cdot 10^{-5})^2 \right] = 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

Суммарная характеристика сопряжений с зазором:

$$M_{\Delta z} = \frac{1}{2} \left\{ (0,106 + 0,391 + 0,054 + 0,126) [0,0175 - (-0,0075)] + (-0,1) \cdot 0,035 + 0,1 \cdot 0,015 \right\} + (0,106 + 0,054) \cdot 0,014 = 0,0089 \text{ мм},$$

где $0,014 = \frac{T_z}{2}$.

Так как число влияющих размеров больше пяти, то принимаем $K_{\Delta} = 1,0$.

Подставляя полученные данные в расчетную формулу, определим допуск размера B_9 :

$$T_9 = \frac{1}{1,2} \sqrt{1,0^2 \cdot 0,16^2 - 0,000764 - 0,0001 - 0,0000049} = 0,131 \text{ мм}.$$

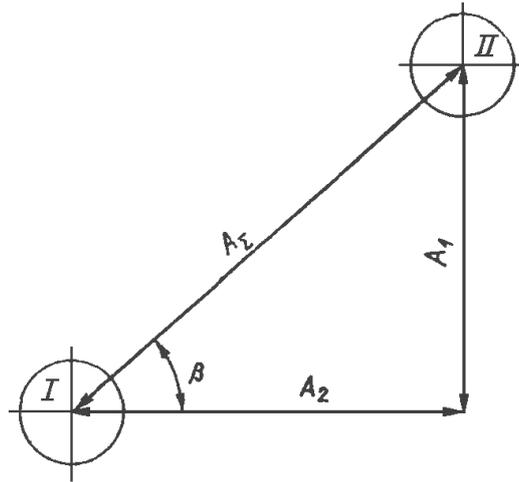
Найдем предельные расчетные отклонения размера B_9 , имея в виду, что

$$\begin{aligned} em_9 &= -(M_{\Delta f} + M_{\Delta z}) = -(0 + 0,0089) \approx -0,0089; \\ es'_9 &= em_9 + 0,5T_9 = -0,0089 + 0,5 \cdot 0,131 = 0,057 \text{ мм}; \\ ei'_9 &= em_9 - 0,5T_9 = -0,0089 - 0,5 \cdot 0,131 = -0,074 \text{ мм}. \end{aligned}$$

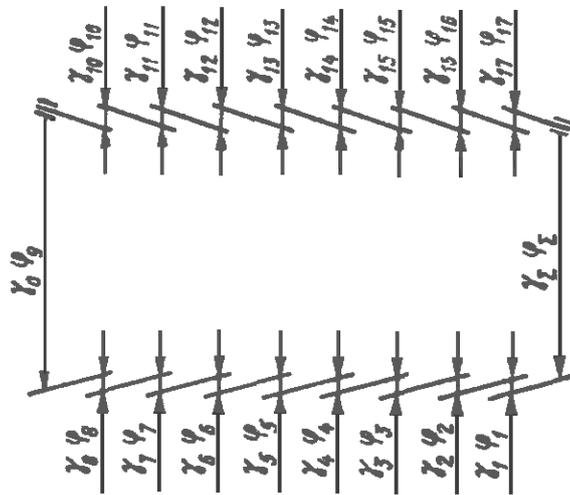
Таким образом, $B_9 = 180_{-0,074}^{+0,057}$ мм.

Если требуется, чтобы предельные отклонения на размер B_9 были симметричны, то следует назначить $180 \pm 0,057$ мм. По результатам проведенного расчета можно ориентировочно принимать допуск расстояния между центрами отверстий корпусной детали $T_9 \approx (0,6 \dots 0,7) T_{\Delta}$, где T_{Δ} – допуск межосевого расстояния зубчатой цилиндрической передачи.

Пересчет допуска расстояния между осями отверстий корпуса на допуски координат. На рис. 2.28, а показана расчетная схема A , определяющая точность расстояния между осями отверстий I и II корпуса. Требуется в соответствии с расчетной схемой пересчитать допуск исходного размера A_{Δ} на допуски координат A_1 и A_2 , являющихся вертикальной и горизонтальной проекциями исходного размера.



a)



б)

Рис. 2.28. Схема к расчету допусков корпуса:
 а – номинальная размерная цепь; б – полная цепь

Коэффициенты приведения влияющих размеров:

$$\xi_1 = \cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta; \quad \xi_2 = \cos \beta.$$

Влияющие размеры – скалярные величины.

Допуск исходного размера в этом случае:

$$T_\Delta = \frac{1}{K_\Delta} \sqrt{\xi_1^2 K_1^2 T_1^2 + \xi_2^2 K_2^2 T_2^2}.$$

Примем $K_1 = K_2 = 1,2$; $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt[3]{\frac{A_2}{A_1}} = B$. Тогда $T_2 = BT_1$.

После подстановки в исходную формулу получим:

$$K_{\Delta s} T_{\Delta s} = 1,2 \sqrt{\sin^2 \beta T_1^2 + \cos^2 \beta B^2 T_1^2}.$$

Отсюда находим формулу для определения допуска на вертикальную проекцию исходного размера:

$$T_1 = \frac{K_{\Delta s} T_{\Delta s}}{1,2 \sqrt{\sin^2 \beta + B^2 \cdot \cos^2 \beta}}.$$

Часто принимают допуски на координаты одинаковыми $T_1 = T_2 = T(B = 1)$. Тогда

$$T = \frac{K_{\Delta s} T_{\Delta s}}{1,2}.$$

Конкретизируя формулу (2.17) для данного случая, получим:

$$K_{\Delta} = 1 + \frac{0,55}{T_1 (\sin \beta + B \cdot \cos \beta)} \left(1,2 \sqrt{\sin^2 \beta T_1^2 + B^2 \cdot \cos^2 \beta T_1^2} - \sqrt{\sin^2 \beta T_1^2 + B^2 \cdot \cos^2 \beta T_1^2} \right),$$

или окончательно:

$$K_{\Delta} = 1 + \frac{0,11 \sqrt{\sin^2 \beta + B^2 \cdot \cos^2 \beta}}{\sin \beta + B \cdot \cos \beta}.$$

Для случая $T_1 = T_2 = T(B = 1)$:

$$K_{\Delta} = 1 + \frac{0,11}{\sin \beta + \cos \beta}.$$

Пример. По данным предыдущего числового примера допуск на расстояние между осями отверстий корпусной детали $T_{\Delta} = 0,131$ мм. Положим, $\beta = 30^\circ$. Примем $B = 1$.

Тогда:

$$K_{\Delta} = 1 + \frac{0,11}{0,5 + 0,866} = 1,08;$$

$$T = \frac{1,08 \cdot 0,131}{1,2} = 0,118 \text{ мм.}$$

На чертеже корпусной детали следует проставить $A_1 \pm 0,06$ мм и $A_2 \pm 0,06$ мм.

Обеспечение точности по перекосу осей валов цилиндрических зубчатых передач

Предельные отклонения f_y на перекос осей вращения колес по ГОСТ 1643–81 относят к ширине зубчатого колеса $\left(\frac{f_y}{B}\right)$. Для расчетов этот допуск удобнее отнести к размеру L между внешними стенками корпуса (рис. 2.25, а). Тогда допуск перекоса осей вращения валов $T_\Delta = 2f_y \frac{L}{B}$.

Предельные отклонения исходного размера задают симметрично относительного номинального значения, поэтому $em_\Delta = 0$.

На перекос осей вращения валов влияют: перекос осей отверстий под опоры валов в корпусной детали, отклонение от соосности дорожек качения наружных колец подшипников, зазоры в местах сопряжения подшипников с корпусом и радиальные зазоры в самих подшипниках.

На рис. 2.28, б приведена расчетная схема γ , соответствующая эскизу зубчатой передачи (рис. 2.25, а). На схеме $\gamma_\Delta = \gamma_\Sigma$ – исходный размер – перекос осей вращения колес; $\gamma_1, \gamma_5, \gamma_{10}, \gamma_{14}$ – отклонения от соосности дорожек качения наружных колец подшипников; γ_2 и γ_6, γ_{11} и γ_{15} – смещения наружных колец подшипников в отверстиях корпуса (сопряжение с зазором); γ_9 – перекос осей отверстий корпуса; $\gamma_3, \gamma_7, \gamma_{12}, \gamma_{16}$ – смещение центров дорожек качения внутренних колец подшипников вследствие зазоров в подшипниках; $\gamma_4, \gamma_8, \gamma_{13}, \gamma_{17}$ – отклонения от соосности наружных и внутренних поверхностей втулок.

Влияющий размер γ_9 – скалярная, а $\gamma_1, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_8, \gamma_{10}, \gamma_{13}, \gamma_{14}$ и γ_{17} векторные величины. Размеры $\gamma_2, \gamma_6, \gamma_{11}, \gamma_{15}$, а также γ_3 и γ_{12} или γ_7 и γ_{16} характеризуют сопряжения с зазорами, полностью выбираемыми в направлении действующих на опоры валов сил.

При наличии осевых сил зазоры в самих подшипниках с той или другой стороны вала выбираются, поэтому размеры γ_3 и γ_{12} или γ_7 и γ_{16} в этом случае из расчетной схемы исключаются. Коэффициент приведения размера γ_9 (перекос осей отверстий корпуса) $\xi_9 = 1,0$.

Отклонения от соосности колец подшипников и втулок влияют на перекося осей вращения в зависимости от расположения опор относительно внешних стенок корпуса. Коэффициенты приведения для них (рис. 2.25, а):

$$\xi_1 = \xi_5 = \xi_{10} = \xi_{14} = \xi_4 = \xi_8 = \xi_{13} = \xi_{17} = \xi \frac{L}{l}.$$

Коэффициенты влияющих размеров для сопряжений с зазорами при учете направления выборки зазоров:

$$\begin{aligned} \xi_2 = \xi_3 = \frac{L}{l} \sin \beta_1; \quad \xi_6 = \xi_7 = \frac{L}{l} \sin \beta_2; \\ \xi_{11} = \xi_{12} = \frac{L}{l} \sin \beta_3; \quad \xi_{15} = \xi_{16} = \frac{L}{l} \sin \beta_4, \end{aligned}$$

где $\beta_1 - \beta_4$ – углы между направлениями сил, действующих на опоры, и плоскостью, в которой расположены оси валов.

Точность исходного размера достигают по методу взаимозаменяемости:

$$T_9 = \frac{1}{K_9} \sqrt{K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 - K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 - K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2},$$

где T_{Δ} – допуск перекося осей вращения цилиндрических зубчатых колес на длине L . Координату середины допуска размера γ_9 находим по условию

$$em_9 = -M_{\Delta z}.$$

Пример. Определить допуск перекося осей отверстий корпуса для зубчатой передачи (рис. 2.26). Для этой передачи $a_W = 180$ мм; $b_2 = 45$ мм.

По ГОСТ 1643–81 для степени точности 8 предельные отклонения на перекося $f_y = \frac{\pm 0,013}{45}$ мм/мм.

Отнеся предельные отклонения к внешним стенкам корпуса: $L = 160$ мм (рис. 2.25, а), получим $T_{\Delta} = 2 \frac{0,013 \cdot 160}{45} = 0,092$ мм.

Следовательно, характеристики исходного размера на длине $L = 160$ мм; $em_{\Delta} = 0$; $T_{\Delta} = 0,092$ мм. Непосредственно в корпусе без промежуточных втулок установлены шариковые радиальные одноряд-

ные подшипники, поэтому из расчетной схемы на рис. 2.28, б исключаются влияющие размеры γ_4 , γ_8 , γ_{13} и γ_{17} , относящиеся к втулкам.

При принятых ранее геометрических размерах определим реакции в опорах и построим пространственную схему сил, определим углы β между силами давления вала на опоры и плоскостью расположения валов (рис. 2.27).

Так как осевые силы, действующие в зацеплении, воспринимаются опорами 2 и 4, то размеры γ_7 и γ_{16} из расчетной схемы (рис. 2.28, б) выпадают.

Коэффициенты приведения:

$$\xi_9 = 1,0; \xi_1 = \xi_5 = \xi_{10} = \xi_{14} = \frac{\xi L}{l} = \frac{160}{135} = 1,185.$$

Вертикальные составляющие сил давления валов на опоры 1, 2 и 3, 4 взаимно противоположны по направлению (рис. 2.28). Учтем это в коэффициентах приведения:

$$\xi_2 = \xi_3 = -\frac{L}{l} \sin \beta_1 = -\frac{160}{135} \sin 71^\circ 30' = -1,125;$$

$$\xi_6 = -\frac{L}{l} \sin \beta_2 = -\frac{160}{135} \sin 54^\circ 10' = -0,97;$$

$$\xi_{11} = \xi_{12} = \frac{L}{l} \sin \beta_3 = \frac{160}{135} \sin 85^\circ 20' = 1,181;$$

$$\xi_{15} = \frac{L}{l} \sin \beta_4 = 1,1.$$

Тогда

$$K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 = 0,0039 \text{ мм}^2.$$

Сумма характеристик рассеивания сопряжений с зазором:

$$K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 = \frac{1}{4} \left\{ 1,2^2 \left[(-1,125)^2 + (-0,97)^2 + 1,181^2 + 1,1^2 \right] (0,035^2 + 0,015^2) + \left[(-1,125^2 + 1,181^2) \right] \cdot 0,028^2 \right\} = 0,003 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$T_9 = \frac{1}{1,2} \sqrt{0,092^2 - 0,039 - 0,003} = 0,032.$$

Предельные расчетные отклонения размера γ_9 :

$$es'_9 = em_9 + 0,5T_9 = -0,066 + 0,5 \cdot 0,032 = -0,050 \text{ мм};$$

$$ei'_9 = em_9 - 0,5T_9 = -0,066 - 0,5 \cdot 0,032 = -0,082 \text{ мм}.$$

Итак, для размера γ_9 имеем $0_{-0,082}^{-0,050}$ мм.

По результатам расчета можно ориентировочно принимать допуск перекоса осей отверстий корпусной детали $T_9 \approx (0,3 - 0,4)T_\Delta$, где T_Δ – допуск перекоса осей вращения зубчатых колес, отнесенный к расстоянию L между внешними стенками корпуса. Допуск T_9 несимметричный. Координату середины допуска определим по суммарной характеристике сопряжений с зазором $em_9 = -M_{\Delta z}$.

Параллельность осей валов цилиндрических зубчатых передач

По ГОСТ 1643–81 предельные отклонения от параллельности f_x осей вращения колес симметричны и отнесены к ширине зубчатого колеса $\left(\frac{f_x}{B}\right)$. Для расчета отклонения от параллельности осей отверстий корпуса их удобнее отнести к расстоянию L между внешними стенками корпуса (рис. 2.25, а). Тогда $T_\Delta = 2f_x \frac{L}{B}$.

Для зубчатой передачи, изображенной на рис. 2.25, а и 2.28, б, приведена расчетная схема φ . На схеме $\varphi_\Delta = \varphi_\Sigma$ – исходный размер – отклонение от параллельности осей вращения колес; φ_9 – отклонение от параллельности осей отверстий корпуса. Остальные влияющие размеры схемы φ совпадают с размерами схемы γ . Коэффициенты приведения для схемы φ :

$$\xi_9 = 1,0; \xi_1 = \xi_5 = \xi_{10} = \xi_{14} = \xi_4 = \xi_8 = \xi_{13} = \xi_{17} = \frac{L}{l}.$$

Коэффициенты влияющих размеров, характеризующих сопряжения с зазорами, с учетом направления выборки зазоров определим по формулам:

$$\xi_2 = \xi_3 = \frac{L}{l} \cos \beta_1; \xi_6 = \xi_7 = \frac{L}{l} \cos \beta_2;$$

$$\xi_{11} = \xi_{12} = \frac{L}{l} \cos \beta_3; \xi_{15} = \xi_{16} = \frac{L}{l} \cos \beta_4.$$

Здесь $\beta_1 - \beta_4$ – углы между направлениями сил, действующих на опоры, и плоскостью, в которой расположены оси валов.

Точность исходного размера достигают по методу взаимозаменяемости. Конкретные расчетные формулы совпадают с приведенными для расчета допуска на перекося осей отверстий корпуса.

По результатам расчетов допуск на отклонение от параллельности осей отверстий корпуса приближенно можно принимать симметричным и численно равным $T_9 \approx (0,3...0,4)T_\Delta$, где $T_\Delta = 2f_x \frac{L}{B}$ – допуск на отклонение от параллельности осей вращения зубчатых колес, отнесенный к расстоянию L между внешними стенками корпуса.

2.8.2. Конические зубчатые передачи

Совпадение вершины делительного конуса конической шестерни с осью вращения конического колеса

На рис. 2.29 приведен эскиз конической зубчатой передачи и расчетная схема E , выявляющая отклонения, вследствие которых вершина делительного конуса конической шестерни может не совпадать с осью вращения конического колеса. Предельное осевое смещение ($\pm f_{ам}$) устанавливает ГОСТ 1758–81.

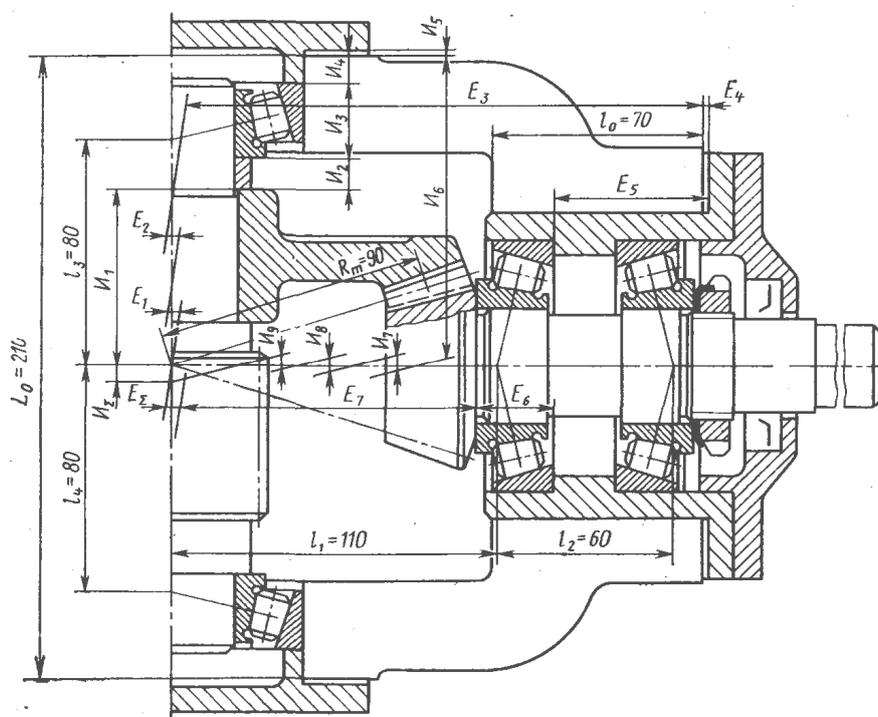


Рис. 2.29. Схема к расчету совпадения вершины делительного конуса конической передачи

Так как в расчетной схеме есть компенсатор E_4 , то допуски на влияющие размеры E_3, E_5 примем по $\frac{7T12}{2}$, а на размер E_7 – по $h12$.

Предельные отклонения размеров, относящихся к подшипникам, принимаем по справочнику. Так как смещение центра дорожки качения наружного кольца подшипника может быть направлено в любую сторону, то в расчетные формулы подставляем $em = 0$; $T_v = 0,035$ мм. Составим расчетную таблицу (табл. 2.6).

Размеры E_1 и E_2 – векторные величины, остальные размеры – скалярные. Для исходного размера можно принять $a_\Delta = 0$; $K_\Delta = 1,0$ (большее число звеньев с однородными допусками).

Совпадение вершины делительного конуса конического колеса с осью вращения конической шестерни

Расчетная схема II (рис. 2.29) определяет смещение вершины делительного конуса колеса и оси вращения шестерни. Предельное осевое смещение устанавливает ГОСТ 1758–81.

Таблица 2.6

Результаты расчета размерной цепи E

Размер	ξ	Характеристики размеров						Коэффициенты	
		известные			расчетные			α	K
		Y_{ei}^{es}	em	T	$Y_{ei}'^{es}$	em'	T'		
E_Δ	–	$0 \pm 0,08$	0	0,16	–	–	–	0	1
E_1	–0,5	$0^{+0,035}$	0	0,035	–	–	–	0	0,75
E_2	–0,5	$0 + 0,035$	0	0,035	–	–	–	0	0,75
E_3	1	$188 \pm 0,23$	0	0,46	–	–	–	0	1,2
E_4	1	–	–	–	$0,6 \pm 0,5$	0	1,0		
E_5	–1	$70,85 \pm 0,15$	0	0,3	–	–	–		
E_6	–1	$22,75 \pm 0,25$	0	0,5	–	–	–		
E_7	–1	$95_{-0,35}$	–0,175	0,35	–	–	–	0,1	

Влияющие размеры: I_1 – размер конического колеса от базового торца до вершины делительного конуса; I_2 – размер дистанционного кольца; I_3 – монтажная высота подшипника; I_4 – расстояние между торцовыми поверхностями в крышке подшипников; I_5 – компенсатор – набор прокладок; I_6 – расстояние в корпусе от торца до оси отверстия

под стакан; I_7 – смещение осей отверстия и наружной поверхности стакана; I_8 – смещение центра дорожки качения наружного кольца левого подшипника вала-шестерни; I_9 – то же, для правого подшипника.

Коэффициенты приведения влияющих размеров:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1,0; \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = 1;$$

$$\xi_8 = \frac{l_1 + l_2}{l_2}; \quad \xi_9 = \frac{l_1}{l_2},$$

здесь так же, как и для схемы E : $\alpha_\Delta = 0$; $K_\Delta = 0$.

Размеры I_7 , I_8 , I_9 – векторные величины, остальные – скалярные. Необходимая точность исходного размера обеспечивается компенсатором (размер I_5). Компенсатор рассчитываем по тем же зависимостям, что и для схемы E (табл. 2.6).

Угол между осями вращения конических колес в передаче

Расчетная схема φ (рис. 2.30) выявляет отклонения, влияющие на точность угла между осями вращения конических колес.

По ГОСТ 1758–81 на этот параметр установлены симметричные отклонения $\pm E_\Delta$ на длине среднего конусного расстояния R_m .

Следовательно, параметры исходного размера $em_\Delta = 0$;

$$T_\Delta = \frac{2|E_\Delta|}{R} \text{ мм/мм.}$$

Для расчетов допуск T_Δ удобнее отнести к условной длине L_0 :

$$T_\Delta = \frac{2|E_\Delta|L_0}{R},$$

где L_0 – условная длина (200, 300, 500 мм или расстояние между платиками).

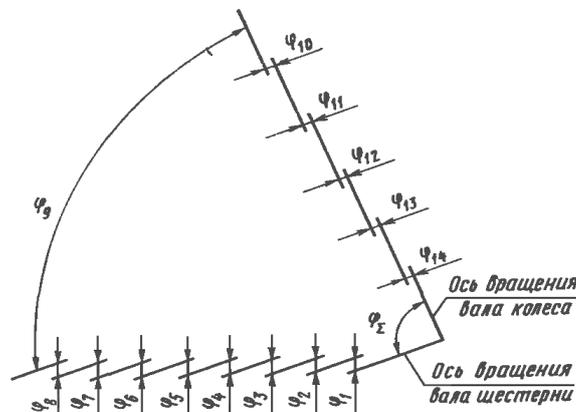


Рис. 2.30. Схема к расчету угла между осями конической передачи

Влияющие размеры: φ_1 и φ_2 – отклонение от соосности дорожек качения наружных колец подшипников (правого и левого, рис. 2.30) вала-шестерни; φ_3 и φ_4 – зазоры в сопряжении наружных колец правого и левого подшипников вала-шестерни с отверстием стакана; φ_5 – радиальный зазор в подшипнике вала-шестерни, не нагруженном внешней осевой силой; φ_6 – отклонение от параллельности оси наружного цилиндра стакана общей оси его отверстий; φ_7 – зазор в сопряжении стакана с отверстием корпуса; φ_8 – поворот стакана в отверстии корпуса за счет конусности стакана и отверстия; φ_9 – угол между осями отверстий корпуса; φ_{10} и φ_{11} – отклонение от соосности наружных колец подшипников вала колеса; φ_{12} и φ_{13} – зазоры в сопряжении наружных колец подшипников вала колеса с отверстием корпуса; φ_{14} – радиальный зазор в подшипнике вала колеса, не нагруженном внешней осевой силой.

Если все допуски отнести к условной длине L_0 , то для коэффициентов приведения влияющих размеров можно записать:

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{L_0}{l_2}; \quad \xi_3 = \frac{L_0}{l_2} \cos \beta_1; \quad \xi_4 = \frac{L_0}{l_2} \cos \beta_2,$$

где l_2 – расстояние между подшипниками вала-шестерни (рис. 2.30); β_1 и β_2 – углы между направлениями сил, действующих на правую и левую опоры вала-шестерни, и плоскостью, в которой расположены оси валов (рис. 2.31).

Если внешнюю осевую силу воспринимает левая опора, то $\xi_5 = \frac{L_0}{l_2} \cos \beta_1$. В противном случае $\xi_5 = \frac{L_0}{l_2} \cos \beta_2$.

Остальные коэффициенты:

$$\xi_6 = \xi_8 = \frac{L_0}{l_0},$$

где l_0 – длина наружного цилиндра стакана;

$$\xi_7 = \frac{L_0}{l_0} \cos \beta_1; \quad \xi_9 = \frac{L_0}{L_0} = 1; \quad \xi_{10} = \xi_{11} = \frac{L_0}{l_k}; \quad \xi_{12} = \frac{L_0}{l_k} \cos \beta_3;$$

$$\xi_{13} = \frac{L_0}{l_k} \cos \beta_4,$$

где $l_k = l_3 + l_4$ – расстояние между подшипниками вала колеса; β_3 – угол между направлением действия силы на верхнюю опору вала колеса и плоскостью расположения валов (рис. 2.31) конической передачи; β_4 – соответствующий угол для нижней опоры вала колеса; $\xi_{14} = \frac{L_0}{l_k} \cos \beta_4$, если внешнюю осевую силу воспринимает верхняя (рис. 2.30) опора вала колеса; в противном случае $\xi_{14} = \frac{L_0}{l_k} \cos \beta_3$.

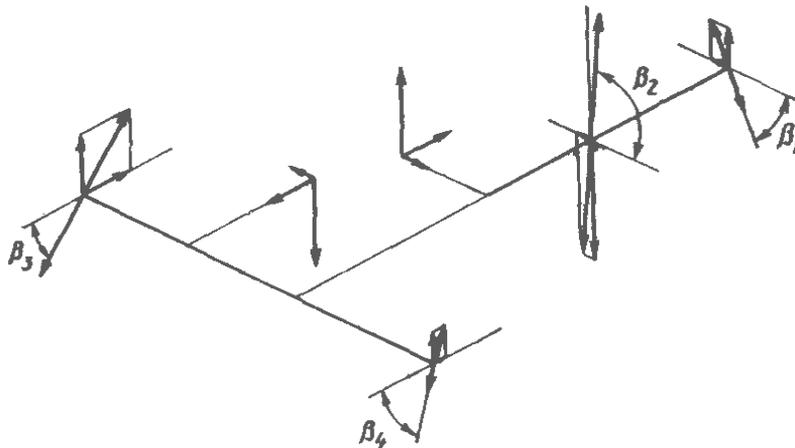


Рис. 2.31. Схема к определению направления выбора зазоров

В схеме (рис. 2.30) размеры $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$ – скалярные величины, размеры $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_7, \varphi_{12}$ и φ_{13} – зазоры в цилиндрических сопряжениях и φ_5 и φ_{14} – зазоры между телами качения и кольцами. Размеры $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_6, \varphi_8, \varphi_{10}$ и φ_{11} – векторные величины.

Допуск угла между осями отверстий корпуса:

$$T_9 = \frac{1}{K_9} \sqrt{K_{\Delta}^2 T_{\Delta}^2 - K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 - K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2}.$$

Координата середины допуска размера φ_9 по условию (2.36):

$$em_9 = -M_{\Delta z}.$$

Сумма характеристик рассеивания векторных величин:

$$K_{\Delta v}^2 T_{\Delta v}^2 = 0,75^2 \left[\left(\frac{L_0}{l_2} \right)^2 (T_{v1}^2 + T_{v2}^2) + \left(\frac{L_0}{l_0} \right)^2 (T_{v6}^2 + T_{v8}^2) + \left(\frac{L_0}{l_k} \right)^2 (T_{v10}^2 + T_{v11}^2) \right].$$

При выполнении требований к форме и точности расположения поверхностей стаканов, приведенных ниже, для упрощения расчетов размеры ϕ_6 и ϕ_8 вследствие их малого влияния на конечный результат из расчетной формулы можно исключить.

Сумма характеристик рассеивания сопряжений с зазором:

$$K_{\Delta z}^2 T_{\Delta z}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_i \left[\xi_i^2 (K_{ai}^2 T_{ai}^2 + K_{bi}^2 T_{bi}^2) \right] + \sum_j \xi_j^2 K_{zj}^2 T_{zj}^2 \right\},$$

$$i = 3, 4, 7, 12, 13; \quad j = 5, 14.$$

Суммарная характеристика сопряжений с зазором:

$$M_{\Delta z} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \xi_i \left[\left(em_{ai} + \alpha_{ai} \frac{T_{ai}}{2} \right) - \left(em_{bi} + \alpha_{bi} \frac{T_{bi}}{2} \right) + \sum_j 0,5 \xi_j T_j \right] \right\},$$

$$i = 3, 4, 7, 12, 13; \quad j = 5, 14.$$

Для радиально-упорных подшипников радиальный зазор определяют по осевому зазору z_s : $T_z = z_s \cdot \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол контакта радиально-упорного подшипника.

Расстояние между осями вращения конических колес

На рис. 2.32 приведена расчетная схема T , определяющая межосевое расстояние передачи. ПО ГОСТ 1758–81, на этот параметр установлены симметричные отклонения, поэтому характеристики исходного размера $em_{\Delta} = 0$; $T_{\Delta} = 2|f_a|$.

Влияющие размеры схемы T : T_1 и T_2 – отклонение от соосности дорожек качения наружных колец левого и правого подшипников вала-шестерни; T_3 и T_4 – зазоры в сопряжении наружных колец левого и правого подшипников вала-шестерни с отверстием стакана; T_5 – радиальный зазор в подшипнике вала-шестерни, не нагруженном внешней осевой силой; T_6 – отклонение от соосности оси наружного цилиндра стакана относительно общей оси его отверстий; T_7 – отклонение от параллельности оси наружного цилиндра стакана и общей оси его отверстий; T_8 – зазор в сопряжении стакана с отверстием корпуса; T_9 – межосевое расстояние в корпусе; T_{10} и T_{11} – отклонение от соосности наружных колец подшипников вала колеса; T_{12} и T_{13} – зазоры в сопряжении наружных колец подшипников вала колеса с отверстиями корпуса; T_{14} – радиальный зазор в подшипнике вала колеса, не нагруженном внешней осевой силой.

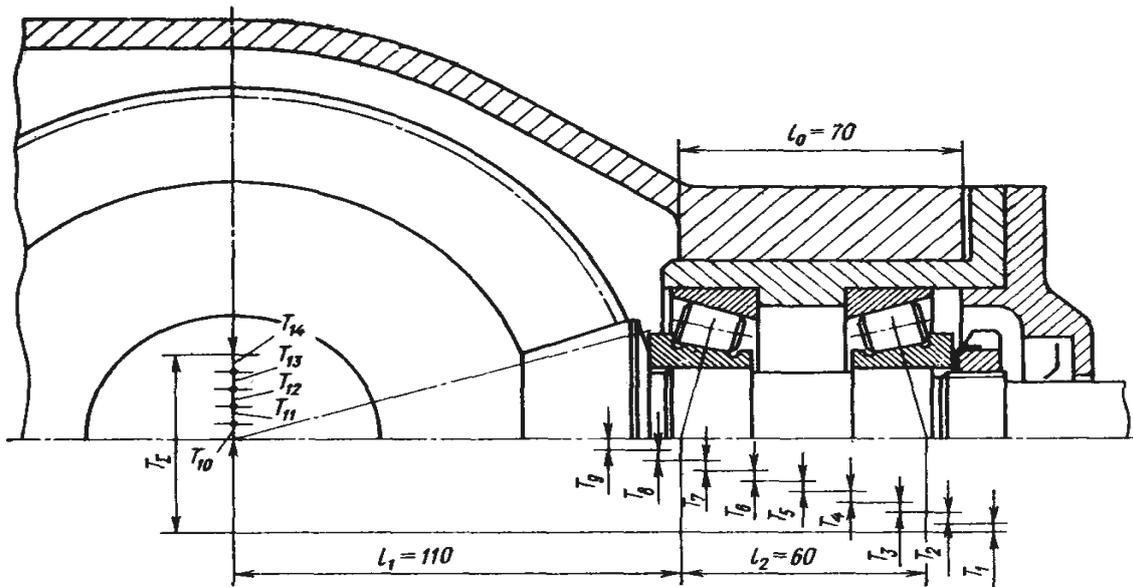


Рис. 2.32. Схема к расчету межосевого расстояния конической передачи

Коэффициенты приведения влияющих размеров:

$$\xi_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2}; \quad \xi_2 = \frac{l_1}{l_2}; \quad \xi_3 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \sin \beta_2; \quad \xi_4 = \frac{l_1}{l_2} \sin \beta_1,$$

где β_2 и β_1 – углы между направлениями сил, действующих в левой и правой опорах вала-шестерни, и плоскостью, в которой расположены оси валов; $\xi_5 = \frac{l_1}{l_2} \sin \beta_1$, если внешнюю силу воспринимает левый

подшипник вала-шестерни; в противном случае $\xi_5 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \sin \beta_2$;

$\xi_6 = 1,0$; $\xi_7 = \frac{l_0 + l_1}{l_0}$, где l_0 – длина наружного цилиндра стакана;

$$\xi_8 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \sin \beta_2; \quad \xi_9 = 1,0; \quad \xi_{10} = \frac{l_3}{l_k}; \quad \xi_{11} = \frac{l_4}{l_k},$$

где l_3 и l_4 – расстояния от подшипников вала колеса до оси шестерни; $l_k = l_3 + l_4$ – расстояние между подшипниками вала колеса;

$\xi_{12} = \frac{l_3}{l_k} \sin \beta_3$; $\xi_{13} = \frac{l_4}{l_k} \sin \beta_4$, где β_3 и β_4 – углы между направлениями сил, действующих в опорах вала колеса, и плоскостью, в которой рас-

положены оси валов; $\xi_{14} = \frac{l_4}{l_k} \sin \beta_4$, если внешнюю осевую силу воспринимает верхний (рис. 2.30) подшипник вала колеса; если внешнюю осевую силу воспринимает нижний (рис. 2.30) подшипник вала колеса, то $\xi_{14} = \frac{l_3}{l_k} \sin \beta_3$.

Размеры $T_1, T_2, T_6, T_7, T_{10}, T_{11}$ – векторные величины, а $T_3, T_4, T_5, T_8, T_9, T_{12}, T_{13}, T_{14}$ – скалярные.

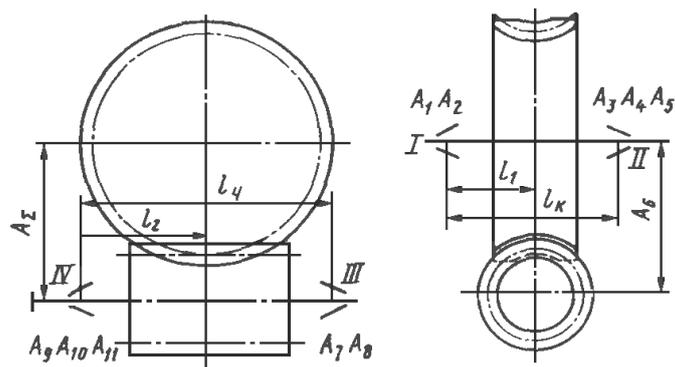
Следует отметить также, что размеры T_6, T_7 и T_9 вследствие их малости при обычных расчетах можно во внимание не принимать.

Расчетные зависимости можно получить аналогично предыдущему случаю.

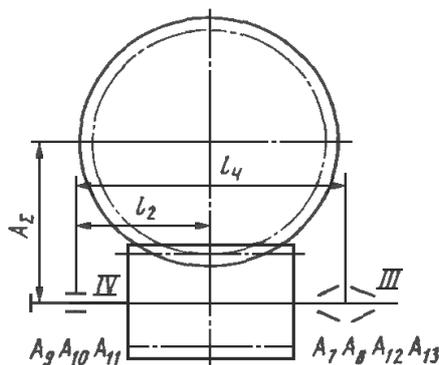
2.8.3. Червячные передачи

Межосевое расстояние. На рис. 2.33 приведены расчётные схемы червячной передачи. На рис. 2.33, а опоры червяка III и IV – радиально-упорные подшипники, поставленные «враспор». На рис. 2.33, б III – фиксирующая опора червяка (два радиально-упорных подшипника), IV – плавающая опора (радиальный подшипник). На схемах обозначены: A_1, A_3, A_7, A_9 – отклонения от соосности дорожек качения наружных колец подшипников вала колеса и вала червяка; A_2, A_4, A_8, A_{10} – зазоры между кольцами подшипников и отверстием корпусной детали (стакана); A_5, A_{11} – зазоры между телами качения и кольцами в подшипниках вала колеса и червяка, не воспринимающих внешнюю осевую нагрузку; A_6 – межосевое расстояние корпусной детали; A_{12} – отклонение от соосности внешнего цилиндра стакана и его отверстия; A_{13} – зазор между стаканом и отверстием корпуса. Размеры A_1, A_3, A_7, A_9 и A_{12} – векторные величины, остальные – скалярные.

Допуск исходного размера $T_{\Delta} = 2|f_{ar}|$, где показатель $\pm f_{ar}$ принимают по ГОСТ 3675–81.



а)



б)

Рис. 2.33. Схема к расчету линейных цепей червячной передачи:
 а – опоры червяка III и IV – радиально-упорные подшипники, поставленные «враспор»; б – III – фиксирующая опора червяка (два радиально-упорных подшипника), IV – плавающая опора (радиальный подшипник)

Допуски всех размеров, кроме A_6 , известны. Выполняя такие же действия, как для зубчатой цилиндрической передачи, определяют допуск и предельные отклонения размера A_6 , которые затем проставляют на чертеже корпуса.

Коэффициенты приведения размеров: $\xi_1 = \frac{l_k - l_1}{l_k}$;

$\xi_2 = \frac{l_k - l_1}{l_k} \cos \beta_1$; $\xi_3 = \frac{l_1}{l_k}$; $\xi_4 = \frac{l_1}{l_k} \cos \beta_2$; $\xi_5 = \frac{l_k - l_1}{l_k} \cos \beta_1$, если внешнюю осевую силу воспринимает подшипник опоры II, или $\xi_5 = \frac{l_1}{l_k} \cos \beta_2$, если внешнюю осевую силу воспринимает подшипник опоры I;

$$\xi_6 = 1,0; \xi_7 = \frac{l_2}{l_q}; \xi_8 = \frac{l_2}{l_q} \cos \beta_3;$$

$$\xi_9 = \frac{l_q - l_2}{l_k}; \xi_{10} = \frac{l_q - l_2}{l_q} \cos \beta_4; \xi_{11} = \frac{l_2}{l_q} \cos \beta_3,$$

если внешнюю осевую силу воспринимает подшипник опоры IV,
или

$$\xi_{11} = \frac{l_q - l_2}{l_q} \cos \beta_4,$$

если эту силу воспринимает подшипник опоры III;

$$\xi_{12} = \frac{l_2}{l_q}; \xi_{13} = \frac{l_2}{l_q} \cos \beta_3.$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – углы между направлениями векторов сил, действующих на опоры I, II, III, IV, и вертикальными плоскостями, проходящими через оси вала колеса и вала червяка.

Для размера A_7 , относящегося к опоре III с двумя рядом расположенными подшипниками, в расчетных зависимостях следует писать $0,5 \xi_7^2 K_7^2 T_7^2$.

Перекося осей валов. Допуск перекося осей вращения валов определяется:

$$T_{\Delta} = \frac{2|f_{\Sigma r}|L_0}{B},$$

где B – ширина зубчатого червячного венца колеса; $f_{\Sigma r}$ – отклонение межосевого угла передачи (ГОСТ 3675–81); L_0 – условная длина, равная 100, 150, 300, 500 мм или расстоянию между платиками опор червяка или колеса.

На рис. 2.34 обозначены: $\psi_1, \psi_2, \psi_7, \psi_8$ – отклонения от соосности дорожек качения наружных колец подшипников валов колеса и червяка; $\psi_3, \psi_4, \psi_9, \psi_{10}$ – зазоры между наружными кольцами подшипников и отверстием корпуса (стакана); ψ_5, ψ_{11} – зазоры между телами качения и кольцами подшипников вала колеса и червяка, не воспринимающих внешнюю осевую нагрузку; ψ_6 – угол между осями отверстий корпуса; ψ_{12} – отклонение от соосности внешнего цилиндра стакана и его отверстия; ψ_{13} – зазор в сопряжении стакана с корпусом.

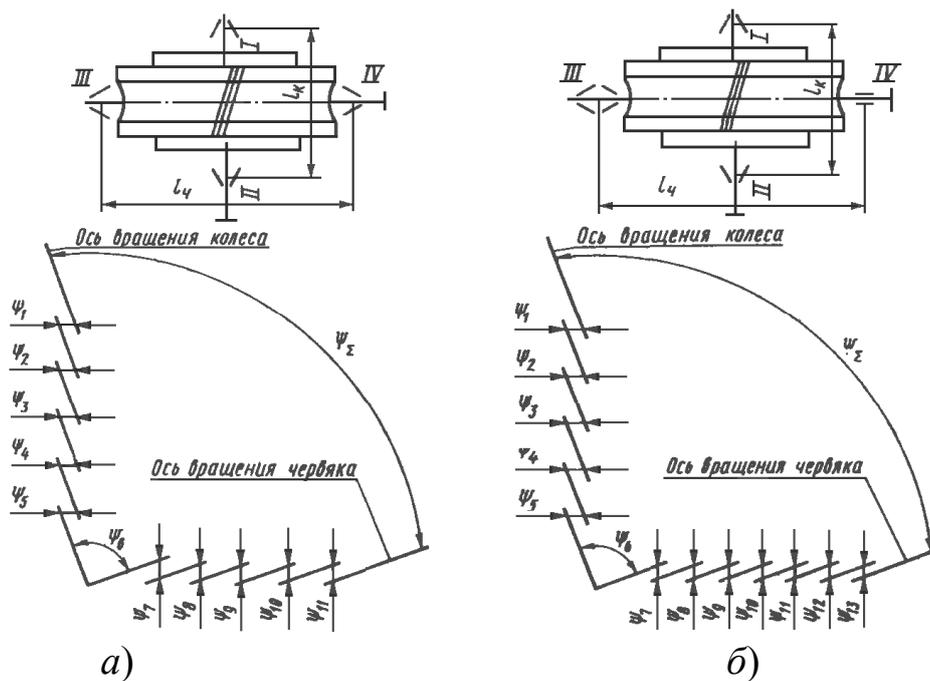


Рис. 2.34. Схема к расчету угловых размерных цепей червячной передачи: а – опоры червяка III и IV – радиально-упорные подшипники, поставленные «враспор»; б – III – фиксирующая опора червяка (два радиально-упорных подшипника), IV – плавающая опора (радиальный подшипник)

Коэффициенты приведения:

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{L_0}{l_k}; \xi_3 = \frac{L_0}{l_k} \sin \beta_1; \xi_4 = \frac{L_0}{l_k} \sin \beta_2; \xi_5 = \frac{L_0}{l_k} \sin \beta_1,$$

если внешнюю осевую силу P_0 воспринимает подшипник опоры I, или $\xi_5 = \frac{L_0}{l_k} \sin \beta_2$, если ее воспринимает подшипник опоры I, $\xi_6 = \frac{L_0}{L}$, где L – расстояние между платиками.

$$\xi_7 = \xi_8 = \xi_{12} = \frac{L_0}{l_q}; \xi_9 = \frac{L_0}{l_q} \sin \beta_3; \xi_{10} = \frac{L_0}{l_q} \sin \beta_4; \xi_{11} = \frac{L_0}{l_q} \sin \beta_3,$$

если P_0 воспринимает подшипник опоры IV; $\xi_{11} = \frac{L_0}{l_q} \sin \beta_4$,

если P_0 воспринимает подшипник опоры III; $\xi_{13} = \frac{L_0}{l_q} \sin \beta_4$.

Для ψ_7 в расчетных зависимостях следует использовать $0,5\xi_7^2 K_7^2 T_7^2$.

Допуски всех размеров известны, поэтому, делая переходы, аналогичные выполненным для зубчатых или конических передач, определяют допуск и предельные отклонения размера ψ_6 , которые просят на чертеже корпусной детали.

Совпадение средней плоскости зубчатого червячного венца колеса с осью вращения червяка. По ГОСТ 3675–81 одним из показателей, обеспечивающих выполнение норм контакта, является предельное смещение $\pm f_x$ средней плоскости зубчатого червячного венца колеса в передаче. Допуск смещения средней плоскости червячного колеса в передаче $T_\Delta = 2|f_x|$ следует рассматривать как допуск расстояния между средней плоскостью червячного колеса и плоскостью, перпендикулярной его оси и проходящей через ось червяка в собранной передаче.

Требуемую точность осевого положения червячного колеса обеспечивают применением компенсаторов.

На рис. 2.35 приведена расчетная схема P . На схеме обозначены: $P_\Delta = P_\Sigma$ – исходный размер – расстояние между средней плоскостью зубчатого червячного венца колеса и осью червяка; P_1 – расстояние в корпусе между осью отверстий под подшипники вала червяка и пластиком; P_2 – размер компенсатора; P_3 – расстояние между торцами крышки подшипника; P_4 – монтажная высота конического роликоподшипника; P_5 – расстояние между буртиками вала; P_6 – расстояние между средней плоскостью зубчатого червячного венца колеса и торцом ступицы.

Для расчетной схемы P коэффициенты приведения: $\xi_1 = \xi_2 = -1,0$; $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 1,0$.

На этом же рисунке показана расчетная схема H , определяющая осевой зазор подшипников вала колеса. Требуемая величина зазора достигается применением компенсаторов. На рис. 2.35 обозначены: $H_\Delta = H_\Sigma$ (исходный размер) – осевой зазор подшипников; H_1, H_5, P_3 – расстояния между торцами крышек подшипников; H_2, H_4, P_2 – размер компенсатора; H_3 – расстояние между платиками корпусной детали; H_{10}, H_6, P_4 – монтажная высота конического роликоподшипника; H_7, P_5 – расстояние между буртиками вала; H_8 – длина ступицы червячного колеса; H_9 – размер дистанционной втулки.

Коэффициенты приведения для схемы H :

$$\xi_1 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_7 = \xi_8 = \xi_9 = \xi_{10} = -1,0; \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1,0.$$

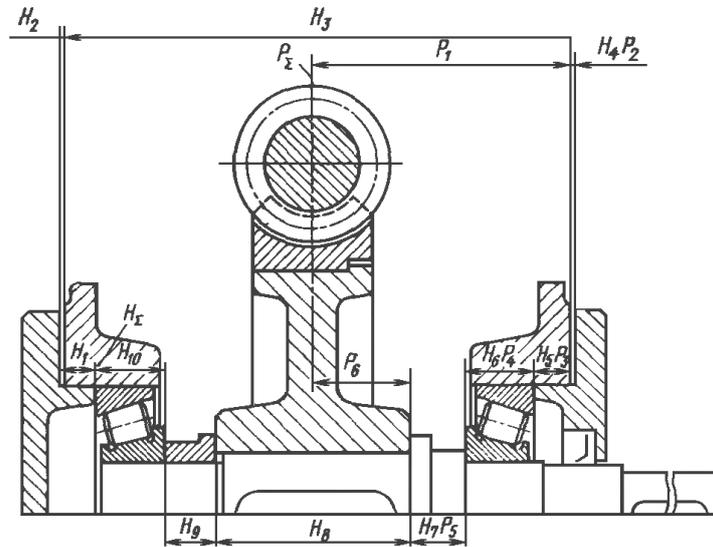


Рис. 2.35. Схема к расчету линейной размерной цепи червячной передачи

Как видно, некоторые размеры входят в обе расчетные схемы. В связи с этим окончательные размеры компенсатора следует выбирать таким образом, чтобы была обеспечена возможность регулирования компенсатором в необходимых пределах как зацепления, так и осевого зазора подшипников.

Расчетная схема H. Рекомендуемый осевой зазор для конических однорядных роликовых подшипников, устанавливаемых по одному в каждой опоре (ряд 2), $\frac{+0,150}{+0,080}$ мм. Таким образом, характеристики исходного размера: $em_{\Delta} = 0,115$ мм; $T_{\Delta} = 0,070$ мм.

Для удобства расчетов примем, что все прокладки для регулирования подшипников описываются размером H_4 . Размер H_2 , таким образом, из рассмотрения исключается.

Так как число влияющих размеров больше пяти, примем $K_{\Delta} = 1,0$.

Поскольку вначале номинальный размер компенсатора для регулирования подшипников неизвестен, то и размер дистанционной втулки наметим ориентировочно: $H_9 \approx 32$ мм.

Толщина первой самой тонкой прокладки по условию: $h \leq 0,007/1$.

С учетом того, что компенсатор для схем P и H один и тот же, назначим в качестве прокладки ленту медную: $h_1 = 0,05 \pm 0,01$ мм.

Составим расчетную табл. 2.7.

Примем для предварительных расчетов допуск на суммарный набор прокладок $T_4 = 0,1$ мм. Тогда расчетный допуск:

$$T'_\Delta = 1,2\sqrt{2 \cdot 0,21^2 + 0,52^2 + 0,1^2 + 2 \cdot 0,5^2 + 0,35^2 + 2 \cdot 0,25^2} = 1,26 \text{ мм.}$$

Таблица 2.7

Результаты расчета размерной цепи H

Размер	ξ	Характеристики размеров						Коэффициенты	
		известные			расчетные			α	K
		Y_{ei}^{es}	em	T	Y'_{ei}^{es}	em'	T'		
H_Δ	—	$0^{+0,150}_{+0,080}$	0,115	0,070	—	—	—	0	1
H_1	-1	—	—	—	$24 \pm 0,105$	0	0,21	0	1,2
H_3	+1	$260_{-0,52}$	0,26	0,52	—	—	—	0,1	
H_4	+1	—	—	—	$0,65^{+0,613}_{-0,647}$	-0,017	1,26	0	
H_5	-1	—	—	—	$24 \pm 0,105$	0	0,21	0	
H_6	-1	—	—	—	$23,75 \pm 0,25$	0	0,5	0	
H_7	-1	—	—	—	$32,75_{-0,25}$	-0,125	0,25	0,1	
H_8	-1	$100_{-0,35}$	-0,175	0,35	—	—	—	0,1	
H_9	-1	—	—	—	$32,4_{-0,25}$	-0,125	0,25	0,1	
H_{10}	-1	—	—	—	$23,75 \pm 0,25$	0	0,5	0	

Номинальный размер прокладок $Y_k = \frac{0,5 \cdot 1,26}{1} = 0,63$ мм.

Примем номинальные размеры $Y_4 = 0,65$ мм и $Y_9 = 32,4$ мм.

Следует отметить, что выполнение условия $Y_\Delta = Y'_\Delta$ должно достигаться за счет тех размеров, которые входят только в схему H .

$$Y'_\Delta = -24 + 260 + 0,65 - 24 - 23,75 - 32,75 - 100 - 32,4 - 23,75 = 0.$$

Среднее отклонение компенсатора:

$$em'_k = 1(-0,26 + 0,1 \cdot 0,52) - 1(-0,125 + 0,1 \cdot 0,25) - 1(-0,175 + 0,1 \cdot 0,35) - 1(-0,125 + 0,1 \cdot 0,25) = 0,132 \text{ мм.}$$

Расчетная координата середины поля допуска компенсатора:

$$em'_k = \frac{1}{1}(0,115 - 0,132) = -0,017 \text{ мм.}$$

Наибольший размер компенсатора:

$$Y'_{\text{кmax}H} = 0,65 - 0,017 + 0,5 \cdot 1,26 = 1,26 \text{ мм.}$$

Формируем набор прокладок: $h_1 = 0,05$ мм; $h_2 = 0,1$ мм; $h_3 = 0,2$ мм; $h_4 = 0,4$ мм; $h_5 = 0,8$ мм.

2.9. Моделирование технологических процессов размерными цепями

2.9.1. Анализ размеров деталей

На рис. 2.36, *а* приведена схема настройки фрезы для обработки поверхностей M и на размер H . Здесь настроечной базой является поверхность N , которая совпадает с технологической базой. На рис. 2.36, *б* приведена схема обработки двух поверхностей 1 и 2 одновременно двумя фрезами. Здесь для настройки фрезы на размер H используется технологическая база N , а для настройки второй фрезы на размер h используется поверхность 2 , обработанная первой фрезой. Поверхность 2 в этом случае является настроечной базой.

На рис. 2.36, *в* приведена схема обработки ступенчатого валика на многолезцовом токарном полуавтомате. Здесь для обработки поверхности 1 в качестве настроечной базы используется технологическая база N , а для настройки остальных двух резцов, обрабатывающих поверхности 2 и 3 , используется обработанная поверхность 1 , полученная первым резцом. Для этого случая можно было бы осуществить настройку инструментов на размер по схеме, приведенной на рис. 2.36, *г*. Однако такая настройка режущих инструментов нерациональна, так как в случае необходимости регулировки одного резца потребуется перестановка всех резцов, связанных друг с другом цепочкой размеров.

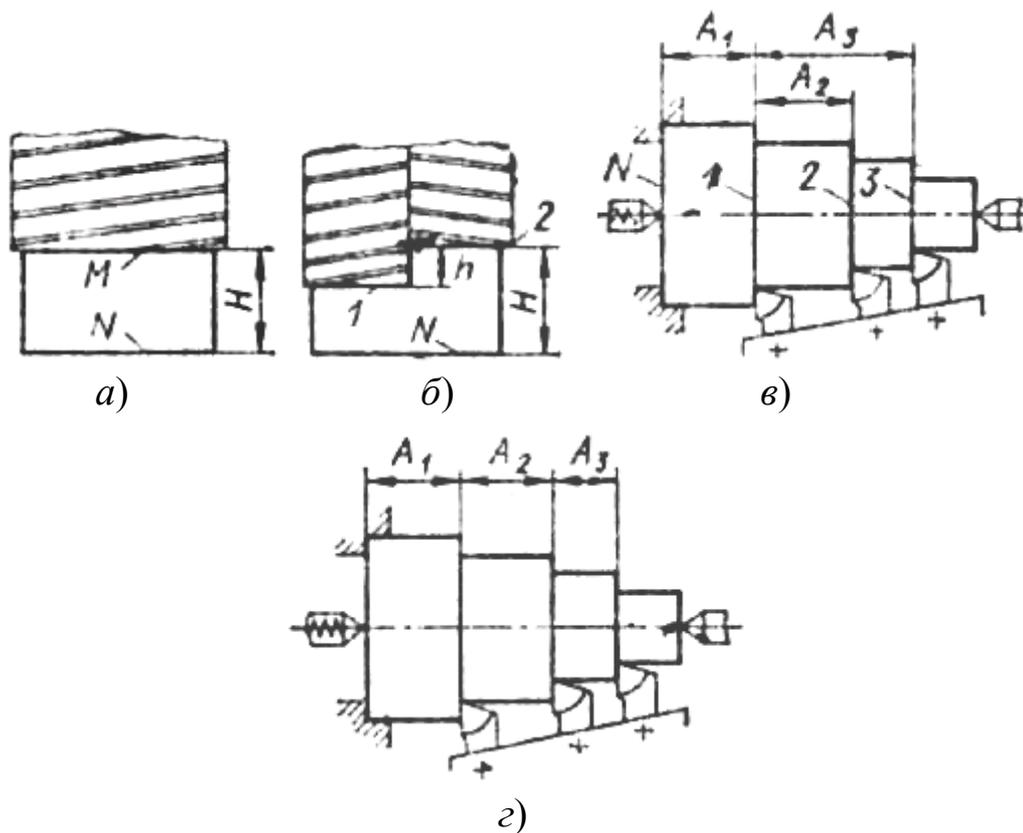


Рис. 2.36. Схемы настройки режущих инструментов:
a – при обработке фрезой; *б* – при обработке двумя фрезами;
в – при обработке на многорезцовом токарном полуавтомате;
г – при настройке размеров цепным методом

При настройке же по схеме рис. 2.36, *в* регулировка второго и третьего резцов не зависит от их взаимного положения.

Технологические и настроечные базы могут совпадать или не совпадать с конструкторскими базами, т. е. с поверхностями, от которых указаны размеры на чертеже детали. При несовпадении технологических и настроечных баз с конструкторскими технолог вынужден производить пересчет размеров и допусков от принятых технологических и настроечных баз и устанавливать на операционном эскизе обрабатываемой детали технологические размеры. Если на конструкторские размеры установлены жесткие допуски, то пересчет размеров от новых баз может привести к трудновыполнимым допускам на технологические размеры.

В этом случае необходимо пересмотреть совместно с конструктором простановку размеров на чертеже детали или ввести дополнительную обработку для той поверхности, из-за которой возникают трудности выполнения технологических размеров.

Например, при обработке валика (рис. 2.37, а) на автомате или револьверном станке пришлось бы пересчитать размеры и допуски, так как настроечная база 3 не совпадает с конструкторской (поверхность 1). По чертежу замыкающим звеном подетальной размерной цепи является размер $A_{\Delta} = A_2 - A_1 = 80 - 30 = 50$ мм, и допуск на него будет равен сумме допусков на размеры A_1 и A_2 .

Для того чтобы обеспечить заданные допуски на размеры A_1 и A_2 , необходимо вести обработку детали в следующем порядке. Сначала надо отрезать заготовку на размер $A_2 = 80_{-0,2}$ мм, затем обработать поверхность 2, выдержав размер A_1 от поверхности 1, и размер A_{Δ} получится сам собой.

При обработке этой детали на автомате или револьверном станке такая последовательность невозможна. В данном случае настроечной базой будет поверхность 3, поэтому сначала нужно обточить поверхность 2 на размер $A = 80 - 30 = 50$ мм, выдерживая его от поверхности 3, а затем отрезать деталь в размер A_2 по чертежу. Здесь настроечная база не совпадает с конструкторской и при указанной последовательности обработки поверхностей детали замыкающим звеном технологической размерной цепи будет уже не размер A_{Δ} , а размер A_1 , который получается сам собой в результате выполнения размеров A_{Δ} и A_2 .

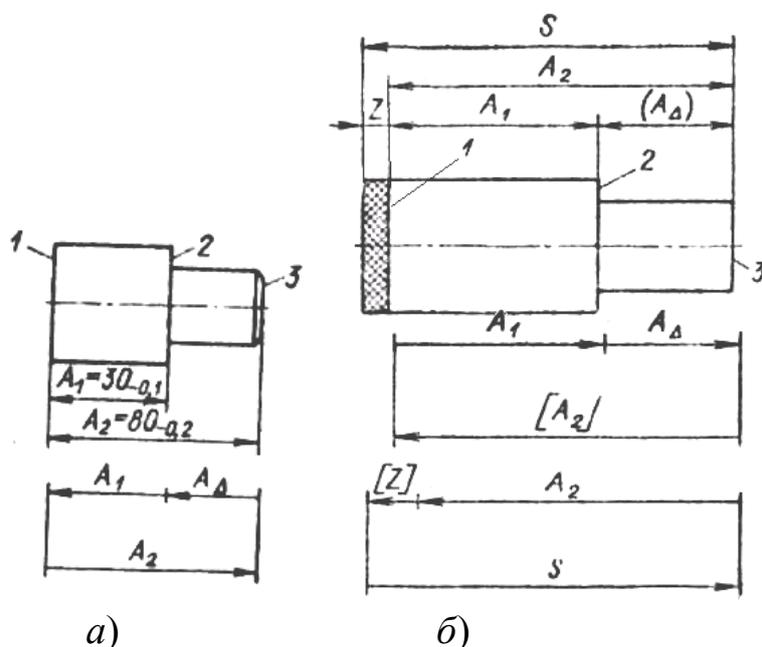


Рис. 2.37. Схемы технологических размерных цепей при обработке валика на револьверном станке:
а – на одной операции; б – на двух операциях

Чтобы обеспечить заданный по чертежу (рис. 2.37, а) допуск на размер A_1 , равный $T_{A_1} = 0,1$ мм, пришлось бы установить трудновыполнимые допуски на размеры A_Δ и A_2 , так как необходимо, чтобы выполнялось условие $T_{A_1} = \sum T_i$ или $0,1 = T_{A_\Delta} + T_{A_2}$. Для этого потребовалось бы, например, принять $T_{A_\Delta} = T_{A_2} = 0,05$ мм, что для автомата или револьверного станка практически невыполнимо. Поэтому возникает необходимость ввести дополнительную обработку поверхности I с использованием для этой операции в качестве настроечной базы поверхность 2 , оставив припуск Z на поверхности I (рис. 2.37, б). При такой схеме обработки валика в две операции замыкающим звеном технологической размерной цепи будет размер T_{A_2} , так как размер A_Δ обеспечивается на первой операции, размер A_1 – на второй, а размер A_2 получается сам собой (рис. 2.37, б). В этом случае необходимо установить такой допуск на размер A_Δ , чтобы выполнялось равенство: $T_{A_2} = T_{A_\Delta} - T_{A_1}$ или $0,2 = 0,1 + T_{A_\Delta}$, откуда $T_{A_\Delta} = 0,1$ мм. Этот допуск является выполнимым при обработке на автомате или револьверном станке.

При схеме обработки валика в две операции возникает необходимость в определении промежуточного технологического размера S (рис. 2.37, б). Для этого нужно рассчитать технологическую размерную цепь, в которой замыкающим звеном является припуск $Z = S - A_2$.

Рассмотренный пример показывает, что размеры, установленные конструктором на чертеже детали, уже предопределяют последовательность обработки отдельных поверхностей, связанных между собой линейными размерами. Но эта последовательность не всегда бывает выполнима при обработке заготовки детали на настроенных станках, так как технологические и настроечные базы не всегда могут совпадать с конструкторскими базами. В связи с этим возникает необходимость при проектировании технологических процессов устанавливать технологические размеры для выполнения отдельных операций и переходов.

Определение технологических размеров и допусков на них должно производиться на основе выявления и расчета технологических размерных цепей, выражающих связь размеров обрабатываемой детали по мере выполнения технологического процесса. Однако в результате расчета технологических размерных цепей может оказаться, что принятая последовательность обработки отдельных поверхностей заготовки детали является нерациональной, так как допуски на техноло-

гические размеры получаются трудновыполнимыми. В этом случае необходимо пересмотреть порядок обработки поверхностей детали и установить такой, при котором осуществлялась бы возможность максимального совмещения технологических, настроечных и конструкторских баз.

Таким образом, размерный анализ технологических процессов на основе выявления и расчета технологических размерных цепей позволяет не только устанавливать технологические размеры и допуски на них, но и более обоснованно разделить процесс на операции и переходы.

Некоторые поверхности заготовок деталей могут подвергаться обработке на нескольких переходах или операциях в зависимости от требуемой шероховатости и точности обработки. В этом случае оставляется припуск на последующий переход или операцию и устанавливается необходимый промежуточный технологический размер. Для определения этого размера необходимо рассчитать технологическую размерную цепь, у которой замыкающим звеном является припуск. Припуск должен быть предварительно установлен либо в виде минимального, либо в виде номинального его значения по соответствующим справочникам технолога. Если замыкающим звеном технологической размерной цепи является минимальное значение припуска, то в результате расчета такой цепи определяется не только технологический размер, но также номинальное и максимальное значения припуска. Если же замыкающим звеном технологической размерной цепи является номинальное значение припуска, то в результате ее расчета определяются кроме технологического размера также предельные значения припуска. В результате последовательного расчета технологических размерных цепей, у которых замыкающими звеньями являются припуски, производится наиболее правильное определение размеров заготовки.

Таким образом, в задачи размерного анализа технологических процессов входит определение:

- 1) технологических размеров и допусков на них для каждого технологического перехода;
- 2) предельных отклонений размеров припусков и расчет размеров заготовок;
- 3) наиболее рациональной последовательности обработки отдельных поверхностей детали, обеспечивающей требуемую точность размеров длин.

Решение всех этих задач возможно лишь на основании выявления и расчета технологических размерных цепей. Для выявления технологических размерных цепей необходимо предварительно разработать технологический процесс обработки заготовки детали и на его основе составить размерную схему процесса.

2.9.2. Методика выявления технологических размерных цепей по размерной схеме технологического процесса

Размерная схема технологического процесса составляется и оформляется следующим образом. Вычерчивается эскиз детали в одной или двух проекциях, в зависимости от ее конфигурации. Для тел вращения достаточно одной проекции, при этом можно вычертить только половину детали по оси симметрии. Для корпусных деталей может потребоваться две или даже три проекции в зависимости от расположения размеров длин.

Над деталью указываются размеры длин с допусками, заданные конструктором. Для удобства составления размерных цепей конструкторские размеры обозначаются буквой A_i , где i – порядковый номер конструкторского размера. На эскиз детали условно наносятся припуски Z_m , где m – номер поверхности, к которой относится припуск. Все поверхности детали нумеруются по порядку слева направо. Если в задачи технолога не входит определение размеров заготовок и общих припусков и он имеет дело уже с готовыми размерами заготовок, то нумеруются только те поверхности, которые образуются после выполнения каждого технологического перехода, а из необработанных нумеруются только те поверхности, которые используются в качестве технологических баз на первых операциях. Через пронумерованные поверхности проводятся вертикальные линии. Пример построения размерной схемы показан на рис. 2.38. Между вертикальными линиями, снизу вверх, указываются технологические размеры, получаемые в результате выполнения каждого технологического перехода. Технологические размеры обозначаются буквой S_k , где k – порядковый номер перехода. Размеры заготовки обозначаются буквой Z_r , где r – порядковый номер поверхности заготовки. Справа от размерной схемы для каждой операции составляются схемы технологических размерных цепей.

Если технологический размер совпадает с конструкторским, то получаем двухзвенную размерную цепь.

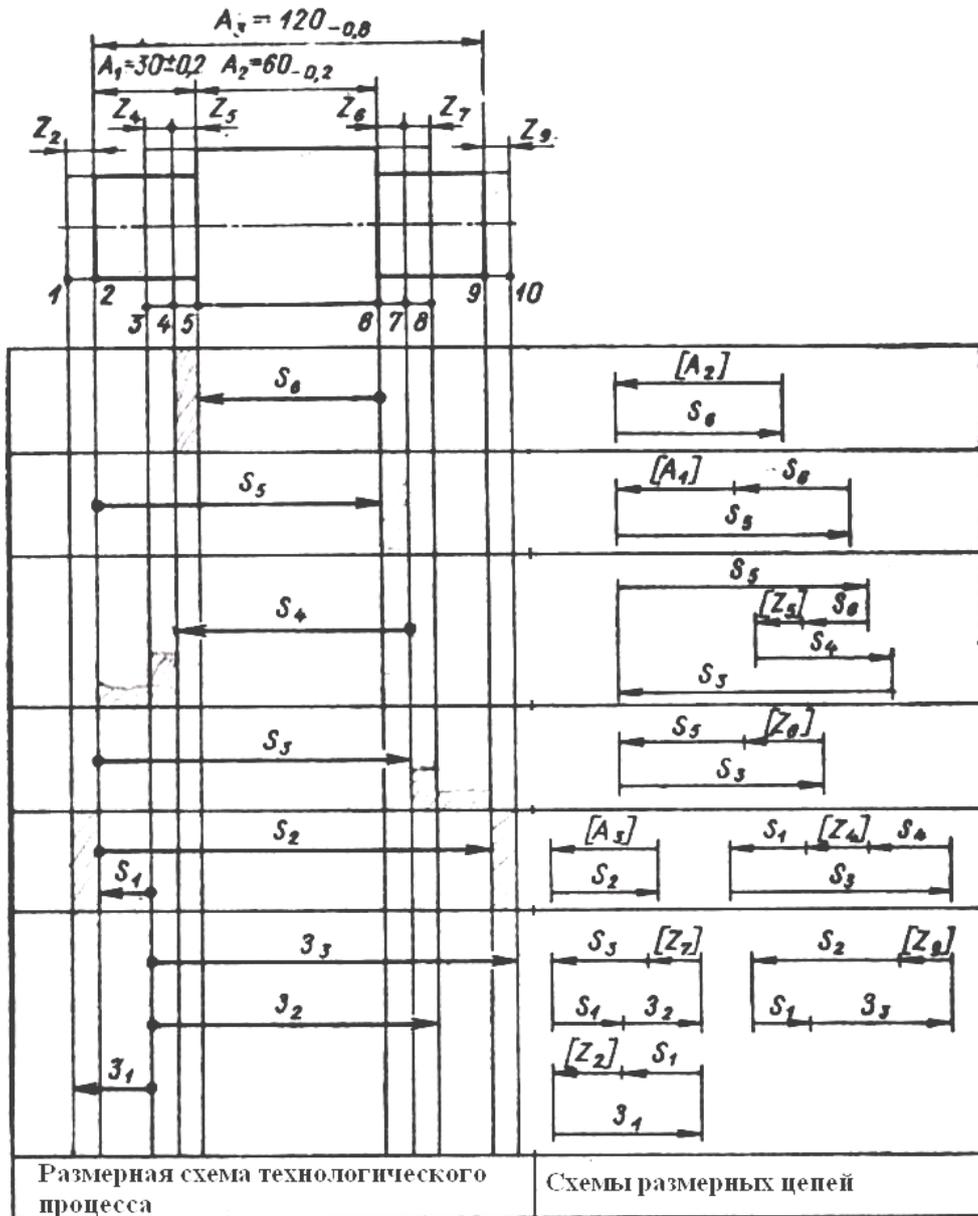


Рис. 2.38. Размерный анализ технологического процесса обработки ступенчатого вала

Замыкающие звенья на всех схемах размерных цепей заключаются в квадратные скобки. Выявление размерных цепей по размерной схеме начинается с последней операции, т. е. по схеме сверху вниз. В такой же последовательности производится и расчет размерных цепей. При этом необходимо, чтобы в каждой новой цепи был неизвестен только один размер.

В рассматриваемом примере (рис. 2.38) на последней операции 5 выполняется размер S_6 , который совпадает с конструкторским размером A_2 , поэтому для его определения составлена двухзвенная раз-

мерная цепь. Технологический размер S_5 вместе с размером S_6 , и конструкторским размером A_1 , образуют замкнутый контур, т. е. размерную цепь. В этой цепи размер S_6 будет выполнен, размер S_5 выполняется, а размер A_1 получится сам собой, т. е. является замыкающим звеном. В результате расчета этой цепи определится размер, допуск и предельные отклонения размера S_5 . Технологический размер S_4 определится из размерной цепи, представляющей замкнутый контур размеров S_6, S_5, S_4, S_3 и Z_5 . Замыкающим звеном этой цепи является припуск Z_5 . Однако в эту размерную цепь входит размер S_3 , который необходимо предварительно определить. Размер S_3 определится из технологической размерной цепи для операции 2 (рис. 2.38), состоящей из размеров S_3, S_5 и Z_6 . Замыкающим звеном цепи будет размер припуска Z_6 . Технологический размер S_2 совпадает с конструкторским размером A_3 и определяется из двухзвенной размерной цепи. Для определения размера S_1 составлена размерная цепь из размеров S_3, S_4, S_1 и Z_4 . Замыкающим звеном этой цепи будет припуск Z_4 . Аналогично выявляются размерные цепи и составляются схемы для определения размеров заготовки Z_1, Z_2 и Z_3 .

На основании составленных схем размерных цепей производится определение типов составляющих звеньев и составление исходных уравнений, а затем их расчет. Для рассматриваемого примера исходные уравнения в последовательности их расчета приведены ниже.

1. $A_2 = S_6$, определяется размер S_6 .
2. $A_1 = S_5 - S_6$, то же S_5 .
3. $Z_6 = S_3 - S_5$ » S_3 .
4. $Z_5 = S_4 + S_5 - S_6 - S_3$ » S_4 .
5. $A_3 = S_2$ » S_2 .
6. $Z_4 = S_3 - S_1 - S_4$ » S_1 .
7. $Z_2 = Z_1 - S_1$ » Z_1 .
8. $Z_7 = S_1 + Z_2 - S_3$ » Z_2 .
9. $Z_9 = S_1 + Z_3 - S_2$ » Z_3 .

Выявление размерных цепей непосредственно по размерной схеме технологического процесса в ряде случаев может оказаться весьма трудоемкой задачей, так как технологические размерные цепи часто являются связанными размерными цепями. Поэтому необходимо, чтобы в каждой размерной цепи был только один конструкторский размер или один размер припуска, которые являются замыкающими

звеньями технологических размерных цепей. Примером такой трудной для выявления размерной цепи служит цепь с замыкающим звеном Z_5 . Трудности выявления технологических размерных цепей непосредственно по размерной схеме объясняются тем, что они выступают на схемах не явно, а в скрытом виде. Поэтому выявление их носит чисто умозрительный характер. Процесс выявления технологических размерных цепей можно значительно упростить и облегчить, используя для этой цели теорию графов.

2.9.3. Моделирование технологических размерных цепей при помощи графов

Деталь в процессе ее изготовления можно рассматривать как геометрическую структуру, состоящую из множества поверхностей и связей (размеров) между ними. Поэтому такую структуру целесообразно изучать при помощи графов. Приоритет в области использования методов теории графов для выявления и расчета технологических размерных цепей принадлежит Б. С. Мордвинову [6].

Графом называется фигура, состоящая из точек и линий, соединяющих эти точки. Точки называются вершинами, а линии, их соединяющие, называются дугами или ребрами графа. Ребро называется ориентированным, если на нем имеется стрелка, указывающая, из какой вершины оно исходит и в какую вершину входит. Если такой стрелки нет на ребре, то оно называется неориентированным. На рис. 2.39, *а* приведены примеры ориентированного и неориентированного ребер E .

Граф называется ориентированным или неориентированным в зависимости от названий ребер. Если пару вершин можно соединить несколькими ребрами, то такие ребра называются кратными (рис. 2.39, *б*) Последовательность ребер E , в которой два соседних ребра имеют общую вершину, называется маршрутом U . На рис. 2.39, *в* ребра E_1 и E_2 имеют общую вершину 2, а ребра E_2 и E_3 имеют общую вершину 3. Маршрут $U = E_1 + E_2 + E_3$.

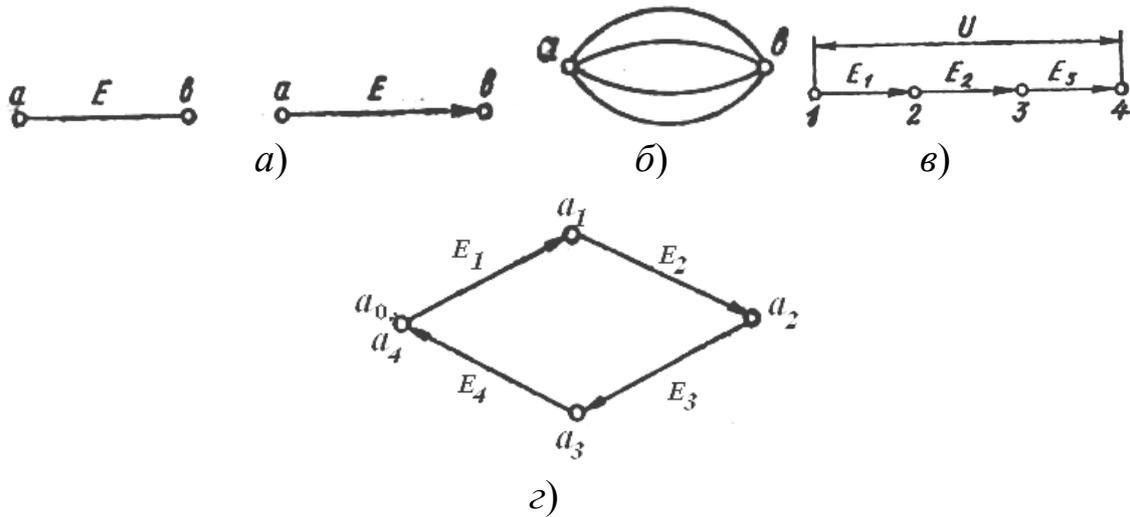


Рис. 2.39. Эскизы графов:

a – неориентированные и ориентированные ребра графа; b – кратные ребра;
 v – маршрут графа; z – циклический граф

Если начало и конец маршрута находятся в одной вершине, то такой маршрут называется циклическим (рис. 2.39). Если в каждом маршруте каждое ребро встречается только по одному разу, то такой маршрут называется цепью. Если цепь замкнута, т. е. начинается и оканчивается в одной и той же вершине, то она называется циклом. Если каждую вершину можно соединить с любой другой вершиной некоторой цепью, то граф называется связным.

Связной граф, не содержащий циклов и не имеющий кратных ребер, называется деревом. Для каждой пары вершин существует единственная соединяющая их цепь. Для того чтобы построить дерево, необходимо выбрать какую-либо вершину A_0 (рис. 2.40) и из нее провести ребра к вершинам A_1 , A_2 и A_3 , а из них провести ребра к A_{11} , A_{12} , A_{13} и т. д. Первоначально выбранная вершина A_0 называется корнем дерева. Построение дерева может начинаться с любой вершины, поэтому любая вершина может служить корнем дерева.

Так как дерево не имеет циклов, то различные цепи (ветви), выходящие из A_0 , будут изолированы друг от друга как ветви настоящего дерева. Каждая ветвь такого графа должна иметь последним ребро с конечной вершиной, из которой уже не выходит ни одного ребра. Поэтому дерево с n вершинами имеет всегда $(n - 1)$ ребро.

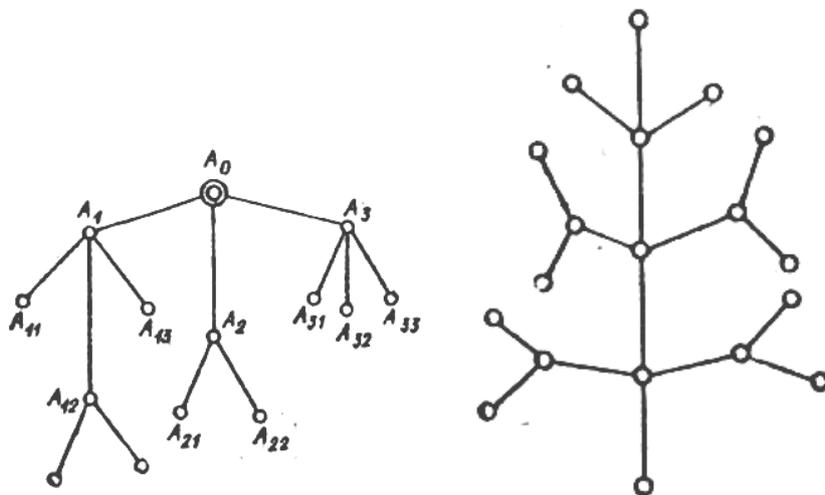


Рис. 2.40. Два вида графа-дерева

Если принять поверхности заготовки и детали за вершины, связи между ними (размеры) за ребра, то чертеж детали с конструкторскими и технологическими размерами можно представить в виде двух деревьев. Дерево с конструкторскими размерами и размерами припусков на обработку называется исходным, а дерево с технологическими размерами называется производным или технологическим. Если теперь оба дерева совместить, то такой совмещенный граф позволяет в закодированной форме представить геометрическую структуру технологического процесса обработки детали и является его математической моделью. В таком графе все размерные связи и технологические размерные цепи из неявных превращаются в явные. Появляется возможность, не прибегая к помощи чертежа, а пользуясь только той информацией, которую несет граф, производить все необходимые исследования и расчеты.

Любой замкнутый контур на совмещенном графе, состоящий из ребер исходного и производного дерева, образует технологическую размерную цепь. В этой цепи ребро исходного дерева является замыкающим звеном, а ребра производного дерева – составляющими звеньями. В терминах теории графов размерная цепь – это путь в производном дереве, заданный ребром исходного дерева. Чтобы указать путь, надо перечислить ребра, по которым надлежит идти. Если известны длины ребер (размеры, допуски) производного дерева в данной цепи, то можно найти и длину пути, т. е. размер или допуск замыкающего звена.

Каждая размерная цепь образует цикл. В каждой размерной цепи одно ребро должно быть ребром исходного дерева (конструк-

торский размер или припуск), а остальные ребра – ребрами производного дерева, т. е. технологическими размерами. Кратчайшим циклом является цикл из двух ребер. Ему соответствует двухзвенная размерная цепь, в которой ребро исходного дерева (конструкторский размер) является замыкающим звеном, а ребро производного дерева (технологический размер) – составляющим звеном.

Для построения графа размерных цепей необходимо предварительно построить размерную схему технологического процесса (рис. 2.38). Для этой схемы покажем порядок построения графа размерных цепей (рис. 2.41).

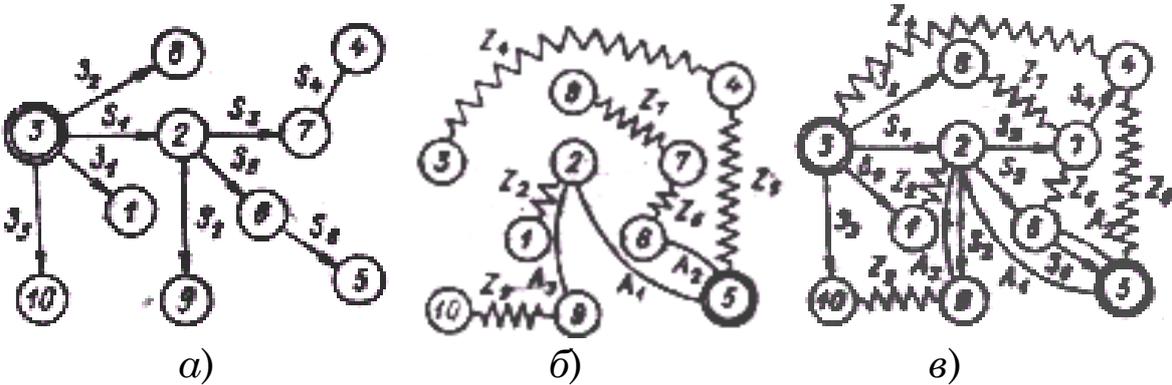


Рис. 2.41. Графы: а – производный; б – исходный; в – совмещенный

Сначала строится производное дерево графа, затем исходное дерево и после этого производится совмещение деревьев. В результате совмещения деревьев получается граф технологических размерных цепей. Вершины (поверхности) обозначаются окружностями, внутри которых указывается их номер. Ребра производного дерева изображаются в виде прямых линий со стрелками на конце, показывающими, в какую вершину они входят. Ребра исходного дерева изображаются в виде дуг, если они являются конструкторскими размерами, или в виде волнистых линий, если они являются размерами припусков.

Для построения производного дерева в качестве корня следует выбирать вершину (поверхность), к которой по размерной схеме процесса не подходит ни одна стрелка. На рис. 2.41 такой вершиной является поверхность 3, из нее проводятся те ребра, которые касаются ее своими неориентированными концами. Такими ребрами являются ребра (размеры) S_1, Z_1, Z_2 и Z_3 (рис. 2.41, а). На ориентированных концах этих ребер необходимо указать в виде окружностей вершины (поверхности), в которые они упираются своими стрелками. Такими

вершинами являются поверхности 1, 2, 5 и 10. Из вершин 1, 8 и 10 никаких ребер не выходит, а из вершины 2 выходят ребра S_2 , S_3 и S_5 . Ребро S_2 упирается своими ориентированными концами, в вершину 9, из которой никаких ребер не выходит. Из вершины 2 выходят ребра S_5 и S_3 , которые упираются своими ориентированными концами, соответственно, в вершины 6 и 7. Из вершин 6 и 7 выходят ребра S_6 и S_4 , которые упираются своими ориентированными концами в вершины 5 и 4. Из вершин 5 и 4 уже никаких ребер не выходит. На этом построение производного дерева заканчивается.

Аналогично строится исходное дерево, построение которого приведено на рис. 2.41, б. Ребра исходного дерева можно не ориентировать, поэтому при построении его можно выбирать в качестве корня любую вершину, т. е. любую поверхность на чертеже готовой детали. В рассматриваемом примере в качестве корня исходного дерева принята поверхность (вершина) 5. Порядок расположения вершин на исходном дереве должен быть таким же, как на производном дереве. Ребра исходного дерева в отличие от ребер производного дерева, как было указано ранее, изображаются в виде дуг и волнистых линий. Дуги обозначают конструкторские размеры, а волнистые линии – размеры припусков. Так как четыре ребра исходного дерева не ориентированы, то они указывают лишь на то, какие вершины дерева связаны между собой конструкторскими размерами или размерами припусков. В рассматриваемом примере поверхность 5 связана с поверхностью 2 размером A_1 , кроме этого поверхность 5 связана с поверхностью 6 размером A_1 . Поэтому на графе исходного дерева вершина 5 соединена с вершиной 2 дугой A_1 , а с вершиной 6 – дугой A_2 . Поверхность 2 на чертеже детали связана с поверхностью 9 размером A_3 , поэтому на графе вершина 2 соединена с вершиной 9 дугой A_3 . Поверхности 5 и 4, а затем поверхности 4 и 3 связаны между собой размерами припусков Z_5 и Z_4 . Поэтому на графе исходного дерева вершина 5 связана с вершиной 4 ребром в виде волнистой линии, обозначенной Z_5 , а вершина 4 связана с вершиной 3 ребром Z_4 . Аналогично обозначается на графе связь вершины 6 с вершиной 7 ребром Z_6 , вершины 7 с вершиной 8 ребром Z_7 , вершины 2 с вершиной 1 ребром Z_2 и вершины 9 с вершиной 10 ребром Z_9 .

После построения каждого дерева производится проверка правильности их построения.

1. Число вершин у каждого дерева должно быть равно числу поверхностей на размерной схеме технологического процесса.

2. Число ребер у каждого дерева должно быть одинаковым и равно числу вершин без единицы.

3. К каждой вершине производного дерева, кроме корневой, должна подходить только одна стрелка ориентированного ребра, а к корневой вершине – ни одной стрелки.

4. Деревья не должны иметь разрывов и замкнутых контуров.

После проверки правильности построения деревьев производится их совмещение так, чтобы вершины с одинаковыми порядковыми номерами совпали. Практически два дерева отдельно не строят, а поступают так: сначала строят производное дерево, а затем на нем же строят исходное дерево, в результате чего замыкание деревьев происходит само собой.

При построении деревьев необходимо так располагать вершины, чтобы при их совмещении по возможности не произошло пересечение ребер. Граф с совмещенными деревьями приведен на рис. 2.41, в. Совмещенный граф производного и исходного деревьев и будет графом технологических размерных цепей.

Любой замкнутый контур совмещенного графа образует размерную цепь, у которой ребро исходного дерева является замыкающим звеном, а ребра производного дерева – составляющими звеньями. Например, на рис. 2.41, в ребра Z_1 , S_1 и Z_2 образуют замкнутый контур, т. е. размерную цепь, у которой ребра Z_1 и S_1 являются составляющими звеньями, а ребро Z_2 – замыкающим звеном. Замкнутый контур из ребер A_1 , S_5 и S_6 образует новую размерную цепь, у которой замыкающим звеном является ребро A_1 , а составляющими звеньями – ребра S_5 и S_6 .

Так как в размерной цепи может быть только одно звено замыкающим, а в качестве такого в технологической размерной цепи является только конструкторский размер или припуск, то при выявлении размерных цепей по графу необходимо выбирать такие контуры, в которых бы содержалось только по одному ребру исходного дерева, а остальные ребра принадлежали бы производному дереву. Например, на рис. 2.41, в ребра Z_5 , Z_2 , S_1 , S_5 и Z_6 образуют замкнутый контур, но в нем два ребра Z_5 и Z_6 принадлежат исходному дереву, поэтому такой контур не должен использоваться в качестве технологической размерной цепи. В данном случае следует рассмотреть два контура или две размерных цепи, а именно замкнутый контур из ребер Z_7 , Z_2 , S_1 и S_8 и контур из ребер Z_1 , S_5 и S_3 . Точно так же цепь, состоящую из ребер (звеньев) Z_4 , Z_2 , Z_7 , и S_4 , следует разбить на две цепи, у одной из

которых замыкающим звеном будет Z_1 , а у другой – Z_7 . Общее число размерных цепей на графе должно быть равно числу технологических размеров по размерной схеме процесса.

Вместе с выявлением технологических размерных цепей необходимо по графу определить также знаки составляющих звеньев. Определение знаков составляющих звеньев цепи производится по следующему правилу. Замыкающему звену присваивается знак минус и, начиная от этого звена, производят обход замкнутого контура, т. е. обход составляющих звеньев в определенном направлении. Так как ребро замыкающего звена связывает две вершины, из которых одна имеет меньший, а другая больший порядковый номер, то обход цепи начинается с вершины с меньшим номером. Если в направлении обхода следующее ребро цепи будет соединять вершину меньшего порядкового номера с вершиной большего номера, то ребру присваивается знак плюс, если же ребро соединяет вершину большего номера с вершиной меньшего номера, то ему присваивается знак минус. Например, рассмотрим простановку знаков звеньев (рис. 2.41, в) у цепи, состоящей из ребер A_1 , S_5 и S_6 . Замыкающему звену присвоим знак минус, обход ребер начнем с вершины 2. Ребро S_5 соединяет вершину 2 с вершиной 6, т. е. вершину меньшего порядкового номера с вершиной большего номера, поэтому ребру необходимо присвоить знак плюс. Ребро S_6 соединяет вершину 6 с вершиной 5, т. е. вершину большего номера с вершиной меньшего номера, поэтому ему необходимо присвоить знак минус. Следовательно, уравнение размерной цепи будет иметь вид: $-A_1 + S_5 - S_6 = 0$, а исходное уравнение, т. е. составленное относительно замыкающего звена, запишется как $A_1 = S_5 - S_6$. Для размерной цепи, образованной ребрами Z_7 , S_3 , S_1 и Z_1 исходное уравнение примет вид: $Z_7 = S_1 + Z_2 - Z_3$. Одновременно с определением знаков звеньев размерной цепи составляются расчетные уравнения из условия, что алгебраическая сумма всех звеньев размерной цепи, включая и замыкающее звено, равна нулю. Затем эти уравнения преобразуются в исходные, т. е. составленные относительно замыкающего звена. В исходном уравнении в правой, части звенья, имеющие знак плюс, являются увеличивающими, а имеющие знак минус – уменьшающими.

Выявление и расчет технологических размерных цепей по графу начинается с двухзвенных цепей, а затем в такой последовательности, чтобы в каждой цепи имелось только одно неизвестное по величине звено, а остальные звенья ее были бы уже определены в результате

расчета предыдущих размерных цепей. Для выполнения этого условия необходимо начинать выявление и расчет размерных цепей в последовательности, обратной выполнению операций и переходов, т. е. начинать с последней операции и последнего перехода и заканчивать первым переходом или размером заготовки.

Граф размерных цепей не только облегчает выявление цепей, но и позволяет выявить ошибки в технологии или в чертеже. Например, если при составлении производного или исходного дерева обнаружится разрыв между вершинами и появится замкнутый контур на любом дереве, то это указывает в первом случае на отсутствие нужных размеров в принятой технологии или на чертеже, а во втором случае – на наличие лишних размеров.

2.9.4. Расчет технологических размерных цепей

В технологических размерных цепях число составляющих звеньев редко бывает больше четырех. Поэтому их расчет, как правило, производится по методу максимума и минимума. В тех случаях когда $n > 5$, используют вероятностный метод. Этот метод может быть использован и при $n < 5$, когда возникает необходимость в расширении допусков на составляющие звенья. В этом случае необходимо вводить коэффициент относительного рассеивания не только для составляющих звеньев, но также и для замыкающего звена.

Методика расчета технологических размерных цепей зависит от того, является ли замыкающим звеном цепи размер припуска или конструкторский размер детали по чертежу.

Если замыкающим звеном является припуск Z , оставляемый для последующего перехода, то сначала необходимо определить его минимальную величину Z_{\min} по таблицам из справочника технолога [25] или расчетом по формуле

$$Z_{\min} = R_{z(i-1)} + T_{a(i-1)} + \bar{\rho}_{i-1} + \varepsilon_i, \quad (2.45)$$

где $R_{z(i-1)}$ – высота неровностей, полученная на предшествующем переходе; $T_{a(i-1)}$ – глубина дефектного слоя, полученная на предшествующем переходе; $\bar{\rho}_{i-1}$ – векторная сумма пространственных отклонений на обрабатываемой поверхности, полученных на предшествующем переходе; ε_i – погрешность установки на выполняемом переходе.

Значения $T_a, R_z, \rho_i, \varepsilon_i$ берутся из соответствующих таблиц справочника технолога [25].

Определив тем или иным способом Z_{\min} , составляют исходное уравнение размерной цепи относительно Z_{\min} :

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{k_j} S_{j\min} - \sum_{q=1}^{n_q} S_{q\max}, \quad (2.46)$$

где $S_{j\min}$ – наименьший предельный размер увеличивающего звена размерной цепи; $S_{q\max}$ – наибольший предельный размер уменьшающего звена размерной цепи; n_j – число увеличивающих звеньев; n_q – число уменьшающих звеньев размерной цепи.

Так как в каждой технологической размерной цепи имеется только одно неизвестное составляющее звено, то задача сводится к решению приведенного выше уравнения Z_{\min} с одним неизвестным, представляющим собой либо наибольший, либо наименьший предельный размер искомого составляющего звена. Обозначим определяемый размер через S_x .

Если искомый размер является уменьшающим звеном, то величина $S_{x\max}$ будет равна:

$$S_{x\max} = \sum_{j=1}^{n_j} S_{j\min} - \sum_{q=1}^{n_q-1} S_{q\max} - Z_{\min}. \quad (2.47)$$

Если же искомый размер является увеличивающим звеном, то

$$S_{x\min} = Z_{\min} - \sum_{j=1}^{n_j-1} S_{j\min} + \sum_{q=1}^{n_q} S_{q\max}. \quad (2.48)$$

Определив величину $S_{x\max}$ или $S_{x\min}$ на размер S_x , устанавливают допуск T_x в зависимости от назначения технологического перехода (черновая или чистовая обработка). Обычно для черновой обработки допуск назначают по 12 или 14-му квалитетам, а для чистовой обработки по 11-му квалитету. Предельные отклонения назначают по h, H или J_s (ГОСТ 25346–89). По величине установленного допуска T_x и по его расположению относительно S_x (h, H или J_s) определяют номинальный размер S_x по одной из следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} S_{xq} &= S_{x\max} - es_x; \\ S_{xj} &= S_{x\min} - es_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Далее определяется номинальный размер припуска и его наибольший предельный размер Z_{\max} . Для этой цели составляется исходное уравнение размерной цепи относительно Z с указанием для всех составляющих звеньев предельных отклонений. На основании этого уравнения производится суммирование номинальных размеров и предельных отклонений раздельно для увеличивающих и уменьшающих звеньев:

$$Z = \left(\sum_{i=1}^{n_j} S_j \right)_{\Sigma ei_j}^{\Sigma es_j} - \left(\sum_{q=1}^{n_q} S_q \right)_{\Sigma ei_q}^{\Sigma es_q}. \quad (2.50)$$

По разности номинальных размеров определяют номинальный размер припуска:

$$Z = \sum_{i=1}^{n_j} S_i - \sum_{q=1}^{n_q} S_q, \quad (2.51)$$

а по разности сумм предельных отклонений увеличивающих и уменьшающих звеньев определяют предельные отклонения размера припуска Z и, следовательно, Z_{\max} :

$$\left. \begin{aligned} es_z &= \sum es_j - \sum ei_q; \\ ei_z &= \sum ei_j - \sum es_q, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

т. е. для определения предельных отклонений Z из формулы (2.50) необходимо производить вычитание сумм по схеме крест-накрест (2.52).

Пример. Исходное уравнение технологической размерной цепи имеет следующее выражение: $Z = S_1 + S_2 - S_3$. Дано: $Z_{\min} = 0,2$ мм; $S_2 = 50_{-0,2}$ мм; $S_3 = 80_{-0,4}$ мм. Необходимо определить номинальный размер и предельные отклонения размера S_1 . Составим исходное уравнение:

$$Z_{\min} = S_{1\min} + S_{2\min} - S_{3\max}$$

ИЛИ

$$0,2 = S_{1\min} + 49,8 - 80,$$

откуда

$$S_{1\min} = 0,2 - 49,8 + 80 = 30,4 \text{ мм.}$$

Назначим допуск на размер S_1 равным $T_{S_1} = 0,2$ мм, тогда номинальный размер $S_1 = 30,4 + 0,2 = 30,6$ мм и $S_1 = 30,6_{-0,2}$. Для определения номинального размера и предельных отклонений припуска Z составим исходное уравнение размерной цепи относительно Z :

$$Z = 30,6_{-0,2} + 50_{-0,2} - 80_{-0,4} = 80,6_{-0,4} - 80_{-0,4} = 0,6_{-0,4}^{+0,4}$$

Следовательно, $Z_{\min} = 0,2$ мм, а $Z_{\max} = 1$ мм.

Если вместо минимальных значений припуска устанавливают их номинальные значения, например, по соответствующим ГОСТам на заготовки или по справочникам на промежуточные размеры, то расчеты размерных цепей несколько изменятся.

Составляется исходное уравнение относительно номинального размера Z :

$$Z = \sum_{j=1}^{n_j} S_j - \sum_{q=1}^{n_q} S_q. \quad (2.53)$$

Из этого уравнения определяется номинальный размер искомого звена. Затем на этот размер назначается допуск и предельные отклонения по h, H или J_s соответствующего качества. После этого по аналогии с предыдущим составляется исходное уравнение для Z с указанием для всех составляющих звеньев предельных отклонений. На основании этого уравнения проверяется правильность установленных номинальных размеров и определяются предельные отклонения размера припуска, его минимальное и максимальное значение.

Пример. Дано уравнение: $Z = S_2 - S_1$, где $Z = 3$ мм и $S_2 = 100_{-0,4}$ мм. Требуется определить номинальный размер и предельные отклонения размера S_1 , а также Z_{\min} и Z_{\max} . Подставим в исходное уравнение известные величины: $3 = 100 - S_1$, откуда $S_1 = 100 - 3 = 97$ мм. Назначим допуск на размер $S_1 = 97$ мм, равный $T_{S_1} = 0,9$ мм, тогда $S_1 = 97_{-0,9}$ мм. Составим исходное уравнение с указанием предельных отклонений составляющих звеньев: $Z = 100_{-0,4} - 97_{-0,9} = 3_{-0,4}^{+0,9}$ мм; $Z_{\min} = 2,6$ мм; $Z_{\max} = 3,9$ мм.

Если номинальный размер припуска будет меньше единицы, то может оказаться, что минимальный припуск равен нулю или меньше нуля. В этом случае потребуется корректировка номинального размера припуска.

Пример. Для размерной цепи $Z = S_2 - S_1$ установлен номинальный размер $Z = 0,4$ мм и $S_2 = 100_{-0,4}$ мм.

Из уравнения $0,4 = 100 - S_1$ определяем: $S_1 = 99,6$ мм. Назначим допуск для размера $99,6$ мм равным $T_{S_1} = 0,6$ мм, тогда $S_1 = 99,6_{-0,6}$ мм и $Z = 100_{-0,4} - 99,6_{-0,6} = 0,4_{-0,4}^{+0,6}$ мм. Следовательно, $Z_{\min} = 0$ и $Z_{\max} = 1$ мм. Для того чтобы $Z_{\min} \neq 0$, необходимо увеличить номинальный размер припуска, например, до $Z = 0,6$ мм.

Чтобы исключить возможность получения $Z_{\min} \leq 0$, лучше всего при расчетах пользоваться Z_{\min} , а не номинальным размером Z .

Если замыкающим звеном размерной цепи является конструкторский размер, то расчет такой технологической размерной цепи сводится к определению номинального размера, допуска и предельных отклонений искомого размера составляющего звена по известным значениям номинальных размеров, допусков и предельных отклонений замыкающего звена и составляющих звеньев размерной цепи.

Обозначим по аналогии с предыдущим номинальный размер, допуск и координату середины поля допуска искомого технологического размера через S_x, T_x и em_x . В зависимости от того является ли искомое звено увеличивающим или уменьшающим, номинальный размер S_x и координата середины поля допуска em_x определяются по следующим формулам:

а) искомый размер является увеличивающим звеном:

$$S_x = A_{\Delta} - \sum_{j=1}^{n_j-1} S_j + \sum_{q=1}^{n_q} S_q ; \quad (2.54)$$

$$em_x = em_{\Delta} - \sum_{j=1}^{n_j-1} em_j + \sum_{q=1}^{n_q} em_q ; \quad (2.55)$$

б) искомый размер является уменьшающим звеном:

$$S_x = \sum_{j=1}^{n_j} S_j - \sum_{q=1}^{n_q-1} S_q - A_{\Delta} ; \quad (2.56)$$

$$em_x = \sum_{j=1}^{n_j} em_j - \sum_{q=1}^{n_q} em_q - em_{\Delta}. \quad (2.57)$$

Допуск T_x и предельные отклонения размера S_x определяются по следующим формулам:

$$T_x = T_{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-1} T_i; \quad (2.58)$$

$$\left. \begin{aligned} es_x &= em_x + \frac{T_x}{2}; \\ ei_x &= em_x - \frac{T_x}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Пример. Замыкающим звеном технологической размерной цепи является размер $A = 100_{-0,4}$ мм. Увеличивающее звено равно $S_2 = 120_{-0,2}$ мм, уменьшающее звено S_1 , номинальный размер и предельные отклонения которого необходимо определить.

Исходное уравнение $A_{\Delta} = S_2 - S_1$ или $100 = 120 - S_1$, откуда $S_1 = 120 - 100 = 20$ мм. Из уравнения

$$em_x = em_{\Delta} - \sum_{j=1}^{n_j-1} em_j + em_q$$

получим:

$$em_{s_1} = -0,2 + (-0,1) = -0,3 \text{ мм.}$$

Из уравнения $T_x = T_{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-1} T_i$ определим допуск T_{s_1} :

$$T_{s_1} = 0,4 - 0,2 = 0,2 \text{ мм.}$$

Предельные отклонения S_1 будут равны: $es_{s_1} = -0,3 + 0,1 = -0,2$ мм; $ei_{s_1} = -0,3 - 0,1 = -0,4$ мм, следовательно, $S_1 = 20_{-0,4}^{-0,2}$ мм.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

3.1. Математические модели регулярных поверхностей

Поверхность может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3.1)$$

или явным уравнением

$$z = f(x, y).$$

Если поверхность регулярна, то функция (3.1) и ее частные производные F_x, F_y, F_z первого порядка непрерывны и одновременно в ноль не обращаются. Поверхность может быть задана в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v); \\ y &= y(u, v); \\ z &= z(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Векторная форма записи (3.2) соответствует выражению

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \quad (3.3)$$

Параметры u, v – криволинейные координаты поверхности; \bar{r} – радиус-вектор точки на поверхности.

Если каждому из параметров придавать фиксированные значения, получим два семейства координатных линий. Например, для эвольвентной цилиндрической поверхности (рис. 3.1) криволинейная координата v соответствует углу развернутости эвольвенты, а u – движению эвольвентного профиля вдоль оси цилиндра.

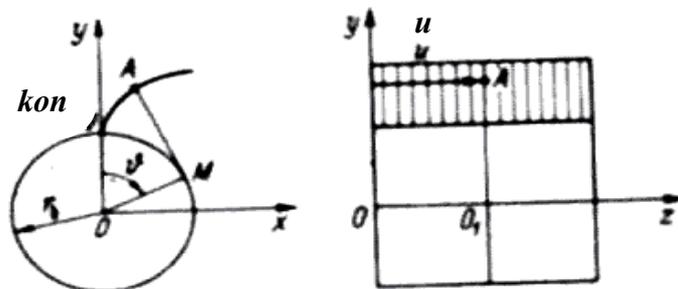


Рис. 3.1. Эвольвентная цилиндрическая поверхность

Уравнение эвольвентной поверхности получается из следующих геометрических образов:

$$AM = A_0M = r_b \upsilon; \quad O_1M = r_b,$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= O_1M \cdot \sin \upsilon - AM \cdot \cos \upsilon; \\ y &= O_1M \cdot \cos \upsilon + AM \cdot \sin \upsilon, \\ z &= u, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= r_b (\sin \upsilon - \upsilon \cdot \cos \upsilon); \\ y &= r_b (\cos \upsilon + \upsilon \cdot \sin \upsilon); \\ z &= u. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Если положить в (3.4) $u = \text{const}$, то получим плоскую кривую – эвольвенту, если положить $\upsilon = \text{const}$, то получим прямую, параллельную оси z .

Рассмотрим рис. 3.2, где на поверхности Σ , заданной в системе координат x, y, z , фиксирована точка k как точка пересечения криволинейных координат $u = \text{const}$, $\upsilon = \text{const}$. Векторы $\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ и $\bar{r}_\upsilon = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \upsilon}$ направлены по касательным к соответствующим координатным линиям. Они определяют касательную плоскость к поверхности Σ в точке k и нормаль \bar{n} к ней:

$$\bar{n} = \bar{r}_u \times \bar{r}_\upsilon. \quad (3.5)$$

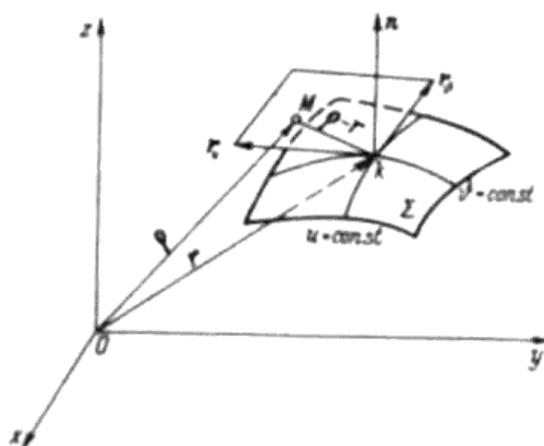


Рис. 3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

В проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{y_u y_v}{z_u z_v} = y_u z_v - y_v z_u ; \\ n_y &= \frac{z_u z_v}{x_u x_v} = z_u x_v - z_v x_u ; \\ n_z &= \frac{x_u x_v}{y_u y_v} = x_u y_v - x_v y_u . \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Единичный вектор (орт) нормали:

$$\bar{e} = \frac{\bar{n}}{|n|}, \quad (3.7)$$

где нормирующий множитель:

$$N = |n| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (3.8)$$

и

$$|e| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}. \quad (3.9)$$

Координаты произвольной точки M касательной плоскости определяются радиусом-вектором $\bar{\rho}$. Поскольку точка k общая для нормали к поверхности, вектор $(\bar{\rho} - \bar{r})$ лежит в касательной плоскости, т. е. перпендикулярен к нормали \bar{n} . Условие перпендикулярности векторов:

$$(\bar{\rho} - \bar{r}) \bar{n} = 0, \quad (3.10)$$

или

$$(\bar{\rho} - \bar{r})(\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = 0. \quad (3.11)$$

Кривизна поверхности характеризуется ее отклонением от касательной плоскости в дифференциальной окрестности точки. Она измеряется в нормальном сечении. Из дифференциальной геометрии известна формула для вычисления кривизны поверхности в некоторой точке:

$$k = -d\bar{r} \frac{d\bar{e}}{(d\bar{r})^2}. \quad (3.12)$$

Знак определяет положение центра кривизны по отношению к направлению нормали. Вектор $d\bar{r}$ через \bar{r}_u и \bar{r}_v выражается так:

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv. \quad (3.13)$$

Его направление определяется отношением $\frac{du}{dv}$. Этим вектором задается сечение, в котором вычисляется кривизна поверхности. Для каждой точки поверхности существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых кривизна имеет экстремальные значения. Эти направления называются главными, так же как и соответствующие им кривизны поверхности. В главных направлениях векторы $d\bar{e}$ и $d\bar{r}$ коллинеарные. Главные кривизны определяются по формуле Родрига:

$$d\bar{e} = -\chi_{\text{гл}} d\bar{r}. \quad (3.14)$$

Из условия коллинеарности $d\bar{e}$ и $d\bar{r}$:

$$\frac{de_x}{dx} = \frac{d\bar{e}_y}{dy} = \frac{d\bar{e}_z}{dz}.$$

Следовательно, кривизны в главных направлениях можно вычислять по любому из соотношений:

$$\kappa_{\text{гл}} = \frac{-d\bar{e}_x}{dx} = \frac{-d\bar{e}_y}{dy} = \frac{-d\bar{e}_z}{dz},$$

которые приводят к квадратным уравнениям.

Особыми точками поверхности считаются такие, в которых

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0,$$

т. е. нормаль не определена. Покажем, что в особых точках радиус кривизны поверхности обращается в ноль. Из (3.12) получаем для радиуса кривизны:

$$R = \frac{1}{\kappa} = -\frac{(d\bar{r})^2}{d\bar{r} \cdot d\bar{e}} \rightarrow 0 \text{ при } d\bar{r} \rightarrow 0.$$

Следовательно, в особых точках:

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = 0,$$

или

$$\bar{r}_u = -\frac{dv}{du}\bar{r}_v,$$

что соответствует условию коллинеарности векторов \bar{r}_u и \bar{r}_v , т. е.

$$\bar{n} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0. \quad (3.15)$$

Геометрическое место особых точек на поверхности называется ребром возврата. Оно является границей регулярной поверхности, и это надо учитывать при использовании таких поверхностей в качестве рабочих поверхностей подвижных сопряжений деталей машин.

В дальнейшем нам понадобятся выражения для пространственных кривых, лежащих на поверхностях. Пусть уравнение регулярной поверхности задано в форме (3.3):

$$\bar{r} = r(u, v).$$

Дифференциал дуги кривой линии, лежащей на этой поверхности, выражается формулой [22]:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E = (r_u)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \\ F = r_u \cdot r_v &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}; \\ G = (r_v)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Для примера рассмотрим винтовую поверхность, уравнение которой в криволинейных координатах ρ, ν задано в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \nu; \\ y &= \rho \cdot \sin \nu; \\ z &= F(\rho) + h\nu, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где $F(\rho)$ – уравнение образующей (профиля) в плоскости осевого сечения; h – параметр винтового движения:

$$h = \frac{\ell}{\upsilon}, \quad (3.19)$$

где ℓ – перемещение вдоль оси винта.

При помощи формул (3.17) находим:

$$\left. \begin{aligned} E &= 1 + F'^2(\rho); \\ F &= hF'(\rho); \\ G &= \rho^2 + h^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

откуда с учетом (3.16) получим:

$$ds^2 = [1 + F'^2(\rho)]d\rho^2 + 2hF'(\rho)d\rho d\upsilon + (\rho^2 + h^2)d\upsilon^2. \quad (3.21)$$

При $h = 0$ получим поверхность вращения. Для нее:

$$ds^2 = [1 + F'^2(\rho)]d\rho^2 + \rho^2 d\upsilon^2. \quad (3.22)$$

При $\rho = a = \text{const}$ получим винтовую линию, лежащую на цилиндре радиуса a . Дифференциал дуги ее будет

$$ds = \sqrt{a^2 + h^2} d\upsilon. \quad (3.23)$$

Угол, который составляет нормаль к винтовой поверхности, заданной в форме (3.18), с осью винта определяется по формуле

$$\cos \delta = \frac{\rho}{\sqrt{h^2 + [1 + F'^2(\rho)]\rho^2}}. \quad (3.24)$$

Для поверхности вращения $h = 0$, и вместо (3.24) получим:

$$\cos \delta = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + F'^2(\rho)}}, \quad (3.25)$$

где α – угол профиля поверхности в осевом сечении.

3.2. Методы воспроизведения сложных поверхностей

Т. Оливье предложил два способа образования сопряженных зацеплений: 1) общей производящей поверхностью; 2) производящей поверхностью, совпадающей с одним из зацепляющихся звеньев па-

ры. Первый способ используется при нарезании, например, эвольвентных зубчатых передач, второй – при нарезании червячных передач.

Если уравнение производящей поверхности задано в форме:

$$\bar{r} = r(u, v), \quad (3.26)$$

то уравнение семейства:

$$\bar{r} = r(u, v, \psi), \quad (3.27)$$

где ψ – параметр семейства или параметр относительного движения.

Уравнение огибающей получим, если к уравнениям семейства добавим уравнения связи параметров:

$$f(u, v, \psi) = 0. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) называется уравнением зацепления. При $\psi = \text{const}$ уравнения (3.27) и (3.28) определяют линию касания поверхностей, называемую характеристикой или контактной линией. Уравнение зацепления получается из условия, что вектор \bar{r}_ψ , являющийся аналогом относительной скорости $v^{(12)}$ движения поверхностей зубьев, может быть расположен только в касательной плоскости, определяемой векторами \bar{r}_u и \bar{r}_v . Математически это условие можно записать так:

$$[\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_\psi] = 0, \quad (3.29)$$

или

$$\bar{n} \bar{v}^{(12)} = 0. \quad (3.30)$$

Для нахождения огибающей поверхности в теории зацеплений используют матричный способ описания относительного движения поверхностей. Будем изображать вектор в виде столбцовой матрицы, составленной из его проекций. Для единообразного преобразования связанных и свободных векторов введем четвертый элемент столбца, равный 1 или 0, соответственно:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если задан вектор \bar{r}_1 в системе координат S_1 , то найти соответствующий вектор \bar{r}_2 в системе S_2 можно, используя переход

$$\bar{r}_2 = M_{21}\bar{r}_1, \quad (3.31)$$

где M_{21} – матрица перехода от системы S_1 к системе S_2 .

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Элементы $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ – проекции ортов осей системы S_1 на оси координат системы S_2 , элементы $a_{i4}(i = 1, 2, 3)$ – координаты начала системы S_1 в системе S_2 . Если система S_1 движется относительно системы S_2 , то элементы матрицы M_{21} включают некоторые постоянные параметры и переменный параметр движения ψ .

Пусть производящая поверхность задана в системе S_1 уравнением

$$\bar{r}_1 = r_1(u, v).$$

Производящая поверхность вместе с системой S_1 совершает движение относительно S_2 , связанной с колесом. Это движение описывается матрицей относительного движения $M_{21}(\psi)$. Уравнение семейства производящей поверхности в системе S_2 :

$$\bar{r}_2(u, v, \psi) = M_{21}(\psi)\bar{r}_1(u, v). \quad (3.32)$$

Рассматривая (3.32) совместно с (3.30), получим огибающую как геометрическое место контактных линий, соответствующих ряду фиксированных значений параметра ψ .

Развитие теории зацеплений привело к обобщению способов воспроизведения поверхностей зацепляющихся зубьев колес. В частности, доказано, что зубья могут нарезать не только одной, но и разными производящими поверхностями, в том числе и принадлежащими одному инструменту. Анализ такого способа заключается в том, что рабочее зацепление рассматривается с участием производящих поверхностей, которые при этом касаются друг друга. Это касание может быть точечным или линейным, а сами поверхности могут

быть неподвижными или подвижными относительно друг друга. Нарезанные такими производящими поверхностями зубья колес будут касаться по линии или в точке, а закон передачи движения, который может быть воспроизведен с их помощью, подлежит специальному исследованию.

В передачах с неподвижными осями относительное движение определяется одним независимым параметром. Если поверхности зубьев обоих колес заданы, то относительное движение может быть определено из условия касания поверхностей, записанных в общей системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_1(u_1, v_1, \varphi_1) &= \bar{r}_2(u_2, v_2, \varphi_2); \\ \bar{e}_1(u_1, v_1, \varphi_1) &= -\bar{e}_2(u_2, v_2, \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Эта система соответствует пяти независимым алгебраическим уравнениям, из которых при заданных поверхностях может быть найдена функция положения:

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1).$$

Для сопряженных зацеплений эта функция линейна, т. е. передаточное отношение:

$$u_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \text{const.}$$

Обычно уравнения (3.33) являются трансцендентными и решение системы связано с вычислительными трудностями. В теории зацеплений эта задача известна под названием обратной задачи. Из этой же системы для ряда фиксированных положений колес могут быть найдены контактные линии или точки на поверхностях зубьев. Их семейства определяют поверхность или линию зацепления в неподвижной системе координат.

Исследование контактных линий или линий зацепления важно для нахождения способов управления качественными показателями зубчатых и червячных передач.

3.3. Анализ кинематических поверхностей с помощью плоских сечений

В качестве активных поверхностей подвижных сопряжений деталей машин применяются, как правило, гладкие регулярные поверх-

ности, состоящие из обыкновенных точек. Режущие кромки инструментов также обычно не представляют собой ребер возврата или семейства особых точек, а являются линиями пересечения регулярных поверхностей.

Вместе с тем изучение геометрических поверхностей естественного износа как семейства экстремалей показывает, что полное их описание должно включать и особые точки, которые получаются на их границах в результате задания физических или кинематических краевых условий.

С учетом сказанного рассмотрим плоские сечения поверхностей, содержащие особые точки. Выберем в качестве плоского сечения одну из координатных плоскостей, например xOy . При таком выборе задача исследования плоского сечения будет сведена к исследованию кривых линий, лежащих в этой плоскости, методами дифференциальной геометрии.

Если кривая задана в неявном виде:

$$F(x, y) = 0, \quad (3.34)$$

то для всех точек, за исключением тех, в которых одновременно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (3.35)$$

уравнение (3.34) может быть разрешено в явном виде:

$$y = f(x).$$

В параметрическом представлении кривая может быть задана уравнениями:

$$x = x(t); \quad y = y(t), \quad (3.36)$$

где параметр t в практических задачах всегда ограничен:

$$a < t < b.$$

Точки кривых, одновременно удовлетворяющие уравнениям (3.34) и (3.35), называются особыми. Для описания поведения кривой в районе особой точки необходимо ввести понятия касательной и нормали к кривой (рис. 3.3).

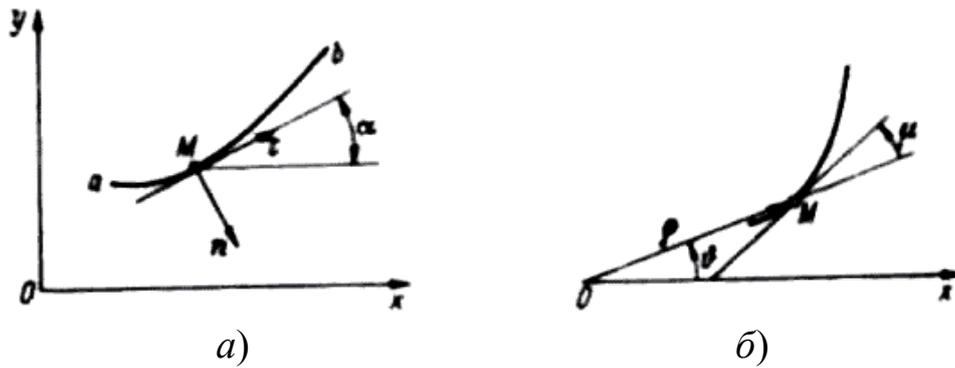


Рис. 3.3. Касательная и нормаль к кривой:
a – в прямоугольных координатах; *б* – в полярных координатах

Продифференцируем уравнение (3.34), после чего получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (3.37)$$

Если ввести в рассмотрение вектор $d\vec{r}$ элементарного перемещения вдоль кривой, то dx и dy будут его проекциями на соответствующие x и y . Теперь уравнение (3.37) можно представить в следующем виде:

$$\vec{n} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (3.38)$$

В этом уравнении:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{r} &= dx\vec{i} + dy\vec{j}; \\ \vec{n} &= \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}, \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

где \vec{i}, \vec{j} – единичные векторы (орты) осей координат.

Скалярное произведение (3.38) выражает перпендикулярность векторов \vec{n} и $d\vec{r}$, где \vec{n} и $d\vec{r}$ – векторы нормали и касательной к кривой:

$$\vec{n} \cdot d\vec{r} = n dr \cdot \cos(\vec{n}, d\vec{r}). \quad (3.40)$$

Орт нормали к плоской кривой в проекциях на оси координат записывается так:

$$e_x = \sin \alpha; \quad e_y = -\cos \alpha, \quad (3.41)$$

где α – угол между касательной к кривой и положительным направлением оси x (рис. 3.3, *a*).

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (3.42)$$

В особых точках, где удовлетворяется условие (3.35), направленные нормали и касательной становится неопределенным, поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{0}{0}.$$

Для отыскания направления касательной и нормали требуется раскрытие этой неопределенности.

В дальнейшем нам потребуются выражения, непосредственно вытекающие из (3.42):

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}. \quad (3.43)$$

В ряде случаев исследуемая кривая удобнее выражается в полярных координатах (рис. 3.3, б):

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(v), \quad (3.44)$$

где v – полярный угол, образуемый радиусом-вектором $\bar{\rho}$ с полярной осью x .

Для уравнения кривой, заданной в форме (3.44), угол μ между радиусом-вектором $\bar{\rho}$ и касательной (рис. 3.66, б) вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} = \frac{\bar{\rho} dv}{d\bar{\rho}}.$$

Важным для последующих вычислений являются выражения для дифференциала дуги ds кривой. Если кривая задана в явной форме, то

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}; \quad ds = \frac{l}{\cos \alpha}.$$

Для кривой в полярных координатах:

$$ds = \sqrt{\bar{\rho}^2 + (\bar{\rho}')^2}; \quad d\upsilon = \frac{d\bar{\rho}}{\cos\mu}.$$

Кривизна кривой, заданной в явном виде:

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}, \quad (3.45)$$

где R – радиус кривизны.

В некоторых случаях при исследовании изношенной поверхности плоское сечение ее будет получаться как огибающая ряда последовательных положений огибаемой кривой. Пусть задано уравнение огибаемой кривой в виде:

$$F(x, y) = 0.$$

В этом случае

$$F(x, y, t) = 0 \quad (3.46)$$

будет определять однопараметрическое семейство линий, где t – параметр. В частности, в качестве параметра t может выступать время. Каждое значение t выделяет из семейства (3.46) индивидуальную кривую. Для определения огибающей необходимо найти частную производную:

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.47)$$

Затем, определив из (3.47) t , подставить его значение в (3.46). В результате исключения t из (3.46) получим огибающую:

$$F_1(x, y) = 0.$$

$$z = f_1(x) + f_2(y).$$

Коэффициенты уравнений во всех рассмотренных моделях, как правило, не имеют простого геометрического смысла, что затрудняет работу с ними в интерактивном режиме. Этот недостаток устраняется в канонических моделях и в геометрических макромоделях.

Канонические модели используют в тех случаях, когда удастся выделить параметры, однозначно определяющие геометрический объект и в то же время имеющие простую связь с его формой.

Например, для плоского многоугольника такими параметрами являются координаты вершин, для цилиндра – направляющие косинусы и координаты некоторой точки оси, а также радиус цилиндра.

Геометрические макромодели являются описаниями предварительно отобранных типовых геометрических фрагментов. Такими фрагментами могут быть типовые сборочные единицы, а их макромоделями – условные номера, габаритные и стыковочные размеры. При оформлении конструкторской документации макромодели используют для описания типовых графических изображений, например: зубчатых колес, винтовых соединений, подшипников и т. п.

В геометрических ММ отображаются геометрические свойства оборудования и инструмента, в них дополнительно к сведениям о взаимном расположении элементов содержатся сведения о форме деталей.

3.4. Моделирование поверхностей рядами Фурье

Понимая под профилем линию пересечения поверхности плоскостью, определенным образом ориентированной, различают также номинальный и действительный профили детали. При исследовании точности обработки деталей с номинально цилиндрической поверхностью широко используют методы спектральной теории неровностей и других геометрических параметров.

Введем понятие о текущем размере как о радиусе-векторе, равном расстоянию от точки на реальном профиле до геометрического центра номинального профиля детали. Очевидно, что в общем случае радиус-вектор \bar{R} зависит от угловой координаты φ точки и координаты z направленной вдоль оси:

$$\bar{R} = F(\varphi, z).$$

Если номинальный радиус поверхности обозначить как R_0 , то функция $f(\varphi, z)$, изображающая погрешность (абсолютная погрешность ΔR), в общем случае (при $0 \leq z \leq l$, где l – длина поверхности) характеризуется отклонением от цилиндричности:

$$f(\varphi, z) = R - R_0 = \Delta R;$$

в поперечном сечении (при $z = z_i$) – от круглости:

$$f(\varphi) = R - R_0 = \Delta R;$$

в продольном сечении (при $\varphi = \varphi_i$) – погрешность образующей:

$$f(z) = R - R_0 = \Delta R.$$

Функцию погрешности поперечного сечения приближенно можно представить в виде ряда Фурье с конечным числом членов $k = n$:

$$f(\varphi) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \cdot \cos k\varphi + b_k \cdot \sin k\varphi),$$

или

$$f(\varphi) \approx \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} c_k \cdot \cos(k\varphi + \varphi_k),$$

где a_k, b_k, c_k – коэффициенты ряда Фурье; k – порядковый номер составляющей гармоники.

Контур поперечного сечения удовлетворяет условию замкнутости, период равен 2π :

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi).$$

Коэффициенты ряда Фурье равны:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Между амплитудой k -й гармоники c_k и коэффициентами a_k и b_k , а также начальной фазой φ_k существует соотношение:

$$a_k = c_k \cdot \cos \varphi_k; \quad b_k = c_k \cdot \sin \varphi_k;$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}; \quad c_0 = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

Члены разложения имеют явный физический смысл. Нулевой член, т. е. величина $\frac{c_0}{2}$ равна среднему значению функции за период $T = 2\pi$. Эта величина характеризует отклонение собственно размера, являясь постоянной (независимой от угловой координаты φ) составляющей текущего размера. Первый член разложения $c_1 \cdot \cos(\varphi + \varphi_1)$ характеризует отклонение расположения реального и номинального

профилей (эксцентриситет с амплитудой c_1 и фазой φ_1). Следующие члены ряда Фурье характеризуют: $c_2 \cdot \cos(2\varphi + \varphi_2)$ – овальность (заметьте, что овальность $\Delta_{\text{ОВ}}$ равна $4c_2$, составляющая некруглости $\Delta'_{\text{кр}}$ равна $0,5\Delta_{\text{ОВ}} = 2c_2$); $c_3 \cdot \cos(3\varphi + \varphi_3)$ – огранку с трехвершинным профилем и т. п.

Таким образом, члены ряда при $k = 1 \div P$ характеризуют спектр отклонений формы детали в поперечном сечении, последующие члены ряда – волнистость и при достаточно больших значениях k – шероховатость поверхности.

Аналогичный метод может быть применен к профилю продольного сечения цилиндрической детали.

Условие замкнутости контура в этом случае не удовлетворяется:

$$f(z) \neq f(z + l).$$

Можно принять, что период совпадает с удвоенной длиной детали $2l$, тогда

$$f(z) = f(z + 2l) \text{ и } f(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} c_k \cdot \sin \frac{k\pi}{2l} z.$$

Первый член разложения в ряд Фурье можно разложить в степенной ряд и, удерживая первый член этого ряда, имеем:

$$c_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2l} z \approx c_1 \frac{\pi}{2l} z.$$

Таким образом, этот член ряда можно рассматривать как наклон образующей (конусообразность). Второй член $c_2 \cdot \sin \frac{\pi}{l} z$ выражает выпуклость контура в продольном сечении (бочкообразность) или при сдвиге фаз на угол $\frac{\pi}{2}$ – седлообразность ($c_2 \cdot \cos \frac{\pi}{l} z$) и т. п.

В более общем случае при анализе ошибок цилиндрической поверхности детали амплитуды являются функциями осевой координаты z :

$$f(\varphi, z) = \frac{c_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} c_k(z) \cdot \cos(k\varphi + \varphi_k).$$

Так как

$$c_{ki}(z) = \frac{c_{k0}}{2} + \sum_{i=1}^{i=q} c_{ki} \cdot \sin \frac{i\pi}{2l} z,$$

то выражение для погрешностей номинально цилиндрического вала можно записать в виде двойного тригонометрического ряда:

$$f(\varphi, z) = \frac{c_0}{2} + c_{11} \cdot \cos(\varphi + \varphi_1) \sum_{i=1}^{i=q} \sin \frac{i\pi}{2l} z + \sum_{k=2}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=q} c_{ki} \cdot \cos(k\varphi + \varphi_k) \sin \frac{i\pi}{2l} z.$$

Нулевой член:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{2\pi l} \int_0^{2\pi} \int_0^l f(\varphi, z) d\varphi dz,$$

как и ранее представляет среднее значение функции $f(\varphi, z)$, т. е. характеризует отклонение собственно размера. Член ряда, содержащий c_{11} , выражает эксцентриситет, величина которого меняется по длине вала, и т. п.

Изложенная методика позволяет проанализировать отклонения собственно размера (ΔR или $2\Delta R = \Delta D$), формы и т. д., рассматриваемые как систематические отклонения. Методику можно использовать при рассмотрении детерминированных систем.

3.5. Каркасное моделирование

3.5.1. Аппроксимация направляющих и образующих поверхностей

В машиностроении для отображения геометрических свойств деталей со сложными поверхностями применяют ММ каркасные и кинематические.

Каркасные ММ представляют собой каркасы – конечные множества элементов, например, точек или кривых, принадлежащих моделируемой поверхности. В частности, выбор каркаса в виде линий, образующих сетку на описываемой поверхности, приводит к разбиению поверхности на отдельные участки. Кусочно-линейная аппроксимация на этой сетке устраняет главный недостаток аналитических моделей, так как в пределах каждого из участков, имеющих малые размеры, возможна удовлетворительная по точности аппроксимация поверхностями с простыми уравнениями. Коэффициенты этих уравнений рассчитываются исходя из условий плавности сопряжении участков.

Пример. Рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию одной из характеристических линий детали (рис. 3.4).

Выбираем точки на образующей контура и через три из них проводим аппроксимированную линию (прямую). Количество выбранных точек оценивается по допускаемой погрешности. Произведем аппроксимацию таким образом, чтобы погрешность была минимальной, так как аппроксимируем прямыми, то воспользуемся общим уравнением прямой: $y = kx + b$.

Определим погрешность аппроксимации и возведем ее в квадрат:

$$\sum_{i=1}^n (k_i x_i + b_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2 = E. \quad (3.48)$$

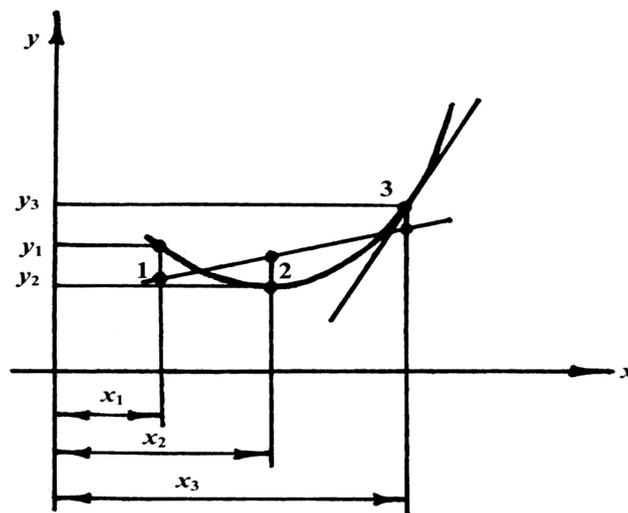


Рис. 3.4. Схема кусочно-линейной аппроксимации

Для определения коэффициентов заменяющих прямых при условии минимума погрешности продифференцируем выражение (3.48) и приравняем полученные уравнения к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial k_i} = \sum 2x_i (k_i x_i + b_i - y_i) = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial b_i} = \sum 2(k_i x_i + b_i - y_i) = 0; \\ \sum x_i^2 k_i + \sum b_i x_i = \sum y_i x_i; \\ \sum k_i x_i + \sum b_i = \sum y_i. \end{cases}$$

Запишем в общем виде уравнение заменяющей окружности и преобразуем его:

$$\begin{aligned} (x_i - x_{\text{ц}})^2 + (y_i - y_{\text{ц}})^2 &= R^2; \\ x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} + x_{\text{ц}}^2 + y_i^2 - 2y_i y_{\text{ц}} + y_{\text{ц}}^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Обозначим:

$$c = x_{\text{ц}}^2 + y_{\text{ц}}^2 - R^2. \quad (3.50)$$

Подставив (3.50) в выражение (3.49), получим функцию погрешности аппроксимации:

$$x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} - 2y_i y_{\text{ц}} + y_i^2 + c = \Delta. \quad (3.51)$$

Возводим в квадрат правую и левую часть уравнения (3.51) и просуммируем полученную погрешность для выделенного участка кривой:

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} - 2y_i y_{\text{ц}} + y_i^2 + c)^2 = \sum_{i=2}^n \Delta^2 = E. \quad (3.52)$$

Как видно, неизвестными параметрами заменяющей окружности являются $x_{\text{ц}}$, $y_{\text{ц}}$, c , поэтому найдем частные производные полученного уравнения (3.52) по выделенным параметрам и приравняем их к нулю.

Тогда:

$$\frac{\partial E}{\partial x_{\text{ц}}} = \sum 2(x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} - 2y_i y_{\text{ц}} + y_i^2 + c)(-2x_i) = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_{\text{ц}}} = \sum 2(x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} - 2y_i y_{\text{ц}} + y_i^2 + c)(-2y_i) = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \sum 2(x_i^2 - 2x_i x_{\text{ц}} - 2y_i y_{\text{ц}} + y_i^2 + c) = 0.$$

Выделив выражения при неизвестных и поместив их в левую часть уравнений, получим систему алгебраических уравнений:

$$\Sigma(2x_i^2 x_{\text{ц}} + 2y_i x_i y_{\text{ц}} - cx_i) = \Sigma(x_i^3 + y_i^2 x_i);$$

$$\begin{aligned}\Sigma(2x_i^2 y_i x_{\Pi} + 2y_i^2 y_{\Pi} - cy_i) &= \Sigma(x_i^2 y_i + y_i^3); \\ \Sigma(-2x_i x_{\Pi} - 2y_i y_{\Pi} + c) &= \Sigma(-x_i^2 - y_i^2).\end{aligned}$$

Определители полученной системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \sum 2x_i^2 \sum 2y_i x_i \sum -x_i \\ \sum 2x_i^2 y_i \sum 2y_i^2 \sum -y_i \\ \sum -2x_i \sum -2y_i 1 \end{vmatrix}; & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \sum (x_i^3 + y_i^2 x_i) \sum 2y_i x_i \sum -x_i \\ \sum (x_i^2 y_i + y_i^3) \sum 2y_i^2 \sum -y_i \\ \sum (-x_i^2 - y_i^2) \sum -2y_i 1 \end{vmatrix}; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \sum 2x_i^2 \sum (x_i^3 + y_i^2 x_i) \sum -x_i \\ \sum 2x_i^2 y_i \sum (x_i^2 y_i + y_i^3) \sum -y_i \\ \sum -2x_i \sum (-x_i^2 - y_i^2) 1 \end{vmatrix}; & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \sum 2x_i^2 \sum 2y_i x_i \sum (x_i^3 + y_i^2 x_i) \\ \sum 2x_i^2 y_i \sum 2y_i^2 \sum (x_i^2 y_i + y_i^3) \\ \sum -2x_i \sum -2y_i \sum (-x_i^2 - y_i^2) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты определим, используя метод Крамера:

$$\begin{aligned}x_{\Pi} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y_{\Pi} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \\ R &= \sqrt{x_{\Pi}^2 + y_{\Pi}^2 - c}.\end{aligned}$$

Рассмотрев по участкам образующую (направляющую), получим ряд уравнений заменяющих ее окружностей.

В общем случае через две точки с заданными направлениями касательных можно провести множество пар окружностей, которые имеют общую касательную в точке сопряжения. Таким образом, оценка погрешности решения задачи окружностной аппроксимации для случая дискретного контура невозможна.

3.5.2. Моделирование сплайнами

3.5.2.1. Сплайн первой степени. Во второй половине прошлого века с появлением ЭВМ и графопостроителей появилась потребность в математической модели (формуле), позволяющей строить хотя бы даже и прямые линии, но с любой дискретностью (шагом). Рассмотрим сначала самый простой случай – провести прямую линию между двумя точками – P_0 и P_1 (рис. 3.6). Попробуем воспользоваться в качестве ее математической модели широко известным уравнением прямой линии, проходящей через две точки:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Пусть варьируемым параметром является абсцисса x . Разрешим уравнение относительно ординаты y :

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (y_1 - y_0) + y_0. \quad (3.53)$$

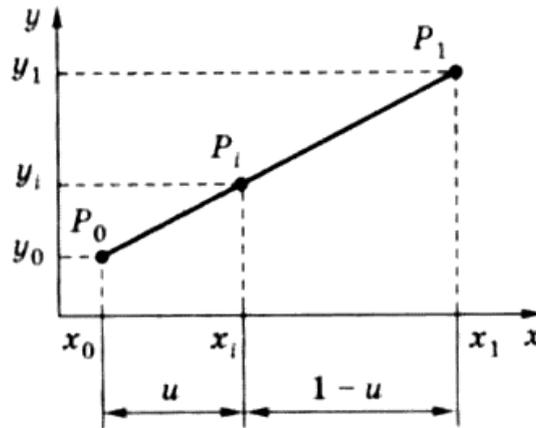


Рис. 3.6. Расчетная схема

Задавая различные значения x , мы можем вычислить соответствующие ему значения y . Но если эта линия вертикальная, то мы попадаем в ситуацию деления на нуль и поэтому такая формула не может быть использована для построения линий, например, машиностроительных чертежей на экранах дисплеев и на графопостроителях, поскольку таких линий на них практически половина. Также оказалось невозможным использовать и уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α – угол между осью x и прямой), так как для вертикальных линий $\alpha = 90^\circ$.

Поступили следующим образом: ввели безразмерный параметр

$$u = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (3.54)$$

Тогда (3.53) можно записать как $y = u(y_1 - y_0) + y_0$. После преобразований получим:

$$y = (1 - u)y_0 + uy_1. \quad (3.55)$$

Физический смысл параметра u : если принять интервал $x_1 - x_0$ по оси абсцисс за 1, то u представляет для любой текущей точки P_i прямой часть этого интервала. Таким образом, пределы изменения u всегда будут $0 \leq u \leq 1$ (рис. 3.6). Так, при $u = 0$ текущая точка P_i будет иметь координаты (x_0, y_0) , при $u = 1$ – координаты (x_1, y_1) .

Выразим x через параметр u из (3.54):

$$x = (1 - u)x_0 + ux_1. \quad (3.56)$$

Объединив (3.56) и (3.55):

$$\left. \begin{aligned} x &= (1 - u)x_0 + ux_1; \\ y &= (1 - u)y_0 + uy_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

получим математическую модель для любой текущей точки прямой в зависимости от безразмерного параметра u , всегда принимающего значения от 0 до 1. Представим (3.57) более компактно в векторной форме, которой мы будем часто пользоваться при описании других сплайнов:

$$\bar{r} = (1 - u)\bar{r}_0 + u\bar{r}_1. \quad (3.58)$$

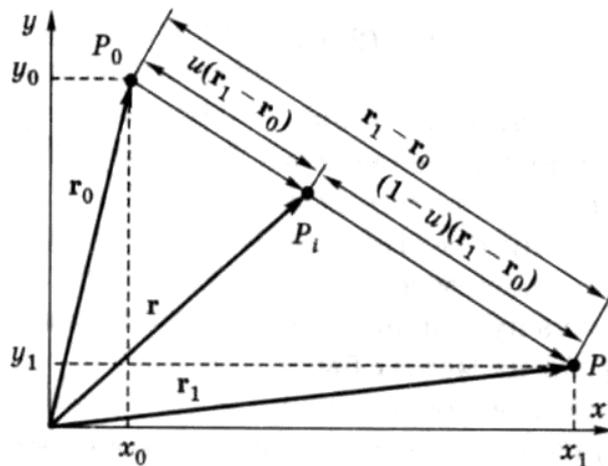


Рис. 3.7. Расчетная схема

Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться векторной формой, то для приобретения навыка еще раз выведем формулу (3.58), используя теперь уже векторное исчисление. Пусть теперь начальная точка P_0 и конечная точка P_1 прямой расположены так, как это показано на рис. 3.7. Радиусы-векторы этих точек обозначим, со-

ответственно, как \bar{r}_0 и \bar{r}_1 , вектор самой линии запишем как $\bar{r}_1 - \bar{r}_0$. Тогда вектор \bar{r} текущей точки P_i прямой можно записать как (рис. 3.7) $\bar{r} = \bar{r}_0 + u(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)$. После преобразований и получим формулу (3.58).

Еще раз отметим преимущества этого сплайна:

1. Пределы варьирования безразмерной переменной u от 0 до 1 и с любым шагом, что очень удобно при программировании.

2. Возможность построения линий с любым наклоном, в том числе и вертикальных.

3.5.2.2. Сплайн второй степени. Кривая второго порядка – парабола. Обозначим начальную точку как P_0 , конечную – как P_2 , полностью их радиусы-векторы \bar{r}_0 и \bar{r}_2 и оси x и y координатной системы договоримся больше не изображать, чтобы не затемнять чертеж (рис. 3.8, а). Между двумя точками можно провести бесчисленное множество парабол. Для однозначного описания кривой наложим следующие начальные условия:

1) кривая должна проходить через точки $P_0(\bar{r}_0)$ и $P_2(\bar{r}_2)$;
 2) заданы координаты некоторой точки $P_1(\bar{r}_1)$;
 3) по отрезкам P_0P_1 и P_1P_2 перемещаются две текущие точки – A и B ;
 4) прямая AB проходит таким образом, что точка A перемещается по прямой P_0P_1 по формуле (3.58) текущей точки сплайна первой степени и делит прямую P_0P_1 на отрезки $u(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)$ и $(1-u)(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)$;

5) точка B также перемещается по прямой P_1P_2 и делит ее на отрезки $u(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$ и $(1-u)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$;

6) текущая точка P_i сплайна второй степени касается прямой AB и делит ее также на отрезки $u(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$ и $(1-u)(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$.

Для текущей точки P_i по формуле (3.58) сплайна первой степени можем записать:

$$\bar{r} = (1-u)\bar{r}_A + u\bar{r}_B. \quad (3.59)$$

Координаты точек A и B определяются как $\bar{r}_A = (1-u)\bar{r}_0 + u\bar{r}_1$ и $\bar{r}_B = (1-u)\bar{r}_1 + u\bar{r}_2$. Подставив эти значения в (3.59), после преобразований получим выражение сплайна второй степени:

$$\bar{r} = (1-u)^2\bar{r}_0 + 2(1-u)u\bar{r}_1 + u^2\bar{r}_2. \quad (3.60)$$

Эту кривую иногда называют «пропорциональной» кривой. Если разделить отрезки P_0P_1 и P_1P_2 на одинаковое число частей и со-

единить полученные точки прямыми линиями, то сплайн второй степени будет представлять огибающую семейства этих линий (рис. 3.8, б). Устанавливая точку P_1 в другие места, можно изменять вид или, как говорят, «полноту» этой кривой.

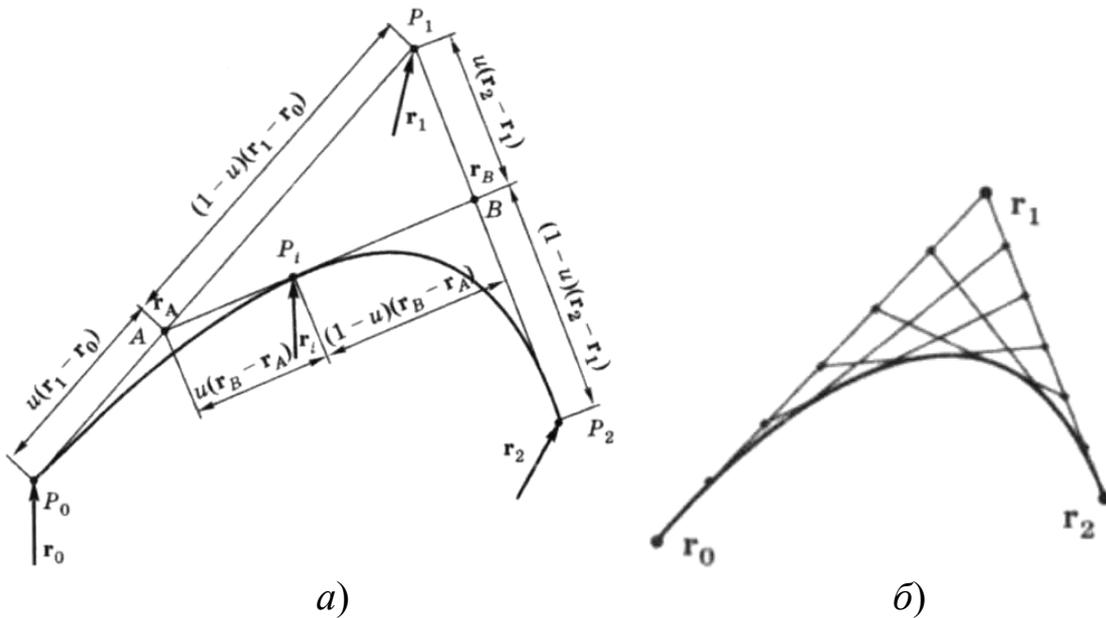


Рис. 3.8. Расчетная схема:

а – без разделения касательных; б – с разделением касательных

3.5.2.3. Кубические сплайны. При этом неизвестными являются и направления касательных в заданных точках, которые определяли бы наиболее плавную форму кривой. Поэтому необходимо определить некоторую оценочную достаточно «гладкую» функцию, которая явилась бы своеобразным эталоном для формирования контура изготавливаемой детали и позволила бы определить погрешность решения задачи аппроксимации. Учитывая соображения, приведенные выше, можно считать, что в качестве оценочной наиболее целесообразно принять функцию $y = F(x)$, которая на i -м участке между двумя заданными точками является *кубическим полиномом* вида:

$$P_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (3.61)$$

и в заданных опорных точках имеет непрерывные $F'(x)$ и $F''(x)$.

Система уравнений для определения коэффициентов полиномов $P_i(x)$ может быть составлена из условия прохождения $F(x)$ через заданную систему точек и из требования совпадения первых и вторых производных в заданных точках:

$$a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1} = d_i;$$

$$3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i;$$

$$3a_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1} = b_i.$$

По условию $d_i = y_i$.

Из третьего уравнения системы получим:

$$a_{i-1} = \frac{(b_i - b_{i-1})}{3(x_i - x_{i-1})}. \quad (3.62)$$

Подставим значения d_i и a_{i-1} в первое уравнение системы, найдем:

$$c_{i-1} = \frac{\Delta_1(x_{i-1}, x_i) - (x_i - x_{i-1})(b_{i-1} + 2b_i)}{3}, \quad (3.63)$$

где $\Delta_1(x_{i-1}, x_i) = \frac{(y_i - y_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$ – первая разделенная разность.

Из второго уравнения системы следует:

$$c_i = \frac{\Delta_1(x_{i-1}, x_i) + (x_i - x_{i-1})(b_{i-1} + 2b_i)}{3}.$$

Записав равенство (3.63) для c_i и приравняв его к последнему равенству, получим систему линейных уравнений для определения значений коэффициентов b_i :

$$\lambda_1 \vartheta_0 + 2\vartheta_1 + \omega_1 \vartheta_2 = 3\Delta_2(x_0, x_1, x_2);$$

$$\lambda_2 \vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \omega_1 \vartheta_3 = 3\Delta_2(x_1, x_2, x_3);$$

.....;

$$\lambda_{n-1} \vartheta_{n-2} + 2\vartheta_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_n = 3\Delta_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n),$$

где $\Delta_2(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{[\Delta_1(x_i, x_{i+1}) - \Delta_1(x_{i-1}, x_i)]}{(x_{i+1} - x_{i-1})}$ – вторая разделенная

разность;

$$\lambda_i = \frac{(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})}; \quad \omega_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

К этим уравнениям добавляются граничные условия на каждом конце. Чаще всего граничные условия формулируют исходя из требо-

вания плавного сопряжения криволинейного контура с предыдущим и последующим геометрическими элементами, т. е. считают известными значения первой производной в граничных точках.

Полученная система может быть решена обычным методом исключения неизвестных, однако специфический вид ее построения позволяет использовать более рациональный прием определения неизвестных b_i , значительно сокращающий число вычислительных операций и получивший название метода прогонки.

Сущность этого метода состоит в том, что, используя начальное граничное условие, каждое неизвестное значение b_i представляют как линейную функцию неизвестного b_{i+1} ; $b_i = l_i b_{i+1} + k_i$, для чего вычисляют вспомогательные коэффициенты l_i и k_i , определяющие эту зависимость (прямая прогонка). Таким образом, при $i = n - 1$ получим равенство $b_{n-1} = l_{n-1} b_n + k_{n-1}$, в котором значение b_n определяется вторым граничным условием. Далее вычисляют $b_{n-2} = l_{n-2} b_{n-1} + k_{n-2}$ и все последующие коэффициенты (обратная прогонка). Следовательно, задача сводится к определению вспомогательных коэффициентов l_i и k_i .

Итак, представим коэффициент b_0 как функцию b_1 следующим образом: $b_0 = (l_0 b_1 + k_0)$. Первоначальные значения l_0 и k_0 определяются граничным условием в нулевой точке. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$\lambda_1(l_0 b_1 + k_0) + 2b_1 + \omega_1 b_2 = 3\Delta_2(x_0, x_1, x_2).$$

Из него выразим неизвестное b_1 как функцию b_2 :

$$b_1 = (l_1 b_2 + k_1), \text{ где } l_1 = -\frac{\omega_1}{2 + \lambda_1 l_0}; \quad k_1 = \frac{3\Delta_2(x_0, x_1, x_2) - \lambda_1 k_0}{2 + \lambda_1 l_0}.$$

Подставив выражение для b_1 во второе уравнение системы и разрешив его относительно b_2 , получим $b_2 = l_2 b_3 + k_2$,

где
$$l_2 = -\frac{\omega_2}{2 + \lambda_2 l_1}; \quad k_2 = \frac{3\Delta_2(x_1, x_2, x_3) - \lambda_2 k_1}{2 + \lambda_2 l_1}.$$

Повторяя этот вычислительный процесс, найдем выражение для i -го неизвестного $b_i = l_i b_{i+1} + k_i$, в котором:

$$l_i = -\frac{\omega_i}{(2 + \lambda_i l_{i-1})}; \quad k_i = \frac{3\Delta_2(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - \lambda_i k_{i-1}}{2 + \lambda_i l_{i-1}}. \quad (3.64)$$

Наличие на заданном контуре участков со значительными углами наклона касательных может привести к искажению расчетного контура вследствие упрощенного представления исходного дифференциального уравнения, из которого определяется выражение интерполирующей функции. На этих участках, в частности, конфигурация интерполирующей кривой может иметь волнообразную форму; при этом заданные опорные точки будут точками перегиба. В этих случаях более эффективно параметрическое интерполирование с введением натурального параметра по длине кривой.

Раскрыв скобки в выражении (3.61) и сгруппировав коэффициенты при x с одинаковыми степенями, запишем выражение интерполирующей функции в следующем виде:

$$P(x) = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i;$$

$$A_i = a; B_i = -3a_i x_i + b_i; C_i = 3a_i x_i^2 - 2b_i x_i + c_i; D_i = -a_i x_i^3 + b_i x_i^2 - c_i x_i + d_i.$$

Дважды продифференцировав это выражение, приравняв результат к нулю и разрешив полученное уравнение относительно x , найдем с учетом формулы (3.62) значение абсциссы, определяющей положение точки перегиба:

$$X_n = \frac{(b_{i+1} x_i - b_i x_{i+1})}{(b_{i+1} - b_i)}.$$

Принадлежность найденной точки перегиба интервалу $[x_i, x_{i+1}]$ интерполирующей кривой определяется по условию, выражаемому неравенством $(x_i - x_n)(x_{i+1} - x_n) < 0$. Если точка перегиба принадлежит интервалу, на котором характер кривой описывается сплайном (3.61), то она, как особая точка, должна быть включена в заданный массив опорных точек и учтена при последующем решении задачи окружностной аппроксимации.

Эрмитов кубический сплайн. Перегруппируем члены сплайна первой степени $\bar{r} = (1-u)\bar{r}_0 + u\bar{r}_1$ в виде $\bar{r} = \bar{r}_0 + (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)u$ и, введя обозначения $\bar{a}_0 = \bar{r}_0$ и $\bar{a}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$, запишем:

$$\bar{r} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 u. \quad (3.65)$$

Аналогично для сплайна второй степени (3.60), перегруппировав его члены и обозначив $\bar{a}_0 = \bar{r}_0$; $\bar{a}_1 = 2(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)$; $\bar{a}_2 = \bar{r}_0 - 2\bar{r}_1 + \bar{r}_2$, можно его записать в виде полинома:

$$\bar{r} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 u + \bar{a}_2 u^2. \quad (3.66)$$

Сравнив (3.65) и (3.66), справедливо предположить, что кубический сплайн в общем виде следует искать в форме полинома уже третьей степени:

$$\bar{r} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 u + \bar{a}_2 u^2 + \bar{a}_3 u^3, \quad (3.67)$$

где $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ – четыре вектора, описывающие кривую.

Между двумя точками также можно провести бесчисленное множество кубических кривых и для достижения определенности необходимо наложить какие-то ограничения. Пусть два вектора – \bar{r}_0 и \bar{r}_1 – представляют координаты этих двух точек (рис. 3.9).

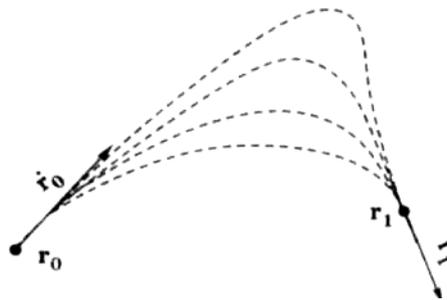


Рис. 3.9. Расчетная схема

В качестве двух других векторов возьмем векторы касательных $\dot{\bar{r}}_0$ и $\dot{\bar{r}}_1$ в этих точках, определяемых как $\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{du}$. Тогда задача становится более определенной, хотя и не до конца, так как таких кривых можно провести достаточно много (на рис. 3.9 они изображены штриховыми линиями). При этих условиях найдем все четыре коэффициента полинома (3.67). Напомним, что и для этого сплайна безразмерный параметр u всегда изменяется в пределах $0 \leq u \leq 1$.

Итак, пусть при $u = 0$ кривая проходит через точку \bar{r}_0 , а при $u = 1$ – через точку \bar{r}_1 . Вычислим первую производную функции (3.67):

$$\dot{\bar{r}} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 u + 3\bar{a}_3 u^2. \quad (3.68)$$

Положив $u = 0$, найдем:

– из (3.67): $\bar{r}_0 = \bar{a}_0$, откуда $\bar{a}_0 = \bar{r}_0$;

– из (3.68): $\dot{\bar{r}}_0 = \bar{a}_1$, откуда $\bar{a}_1 = \dot{\bar{r}}_0$.

Таким образом, первые два коэффициента полинома (3.67) уже определены.

Положив $u = 1$, найдем:

– из (3.67): $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \dot{\bar{r}}_0 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$;

– из (3.68): $\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3$.

Получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными – \bar{a}_2 и \bar{a}_3 . Решив ее, найдем:

$$\bar{a}_2 = 3(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) - 2\dot{\bar{r}}_0 - \dot{\bar{r}}_1; \quad \bar{a}_3 = 2(\bar{r}_0 - \bar{r}_1) + \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}}_1.$$

Подставив все четыре коэффициента $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ в (3.67), после преобразований получим Эрмитов кубический сплайн в векторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{r} = & \bar{r}_0(1 - 3u^2 + 2u^3) + \bar{r}_1(3u^2 - 2u^3) + \\ & + \dot{\bar{r}}_0(u - 2u^2 + u^3) + \dot{\bar{r}}_1(u^3 - u^2). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Для практического использования формулы (3.69) удобнее векторы касательных выразить через единичные векторы (орты) касательных $\dot{\bar{e}}$ и весовые коэффициенты ω , т. е. приняв $\dot{\bar{r}} = \omega \dot{\bar{e}}$ (рис. 3.10). Тогда, представив все векторы в (3.69) в координатной форме как

$$\bar{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}; \quad \bar{r}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}; \quad \dot{\bar{r}}_0 = \begin{Bmatrix} \omega_0 e_{0x} \\ \omega_0 e_{0y} \end{Bmatrix}; \quad \dot{\bar{r}}_1 = \begin{Bmatrix} \omega_1 e_{1x} \\ \omega_1 e_{1y} \end{Bmatrix},$$

окончательно получим Эрмитов кубический сплайн в координатной форме, удобной уже для практического использования:

$$\left. \begin{aligned} x = & x_0(1 - 3u^2 + 2u^3) + x_1(3u^2 - 2u^3) + \\ & + \omega_0 \bar{e}_{0x}(u - 2u^2 + u^3) + \omega_1 \bar{e}_{1x}(u^3 - u^2); \\ y = & y_0(1 - 3u^2 + 2u^3) + y_1(3u^2 - 2u^3) + \\ & + \omega_0 \bar{e}_{0y}(u - 2u^2 + u^3) + \omega_1 \bar{e}_{1y}(u^3 - u^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

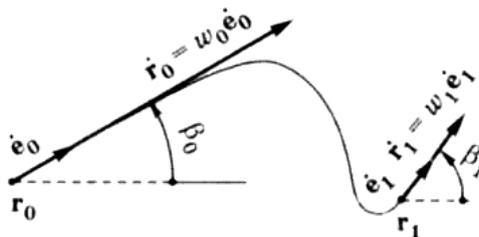


Рис. 3.10. Расчетная схема

Проекции ортов касательных \vec{e} на координатные оси удобнее вычислять через углы β_0 и β_1 наклона касательных, которые мы можем сами назначать или вводить в диалоговом режиме:

$$\left. \begin{array}{l} e_{0x} = \cos \beta_0 \\ e_{0y} = \sin \beta_0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} e_{1x} = \cos \beta_1 \\ e_{1y} = \sin \beta_1 \end{array} \right\}.$$

Продemonстрируем влияние весовых коэффициентов на форму кривой. Пусть в точке \vec{r}_0 с координатами $(0, 0)$ кривая выходит под углом $\beta_0 = 45^\circ$ и приходит в точку \vec{r}_1 с координатами $(0, 4)$ под углом $\beta_1 = -45^\circ$ (рис. 3.11, а). Зафиксируем весовой коэффициент в точке 1 как $\omega_1 = 1$. Покажем сначала влияние на форму кривой всего лишь одного параметра сплайна, а именно – одного весового коэффициента ω_0 в точке 0, варьируя его от 1 до 6 с шагом 1. Кратко этот случай можно записать как $\beta_0 = \text{const}$; $\beta_1 = \text{const}$; $\omega_0 = \text{var}$; $\omega_1 = \text{const}$ (рис. 3.11, а).

Рассмотрим теперь случай, когда весовые коэффициенты будем изменять одновременно, т. е. $\omega_0 = \omega_1 = \text{var}$ с одним и тем же шагом равным 1, и также от 1 до 6 (рис. 3.11, б). Как видим, при некоторых значениях ω_0 и ω_1 кривая становится уже петлеобразной.

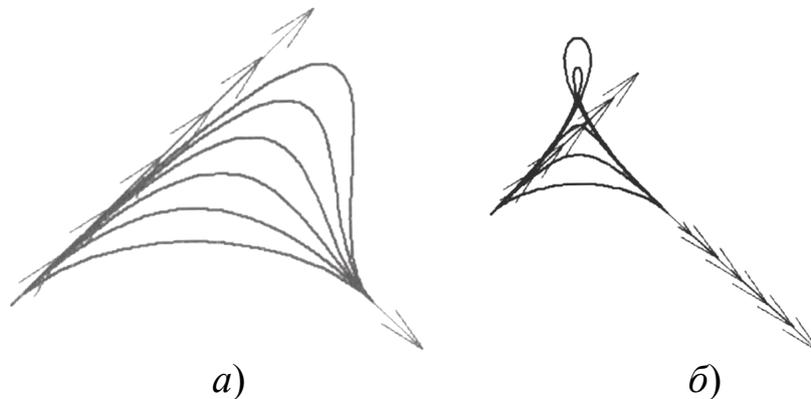


Рис. 3.11. Расчетная схема:

а – при $\beta_0 = \text{const}$; $\beta_1 = \text{const}$; $\omega_0 = \text{var}$; $\omega_1 = \text{const}$;

б – при $\omega_0 = \omega_1 = \text{var}$

Покажем теперь пример влияния только одного углового параметра β_0 при варьировании его от 0 до 180° с шагом 10° , т. е. $\beta_0 = \text{var}$; $\beta_1 = \text{const} = 0^\circ$; $\omega_0 = \text{const}$; $\omega_1 = \text{const}$ (рис. 3.12, а).

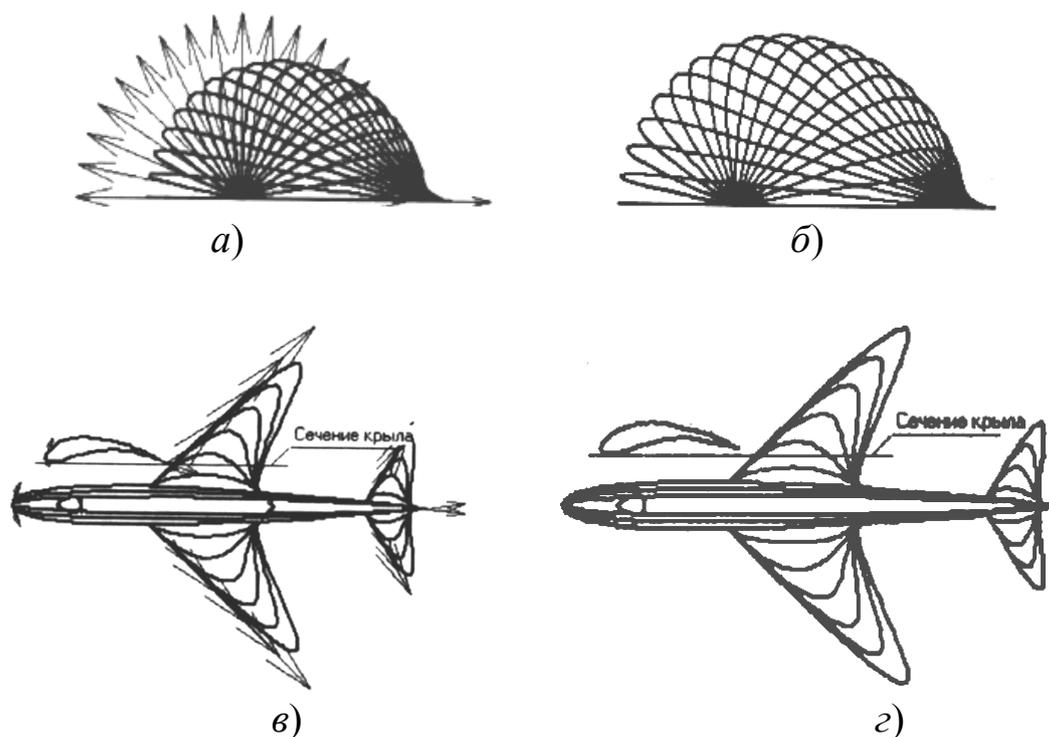


Рис. 3.12. Расчетная схема:

a – при $\beta_0 = \text{var}$, $\beta_1 = \text{const} = 0^\circ$; $\omega_0 = \text{const}$; $\omega_1 = \text{const}$;

б – при отключении вывода векторов на экран; *в* – при варьировании весовыми и угловыми коэффициентами; *г* – без изображения векторов

Этот же пример показан на рис. 3.12, *б* при отключении вывода векторов на экран.

Эрмитов кубический сплайн впервые использовал Фергюсон (1963) в самолетостроении. В знак признательности ему приведены примеры [23], как, варьируя в автоматическом режиме с некоторым шагом весовыми и угловыми коэффициентами, можно изобразить, например, аэроплан (рис. 3.12, *в*). На рис. 3.12, *г* он показан уже без изображения векторов.

Сплайн Безье. Безье (1970) перегруппировал члены кубического сплайна Эрмита (3.69) таким образом, чтобы физический смысл векторных коэффициентов стал более ясным и последние стали бы более удобными для целей конструирования кривых, а не ограничивались бы их подгонкой, как в случае Эрмитова сплайна.

Кривая в форме Безье также начинается в точке \vec{r}_0 и заканчивается в конечной точке, которую обозначим уже как \vec{r}_3 (рис. 3.13).

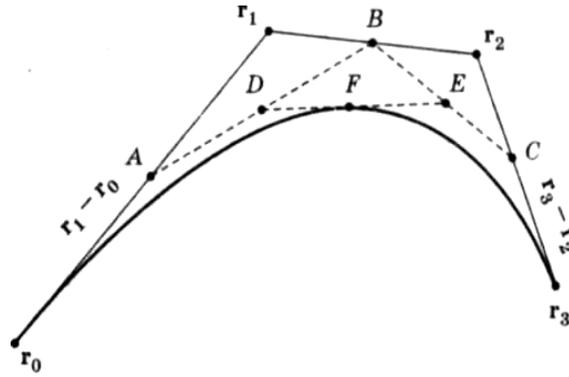


Рис. 3.13. Расчетная схема

Указываются еще две точки – r_1 и r_2 . Три прямые линии, соединяющие точки r_0, r_1, r_2 и r_3 , образуют фигуру, называемую характеристической ломаной этой кривой. Кривая Безье:

- 1) проходит через точки r_0 и r_3 ;
- 2) в точке r_0 имеет касательную, идущую от r_0 к r_1 ;
- 3) в точке r_3 имеет касательную, идущую от r_2 к r_3 .

В формуле (3.69) Эрмита сплайна Безье положил:

$$\bar{r} = (1-u)^3 \bar{r}_0 + 3u(1-u)^2 \bar{r}_1 + 3u^2(1-u) \bar{r}_2 + u^3 \bar{r}_3.$$

После преобразований он получил сплайн в векторной форме:

$$\bar{r} = (1-u)^3 \bar{r}_0 + 3u(1-u)^2 \bar{r}_1 + 3u^2(1-u) \bar{r}_2 + u^3 \bar{r}_3.$$

Прежде всего отметим, что он имеет не только более компактный вид, – у него просматривается и определенная закономерность составляющих его сомножителей u и $(1-u)$ в различных степенях. Но главное его преимущество состоит в том, что, указав положение четырех точек r_0, r_1, r_2 и r_3 , можно с достаточно большой степенью точности предсказать «полноту» кривой, которая будет построена.

Обозначим буквами точки середин отрезков (рис. 3.13): A – отрезка $r_1 - r_0$; B – отрезка $r_2 - r_1$; C – отрезка $r_3 - r_2$; D – отрезка AB ; E – отрезка BC ; F – отрезка DE . В точке F кривая и коснется отрезка DE . Если сначала мы указали точки r_1 и r_2 неудачно и нас не устраивает вид кривой, то, изменив их положение на новое, мы легко можем добиться желаемого вида кривой и требуемого положения точки F . При этом мы даже визуально можем определить величину, на которую требуется сместить точки r_1 и r_2 . Это и определило ши-

рокое распространение этого вида сплайна для целей конструирования линий и поверхностей. Несколько примеров определения точки F показаны на рис. 3.14.

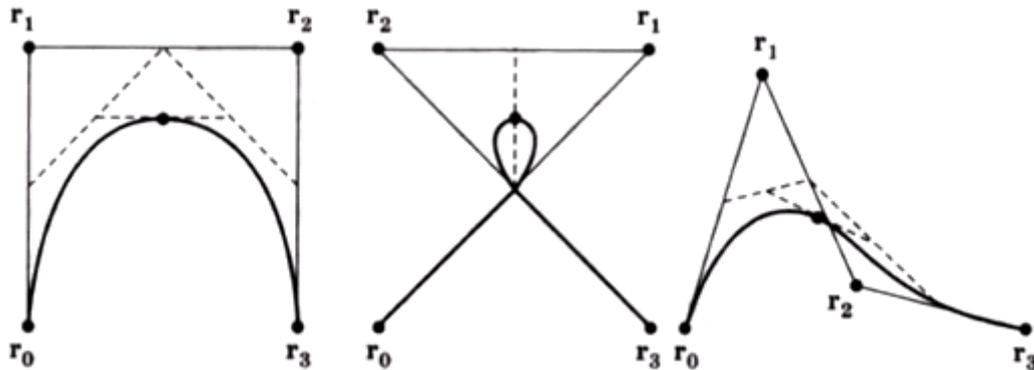


Рис. 3.14. Схемы к определению точки F

Изменяя положение узлов, можно легко изменять вид кривой. В качестве примера изобразим несколькими сплайнами Безье некоторое подобие вазы (рис. 3.15). Перемещая в автоматическом режиме с некоторым шагом некоторые узлы, будем изменять ее форму. Поскольку современные дизайнеры предпочитают асимметричные формы, то и мы будем раздвигать вторые снизу узлы в направлении, например, под углом 20° к горизонтали. На рис. 3.16 построение выполнено уже без вывода на экран характеристических ломаных кривой. Сплайнами Безье можно строить любые фигуры и из нескольких частей. Так фигуры построены на рис. 3.16, б.

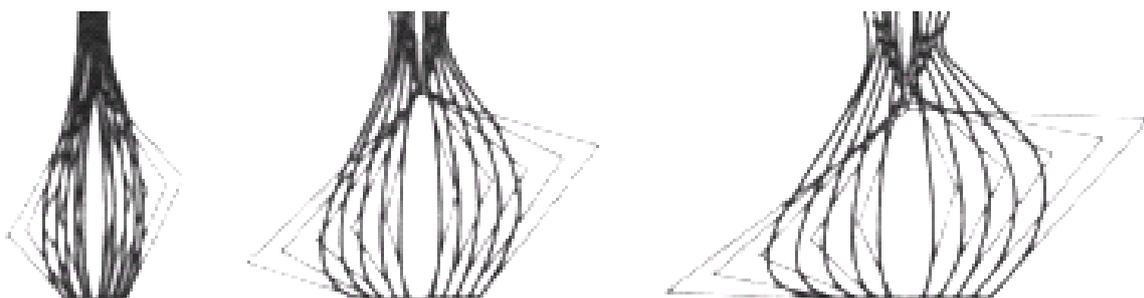


Рис. 3.15. Сплайны Безье при смещенных узлах

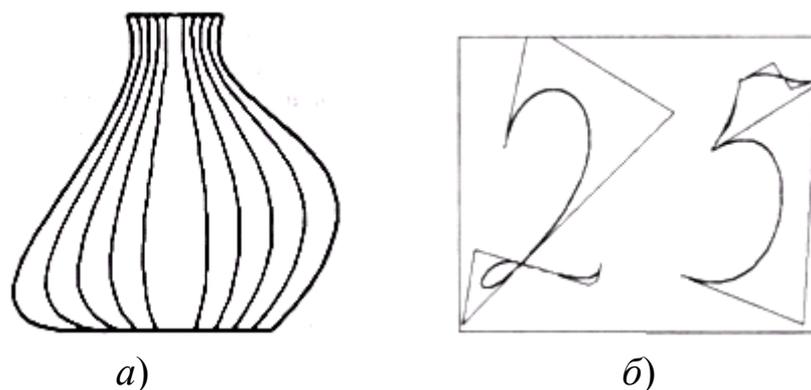


Рис. 3.16. Сплайны Безье:

a – без вывода на экран характеристических ломаных кривых;
б – с выводом на экран характеристических ломаных кривых

3.5.3. Формирование контура детали при численном моделировании

Развитие САПР на определенном этапе выдвинуло задачу построения трехмерных объектов в аксонометрии. Первые попытки ее решения представляли так называемые каркасные (проволочные) изображения, при которых невидимые линии не удалялись. Но уже к 1972 г. было разработано около десятка алгоритмов удаления невидимых линий, что позволило Сазерленду, Спруллу и Шумахеру даже ввести их классификацию по группам в зависимости от системы координат, в которой они реализованы. К первой группе были отнесены алгоритмы, работающие в пространстве объекта (рис. 3.17, *a*). Каждая из n граней объекта сравнивается с остальными $n-1$ гранями, при этом число проверок пропорционально n^2 . Ко второй группе отнесены все алгоритмы, работающие в пространстве изображения, которое представляет какую-либо координатную плоскость, например $x-y$ (рис. 3.17, *a*), на которую сначала проецируются все объекты и уже на этой плоскости решается задача удаления невидимых линий. Объект представляется совокупностью n -угольных граней и затем определяется, какая грань является ближайшей к наблюдателю для каждого из N пикселей экрана, для чего потребуется $n-N$ проверок. Алгоритмы каждой из этих групп имеют как преимущества, так и свои недостатки. Для краткости мы рассмотрим только один алгоритм из второй группы, а именно – метод плавающего горизонта. Его несомненное преимущество – сравнительно простой алгоритм.

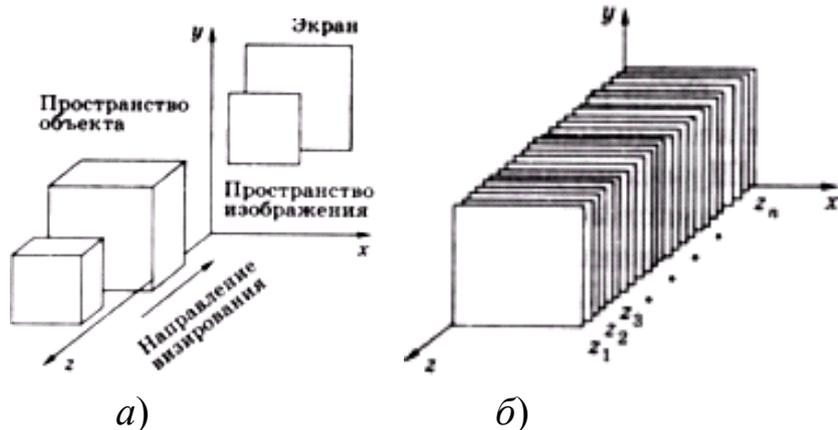


Рис. 3.17. Схемы удаления невидимых линий:

- a* – при сравнении n граней объекта с остальными $n-1$ гранями;
- б* – при рассечении исходного объекта последовательностью параллельных секущих плоскостей

Этот алгоритм чаще всего используется для изометрических построений трехмерных функций вида $F(x, y, z) = 0$. Основная идея алгоритма состоит в сведении трехмерной задачи к двумерной в пространстве изображения путем рассечения исходного объекта последовательностью параллельных секущих плоскостей, имеющих, например, различные значения z (рис. 3.17, б). Координату x изменяют на величину одного пикселя и для каждого из них запоминают y в массиве значений, который образует так называемый «горизонт». В программе должно быть зарезервировано два таких массива, которые называют нижним и верхним горизонтами. Рассмотрим подробнее работу метода на примере построения изображения некоторой функции (рис. 3.18, а). Пусть при значении z_1 след сечения функции будет представлять практически прямую линию. Ординаты y этой линии при каждом значении x сначала запоминаются как нижний и верхний горизонты. Ординаты y следующего сечения при z_2 стали больше, и теперь уже они запоминаются как ординаты верхнего горизонта, а ординаты нижнего горизонта останутся прежними. Так будет продолжаться до сечения z_n . В сечении z_{n+1} часть ординат оказалась меньше верхнего горизонта (рис. 3.18, а), и поэтому на этом участке они не запоминаются в качестве ординат верхнего горизонта и не выводятся на экран. То же самое будет и с несколькими последующими сечениями нашего примера, при этом нижний горизонт остался неизменным. Но сравнение ординат выполняется не только на превышение верхнего горизонта, проверяется также, не станут ли они меньше нижнего горизонта. В этом примере такой ситуации не случилось.

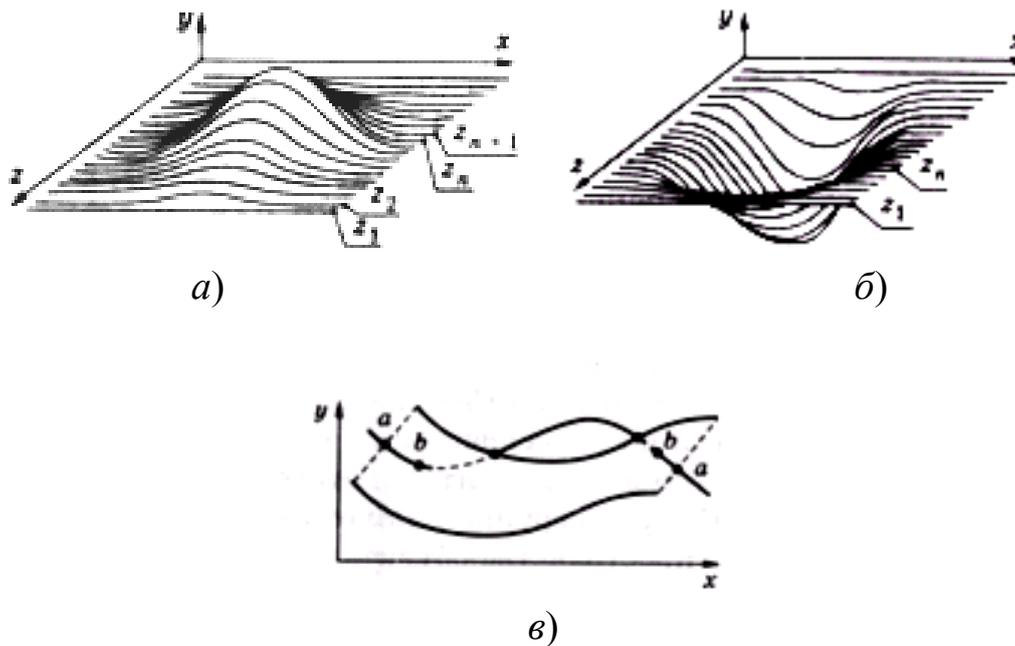


Рис. 3.18. Схемы удаления невидимых линий:

a – при постоянном нижнем горизонте; *б* – при постоянном верхнем горизонте;
в – схема появления боковых ребер

Рассмотрим теперь случай вогнутой поверхности (рис. 3.18, *б*). Пусть при значении z_n ордината следа сечения на некотором участке стала меньше нижнего горизонта, поэтому теперь уже она запоминается в ординатах нижнего горизонта и эти точки выводятся на экран. То же самое будет и с несколькими последующими сечениями.

Тогда алгоритм в словесной форме кратко можно сформулировать так: если при данном значении x значение y будет больше верхнего или меньше нижнего горизонтов для всех предыдущих кривых, то кривая видима, в противном случае – невидима.

Недостаток метода – образование зазубренных боковых ребер. Они появляются, когда кривые из более отдаленных от наблюдателя плоскостей оказываются слева или справа от кривых, расположенных ближе к наблюдателю. Так, например, слева и справа (рис. 3.18, *в*) на участках *a–b* кривые не должны быть видны, но согласно алгоритму они будут видны. Эти участки можно устранить, если в массивы верхнего и нижнего горизонтов включить ординаты, соответствующие «ложным» боковым ребрам, которые на рис. 3.18, *в* показаны штриховыми линиями. Но не будем усложнять алгоритм, поскольку эти погрешности можно уменьшить и за счет увеличения количества сечений. Тем не менее для функций с большими углами подъема поверхностей они все-таки будут заметны.

При построении аксонометрических проекций ГОСТ 2.317–69 регламентирует два вида прямоугольных проекций (изометрия и диметрия) и три вида косоугольных проекций (фронтальная изометрия, диметрия и горизонтальная изометрия). Они отличаются значениями углов α_x и α_y положения координатных осей (рис. 3.19, а) и показателями искажения размеров по этим осям K_x, K_y, K_z .

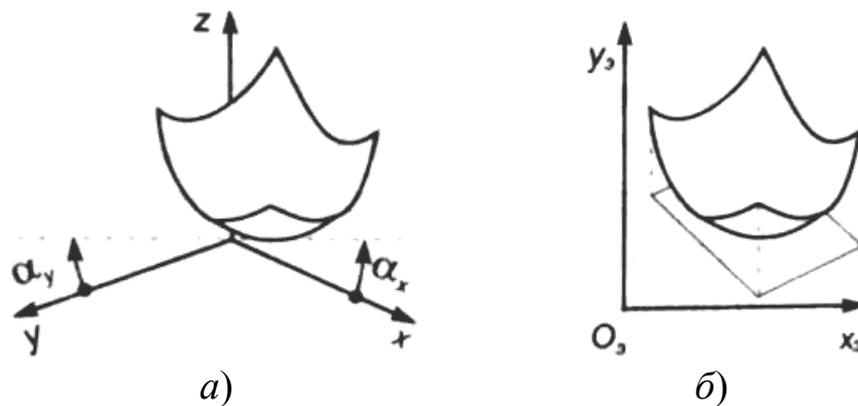


Рис. 3.19. Изображения поверхностей:
а – аксонометрическое; б – в проекции

При построении точных аксонометрий они являются в общем случае дробными числами, но стандарт допускает их некоторое округление при построении так называемых увеличенных проекций. Свяжем с объектом координатную систему, показанную на рис. 3.19, а. Тогда для вычисления плоских экранных координат изображения x_3 и y_3 (рис. 3.19, б) необходимо пересчитать пространственные координаты объекта с учетом углов α_x и α_y и показателей искажения K_x, K_y и K_z для изометрии:

- прямоугольной: $\alpha_x = \alpha_y = 30^\circ$; $K_x = K_y = K_z = 1$;
- фронтальной: $\alpha_x = 45^\circ$; $\alpha_y = 0^\circ$; $K_x = K_y = K_z = 1$;
- горизонтальной: $\alpha_x = 30^\circ$; $\alpha_y = 60^\circ$; $K_x = K_y = K_z = 1$.

Для диметрии:

- прямоугольной: $\alpha_x = 41^\circ$; $\alpha_y = 7^\circ$; $K_x = 0,5$; $K_y = K_z = 1$;
- фронтальной: $\alpha_x = 45^\circ$; $\alpha_y = 0^\circ$; $K_x = 0,5$; $K_y = K_z = 1$.

При описании алгоритма удаления невидимых линий мы рассматривали сечения, перпендикулярные только к оси z (рис. 3.18). Но можно аналогичную процедуру выполнять и к оси x , и тогда поверх-

ность будет покрыта уже сеткой. В качестве примера выполним построение для функции $F = 8(x-1)^2 + 4xy + 5y^2$ в диапазоне изменения $-3 \leq x \leq 3$ и $-3 \leq y \leq 3$ в прямоугольной изометрии (рис. 3.20, а) и фронтальной диметрии (рис. 3.20, б).

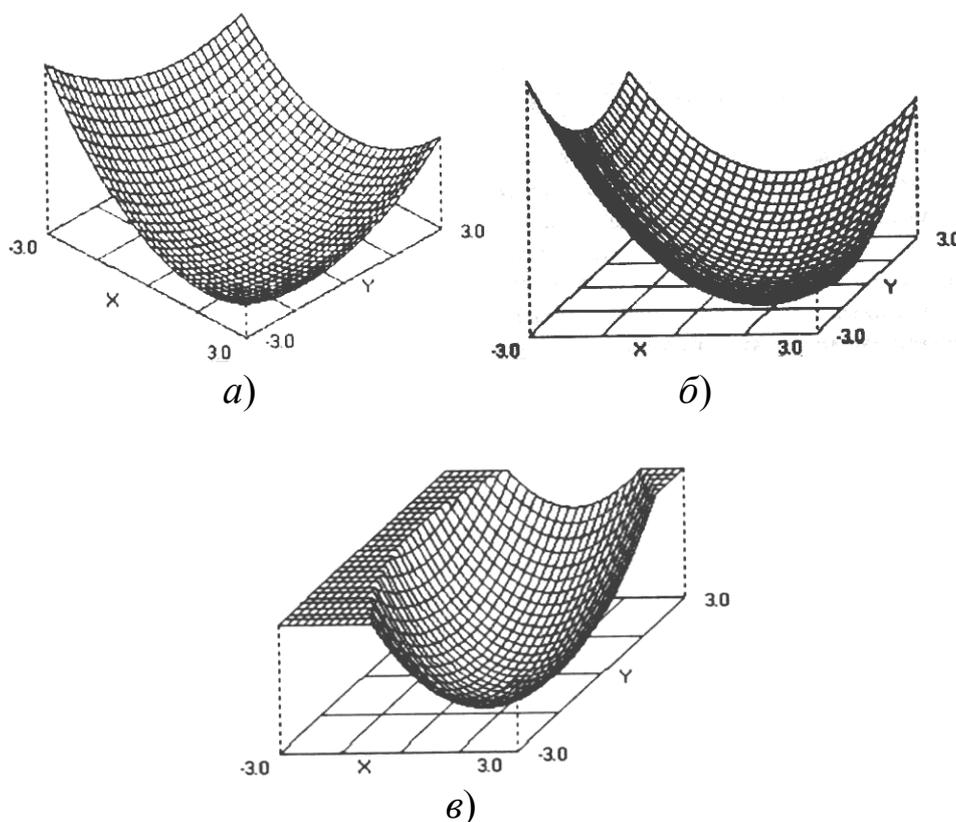


Рис. 3.20. Изображения поверхностей:

а – в прямоугольной изометрии; б – в фронтальной диметрии;
 в – с рассечением изображения плоскостью, параллельной координатной плоскости $x-y$

Программа написана таким образом, что она сначала определяет максимальное значение функции, затем масштабирует изображение так, чтобы оно полностью поместилось на экране. А это позволяет реализовать еще одну полезную возможность – рассечение изображения плоскостью, параллельной координатной плоскости $x-y$. Такое рассечение позволяет визуально показать в аксонометрии линию уровня функции, находящуюся посередине наибольшего значения функции по высоте, например при фронтальной изометрии (рис. 3.20, в).

Линия уровня представляет множество точек, для которых функция имеет постоянное значение. Пример построения таких линий для нашей функции показан на рис. 3.21.

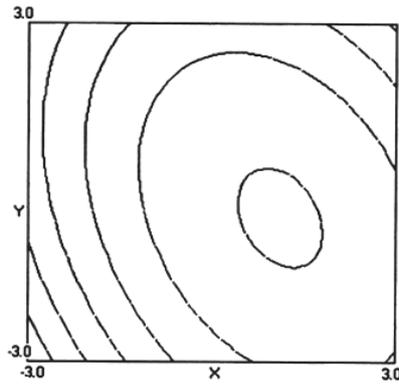


Рис. 3.21. Линии уровня

3.6. Формирование поверхностей на основе сплайнов образующих и направляющих

Представление процесса формообразования поверхности, учитывающая, что ее образующая может иметь любую форму, в том числе и непрерывно изменяющуюся при движении, является универсальным [24].

Таким образом, обработанная поверхность будет представлять сетчатый каркас из плоских алгебраических линий с прямой сеткой в плане.

В системе $OXYZ$ (рис. 3.22) введем $n + 1$ плоскости, параллельные оси Y , т. е. $Y = b_1; Y = b_2; \dots; Y = b_{n+1}$ в каждой плоскости $Y = b_i$ зададим кривую, определяемую многочленом от X степени m :

$$Z = P_{mi}(X) = \alpha_{0i}X^m + \alpha_{1i}X^{m-1} + \dots + \alpha_{mi}, \quad (3.71)$$

где $i = 1, 2, \dots, n + 1$ – номер плоскости.

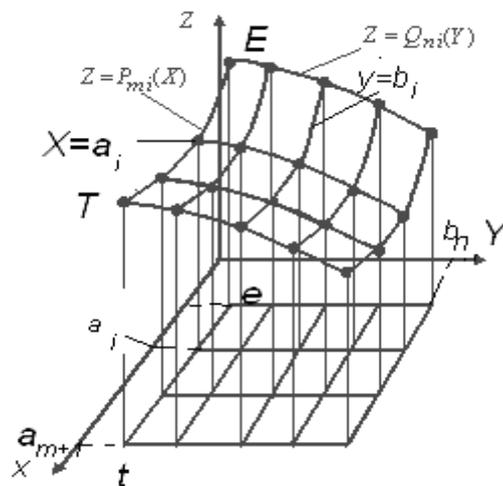


Рис. 3.22. Эскиз поверхности детали в виде дискретного каркаса

Таких кривых будет $(n + 1)$, и все они образуют дискретный простой каркас.

Введем $m + 1$ плоскости, параллельные оси X , т. е.

$$X = a_1, X = a_2, \dots, X = a_{m+1}.$$

Произвольная плоскость $X = a_i$ пересекает кривые (3.71), причем каждую только в одной точке. Поэтому получим $(n + 1)$ точек, которые определяют многочлен от Y степени n :

$$Z = Q_{ni}(Y) = \beta_{0i}Y^n + \beta_{1i}Y^{n-1} + \dots + \beta_{ni}. \quad (3.72)$$

Таким образом, в каждой плоскости $X = C_i$ имеется кривая (3.72). Таких кривых $(m + 1)$, и все они образуют второй дискретный простой каркас. Оба эти каркаса образуют дискретный сетчатый каркас $\bar{R}(m, n)$. Это означает, что в одном направлении будут кривые m -й степени, а в другом n -й.

Полученный дискретный каркас $\bar{R}(m, n)$ можно интерполировать в непрерывный сетчатый каркас $R(m, n)$, т. е. если провести произвольную плоскость $X = C_i$, то она пересечет $(n+1)$ кривых (3.72).

Предварительно рассмотрим поверхность

$$Z = F(X, Y),$$

где $F(X, Y)$ – многочлен от (X, Y) , содержащий каркас $\bar{R}(m, n)$.

Искомая поверхность должна удовлетворять требованиям:

1) в сечениях плоскостями $X = \text{const}$ располагаются кривые n -го порядка;

2) в сечениях плоскостями $Y = \text{const}$ – кривые m -го порядка.

Кроме того, структура многочленов, определяющих кривые сечения искомой поверхности, должна быть той же, что и структура многочленов, определяющих кривые каркаса $\bar{R}(m, n)$. Выполнение требований позволяет выявить функцию $F(X, Y)$:

$$Z = f_0(X)Y^n + f_1(X)Y^{n-1} + \dots + f_n(X), \quad (3.73)$$

где

$$f(X) = \gamma_0X^m + \gamma_1X^{m-1} + \dots + \gamma_m.$$

Степень многочлена, описываемого соотношением (3.73), определяет порядок поверхности (p), который должен быть $p \leq m + n$, т. е. равно числу узлов сетчатого каркаса $\bar{R}(m + n)$.

Если первый дискретный простой каркас, входящий в сетчатый, состоит из линий:

$$Z = P_{mi}(X); \quad Y = b_i,$$

второй дискретный простой каркас, входящий в сетчатый, состоит из линий:

$$Z = Q_{nj}(Y); \quad X = a_j,$$

где $j = 1, 2, 3, \dots, m + 1$; $Q_{nj}(Y) = \beta_0 Y^n + \beta_1 Y^{n-1} + \dots + \beta_n$.

Тогда уравнение дискретного сетчатого каркаса будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \dots \left\{ [Z - P_{m1}(X)]^2 + (Y - b_1)^2 \right\} \left\{ [Z - P_{m2}(X)]^2 + (Y - b_2)^2 \right\} \dots \\ & \dots \left\{ [Z - P_{m,n+1}(X)]^2 + (Y - b_{n+1})^2 \right\} \left\{ w(x, y, z, t) \right\} \dots \\ & \dots \left\{ [Z - Q_{n2}(Y)]^2 + (X - C_2)^2 \right\} \left\{ \rho(T) \right\} = 0, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$; $P_{mi}(X) = \alpha_0 X^m + \alpha_1 X^{m-1} + \dots + \alpha_m$.

Действительно, любая точка, принадлежащая какой-либо линии или узлу каркаса, обращает в ноль один или два сомножителя, т. е. получим уравнение вида (3.71).

Уравнение отрезка прямой et оси OX запишем в виде:

$$|X - e| + |X - t| - |e - t| = 0. \quad (3.74)$$

Это уравнение равно нулю только тогда, когда точка M_X принадлежит отрезку $[e, t]$.

В уравнении (3.71) точка $M(X, Y)$ принадлежит данной кривой $Y = f(X)$, если

$$Y - f(X) = 0. \quad (3.75)$$

Значит, чтобы точка принадлежала $[E, T]$ кривой (3.71), необходимо и достаточно одновременное обращение в ноль уравнений (3.74) и (3.75), такое условие можно записать:

$$\left[|X - e| + |X - t| - |e - t| \right]^2 + [Y - f(X)]^2 = 0. \quad (3.76)$$

Это и будет уравнение отрезка кривой на плоскости.

Рассмотрим, как можно задать уравнение отрезка кривой в пространстве. Пусть пространственная кривая (или плоская) задана уравнениями своих проекций (рис. 3.23):

$$Y - f(X) = 0; \quad Z - \varphi(X) = 0. \quad (3.77)$$

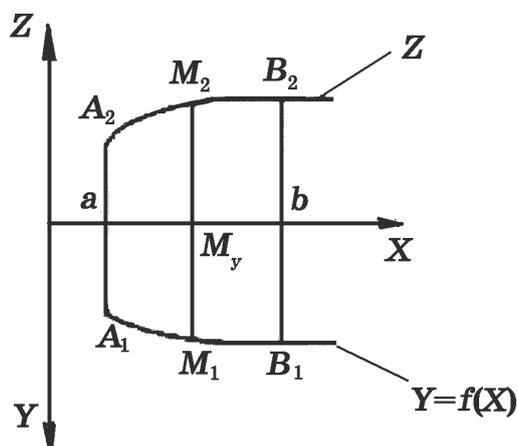


Рис. 3.23. К расчету параметров каркаса

Для того чтобы точка принадлежала какому-нибудь отрезку $[E, T]$ данной кривой, необходимо и достаточно одновременное обращение в ноль левых частей уравнений (3.74) и (3.77). Это условие можно записать:

$$[|X - e| + |X - t| - |e - t|]^2 + [Y - f(X)]^2 + [Z - \varphi(X)]^2 = 0. \quad (3.78)$$

Обозначим левую часть (3.78) через F . Если таких отрезков кривых (3.78) имеется дискретное конечное множество, образующее дискретный простой каркас, то уравнение такого каркаса можно записать в следующем виде:

$$F_1 F_2 F_3 \dots F_i = 0. \quad (3.79)$$

Аналогично можно записать уравнение второго дискретного простого каркаса, состоящего из отрезков других линий:

$$\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_j = 0. \quad (3.80)$$

Если указанные дискретные простые каркасы (3.79) и (3.80) образуют сетчатый каркас, то его уравнение можно записать в виде:

$$F_1 F_2 F_3 \dots F_i \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_j = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение является аналитическим заданием отсека дискретного сетчатого каркаса, состоящего из отдельных отрезков линий.

3.7. Математическое моделирование кромок рабочей части инструмента и траекторий их движений

В традиционно сложившихся условиях применения цельного и составного инструментов основная часть работ посвящена профилированию специального режущего инструмента, т. е. получению математических моделей расчета профиля режущей кромки по заданной образующей поверхности детали. Распространение сборного режущего инструмента со сложной геометрией СМП и использование поверхностей со сложной топографией требовало новых подходов в разработке математических моделей формообразующих кромок режущих инструментов. Кроме того, использование ГПС, составной частью которых была САПР РИ, в свою очередь, повышало требования к разработке мобильных алгоритмов проектирования инструментальной оснастки.

Работами В. А. Гречишникова, С. И. Лашнева, А. Н. Борисова, С. Г. Емельянова, С. И. Петрушина и других разрабатывались алгоритмы и математические модели проектирования сборных металло-режущих инструментов с учетом расположения режущих кромок СМП относительно обработанных поверхностей деталей. Однако эти исследования не учитывали топографию обработанных поверхностей. Поэтому для разработки математических моделей режущих и формообразующих кромок инструмента и траекторий их движения необходимо создать алгоритм, позволяющий учитывать сложную топографию обработанных поверхностей [24]. Для ее задания рациональнее использовать параметрический вид:

$$\bar{r} = g(\theta_i), \quad (3.81)$$

где \bar{r} – радиус-вектор локального отсека поверхности; θ_i – параметры локального отсека.

В инженерной практике геометрическими объектами оперируют только в трехмерном евклидовом пространстве (в пространстве E_3) или проекциями в евклидовой плоскости (в пространстве E_2). Кроме того, когда речь идет о кривой с бесконечными ветвями или о бесконечной поверхности, например, о параболоиде или гиперболоиде вра-

щения, фактически всегда следует понимать дугу некоторой длины бесконечной кривой или ограниченный участок площади неограниченной поверхности.

Кинематическая поверхность может быть описана в виде многочлена:

$$([a_i][xyz])x + ([a_{2i}][xyz1]^T)y + ([a_{3i}][xyz1]^T)z + ([a_{4i}][xyz1]^T) = 0, \quad (3.82)$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ – коэффициенты; $i, k = 1, 2, 3, 4$.

Свойства любой поверхности, описываемой уравнением (3.82), можно определить, используя теорию инвариантов. В качестве инвариантов относительно параллельного переноса и поворота осей приняты выражения:

$$I_2 = |a_{ij}| + |a_{km}| + |a_{lp}|,$$

где $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 2, 3; m = 2, 3; l = 3, 1; p = 3, 1$;

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$K_4 = |a_{ij}|, \text{ где } i, j = 1, 2, 3, 4; \quad I_3 = |a_{ij}|, \text{ где } i, j = 1, 2, 3. \quad (3.83)$$

Кроме инвариантов (3.83) используются полуинварианты (семиинварианты), которые являются инвариантами только ортогонального преобразования, т. е. поворота осей:

$$K_3 = |a_{ij}| + |a_{km}| + |a_{lp}|, \text{ где } i, j = 1, 2, 4; k, m = 1, 3, 4; l, p = 2, 3, 4.$$

$$K_2 = |a_{ij}| + |a_{km}| + |a_{lp}|, \text{ где } i, j = 1, 4; k, m = 2, 4; l, p = 3, 4.$$

Эти инварианты определяют свойства поверхности, не зависящие от ее расположения в пространстве. Так, например, если $I_1 I_3 > 0$, $I_2 > 0$ и $K_4 < 0$, то это будет локальный участок эллипсоида; если $I_1 I_3 \leq 0$ или $I_2 \leq 0$ и $K_4 > 0$, $I_3 \neq 0$, то это участок однополостного гиперboloида; если $I_1 I_3 \leq 0$ или $I_2 \leq 0$ и $K_4 < 0$, $I_3 \neq 0$, то это локальный участок двухполостного гиперboloида; если $I_1 I_3 \leq 0$ или $I_2 \leq 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 \neq 0$, то это локальный участок конуса второго порядка; если $I_3 = 0$ и $K_4 < 0$, то это локальный участок эллиптического параболоида; если $I_1 K_3 < 0$, $I_2 > 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 = 0$, то это локальный участок эллиптического цилиндра; если $K_3 \neq 0$, $I_2 < 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 = 0$, то это локальный участок

гиперболического цилиндра; если $K_3 = 0$, $I_2 < 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 = 0$, то это локальный участок двух пересекающихся плоскостей; если $K_3 \neq 0$, $I_2 = 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 = 0$, то это локальный участок параболического цилиндра; если $K_3 = 0$, $I_2 = 0$ и $K_4 = 0$, $I_3 = 0$, $K_2 < 0$, то это локальный участок двух параллельных плоскостей.

Если поверхность сложная, то на ней выделяются отдельные участки. Гладкие регулярные локальные участки кинематической поверхности удобно различать по типу соприкасающегося в рассматриваемой точке M параболоида. Согласно теореме Бонне параметры соприкасающегося к кинематической поверхности в точке M параболоида, а следовательно, и вид гладкого регулярного локального участка сложной поверхности с точностью до ее расположения в пространстве полностью и однозначно определяются гауссовыми коэффициентами первой E , F , G и второй L , M , N основных квадратичных форм (дифференциальных форм Гаусса) этой поверхности.

Таким образом, на поверхности $\bar{r} = g(\theta_i)$ выделялась асимптотическая сеть линий с использованием первой квадратичной формы Гаусса:

$$L d\theta_1^2 + 2M d\theta_1 d\theta_2 + N d\theta_2^2 = 0, \quad (3.84)$$

где θ_i – независимые параметры;

$$L = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta_1} \right)^2; \quad M = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta_1} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \theta_2} \right); \quad N = \frac{\partial^2 r}{\partial \theta_2^2}.$$

Затем определялась их длина:

$$ds^2 = E d\theta_1^2 + 2F d\theta_1 d\theta_2 + G d\theta_2^2, \quad (3.85)$$

$$\text{где } E = \frac{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta_1^2} \right) M}{H}; \quad H = \sqrt{LN - M^2}; \quad F = \frac{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right) M}{H}; \quad G = \frac{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta_2^2} \right) M}{H}.$$

Определялось кручение:

$$\chi = \frac{\bar{r}_\theta \bar{r}_{\theta\theta} \bar{r}_{\theta\theta\theta}}{|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_{\theta\theta}|^2},$$

где \bar{r}_θ , $\bar{r}_{\theta\theta}$, $\bar{r}_{\theta\theta\theta}$ – соответственно, первая, вторая и третья частные производные по параметру.

Если $\chi > 0$, то кривая закручивается относительно канонического репера по часовой стрелке, если меньше нуля – то против часовой стрелки, а если равно нулю – то линия плоская. Затем рассчитывалась кривизна кривых, по которым предварительно выбирались образующая и направляющая поверхности:

$$K = \frac{|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_{\theta\theta}|}{|\bar{r}_\theta|}.$$

Выбрав точку на поверхности локального участка и поместив в нее начало местной системы координат так, чтобы выполнялись условия:

$$\bar{n}[r_{i_{g_1}}[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)] \times r_{i_{g_2}}[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)]] = 1, \quad (3.86)$$

т. е. ось OZ которой сонаправлена с вектором нормали:

$$\bar{k}[r_{i_{\theta_1}}[g(\theta_1 \dots \theta_n)] \times r_{i_{\theta_2}}[g(\theta_1 \dots \theta_n)]] = 1, \quad (3.87)$$

а ось OX – с касательной к выбранной кривой:

$$\bar{i}r_{i_{\theta_1}}[g(\theta_1 \dots \theta_n)] = 1, \quad (3.88)$$

записывались в полученной системе координат уравнения образующей и направляющей.

Выделенные линии необходимо проверить по условиям (3.89), (3.90):

$$r_i[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)] = r_{i+1}[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)]; \quad (3.89)$$

$$r_{i_{g_i}}[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)] = r_{i+1_{g_i}}[g_i(\theta_1 \dots \theta_n)]. \quad (3.90)$$

Поворачивая систему координат вокруг оси \bar{n} , необходимо найти наиболее технологичную кривую. Так, например, если $K = \text{const}$, $\chi = \pm \text{const}$, то кривая соответствует правой (левой) винтовой линии; $K = \text{const}$, $\chi = 0$ – окружности;

если $s = -4 \cdot \cos 0,5\theta$, $K = -\frac{1}{4 \cdot \sin \frac{\theta}{2}}$, $\chi = 0$ – циклоида.

Точечные модели образующих и направляющих можно получить, используя обобщенную матрицу преобразования систем координат в процессе формообразования:

$$[A_{i-1}^i] = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $[A_{i-1}^i]$ – матрица преобразования $i-1$ системы координат и i -й; $C\theta_i, S\theta_i$ – соответственно, косинус и синус угла поворота систем координат на угол θ_i вокруг оси OZ ; $C\alpha_i, S\alpha_i$ – косинус и синус угла поворота систем координат на угол α_i вокруг оси OX ; a_i, d_i – соответственно, перемещения вдоль осей OX, OZ .

В этом случае касательная будет иметь вид:

$$\frac{d[A_{i-1}^i]}{d\theta_i} = \begin{bmatrix} -S\theta_i & -C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & +S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [B_{i-1}^i].$$

Критериями выбора будет постоянство вектора скорости:

$$\frac{d[A_{i-1}^i]}{dt} = [\dot{A}_{i-1}^i] = \begin{bmatrix} -S\theta_i & -C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & +S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta_i}{dt}$$

или стабильность инерционных нагрузок:

$$\frac{d^2[A_{i-1}^i]}{dt^2} = [\ddot{A}_{i-1}^i] = [B_{i-1}^i] \ddot{\theta}_i + \begin{bmatrix} -C\theta_i & +C\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i S\theta_i & -a_i C\theta_i \\ -S\theta_i & -C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & -a_i S\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i.$$

Затем необходимо определить общий градиент образующих и направляющих, выбрав предварительно формообразующую кромку и траекторию ее движения.

Например, выпуклая поверхность может быть образована инструментом с выпуклой, прямой или вогнутой формообразующей кромками при разных направлениях и других параметрах их движения, а значит необходимо разработать общий алгоритм их выбора.

Такой алгоритм должен включать в себя следующую последовательность: вначале необходимо аппроксимировать локальные отсеки кинематической поверхности линиями, обеспечивающими технологичные формообразующие кромки и траектории их движения, определить чувствительность погрешности аппроксимации параметров аппроксимирующих линий, найти направление относительного движения инструмента и заготовки, а затем, по заданному значению кинематической погрешности h , рассчитать количество размещаемых в корпусе инструмента многогранных пластин.

Для кинематических поверхностей, сформированных по схеме огибания, образующую локального участка описываем векторным многочленом:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{P}_0 + t\bar{P}_1 + t^2\bar{P}_2 + t^3\bar{P}_3, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.91)$$

Векторные коэффициенты P_0, P_1, P_2, P_3 определяем по известным граничным условиям:

$$r(0) = \bar{r}_0, \quad r(1) = \bar{r}_1, \quad \dot{r}(0) = \bar{T}_0, \quad \dot{r}(1) = \bar{T}_1.$$

Граничные условия формируются по характеру локального отсека.

Затем выражаются коэффициенты уравнения (3.91) через принятые граничные условия, т. е.

$$\bar{P}_0 = \bar{r}_0; \quad \bar{P}_1 = \bar{T}_1; \quad \bar{P}_2 = 3(\bar{r}_1 - \bar{r}_0) - 2\bar{T}_0 - \bar{T}_1; \quad \bar{P}_3 = 2(\bar{r}_0 - \bar{r}_1) + \bar{T}_0 + \bar{T}_1. \quad (3.92)$$

Подставив равенства (3.92) для векторов P_i при $i = 0...3$ в формулу (3.91), получили соотношения, которые записывались в форме Фергюсона:

$$\bar{r}(t) = [1t^2t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_1 \\ \bar{T}_0 \\ \bar{T}_1 \end{bmatrix} \text{ при } (0 \leq t \leq 1). \quad (3.93)$$

Кривая (3.93) позволяет описывать любую форму образующей или направляющей. Причем изменить характер кривой можно, изменяя направление и длину касательных векторов в граничных точках локального участка.

Уравнение (3.91) можно записать в форме Безье, для этого необходимо перегруппировать слагаемые многочлена (3.91) так, чтобы

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (1-t^3)\bar{r}_0 + 3t(1-t)^2\bar{r}_1 + 3t^2(1-t)\bar{r}_2 + t^3\bar{r}_3, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.94)$$

Тем самым кривая (3.94) проходит через точки, задаваемые векторами \bar{r}_0 и \bar{r}_3 , а векторы касательных к кривой в этих точках коллинеарные, соответственно, векторам $\bar{r}_1 - \bar{r}_0$ и $\bar{r}_3 - \bar{r}_2$ (рис. 3.24).

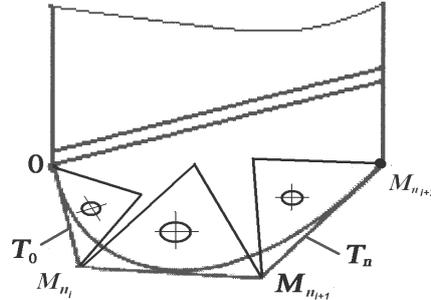


Рис. 3.24. К расчету параметров СМП для кривой инструментальной поверхности

Ломаная $OM_{n_i}M_{n_{i+1}}M_{n_{i+2}}$ называется характеристической ломаной кривой (3.94). Для удобства анализа уравнения (3.94) записывались в матричной форме:

$$\bar{r}(t) = [1t^2t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{bmatrix} \text{ при } (0 \leq t \leq 1). \quad (3.95)$$

Полученные по последнему соотношению образующая и направляющая анализируются по кривизне для граничных точек локального участка:

$$K_1(0) = \frac{2 |(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)|}{3 |\bar{r}_1 - \bar{r}_0|^3}, \quad K_1(1) = \frac{2 |(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)|}{3 |\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^3}. \quad (3.96)$$

Если образующая кинематической поверхности, состоящая из ряда локальных участков, имеет регулярный характер, то для определения погрешности можно построить кривую Фергюсона, проходящую через точки $OM_{n_i}M_{n_{i+1}}M_{n_{i+2}}$. В этом случае должны быть известны радиус-векторы точек стыка локальных участков $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n$ и касательные векторы $\bar{T}_0, \bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n$ в этих точках. Так как образующая –

3.8. Алгебрологическое моделирование

В алгебрологических ММ тела описываются системами логических выражений, отражающих условия принадлежности точек внутренним областям тел.

Рассмотрим в качестве примера задание поверхностей деталей с использованием R -функций [6]. От табличного задания булевых функций к аналитическому.

Родство булевых функций с функциями алгебры множеств позволяет дать им простую геометрическую интерпретацию.

Пусть Ω есть некоторая область. Условимся символ Ω рассматривать одновременно и как обозначение области, и как функцию точки пространства E , которая равна единице в точках Ω и нулю вне области Ω . Такую функцию принято называть характеристической функцией (двузначным предикатом) области Ω . Очевидно, что Ω является характеристической функцией дополнения $\bar{\Omega}$.

Пользуясь таблицами конъюнкции и дизъюнкции, легко устанавливаем, что $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ является характеристической функцией пересечения $\Omega_1 \cap \Omega_2$, а $\Omega_1 \vee \Omega_2$ – характеристической функцией соединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Импликации, равнозначности и операции Шеффера соответствуют области, приведенные на рис. 3.25.

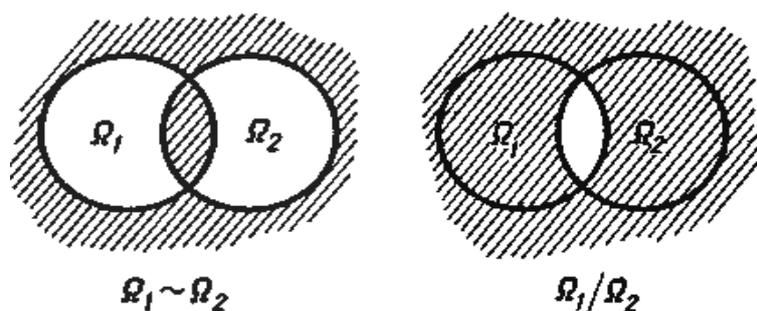


Рис. 3.25. Области характеристических функций

Из определения R -функций следует, что если $\wedge_1(F_1, F_2)$, $\wedge_2(F_1, F_2)$ и $\wedge_3(F_1)$ такие R -функции, то $\wedge_1(F_1, F_2)$ положительна тогда и только тогда, когда F_1 и F_2 положительны, $\wedge_2(F_1, F_2)$ отрицательна тогда и только тогда, когда F_1 и F_2 отрицательны, $\wedge_3(F_1)$ положительна тогда и только тогда, когда F_1 отрицательное число. Эти свойства удобно представить таблицей.

В дальнейшем функцию \wedge_1 будем называть R -конъюнкцией, \wedge_2 – R -дизъюнкцией, \wedge_3 – R -отрицанием, а для их обозначения используем символы, принятые для обозначения соответствующих булевых функций, но с некоторыми индексами. Приведем некоторые возможные варианты таких R -функций (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Варианты R -функций

F_1	F_2	$\wedge_1(F_1, F_2)$	$\wedge_2(F_1, F_2)$	$\wedge_3(F_1)$
+	+	+	+	–
+	–	–	+	–
–	+	–	+	+
–	–	–	–	+

Система R_α :

$$\left. \begin{aligned} F_1 \wedge_\alpha F_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\alpha F_1 F_2} \right); \\ F_1 \vee_\alpha F_2 &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(F_1 + F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\alpha F_1 F_2} \right); \\ \bar{F} &\equiv -F, \end{aligned} \right\} \quad (3.97)$$

где $\alpha = \alpha(F_1, F_2)$ – произвольная непрерывная функция, такая, что $\alpha(F_1, F_2) = \alpha(F_2, F_1) = \alpha(-F_1 - F_2)$ и $-1 < \alpha(F_1, F_2) \leq 1$.

Частными случаями системы R_α являются:

– система R_0 :

$$\left. \begin{aligned} F_1 \wedge_0 F_2 &\equiv F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2}; \\ F_1 \vee_0 F_2 &\equiv F_1 + F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_2^2}; \\ \bar{F} &\equiv -F; \end{aligned} \right\} \quad (3.98)$$

– система R_1 :

$$\left. \begin{aligned} F_1 \wedge_1 F_2 &\equiv \frac{1}{2}(F_1 + F_2 - |F_1 - F_2|) \equiv \min(F_1, F_2); \\ F_1 \vee_1 F_2 &\equiv \frac{1}{2}(F_1 + F_2 + |F_1 - F_2|) \equiv \max(F_1, F_2); \\ \bar{F} &\equiv -F. \end{aligned} \right\} \quad (3.99)$$

Пример: уравнение границы области, изображенной на рис. 3.26, а, имеет вид:

$$\omega \equiv \left\{ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 \left[(a^2 - x_1^2) \wedge_0 x_2 \right] \right\} \vee_0 (Rx_1 - x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Пример. Написать уравнение поверхности кругового цилиндра высотой H и радиусом R с поперечным отверстием прямоугольного сечения высотой $2a$ и шириной $2b$, равноудаленного от оснований (рис. 3.26, б).

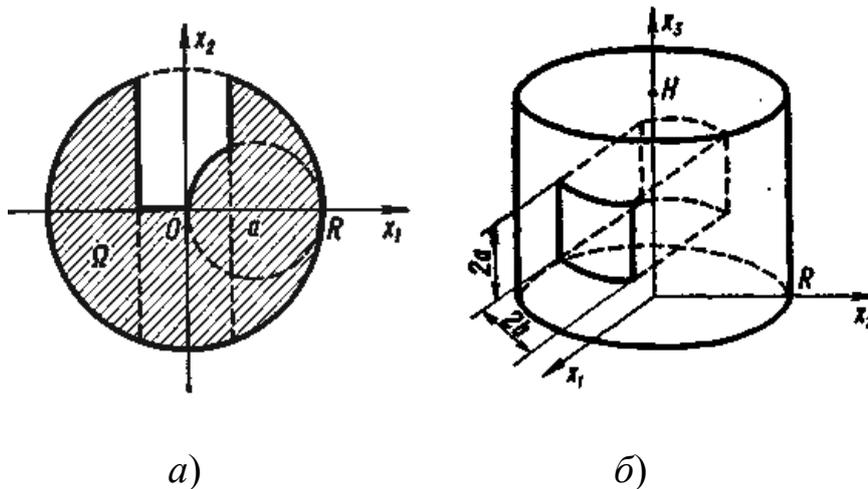


Рис. 3.26. Эскизы твердотельных моделей деталей:
а – плоской; б – объемной

В качестве опорных областей выберем следующие:

$\Omega_1 = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)$ – бесконечный цилиндр радиуса R с осью Ox_3 ;

$\Omega_2 = [x_3(H - x_3) \geq 0]$ – горизонтальный слой, заключенный между плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = H$;

$\Omega_3 = (b^2 - x_2^2 \geq 0)$ – вертикальный слой, параллельный плоскости x_1Ox_3 , заключенный между плоскостями $x_2 = \pm b$;

$\Omega_4 = \left[a^2 - \left(x_3 - \frac{1}{2}H \right)^2 \geq 0 \right]$ – горизонтальный слой, заключенный между плоскостями $x_3 = \frac{1}{2}H - a$ и $x_3 = \frac{1}{2}H + a$.

Логическая формула для области Ω может быть написана в виде:

$$\Omega = (\Omega_1 \wedge \Omega_2) \wedge (\bar{\Omega}_3 \vee \bar{\Omega}_4).$$

Следовательно, воспользовавшись системой R_0 , уравнение поверхности рассматриваемого тела можно записать в виде:

$$\omega \equiv \left[(R^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 (H - x_3) x_3 \right] \wedge_0 \left\{ (x_2^2 - b^2) \vee_0 \left[\left(x_3 - \frac{1}{2}H \right)^2 - a^2 \right] \right\} = 0.$$

В приведенных примерах можно, пользуясь формулой (3.97), исключить символы R -операций и получить уравнения в привычном виде. Однако на практике это приведет лишь к громоздким формулам и ничего не даст с вычислительной точки зрения. Гораздо проще «привыкнуть» к символам R -операций, составить для них специальные подпрограммы, в том числе подпрограммы вычисления частных производных до заданного порядка. Использование символов R -операций позволяет получить простые формулы.

Для описанной методики построения уравнений границ сложных областей не существует барьера размерности.

3.9. Моделирование геометрических параметров зуба инструмента

В качестве примеров рассмотрим задачи *определения углов лезвия режущих инструментов в главной секущей плоскости*.

Пример. Зуб фрезы имеет поверхность, показанную на рис. 3.27. После использования шлифуется его передняя поверхность AC . Поверхность, направляющая которой является кривой AB , должна быть такой, чтобы угол β между радиус-вектором произвольной точки кривой и касательной к кривой AB в этой точке оставался постоянным. Найти уравнение кривой AB .

Пусть уравнение искомой кривой в полярной системе координат $r = f(\varphi)$ и полюс совмещен с началом прямоугольной системы.

Пусть P_1 и P – две точки кривой $\bar{r} = f(\varphi)$, которые в пределах при $\Delta\varphi > 0$ совпадают (рис. 3.28). Перед переходом к пределу радиус-вектор точки P и P_1P образуют угол $\bar{\varphi}$. При переходе этот угол переходит в угол φ , образуемый радиус-вектором точки P_1 и касательной, проведенной в этой точке, т. е. $\varphi = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \bar{\varphi}$. Следовательно (рис. 3.28):

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{BP_1}{BP} \approx \frac{r\Delta\varphi}{\Delta r} = \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}}.$$

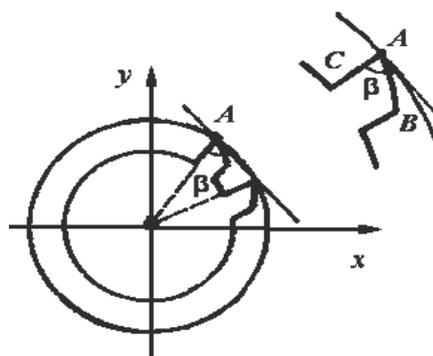


Рис. 3.27. Схема к расчету параметров зуба фрезы

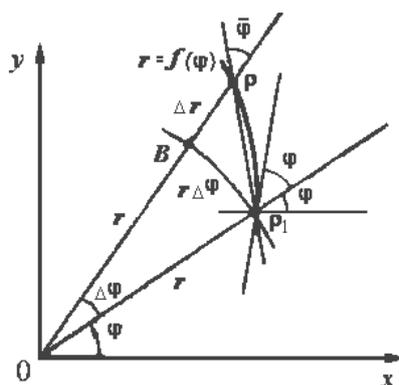


Рис. 3.28. Расчетная схема

Таким образом, после предельного перехода

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{r}{\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{r}{r'}.$$

В условиях задачи углу φ соответствует угол β и, следовательно:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'},$$

откуда после разделения переменных:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dr}{r'} = d\varphi. \quad (3.100)$$

Интегрируя равенство (3.100), имеем:

$$\operatorname{tg} \beta \ln r = \varphi + C_1$$

или

$$\ln r = (\varphi + C_1) \operatorname{ctg} \beta. \quad (3.101)$$

Потенцируя равенство (3.101), получаем уравнение

$$r = e^{(\varphi + C_1) \operatorname{ctg} \beta} = e^{\varphi \cdot \operatorname{ctg} \beta} e^{C_1 \operatorname{ctg} \beta} = C e^{\varphi \cdot \operatorname{ctg} \beta},$$

где $C = e^{C_1 \cdot \operatorname{ctg} \beta}$.

Искомая кривая является логарифмической спиралью.

Моделирование геометрии зуба невращающегося инструмента.

Направления осей x и y совпадают с направлениями, в которых известно значение углов (получено из справочников), проводим вектор нормали к передней поверхности [24]. Проекции единичных векторов i , j на переднюю поверхность обозначим, соответственно, \bar{U} и \bar{W} (рис. 3.29).

Векторное произведение полученных векторов будет соответствовать вектору нормали \bar{N} :

$$\bar{W} \times \bar{U} = \bar{N}. \quad (3.102)$$

Выразим вектора \bar{U} и \bar{W} через единичные:

$$\bar{W} = \bar{j} \cdot \cos \gamma_y - \bar{k} \cdot \sin \gamma_y; \quad \bar{U} = \bar{i} \cdot \cos \gamma_x - \bar{k} \cdot \sin \gamma_x. \quad (3.103)$$

Подставим (3.103) в (3.102):

$$\begin{aligned} \bar{N} &= (\bar{j} \cdot \cos \gamma_y - \bar{k} \cdot \sin \gamma_y) \times (\bar{i} \cdot \cos \gamma_x - \bar{k} \cdot \sin \gamma_x), \\ \bar{N} &= \bar{k} \cdot \cos \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{i} \cdot \sin \gamma_x \cos \gamma_y + \bar{j} \cdot \sin \gamma_y \cos \gamma_x. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Выразим уравнения связи между системами координат через единичные вектора:

$$\bar{i}_1 = \bar{i} \cdot \cos \varphi + \bar{j} \cdot \sin \varphi + 0;$$

$$\bar{j}_1 = -\bar{i} \cdot \sin \varphi + \bar{j} \cdot \cos \varphi + 0;$$

$$\bar{k}_1 = 0 + 0 + \bar{k}.$$

Эти уравнения в матричной форме будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix}.$$

Используя (3.106), запишем связь между углами:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_x \\ \operatorname{tg} \gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Перепишем полученные уравнения в виде системы:

$$\operatorname{tg} \gamma_{x_1} = \operatorname{tg} \gamma_x \cos \varphi + \operatorname{tg} \gamma_y \sin \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{y_1} = -\operatorname{tg} \gamma_x \sin \varphi + \operatorname{tg} \gamma_y \cos \varphi.$$

Как известно:

$$\gamma_{x_1} = \gamma; \quad \gamma_{y_1} = \lambda.$$

В кинематической системе координат:

$$\operatorname{tg} \gamma^k = \operatorname{tg} \gamma_x \cos \varphi' + \operatorname{tg} \gamma_y^k \sin \varphi';$$

$$\gamma_y^k = \gamma_y + \mu;$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{v_s}{v} = \frac{S_0 \cdot 1000}{\pi D}.$$

Вращающийся инструмент

Выбираем точку на режущей кромке и вводим систему координат xuz (рис. 3.30).

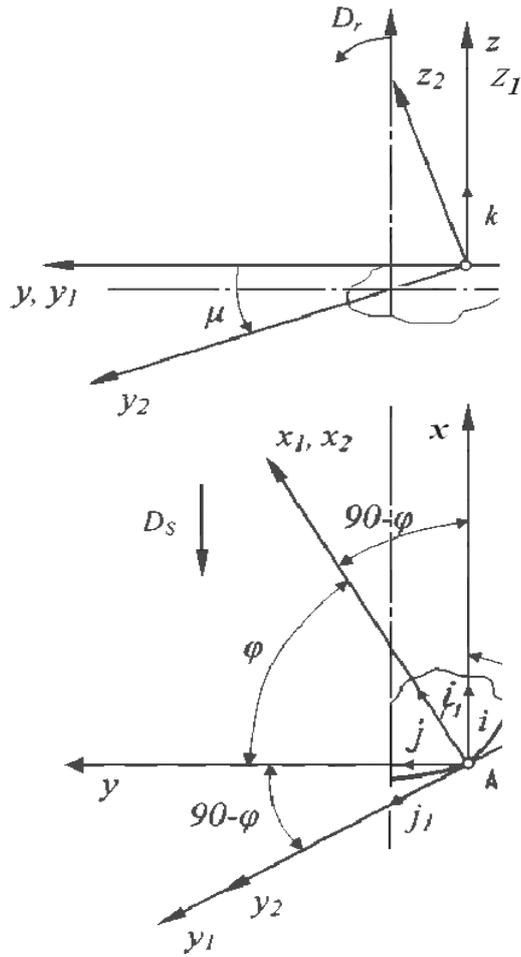


Рис. 3.30. Схемы к расчету углов вращающегося инструмента

Повернем оси так, чтобы y_1 прошла по касательной к профилю, а x_1 – перпендикулярно.

В результате поворота:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_x \\ \operatorname{tg} \gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

Повернем систему вокруг оси x_1 так, чтобы ось y_2 проходила через рассматриваемую точку и центр вращения инструмента, в результате z_2 наклонится, x_1 совпадет с x_2 .

Для полученной системы координат запишем связь между углами:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_2} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_1} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Подставим уравнение (3.107) в уравнение (3.108):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_{x_2} \\ \operatorname{tg} \gamma_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_x \\ \operatorname{tg} \gamma_y \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \cos \mu & \sin \varphi \cos \mu & -\sin \mu \\ -\cos \varphi \cdot \sin \mu & \sin \varphi \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \gamma_x \\ \operatorname{tg} \gamma_y \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Переходим от матричной формы к уравнениям:

$$\operatorname{tg} \gamma_{x_2} = \operatorname{tg} \gamma_x \sin \varphi + \operatorname{tg} \gamma_y \cos \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{y_2} = -\operatorname{tg} \gamma_x \cos \varphi \cos \mu + \operatorname{tg} \gamma_y \sin \varphi \cos \mu - \sin \mu,$$

$$1 = -\operatorname{tg} \gamma_x \cos \varphi \sin \mu + \operatorname{tg} \gamma_y \sin \varphi \sin \mu + \cos \mu.$$

Учитывая, что $\gamma = \gamma_{x_2}$, $\lambda = \gamma_{y_2}$, получили требуемые уравнения.

3.10. Моделирование формообразующих кромок инструмента

3.10.1. Невращающийся инструмент

Режущая кромка невращающегося инструмента представляет собой линию пересечения поверхности детали и плоскости касательной к передней поверхности инструмента [1]. Точки поверхности детали задаем через радиус r_i и угол t_i (рис. 3.31):

$$\begin{cases} y = r_i \cdot \cos t_i; \\ z = r_i \cdot \sin t_i. \end{cases} \quad (3.109)$$

Для упрощения формирования модели вводим новую систему координат, ось y_1 которой направим вдоль передней поверхности лезвия инструмента. Тогда уравнения связи полученных систем координат примут вид:

$$\begin{cases} y_1 = (y - r) \cos \gamma - z \cdot \sin \gamma; \\ z_1 = (y - r) \sin \gamma + z \cdot \cos \gamma. \end{cases} \quad (3.110)$$

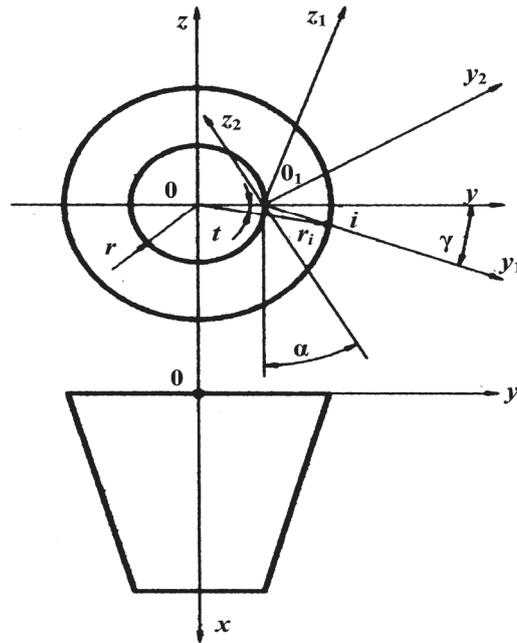


Рис. 3.31. Схема к моделированию профиля режущей кромки невращающегося инструмента

Подставим в (3.110) зависимость (3.109) и получим модель поверхности детали в новой системе координат:

$$\begin{cases} y_1 = (r_i \cdot \cos t_i - r) \cos \gamma - r_i \cdot \sin t_i \sin \gamma; \\ z_1 = (r_i \cdot \cos t_i - r) \sin \gamma + r_i \cdot \sin t_i \cos \gamma. \end{cases} \quad (3.111)$$

В новой системе координат уравнение плоскости касательной к передней поверхности лезвия инструмента будет иметь вид $z_1 = 0$. Подставим это выражение во второе уравнение (3.111) и после несложных преобразований получим:

$$r_i \cdot \sin(\gamma + t) = r \cdot \sin \gamma.$$

Из полученного выражения найдем:

$$t = \arcsin \frac{r \cdot \sin \gamma}{r_i} - \gamma. \quad (3.112)$$

Подставим (3.112) в первое уравнение (3.111) и после несложных преобразований получим искомую модель кромки:

$$y_{1i} = r_i \cdot \cos \left(\arcsin \frac{r \cdot \sin \gamma}{r_i} \right) - r \cdot \cos \gamma, \quad y_{2i} = y_{1i} \cdot \cos(\alpha + \gamma).$$

3.10.2. Обкатный инструмент при главном вращательном движении детали

Введем три системы координат: $y_0 z_0$ – неподвижную с центром в точке контакта начальной прямой и начальной окружности радиусом r_ω , $y_1 z_1$ – поворотную с центром в центре вращения инструмента и $y_2 z_2$ – подвижную, перемещающуюся вдоль начальной прямой (рис. 3.32). В начальный момент системы координат $y_0 z_0$ и $y_2 z_2$ совпадали, затем при повороте системы $y_1 z_1$ на угол t система $y_2 z_2$ переместится на $r_\omega t$.

Запишем уравнения связи между системами координат $y_0 z_0$ и $y_2 z_2$:

$$\begin{cases} y_0 = y_2 - r_\omega t; \\ z_0 = z_2. \end{cases} \quad (3.113)$$

Уравнение связи между системами $y_0 z_0$ и $y_1 z_1$:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \cdot \cos t + (z_0 + r_\omega) \sin t; \\ z_1 = -y_0 \cdot \sin t + (z_0 + r_\omega) \cos t. \end{cases} \quad (3.114)$$

Подставим (3.113) в уравнения (3.114) и получим:

$$\begin{cases} y_1 = (y_2 - r_\omega \cdot t) \cos t + (z_2 + r_\omega) \sin t; \\ z_1 = -(y_2 - r_\omega \cdot t) \sin t + (z_2 + r_\omega) \cos t. \end{cases} \quad (3.115)$$

Угол t определяем из первого условия формообразования: учитывая, что такой метод обработки приводит к тому, что каждая точка профиля детали совершает мгновенный поворот вокруг полюса точки P , это значит, что вектор скорости будет направлен перпендикулярно радиус-вектору \vec{r} , соединяющему любую точку на поверхности детали и полюс P .

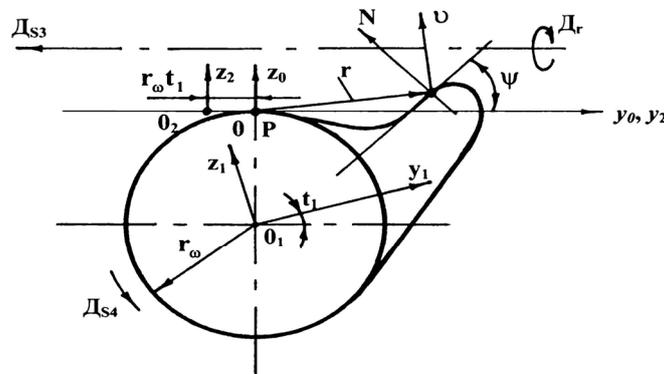


Рис. 3.32. Схема к моделированию профиля режущей кромки обкатного инструмента

Проведем касательную к профилю детали в рассматриваемой точке и обозначим угол ψ между касательной и осью y_0 .

Перпендикулярно касательной будет вектор нормали \bar{N} .

Выразим вектора \bar{r} и $\bar{\omega}$ через единичные:

$$\bar{r} = \bar{i}_0 x_0 + \bar{j}_0 y_0 + \bar{k}_0 z_0,$$

$$\bar{\omega} = \bar{i}_0 \omega.$$

Тогда $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{i}_0 & \bar{j}_0 & \bar{k}_0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix} = -\bar{j}_0 z_0 \omega + \bar{k}_0 \omega y_0. \quad (3.116)$$

Вектор угловой скорости выбираем единичной длины.

Запишем первое условие формообразования:

$$\bar{N} \cdot \bar{V} = 0. \quad (3.117)$$

Выразим вектор \bar{N} через единичные:

$$\bar{N} = -\bar{j}_0 \cdot \sin \psi + \bar{k}_0 \cdot \cos \psi. \quad (3.118)$$

Подставив (3.118) и (3.116) в (3.117), получим:

$$\begin{aligned} (-\bar{j}_0 \cdot \sin \psi + \bar{k}_0 \cdot \cos \psi)(-\bar{j}_0 z_0 + \bar{k}_0 y_0) = \\ = z_0 \cdot \sin \psi + y_0 \cdot \cos \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Подставляем (3.113) в (3.119) и выразим t :

$$z_2 \cdot \sin \psi + (y_2 - r_\omega t) \cos \psi = 0,$$

$$\frac{z_2 \cdot \sin \psi}{r_\omega \cdot \cos \psi} + \frac{y_2}{r_\omega} = t.$$

Подставив выражение для t в уравнения (3.115), получим иско-
мую модель.

3.10.3. Реечный обкатный инструмент

Воспользовавшись схемой, изображенной на рис. 3.32, можно получить математическую модель формообразующей кромки реечно-го обкатного инструмента.

Эта обобщенная расчетная схема позволяет смоделировать также режущую кромку червячного инструмента, совершающего главное вращательное движение и имеющего смещение зубьев вдоль оси.

В новой постановке система координат $y_0 z_0$ неподвижная с центром в точке контакта начальной прямой и начальной окружности радиусом r_ω , $y_1 z_1$ – поворотная с центром в центре вращения детали и $y_2 z_2$ – подвижная, перемещающаяся вдоль начальной прямой инструмента (рис. 3.32). В начальный момент системы координат $y_0 z_0$ и $y_2 z_2$ совпадали, затем при повороте системы $y_1 z_1$ на угол t система $y_2 z_2$ переместится на $r_\omega t$.

Запишем уравнения связи между системами координат $y_0 z_0$ и $y_1 z_1$:

$$\begin{cases} z_0 + r_\omega = z_1 \cdot \cos t + y_1 \cdot \sin t; \\ y_0 = y_1 \cdot \cos t - z_1 \cdot \sin t. \end{cases} \quad (3.120)$$

Подставим (3.113) в (3.120):

$$\begin{cases} z_2 = z_1 \cdot \cos t + y_1 \cdot \sin t - r_\omega; \\ y_2 = y_1 \cdot \cos t - z_1 \cdot \sin t + r_\omega t. \end{cases} \quad (3.121)$$

Так как касательная проведена к профилю детали в рассматриваемой точке, то угол ψ будет уже между касательной и осью y_1 .

Тогда, используя первое условие формообразования:

$$\overline{Nv} = 0,$$

получим:

$$z_0 \cdot \sin(\psi + t) + y_0 \cdot \cos(\psi + t) = 0.$$

Подставив (3.120) в полученное выражение, найдем:

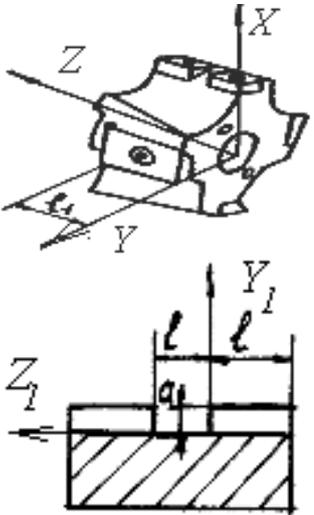
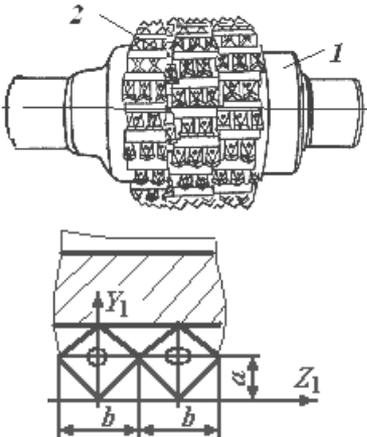
$$\sin(\psi + t) = \frac{y_1 \cdot \cos \psi + z_1 \cdot \sin \psi}{r_\omega}.$$

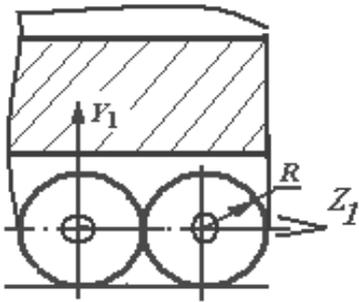
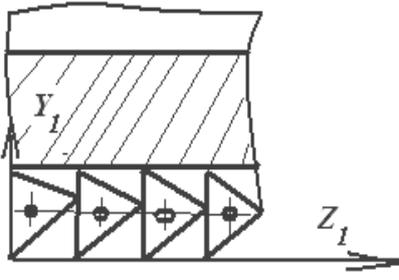
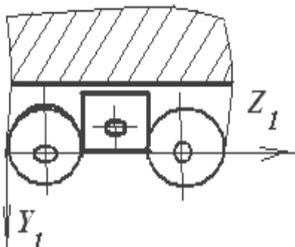
Из этого выражения находим t и, подставив его в уравнения (3.121), получим искомую модель.

3.11. Математические модели образующих исходных инструментальных поверхностей на основе рядов Фурье

Математические модели образующих исходных инструментальных поверхностей на основе рядов Фурье представлены в табл. 3.2 [24].

Математические модели образующих инструментальных поверхностей

Эскиз рабочей части (формообразующих кромок)	Уравнения образующей инструментальной поверхности в местной системе координат
1	2
<p>1. СМП в форме усеченной пирамиды, передняя поверхность которых в форме прямоугольников или квадратов. Формообразующие кромки кусочно-линейные</p> 	$Y(Z_1) = 2a(1/4 + 1/\pi(\sin \pi Z_1/l + 1/3 \cdot \sin 3\pi Z_1/l + 1/5 \cdot \sin 5\pi Z_1/l + \dots)),$ <p>где a, l, Z_1 – параметры формообразующей кромки</p>
<p>2. Формообразующие кромки – линейно-угловые, дискретно расположенные</p> 	$Y_1(Z_1) = b/4 - 2b/\pi^2 \left(\frac{\cos 2\pi Z_1/b}{1^2} + \frac{\cos 6\pi Z_1/b}{3^2} + \dots \right)$ <p>при $-b/2 < Z_1 < b/2$,</p> <p>где a, b, Z_1 – параметры формообразующей кромки</p>

1	2
<p>3. Формообразующие кромки – дуги окружности</p> 	$Y_1(Z_1) = R^2/6 - \left(\frac{\cos 2Z_1}{1^2} + \frac{\cos 4Z_1}{2^2} + \frac{\cos 6Z_1}{3^2} + \dots \right)$ <p>при $Y_1 > 0$, где R – параметр формообразующей кромки</p>
<p>4. Формообразующие кромки – линейные, дискретно расположенные</p> 	$Y_1(Z_1) = \pi - 2 \cdot (\sin Z_1 + 0,5 \cdot \sin 2Z_1 + 0,33 \cdot \sin 3Z_1 + \dots)$
<p>5. Формообразующие кромки – линейно-радиусные, дискретно расположенные</p> 	$Y_1(Z_1) = 1/\pi + 0,5 \cdot \sin Z_1 - 2/\pi \left(\frac{\cos 2Z_1}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4Z_1}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6Z_1}{5 \cdot 7} + \dots \right)$

3.12. Моделирование геометрических и кинематических поверхностей методом преобразования систем координат

В качестве базы моделирования используем матрицы связи между системами координат при их взаимном перемещении вдоль осей и поворотов вокруг осей (табл. 3.3).

Матрицы преобразования систем координат

	X	Y	Z
Перемещение	$[A_1(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[A_2(y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[A_3(z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Поворот	$[A_4(\varphi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[A_5(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[A_6(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Чтобы записать уравнение поверхности детали, необходимо составить код компоновки станка. Номера кода компоновки соответствуют номерам матриц. Подставив в код компоновки соответствующие матрицы и перемножив их, можно получить радиус-вектор поверхности детали. Необходимо учесть связи между перемещениями и поворотами (если они существуют).

В связи с особенностями математического аппарата, применяемого при анализе формообразующих систем станков, наибольший интерес представляет параметрическая форма.

$$x = x(u, v); y = y(u, v); z = z(u, v). \quad (3.122)$$

Переменные u, v представляют собой криволинейные координаты на поверхности. Задав конкретные значения $u = u_0$ и $v = v_0$, мы тем самым однозначно определяем положение точки в пространстве либо через ее радиус-вектор:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0),$$

либо через три координаты:

$$x_0 = x(u_0, v_0); y_0 = y(u_0, v_0); z_0 = z(u_0, v_0).$$

Векторная функция (3.122) должна удовлетворять условию:

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0, \quad (3.123)$$

где \bar{r}_u и \bar{r}_v – частные производные вектор-функции по параметрам u и v :

$$\bar{r}_u \equiv \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \equiv \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{r}_v \equiv \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \equiv \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем $x_u \equiv \frac{\partial x}{\partial u}$; $y_u \equiv \frac{\partial y}{\partial u}$; $z_u \equiv \frac{\partial z}{\partial u}$;

$$x_v \equiv \frac{\partial x}{\partial v}; \quad y_v \equiv \frac{\partial y}{\partial v}; \quad z_v \equiv \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Условие (3.123) эквивалентно требованию, чтобы ранг матрицы частных производных $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ был равен двум.

Точки поверхности, в которых частные производные существуют, но обращается в нуль произведение $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$, соответствуют особым точкам (ребра, вершины и т. д.).

Линии на поверхности, задаваемые условиями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, называют координатными линиями. Они составляют сетку криволинейных координат. Производные \bar{r}_u и \bar{r}_v направлены по касательным к координатным линиям, проходящим через точку (u, v) .

Векторное произведение:

$$\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v \tag{3.124}$$

представляет собой нормаль к поверхности в точке u, v . Важное значение имеют формулы для единичного вектора нормали:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2}}.$$

причем в конкретных случаях любые из этих видов связей как в отдельности, так и совокупно могут отсутствовать, что соответствует обращению в нуль определенных слагаемых.

Рассмотрим каждую группу связей.

Связи огибания. При обработке на металлорежущих станках весьма распространены случаи, когда обрабатываемая поверхность получается как огибающая семейства мгновенных положений режущих точек инструмента. Возникающие при этом связи между переменными называются связями огибания; они огранически свойственны схеме обработки и не требуют для своей реализации каких-либо настроечных узлов. Число связей огибания определяют по следующему правилу:

$$L_{\text{ог}} = \begin{cases} 0, & \text{если огибание отсутствует (схема следа);} \\ 1 & \text{при однопараметрическом огибании (комбинированная схема} \\ & \text{формообразования);} \\ 2 & \text{при двухпараметрическом огибании (схема огибания).} \end{cases}$$

Как известно, при однопараметрическом огибании связь имеет вид равенства нулю смешанного произведения трех векторов частных производных вектора \bar{r}_0 (3.125):

$$\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_f} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_k} = 0, \quad (3.128)$$

где q_i, q_f, q_k – три различные переменные из числа q_1, q_2, \dots, q_{n+m} , входящих в правую часть уравнения (3.125).

Если две из трех переменных входят в уравнение режущего инструмента, то (3.128) есть условие взаимной перпендикулярности скорости режущей точки и нормали к поверхности инструмента в этой точке.

При двухпараметрическом огибании двумя связями охвачены производные по четырем из $n + t$ переменных, входящих в правую часть уравнения (3.125):

$$\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_l} = 0, \quad (3.129)$$

где q_i, q_j, q_k, q_l – переменные, причем при формообразовании поверхностью переменные q_i, q_j , входящие в уравнения (3.129), пред-

ставляют собой криволинейные координаты на поверхности инструмента, а переменные q_k, q_l – координаты положения движущихся узлов станка.

Частные производные вектора \bar{r}_0 , входящие в формулы (3.128) и (3.129), могут быть определены как непосредственным дифференцированием, так и с использованием свойств представления \bar{r}_0 . Поскольку каждая матрица A содержит единственный параметр, то вычисление частной производной вектора \bar{r}_0 сводится к подстановке в произведение в правой части вместо матрицы $A(q_i)$ ее производной $\frac{\partial A(q_i)}{\partial q_i}$.

Ввиду того что эти матрицы-производные содержат большое число нулей, вычисление частной производной вектора упрощается. Кроме того, это свойство используется при построении универсальных программ для ЭВМ, вычисляющих координаты огибающей.

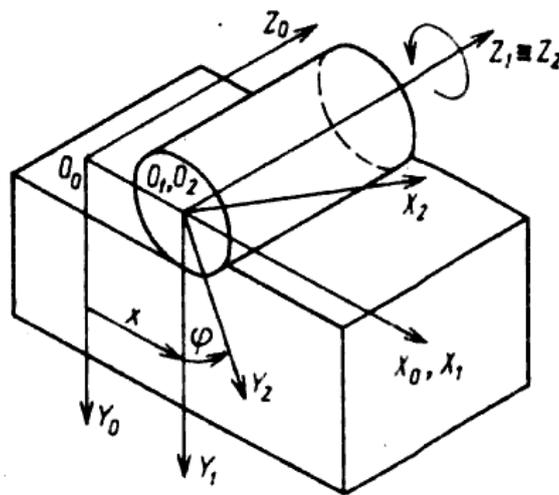


Рис. 3.33. Схема фрезерования плоскости цилиндрической фрезой

Пример. Фрезерование плоскости цилиндрической фрезой (рис. 3.33). Координатный код системы $k = 16$, где $k_1 = 1$ соответствует подаче фрезы вдоль оси X (движение системы координат S_1 вдоль оси X_0 системы S_0); $k_2 = 6$ соответствует вращению фрезы вокруг оси Z (вращение системы координат S_2 вокруг оси Z_1). Функция формообразования имеет вид:

$$\bar{r}_0 = A_2(x)A_6(-\varphi)\bar{r}_2, \quad (3.130)$$

где x – перемещение фрезы вдоль оси X (движение); φ – угол поворота фрезы (знак минус соответствует вращению по часовой стрелке при взгляде с конца оси Z_1); \bar{r}_2 – радиус-вектор режущего зуба фрезы в системе координат S_2 (O_2, X_2, Y_2, Z_2).

Примем для простоты, что фреза прямозубая и однозубая. Тогда имеем, положив $\varphi_i = 0$:

$$\bar{r}_2 = (R, 0, z, 1)^T. \quad (3.131)$$

Выполнив формальные преобразования (3.130), получим с учетом (3.131) и значением матриц (табл. 3.3):

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \varphi + x \\ -R \cdot \sin \varphi \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

В уравнении (3.132) три переменные: x, φ, z . Обрабатываемая поверхность – плоскость, получаемая в результате однопараметрического огибания. Таким образом, в рассматриваемом случае: $n = 2, m = 1, L_{0r} = 1$.

Составим уравнение связи огибания. Предварительно находим частные производные:

$$\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \cdot \cos \varphi \\ -R \cdot \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив их в (3.128), получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{следовательно, } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

При односторонней обработке поверхности из двух значений φ следует выбрать одно. В данном случае при $\varphi = \frac{-\pi}{2}$ из (3.132) получим уравнение плоскости:

$$\bar{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ R \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составляется матрица частных производных (градиент вектора \bar{r}_0):

$$\text{grad}\bar{r}_0 = \left(\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_{n+m}} \right).$$

Затем составляются всевозможные скалярные произведения пар частных производных (таких произведений не более C_{n+m}^2); существованию скрытой связи между переменными q_i и q_j отвечает условие

$$\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_j} \equiv 0. \quad (3.133)$$

Составляются всевозможные смешанные произведения троек частных производных (таких произведений не более C_{n+m}^3); существованию скрытой связи между переменными q_i, q_j, q_k отвечает условие

$$\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial q_k} \equiv 0. \quad (3.134)$$

При этом никакая из трех пар частных производных не должна быть коллинеарна.

Можно показать, что при выполнении условия (3.133) переменные q_i и q_j всегда могут быть выражены в функции одного переменного, а при выполнении условия (3.134) три переменные q_i, q_j, q_k выражаются в функции двух из них. Таким образом, каждая скрытая связь уменьшает число независимых переменных в выражении (3.125) на одну переменную.

Пример. Функция формообразования плоскошлифовального станка с прямоугольным столом (рис. 3.34) имеет вид:

$$\bar{r}_0 = A_1(x)A_6(\varphi)\bar{r}_3, \quad (3.135)$$

где x – смещение стола в движении подачи; φ – угол поворота абразивного инструмента при его главном движении; \bar{r}_3 – радиус-вектор точек торцевой поверхности инструмента,

$$\bar{r}_3 = A_6(\psi)A_2(y)\bar{e}_4, \quad (3.136)$$

где ψ , y – полярные координаты точек на торце инструмента;
 $\bar{e}_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.

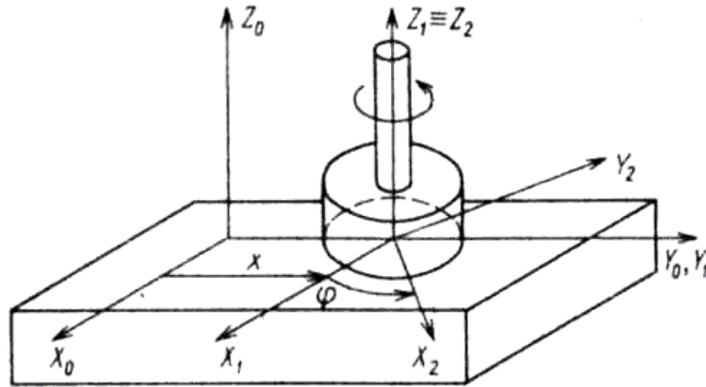


Рис. 3.34. Схема шлифования плоскости торцом круга

В уравнении (3.135) с учетом (3.136) четыре переменные. Однако независимых среди них только две. Ввиду совпадения обобщенных координат главного движения и полярного угла поверхности круга можно положить $\theta = \varphi + \psi$, после чего получим $\bar{r}_0 = A_1(x)A_6(\theta)A_2(y)\bar{e}_4$.

Поскольку подача происходит в плоскости инструмента, частные производные $\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \bar{r}_0}{\partial y}$ компланарны, что легко проверяется непосредственным вычислением. Итак, уравнение (3.135) содержит две скрытые связи. Можно показать, что уравнение обрабатываемой поверхности можно получить, приняв значение одной из переменных, входящих в скрытую связь, равным нулю. Например, положив $\theta = 0$, получим:

$$\bar{r}_0 = (x, y, 0, 1)^T.$$

Уравнение той же плоскости в другой форме можно получить, положив, например, $x = 0$: $\bar{r}_0 = (-y \cdot \sin \theta, y \cdot \cos \theta, 0, 1)^T$. Физически это означает, что ту же плоскость можно получить узким лезвием, расположенным вдоль оси Y , либо двигая его вдоль оси X , либо вращая вокруг оси Z . «Избыточность» обобщенных координат обеспечивает получение низкой шероховатости поверхности за счет многократного прохода по ней точек инструмента.

Функциональные связи. Группа функциональных связей, в отличие от связей огибания и скрытых, позволяет изменять скорости или соотношение между скоростями узлов ФС, так как они реализуются либо с помощью аппаратных устройств (гитар, кулачков и т. д.), либо с помощью программных модулей в станках с ЧПУ. Функциональные связи всегда могут быть представлены как в виде уравнения, включающего скорости движения звеньев, так и в виде уравнения связи между координатами этих движений, получающегося в результате интегрирования исходной скоростной зависимости. Различают две формы функциональных связей: положения и кинематическую.

Связь положения останавливает одно из движений формообразования, задавая позицию узла. Такая связь имеет вид $q_i = \text{const}$ (i – номер узла). Она может быть приложена к любым движущимся узлам станка, кроме узла, совершающего главное движение, и узлов, участвующих в связи огибания.

Кинематическая связь охватывает два (или более) движущихся узла, задавая передаточные отношения между скоростями движений. Она имеет вид $f(q_1, \dots, q_n) = 0$.

Кинематическая связь не может противоречить уже имеющимся в станке связям, т. е. не может охватывать тройки движений, входящих в связи огибания, а также пары и тройки движений, скорости которых охвачены скрытой связью. По возможности регулирования различают параметрически и функционально регулируемые кинематические связи. Параметрически регулируемая связь позволяет выбирать передаточные отношения между скоростями движений формообразования без изменения вида функций связи.

Например, винторезная цепь в токарных станках с ручным управлением позволяет менять винтовой параметр, но не допускает замены линейной связи между углом поворота шпинделя и скоростью поступательного движения суппорта какой-либо иной связью.

Функционально регулируемая связь позволяет изменить схему обработки на станке путем задания вида функции, связывающей движения формообразования.

Широкие возможности в выборе функциональных связей предоставляют станки с современными системами ЧПУ.

Пример. Рассмотрим особенности формирования кинематических поверхностей с образующей в виде дуги окружности [24]. Схема обработки представлена на рис. 3.35.

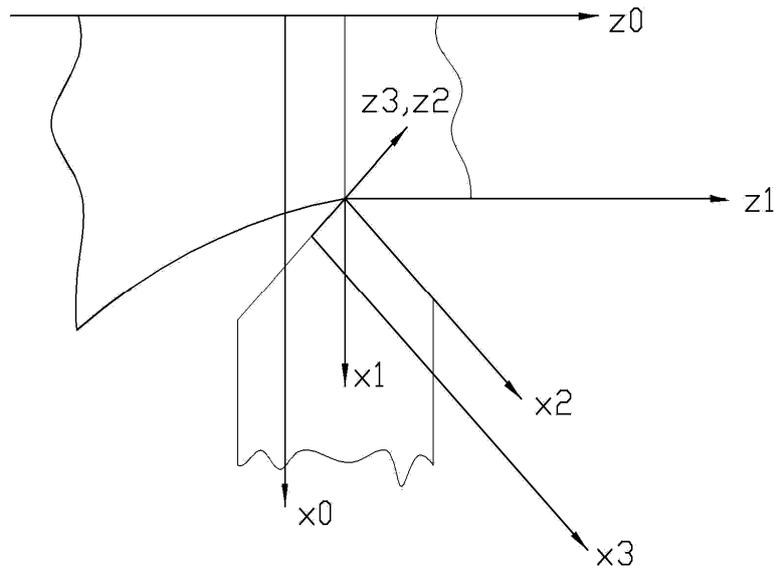


Рис. 3.35. Расчетная схема обработки участка детали с радиусной образующей

Учитывая необходимые движения, уравнение формообразования примет вид:

$$\bar{r}_0 = [A_6(\psi)][A_3(z_1)][A_1(x_1)]\bar{r}_u, \quad (3.137)$$

где \bar{r}_u – радиус-вектор формообразующих точек реза,

$$\bar{r}_u = [A_5(\varphi)][A_3(z_3)]\bar{e}, \quad (3.138)$$

где $[A_5(\varphi)]$ – матрица, которая учитывает поворот системы координат вокруг оси Ou на угол в плане φ ; $[A_3(z_3)]$ – матрица, которая учитывает перемещение системы координат вдоль режущей кромки (оси Oz_3); \bar{e} – вектор начала координат; $[A_6(\psi)]$ – матрица, которая учитывает главное движение (поворот системы координат вокруг оси Oz_0); $[A_3(z_1)]$ – матрица, которая учитывает продольную подачу (движение вдоль оси Oz_1); $[A_1(x_1)]$ – матрица, которая учитывает поперечную подачу (движение вдоль оси Ox_1).

$$z_1 = z_n + z; \quad x_1 = x_n + x, \quad (3.139)$$

где $(x_n; z_n)$ – координаты начальной точки образующей поверхности детали.

С учетом (3.138) и (3.139) уравнение (3.137) можно записать:

$$\bar{r}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \sin(\varphi) z + \cos(\psi)(x_H + x) \\ -\sin(\psi) \sin(\varphi) z - \sin(\psi)(x_H + x) \\ \cos(\psi)z + (z_H + z) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Чтобы обеспечить обработку фасонной поверхности, необходимо решить уравнение (3.140) совместно с уравнениями, отражающими функциональную и параметрическую связи, которые будут иметь вид:

$$x = \frac{2x_{ц} - \sqrt{4x_{ц}^2 - 4x_{ц}^2 + (z - z_{ц})^2 - R^2}}{2}; \quad (3.141)$$

$$z = S_{\text{прод}} \psi; \quad (3.142)$$

$$x = S_{\text{попер}} \psi, \quad (3.143)$$

где $x_{ц}, z_{ц}$ – координаты центра образующей поверхности детали; $S_{\text{прод}}$ и $S_{\text{попер}}$ – значения продольной и поперечной подач, мм/рад.

С учетом (3.141)–(3.143) уравнение формообразования примет вид:

$$\bar{r}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \sin(\varphi) z + \cos(\psi) \left(x_H + x_{ц} - \left(-(S_{\text{прод}} \psi)^2 z_{ц}^2 - z_{ц}^2 + R^2 \right)^{0,5} \right) \\ -\sin(\psi) \sin(\varphi) z - \sin(\psi) \left(x_H + x_{ц} \left(-(S_{\text{прод}} \psi)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(S_{\text{прод}} \psi)^2 z_{ц} - z_{ц}^2 + R^2 \right)^{0,5} \right) \cos(\psi) z + (z_H + S_{\text{прод}} \psi) \end{bmatrix}.$$

Подставив переменные в полученное уравнение, рассчитаем точки на поверхности детали.

Пример. Найти точки обработанной поверхности после фрезерования концевой фрезой. Топография обработанной поверхности зависит от формообразующей кромки фрезы и траектории ее движения, на которую влияют параметры режима резания и геометрические параметры фрезы.

Схема обработки уступа концевой фрезой на фрезерном станке с вертикальным расположением шпинделя представлена на рис. 3.36.

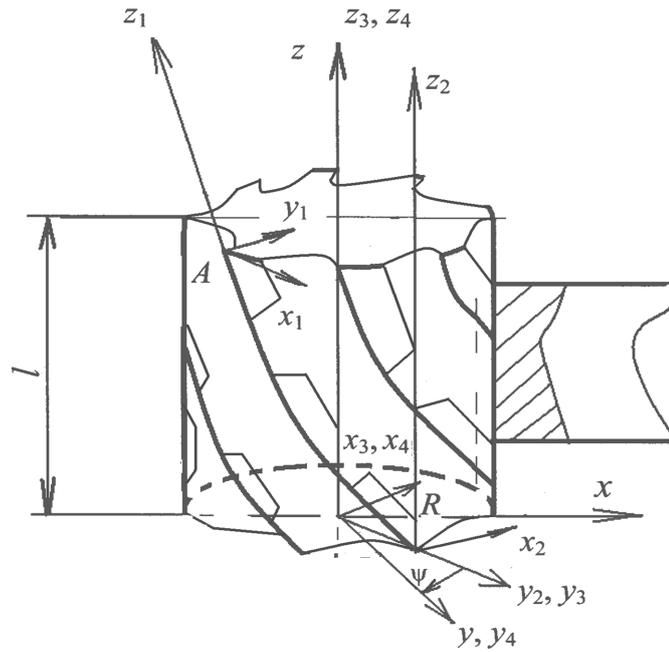


Рис. 3.36. Расчетная схема формирования топографии плоской поверхности сборной фрезой

В данном случае функция формообразования примет вид:

$$\bar{r}_0 = [A_1(x)][A_6(\varphi)]\bar{r}_u, \quad (3.144)$$

где $[A_1(x)]$ – матрица перемещения вдоль оси x ; $[A_6(\varphi)]$ – матрица главного вращательного движения фрезы; \bar{r}_u – радиус-вектор формообразующих точек фрезы.

Радиус-вектор формообразующих точек фрезы может быть представлен через радиус фрезы R , полярный угол расположения точек режущих кромок и шаг винтовых канавок p в виде:

$$\bar{r}_u = \left[A_6\left(\frac{z}{p}\right) \right] [A_1(R)][A_4(\psi)]\bar{e}, \quad (3.145)$$

где $\left[A_6\left(\frac{z}{p}\right) \right]$ – матрица углового положения винтовых кромок; $[A_1(R)]$ – матрица перемещения в радиальном направлении инструмента; $[A_4(\psi)]$ – матрица поворота на угол размещения точек режущих кромок; \bar{e} – радиус-вектор начала координат.

Подставив \bar{r}_u в функцию формообразования, получили:

$$\bar{r}_0 = [A_1(x)][A_6(\varphi)] \left[A_6 \left(\frac{z}{p} \right) \right] [A_1(R)][A_4(\psi)] \bar{e}. \quad (3.146)$$

Как известно, на траекторию движения зубьев влияют следующие параметры: радиус фрезы, подача на зуб, полярный угол точек зубьев фрезы, шаг винтовой линии зубьев и т. д. В качестве примера на рис. 3.37 изображена траектория движения зуба при радиусе фрезы $R = 20$ мм, подаче на зуб $S_z = 0,14$ мм/зуб, полярном угле расположения режущих кромок фрезы $\psi = \frac{-\pi}{3}$, шаге винтовых линий зубьев $p = 40$ мм и количестве зубьев фрезы $z_\phi = 4$.

Принятые исходные параметры позволили получить топографию кинематической поверхности и определить максимальное расстояние между кинематической и геометрической поверхностями (МРКГП), которое составило 4 мкм.

Траектории зубьев фрезы при радиальных биениях зубьев представлены на рис. 3.37.

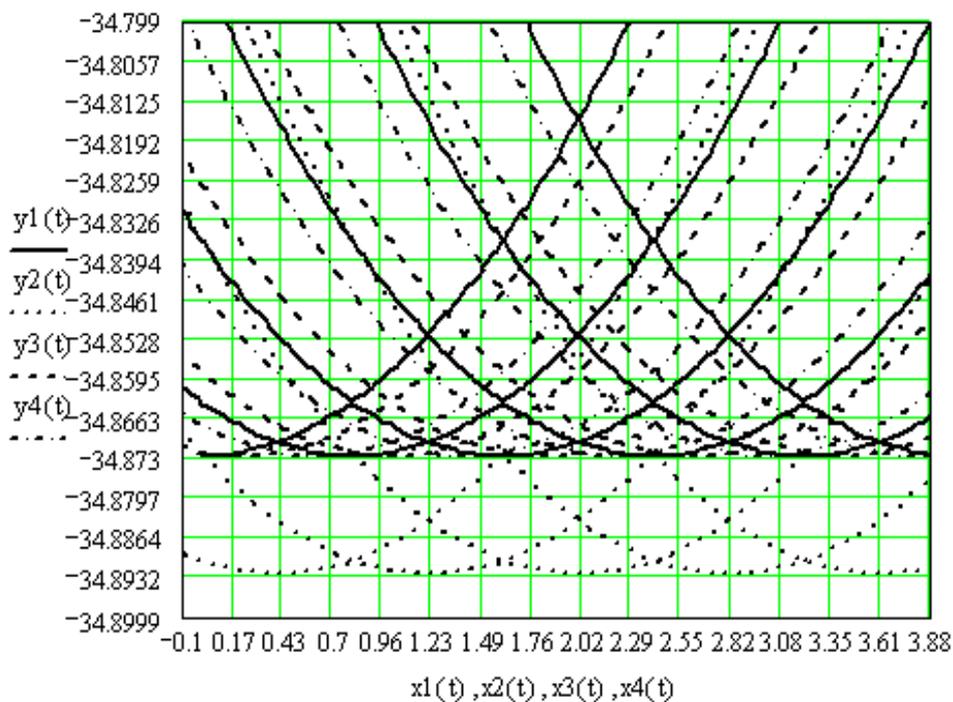


Рис. 3.37. Траектории зубьев фрезы с радиальным биением одного +20 мкм

Пример. В качестве обобщенного примера рассмотрена обработка конической поверхности шаровой фрезой на многоцелевом станке с вертикальным расположением шпинделя. Схема обработки представлена на рис. 3.38.

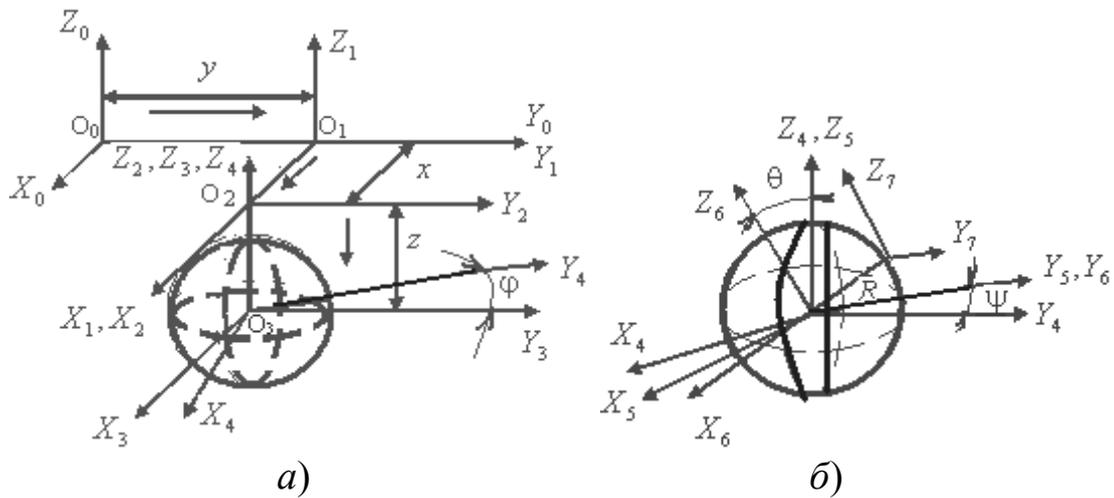


Рис. 3.38. Расчетная схема формирования топографии обработанной поверхности сборной фрезой:

a – системы координат формообразования; *б* – системы координат инструмента

В данном случае функция формообразования имеет вид:

$$\bar{r}_0 = [A_2(y)][A_1(x)][A_3(z)][A_6(\varphi)]\bar{r}_u, \quad (3.147)$$

где $[A_2(y)]$, $[A_1(x)]$, $[A_3(z)]$ – матрицы перемещения систем координат вдоль осей y , x , z ; $[A_6(\varphi)]$ – матрица поворота системы координат вокруг оси Z_3 на угол φ ; \bar{r}_u – радиус-вектор формообразующих точек фрезы.

Радиус-вектор формообразующих точек фрезы в системе координат S_4 может быть представлен через радиус шара R , долготу ψ , полярный угол θ (рис. 3.38, б) в виде:

$$\bar{r}_4 = [A_6(\psi)][A_5(\theta)][A_1(R)]\bar{e}, \quad (3.148)$$

где \bar{e} – радиус-вектор начала координат; $[A_6(\psi)]$ – матрица поворота системы координат S_5 вокруг оси Z_4 на угол ψ ; $[A_5(\theta)]$ – матрица поворота системы координат S_6 вокруг оси Y_5 на угол θ ; $[A_1(R)]$ – матрица перемещения системы координат S_7 вдоль оси X_6 на величину R .

Добавив к уравнению функции формообразования систему связей между параметрами, получили возможность определить всю со-

вокупность обрабатываемых на станке поверхностей. После подстановки (3.148) в функцию формообразования получили:

$$\bar{r}_0 = [A_2(y)][A_1(x)][A_3(z)][A_6(\varphi)][A_6(\psi)][A_5(\theta)][A_1(R)]\bar{e}. \quad (3.149)$$

Последовательная подстановка матриц, представленных в уравнении (3.149), а также их преобразование позволили представить функцию образования поверхности в виде уравнения (3.150):

$$\bar{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + R \cdot \cos(\theta) \cos(\varphi + \psi) \\ y + R \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi + \psi) \\ z - R \cdot \sin(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.150)$$

где x, y, z – координаты центра фрезы.

Уравнение обрабатываемой поверхности не может быть однозначно определено функцией образования поверхности. Это обусловлено тем, что необходимо учитывать связи между переменными параметрами. Так, в рассматриваемом примере необходимо принимать во внимание функциональную связь $f(x, y, z) = 0$ и скрытую (охватывающую вращение инструмента и долготу точки на сфере инструмента):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2; \\ z &= \frac{(r - r_1)}{\operatorname{tg} \alpha}, \end{aligned}$$

где r – радиус конуса в сечении плоскостью $z = \text{const}$; α – угол конусности; r_1 – радиус конуса в сечении $Z_0 = 0$.

В результате проведенных последовательных подстановок окончательные уравнения, описывающие обработанную поверхность, приняли следующий вид:

$$x_0 = x + R \cdot \cos \theta \cos(\varphi + \psi); \quad (3.151)$$

$$y_0 = \sqrt{r^2 - x^2} + R \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi + \psi); \quad (3.152)$$

$$z_0 = \frac{(r - r_1)}{\operatorname{tg}(\alpha)} - R \cdot \sin \theta. \quad (3.153)$$

Решение уравнений (3.151)–(3.153) позволило получить траекторию движения точек формообразующих зубьев. В качестве примера

выбрали шаровую фрезу с числом зубьев $z = 17$ и радиусом $R = 40$ мм. Наибольшее влияние на МРКГП обработки оказывает величина подачи на зуб, численное значение которой с учетом исходных параметров приняли по равным $s_z = 0,2$ мм/зуб.

Номинальные геометрическая и кинематическая направляющие поверхности детали представлены на рис. 3.39.

Для выбранного в качестве примера случая обработки МРКГП составило 0,08 мкм. Кроме того, была определена погрешность при аналогичных условиях обработки по известным зависимостям. Она составляет 1 мкм. Таким образом, полученная матричным способом кинематическая погрешность ниже, чем определенная традиционным способом.

Кинематическая погрешность обработанной поверхности определялась с использованием следующей формулы:

$$\Delta = R - \sqrt{x^2 + y^2},$$

где R – радиус обрабатываемой поверхности; x, y – координаты точки пересечения траекторий двух смежных зубьев.

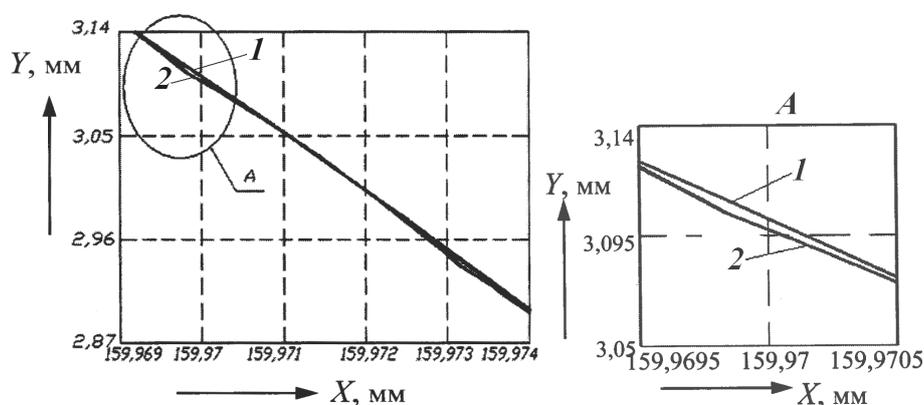


Рис. 3.39. Эскизы номинальных:
1 – геометрической; 2 – кинематической направляющих
обработанной поверхности

Моделирование инструментальной поверхности при обработке винтовых поверхностей

Направляющая поверхности детали винтовая. В этом случае требуется перемещение полученных аппроксимирующих прямых образующей детали по винтовой линии [7].

Запишем уравнения аппроксимирующих прямых в начальном положении образующей. Для этого выберем две системы координат:

$X_1Y_1Z_1$ (местную) и XYZ (рис. 3.40, а), которые в начальный момент обработки совпадают, тогда:

$$X = l \cdot \sin \lambda + X_0; Y = -Y_0 - l \cdot \cos \lambda, \quad (3.154)$$

где l – расстояние от точки пересечения аппроксимирующих прямых до точки М.

Если перемещать аппроксимирующую прямую по винтовой направляющей поверхности детали, то получим часть этой поверхности. Вместе с аппроксимирующей прямой будет перемещаться подвижная система координат $X_1Y_1Z_1$, которая также будет совершать винтовое движение относительно системы XYZ . Формулы перехода от системы XYZ к системе $X_1Y_1Z_1$ следующие:

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cdot \cos \psi - Y \cdot \sin \psi; \\ Y_1 &= X \cdot \sin \psi + Y \cdot \cos \psi; \\ Z_1 &= Z + P\psi; \end{aligned} \quad (3.155)$$

где P – параметр винтовой поверхности детали; ψ – угол поворота системы XYZ относительно $X_1Y_1Z_1$.

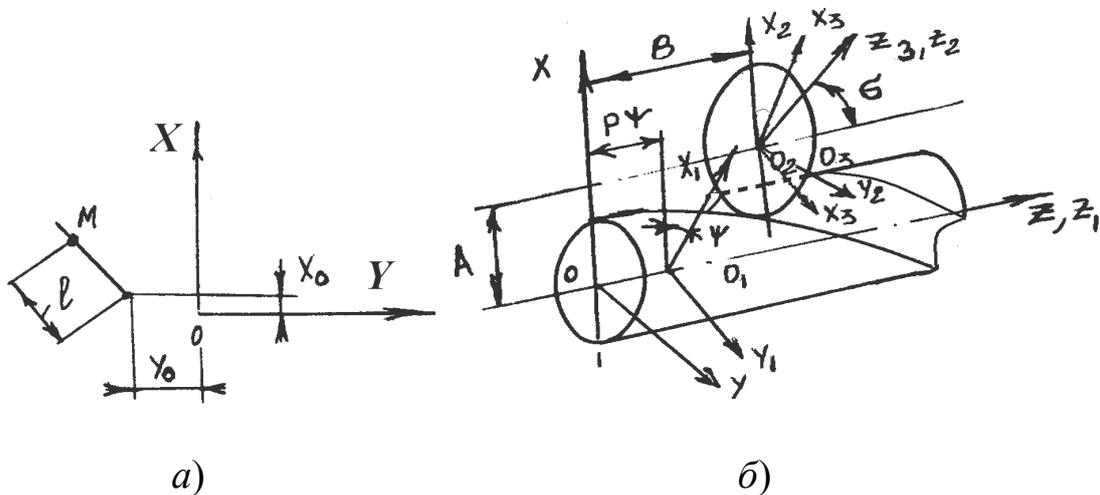


Рис. 3.40. Схема к расчету профиля инструмента при обработке винтовых поверхностей: а – параметры образующей; б – положение инструмента относительно детали

Подставив из системы (3.154) выражения X, Y и Z в систему (3.155), получим уравнения винтовой кинематической поверхности детали:

$$X_1 = X_0 \cdot \cos \psi + Y_0 \cdot \sin \psi + \sin (\psi + \lambda);$$

$$Y_1 = X_0 \cdot \sin \psi - \cos \psi - l \cdot \cos (\psi + \lambda); \quad (3.156)$$

$$Z_1 = P\psi.$$

Определим нормаль к кинематической поверхности детали:

$$\bar{N} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l} \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi}, \quad (3.157)$$

где $\bar{F} = F(l, \psi)$ – уравнение поверхности детали.

Для получения более удобных выражений разложим вектор на оси координат $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_z$.

Найдем частные производные из уравнений (3.156):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial l} &= \cos (\lambda + \psi); \quad \frac{\partial Y_1}{\partial l} = -\cos (\lambda + \psi); \quad \frac{\partial Z_1}{\partial l} = 0; \\ \frac{\partial X_1}{\partial \psi} &= Y_0 \cdot \cos \psi - X_0 \cdot \sin \psi - l \cdot \cos (\lambda + \psi); \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \psi} &= X_0 \cdot \cos \psi + Y_0 \cdot \sin \psi + l \cdot \sin (\lambda + \psi); \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \psi} = P.$$

Подставим выражения (3.158) в уравнение (3.157):

$$\bar{N}_{x1} = -P \cdot \cos (\lambda + \psi);$$

$$\bar{N}_{y1} = -P \cdot \sin (\lambda + \psi);$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{z1} &= \sin (\lambda + \psi)(X_0 \cdot \cos \psi + l \cdot \sin (\psi + \lambda) + Y_0 \cdot \sin \psi) + \cos (\psi + \lambda) \times \\ &\quad \times (l \cdot \cos (\lambda + \psi)) - X_0 \cdot \sin \psi. \end{aligned}$$

Дисковая фреза является телом вращения, поэтому нормаль в точке касания инструментальной поверхности и поверхности детали будет пересекать ось фрезы. Координаты точки центра фрезы в системе $X_1 Y_1 Z_1$ (рис. 3.40, б):

$$X_{02} = A; \quad Y_{02} = 0; \quad Z_{02} = B.$$

Выберем на оси фрезы единичный вектор \bar{k}_{0_2} . Проекции его на оси координат в системе $X_1Y_1Z_1$ детали:

$$\bar{k}_{0_{2X}} = 0; \bar{k}_{0_{2Y}} = -\sin \sigma; \bar{k}_{0_{2Z}} = \cos \sigma.$$

Запишем условие пересечения векторов \bar{N} и \bar{k}_{0_2} :

$$\begin{aligned} (X_1 - X_{0_2})(N_{Y_1}k_{0_{2Z}} - N_{Z_1}k_{0_{2Y}}) - (Y_1 - Y_{10_2})(N_{X_1}k_{0_{2Z}} - N_{Z_1}k_{0_{2X}}) + \\ + (Z_1 - Z_{0_2})(N_{X_1}k_{0_{2Y}} - N_{Y_1}k_{0_{2X}}) = 0. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Уравнение (3.159) описывает контактную линию в системе координат $X_1Y_1Z_1$.

Для определения исходной инструментальной поверхности запишем аппроксимированную образующую поверхности детали в системе $X_2Y_2Z_2$, связанной с фрезой. Для этого случая уравнения перехода из системы $X_1Y_1Z_1$ в $X_2Y_2Z_2$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - A; \\ Y_2 &= Y_1 \cdot \cos \sigma + Z_1 \cdot \sin \sigma + B \cdot \sin \sigma; \\ Z_2 &= -Y_1 \cdot \sin \sigma + Z_1 \cdot \cos \sigma + B \cdot \cos \sigma, \end{aligned} \quad (3.160)$$

где A – расстояние между осями Y_2 и Y_1 в направлении X_1 ; B – расстояние между осями X_2 и X_1 в направлении Z_1 ; σ – угол поворота оси Z_2 до совмещения с Z_1 вокруг оси X_2 .

Исходная поверхность дискового инструмента образовывалась круговым движением линии (3.160) относительно Z_2 . Для записи уравнения искомой круговой поверхности введем условно неподвижную систему координат $X_3Y_3Z_3$, в которой будет поворачиваться $X_2Y_2Z_2$ вместе с характеристикой. Формулы перехода от системы $X_2Y_2Z_2$ к $X_3Y_3Z_3$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 \cdot \cos \tau - Y_2 \cdot \sin \tau; \\ Y_3 &= X_2 \cdot \sin \tau + Y_2 \cdot \cos \tau; \\ Z_3 &= Z_2. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Зависимости (3.160) подставим в (3.161) и получим:

$$\begin{aligned} X_3 &= (X_1 - A)\cos \tau - (Y_1 \cdot \cos \sigma + Z_1 \cdot \sin \sigma + B \cdot \sin \sigma)\sin \tau; \\ Y_3 &= (X_1 - A)\sin \tau + (Y_1 \cdot \cos \sigma + Z_1 \cdot \sin \sigma + B \cdot \sin \sigma)\cos \tau; \\ Z_3 &= -Y_1 \cdot \sin \sigma + Z_1 \cdot \cos \sigma + B \cdot \cos \sigma. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Подставив в (3.162) значения параметров X_1, Y_1, Z_1 , получим уравнения:

$$\begin{aligned} X_3 &= (X_0 \cdot \sin \psi + Y_0 \cdot \cos \psi + l \cdot \sin(\psi + \lambda) - A)\cos \tau - \\ &- [(X_0 \cdot \sin \psi - Y_0 \cdot \cos \psi - l \cdot \cos(\lambda + \psi))\cos \sigma + P\psi \cdot \sin \sigma + B \sin \sigma]\sin \tau; \\ Y_3 &= (X_0 \cdot \sin \psi + Y_0 \cdot \cos \psi + l \cdot \sin(\psi + \lambda) - A)\cos \tau - \\ &- [(X_0 \cdot \sin \psi - Y_0 \cdot \cos \psi - l \cdot \cos(\lambda + \psi))\cos \sigma + P\psi \cdot \sin \sigma + B \cdot \sin \sigma]\cos \tau; \\ Z_3 &= -(X_0 \cdot \sin \psi - Y_0 \cdot \cos \psi - l \cdot \cos(\psi + \lambda))\sin \sigma + P\psi \cdot \cos \sigma + B \cdot \cos \sigma. \end{aligned}$$

В полученные уравнения необходимо подставить параметры $\tau, \psi, \lambda, l, B, P$ для двух смежных зубьев. Решив совместно полученные системы уравнений, определяется значение кинематической погрешности и, сравнив ее с допустимой, корректируется окончательно форма режущей кромки инструмента.

Использование предлагаемой методики рационально при криволинейной образующей поверхности детали с переменным радиусом кривизны.

3.13. Моделирование погрешности позиционирования суппорта станка

Моделирование ведется поэтапно. На первом этапе определяются точки контакта направляющих суппорта и станины (теоретически или экспериментально). Затем вводится система координат XYZ , так чтобы в ней была возможность точно определить координаты точек контакта направляющих (рис. 3.41).

$$\begin{vmatrix} x-x_4 & y-y_4 & z-z_4 \\ x_5-x_4 & y_5-y_4 & z_5-z_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, можно получить:

$$\begin{aligned} & (x-x_4)((y_5-y_4)C_1 - B_1(z_5-z_4)) - \\ & - (y-y_4)((x_5-x_4)C_1 - A_1(z_5-z_4)) + (z-z_4) \times \\ & \times (x_5-x_4)B_1 - A_1(y_5-y_4) = 0. \end{aligned}$$

После упрощения уравнение принимает вид:

$$A_2x - B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (3.165)$$

где $A_2 = (y_5 - y_4)C_1 - B_1(z_5 - z_4)$; $B_2 = (x_5 - x_4)C_1 - A_1(z_5 - z_4)$;
 $C_2 = (x_5 - x_4)B_1 - A_1(y_5 - y_4)$; $D_2 = -A_2x_4 + B_2y_4 - C_2z_4$.

Третья плоскость, в которой располагается одна базовая точка 6 и вектора нормали к первой и второй плоскостям, описывается в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_6 & y-y_6 & z-z_6 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получили уравнение:

$$(x-x_6)(B_1C_2 - B_2C_1) - (y-y_6)(A_1C_2 - A_2C_1) + (z-z_6)(A_1B_2 - A_2B_1) = 0.$$

После упрощения оно принимает вид:

$$A_3x - B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad (3.166)$$

где $A_3 = B_1C_2 - B_2C_1$; $B_3 = A_1C_2 - A_2C_1$; $C_3 = A_1B_2 - A_2B_1$;
 $D_3 = -A_3x_6 + B_3y_6 - C_3z_6$.

Решив уравнения (3.164), (3.165) и (3.166) в виде системы, найдем координаты $X_E Y_E Z_E$ точки E пересечения трех базовых плоскостей.

При изготовлении и сборке узла возникают погрешности, приводящие к образованию реальных базовых точек $1'$, $2'$, ..., $6'$. Подставив координаты новых точек в уравнение базовых плоскостей, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'_1x - B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \\ A'_2x - B'_2y + C'_2z + D'_2 = 0 \\ A'_3x - B'_3y + C'_3z + D'_3 = 0 \end{cases} \quad (3.167)$$

Решив систему (3.167), можно определить координаты точки E' пересечения новых базовых плоскостей $X_{E'}Y_{E'}Z_{E'}$.

На третьем этапе рассчитывается погрешность позиционирования суппорта:

$$\delta = \sqrt{(x_E - x_{E'})^2 + (y - y_{E'})^2 + (z - z_{E'})^2}.$$

3.14. Моделирование точности расположения узлов оборудования

Расчет ведется поэтапно. На первом этапе определяются точки контакта направляющих суппорта и станины (теоретически или экспериментально) (рис. 3.42). Затем вводится система координат XYZ , так чтобы в ней была возможность точно определить координаты точек контакта направляющих.

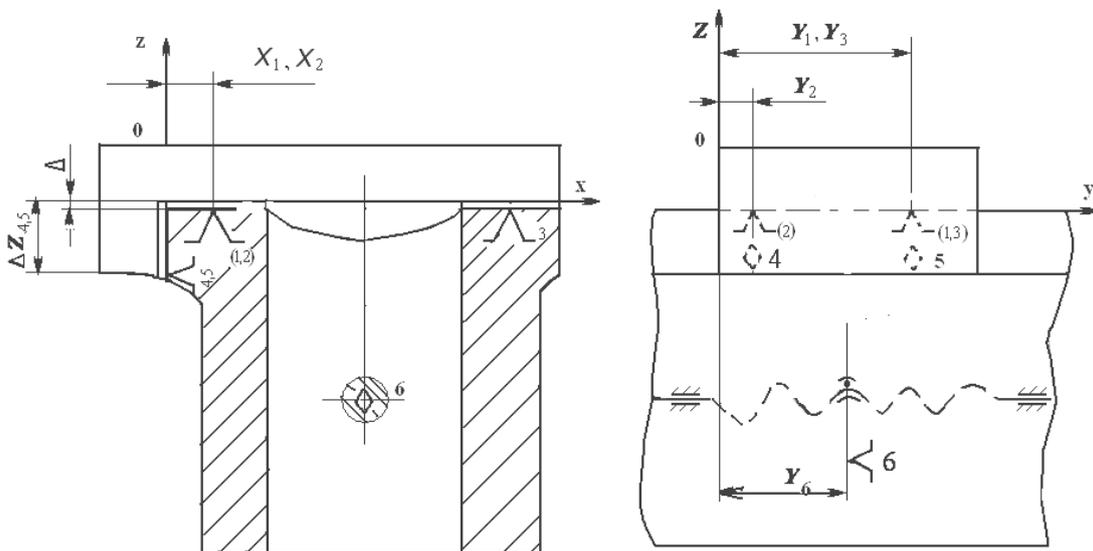


Рис. 3.42. Схема к расчету погрешности позиционирования суппорта матричным методом

На втором этапе вводятся обозначения: a – микроперемещения суппорта по оси X ; b – микроперемещение вдоль оси Y ; c – микроперемещение вдоль Z ; α – микроповороты вокруг оси X против ча-

совой стрелки; β – микроповороты вокруг оси Y ; γ – микроповороты вокруг оси Z .

При изготовлении и сборке узла базовые точки относительно их номинальных положений получают погрешности Δ , которые можно выразить в направлении соответствующих осей: ΔZ , ΔY , ΔX . Для нашего примера они имеют вид: ΔZ_1 , ΔZ_2 , ΔZ_3 , ΔX_4 , ΔX_5 , ΔX_6 . Эти погрешности приведут к микроперемещениям и микроповоротам суппорта относительно станины.

На третьем этапе определяются влияние погрешностей базовых точек на микроперемещения и поворот суппорта относительно станины. Связи между погрешностями базовых точек и принятыми перемещениями и поворотами можно представить в виде направленного графа (рис. 3.43):

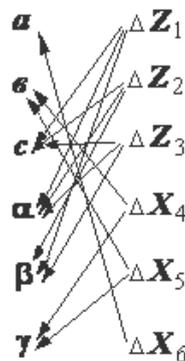


Рис. 3.43. Граф связей между погрешностями базовых точек и микроперемещениями и поворотами

На четвертом этапе граф связей между погрешностями базовых точек и микроперемещениями и поворотами можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} & g_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & 0 & 0 & 0 \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{64} & g_{65} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z_1 \\ \Delta Z_2 \\ \Delta Z_3 \\ \Delta X_4 \\ \Delta X_5 \\ \Delta Y_6 \end{bmatrix}, \quad (3.168)$$

где g_{ij} – элементы матрицы связи, отражающие влияние погрешностей базовых точек на микроперемещения и повороты суппорта.

Для определения численных значений элементов матрицы $\left[g_{ij} \right]$ необходимо рассматривать каждую базу в отдельности с записью влияния погрешностей выделенной базы на микроперемещения и повороты суппорта в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Delta Z_1 \\ \Delta Z_2 \\ \Delta Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & Y_1 & -X_1 \\ -1 & Y_2 & -X_2 \\ -1 & Y_3 & -X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (3.169)$$

Правило знаков для элементов матрицы (3.169)

Если погрешность базовой точки приводит к повороту узла против часовой стрелки, то коэффициент, влияющий на угол поворота, принимается со знаком «+»; если поворот происходит по часовой стрелке, то со знаком «-».

Систему (3.169) необходимо решать методом Крамера. Тогда основной определитель системы (3.169) примет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & Y_1 & -X_1 \\ -1 & Y_2 & -X_2 \\ -1 & Y_3 & -X_3 \end{vmatrix}.$$

Первый производный определитель получается из основного и раскрывается по элементам 1-го столбца:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta Z_1 & Y_1 & -X_1 \\ \Delta Z_2 & Y_2 & -X_2 \\ \Delta Z_3 & Y_3 & -X_3 \end{vmatrix} &= \Delta Z_1(-Y_2 X_3 + X_2 Y_3) - \Delta Z_2(-X_3 Y_1 + X_1 Y_3) + \\ &+ \Delta Z_3(-Y_1 X_2 + Y_2 X_1). \end{aligned}$$

Затем получаем выражение для первого неизвестного:

$$\begin{aligned} c = \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{\Delta Z_1(-Y_2 X_3 + X_2 Y_3)}{\Delta} - \frac{\Delta Z_2(-X_3 Y_1 + X_1 Y_3)}{\Delta} + \frac{\Delta Z_3(-Y_1 X_2 + Y_2 X_1)}{\Delta} = \\ &= \frac{\Delta Z_1(-Y_2 X_3 + X_2 Y_3)}{\Delta} + \frac{\Delta Z_2(X_3 Y_1 - X_1 Y_3)}{\Delta} + \frac{\Delta Z_3(-Y_1 X_2 + Y_2 X_1)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Сопоставляя элементы матрицы (3.168) и уравнение (3.170), определяются выражения для расчета элементов матрицы $\|g_{ij}\|$:

$$g_{31} = \frac{-Y_2 X_3 + X_2 Y_3}{\Delta}; \quad g_{32} = \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3}{\Delta}; \quad g_{33} = \frac{-Y_1 X_2 + Y_2 X_1}{\Delta}. \quad (3.171)$$

Второй производный определитель получают из основного и раскрывают его по элементам 2-го столбца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & \Delta Z_1 & -X_1 \\ -1 & \Delta Z_2 & -X_2 \\ -1 & \Delta Z_3 & -X_3 \end{vmatrix} = -\Delta Z_1(X_3 - X_2) + \Delta Z_2(X_3 - X_1) - \Delta Z_3(X_2 - X_1).$$

Используя метод Крамера, находят выражение для второго неизвестного:

$$\alpha = \frac{\Delta Z_2}{\Delta} = -\Delta Z_1 \left(\frac{X_3 - X_2}{\Delta} \right) + \Delta Z_2 \left(\frac{X_3 - X_1}{\Delta} \right) - \Delta Z_3 \left(\frac{X_2 - X_1}{\Delta} \right). \quad (3.172)$$

Сопоставляя элементы матрицы (3.168) и выражение (3.172), находят соотношения для:

$$g_{41} = \left(\frac{-X_3 + X_2}{\Delta} \right); g_{42} = \left(\frac{X_3 - X_1}{\Delta} \right); g_{43} = \left(\frac{-X_2 + X_1}{\Delta} \right).$$

Третий производный определитель получают аналогично из основного и раскрывают его по элементам 3-го столбца:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & Y_1 & \Delta Z_1 \\ -1 & Y_2 & \Delta Z_2 \\ -1 & Y_3 & \Delta Z_3 \end{vmatrix} = \Delta Z_1(-Y_3 + Y_2) - \Delta Z_2(-Y_3 + Y_1) + \Delta Z_3(-Y_2 + Y_1).$$

По методу Крамера находят выражение для третьего неизвестного:

$$\beta = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\Delta Z_1(-Y_3 + Y_2)}{\Delta} + \frac{\Delta Z_2(Y_3 - Y_1)}{\Delta} + \frac{\Delta Z_3(-Y_2 + Y_1)}{\Delta}. \quad (3.173)$$

Сопоставляя элементы матрицы (3.168) и выражение (3.173), находят соотношения для:

$$g_{51} = \frac{(-Y_3 + Y_2)}{\Delta}; g_{52} = \frac{(Y_3 - Y_1)}{\Delta}; g_{53} = \frac{(-Y_2 + Y_1)}{\Delta}.$$

Затем записывают соотношения, аналогичные (3.169) для второй базы:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_4 \\ \Delta X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +Y_4 \\ 1 & Y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.174)$$

Основной определитель системы (3.174) примет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & +Y_4 \\ 1 & Y_5 \end{vmatrix} = Y_5 - Y_4.$$

Первый производный определитель получают из основного и раскрывают его:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta X_4 & Y_4 \\ \Delta X_5 & Y_5 \end{vmatrix} = \Delta X_4 Y_5 - Y_4 \Delta X_5.$$

Используя метод Крамера, находят выражение для первого неизвестного:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta X_4 Y_5}{\Delta} - \frac{\Delta X_5 Y_4}{\Delta}. \quad (3.175)$$

Сопоставляя элементы матрицы (3.168) и выражение (3.175), находят соотношения для:

$$g_{14} = \frac{Y_5}{Y_5 - Y_4} \quad \text{и} \quad g_{15} = \frac{-Y_4}{Y_5 - Y_4}.$$

Второй производный определитель получают из основного и раскрывают его:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \Delta X_4 \\ 1 & \Delta X_5 \end{vmatrix} = \Delta X_5 - \Delta X_4.$$

Используя метод Крамера, находят выражение для второго неизвестного:

$$\gamma = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \Delta X_5 \left(\frac{1}{Y_5 - Y_4} \right) + \Delta X_4 \left(-\frac{1}{Y_5 - Y_4} \right). \quad (3.176)$$

Сопоставляя элементы матрицы (3.168) и выражение (3.176), находят соотношения для:

$$g_{65} = \left(\frac{1}{Y_5 - Y_4} \right); \quad g_{64} = \left(-\frac{1}{Y_5 - Y_4} \right).$$

Записав соотношения, аналогичные (3.169) для третьей базы, получим: $\Delta Y_6 = 1b$.

Тогда $g_{26} = 1$.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ПРИВОДА СТАНКА

Проектированию приводов станков посвящено большое количество работ, которые в настоящее время систематизированы и представлены в виде монографий и учебников. Эти работы основаны на графическом методе, что затрудняет автоматизацию проектирования привода.

Структуры приводов станков разделены, с точки зрения системного подхода, на множительную, сложенную и смешанную. Смешанная структура включает в себя элементы множительной и сложенной структур и является более общей. Как известно, кинематические параметры механических приводов станков формируются на основе геометрических рядов.

Исходными данными для проектирования привода являются: минимальное и максимальное значения частот выходного вала (полученные из расчетов режимов резания), частота вращения вала двигателя, значение знаменателя геометрической прогрессии ряда частот. Рассмотрим более подробно предлагаемую методику расчета привода.

Для определения количества валов в приводе необходимо произвести ряд уточняющих проектных расчетов [3]. В начале рассчитываем максимальное количество интервалов знаменателя прогрессии в приводе:

$$e_{\max} = \frac{\lg\left(\frac{n_{\text{дв}}}{n_{\min}}\right)}{\lg\varphi}, \quad (4.1)$$

где $n_{\text{дв}}$ – частота вращения двигателя; n_{\min} – минимальное значение частоты вращения выходного вала.

Затем для обеспечения этого диапазона регулирования рассчитываем минимальное количество валов в приводе:

$$k_p = \frac{e_{\max}}{[e']} + 1, \quad (4.2)$$

где $[e']$ – допускаемое количество интервалов понижающей передачи по табл. 4.1.

Принимаем ближайшее большее целое число $k \geq k_p$.

Для описания кинематических связей в приводе необходимо записать его структурную формулу, которая отражает количество групп передач между валами и расположение их в приводе.

Для этого определяем количество скоростей на каждом валу привода Z_j (начиная с последнего), предварительно приняв количество передач в группе:

$$Z_{j-1} = \frac{Z_j}{P_{j-1,j}}, \quad (4.3)$$

где $P_{j-1,j}$ – принятое количество передач в группе между валами $j-1, j$; j – номер вала привода, $j = k, \dots, 1$.

Если Z_j невозможно разделить на $P_{j-1,j}$ без остатка, то необходимо ввести прямую группу передач $P_{1,k}$ с первого вала на рассматриваемый (k -й вал).

$$\text{Тогда } Z_j^c = Z_j - P_{1,k} \text{ и } Z_{j-1} = \frac{Z_j^c}{P_{j-1,j}}. \quad (4.4)$$

С учетом (4.3) и (4.4) записываем структурную формулу привода, начиная с последней группы передач:

$$Z = \left(\left(\prod_{j=1}^n (P_{j,j+1})_{X_{j+1}} + P_{1,n} \right) \prod_{j=1}^m (P_{j,j+1})_{X_{j+1}} + P_{1,m} \right) \prod_{j=m}^k (P_{j_2,j_2+1})_{X_{j_2+1}} + P_{1,k}, \quad (4.5)$$

где $P_{i,j+1}$ – последовательно расположенные группы передач между валами $j, j+1$; $P_{1,n}$; $P_{1,m}$; $P_{1,k}$ – группы передач между первым и соответствующими валами n, m, k ; X_{j+1} – характеристика группы передач $X_{j+1} \equiv Z_j$.

Определяем минимальное расчетное количество валов k_ϕ для полученной структурной формулы:

$$k_\phi = \Sigma P_k + 1, \quad (4.6)$$

где ΣP_k – суммарное количество последовательно расположенных групп передач в приводе.

По результатам расчетов (4.2) и (4.6) необходимо уточнить принятое количество валов в приводе:

$$k = k_{\max}(k_p; k_\phi),$$

где $k_{\max}(k_p; k_\phi)$ – максимальное целое значение из двух расчетных k_p и k_ϕ .

Определение кинематических параметров каждой принятой группы передач необходимо выполнять по отдельным циклам. Анализ производим между валами, начиная с последнего.

Вначале рассчитываем количество интервалов регулирования в принятых группах передач:

– последовательно расположенных в приводе:

$$e_{j-1,j} = (P_{j-1,j} - 1)Z_{j-1}; \quad (4.7)$$

Таблица 4.1

Допускаемое количество интервалов в передачах [e]

Вид привода	Передачи	Знаменатель прогрессии, φ						
		1,06	1,12	1,26	1,41	1,58	1,78	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Главного движения	Прямозубые повышающие, [e'']	12	6	3	2	1,5	1,2	1
	понижающие, [e']	24	12	6	4	3	2,4	2
	Косозубые повышающие, [e'']	15	8	4	2,5	2	1,5	1,3
	понижающие, [e']	24	12	6	4	3	2,4	2
Подач	повышающие, [e'']	17,5	9	4,5	3	2	1,8	1,5
	понижающие, [e']	27,5	14	7	4,5	3,5	2,8	2,3

– параллельно расположенных в приводе:

$$e_{1,j} = \frac{\lg \left(\frac{n_{\max j}}{n_{\text{дв}}} \right)}{\lg \varphi}. \quad (4.8)$$

Если $e_{1,j} > 0$, то эти передачи являются повышающими, а если $e_{1,j} \leq 0$, то понижающими.

Определяем допускаемое количество интервалов регулирования каждой принятой группы передач:

– последовательно расположенной в приводе:

$$[e_{j-1,j}] = [e'_{j-1,j}] + [e''_{j-1,j}]; \quad (4.9)$$

– параллельно расположенной в приводе:

$$[e_{j-1,j}] \equiv [e'_{j-1,j}], \text{ если } e_{1,j} \leq 0 \text{ и } e_{1,j} - P_{1,j} < 0; \quad (4.10)$$

$$[e_{1,j}] \equiv [e''_{1,j}], \text{ если } e_{1,j} > 0 \text{ и } e_{1,j} - P_{1,j} > 0; \quad (4.11)$$

$$[e_{1,j}] \equiv [e''_{1,j}] + [e'_{1,j}], \text{ если } e_{1,j} > 0, \text{ а } e_{1,j} - P_{1,j} < 0, \quad (4.12)$$

где $[e'_{1,j}]$ и $[e''_{1,j}]$ – соответственно, допускаемое количество интервалов регулирования понижающей и повышающей передач в группе (принимается по табл. 4.1).

Рассчитываем запас интервалов регулирования в группе:

$$\Delta e_{j-1,j} = [e_{j-1,j}] - e_{j-1,j}. \quad (4.13)$$

Если $\Delta e_{j-1,j} \geq 0$, то определяем запас интервалов понижающих передач:

$$\Delta e'_{j-1,j} = [e'_{j-1,j}] - e_{j-1,j}.$$

Если $\Delta e'_{j-1,j} \geq 0$, то, приняв $e'_{j-1,j} \equiv [e'_{j-1,j}]$, получим все передачи этой группы привода только понижающие и рассчитываем передаточные отношения:

$$i_{p'_{j-1,j}} = \frac{1}{\varphi^{e'_{j-1,j} - z_{j-1}(p'_{j-1,j} - 1)}}, \quad (4.14)$$

где $p'_{j-1,j}$ – номер понижающей передачи между валами $j-1, j$; $p'=1, \dots, P_{j-1,j}$; если $\Delta e'_{j-1,j} > 0$, то, приняв $e'_{j-1,j} \equiv [e'_{j-1,j}]$, определяем количество – понижающих:

$$\ell^1_{j-1,j} = \frac{e'_{j-1,j}}{z_{j-1}};$$

– повышающих передач:

$$\ell''_{j-1,j} = \frac{e_{j-1,j} - e'_{j-1,j}}{z_{j-1}} = \frac{e''_{j-1,j}}{z_{j-1}}. \quad (4.15)$$

Определяем передаточные отношения передач:

– понижающих:

$$i_{p'_{j-1,j}} = \frac{1}{\varphi^{e'_{j-1,j} - z_{j-1}(p'_{j-1,j} - 1)}}; \quad (4.16)$$

– *повышающих*:

$$i_{p''_{j-1,j}} = \varphi^{e''_{j-1,j} - z_{j-1}(p''_{j-1,j} - 1)}, \quad (4.17)$$

где $p''_{j-1,j}$ – номер повышающей передачи, $p''_{j-1,j} = 1, \dots, \ell''_{j-1,j}$; $p'_{j-1,j}$ – номер понижающей передачи $P'_{j-1,j} = 1, \dots, \ell'_{j-1,j}$.

Если $\Delta e_{j-1,j} < 0$, то необходимо применить параллельное соединение в группах повышающих или понижающих передач.

В начале определим количество дополнительных валов для последовательного соединения повышающих передач и параллельного соединения понижающих передач:

$$k''_{j-1,j} = \frac{e_{j-1,j} - [e'_{j-1,j}]}{[e''_{j-1,j}]} - 1. \quad (4.18)$$

Затем рассчитаем количество валов последовательного соединения понижающих передач при параллельном соединении повышающих передач:

$$k'_{j-1,j} = \frac{e_{j-1,j} - [e''_{j-1,j}]}{[e'_{j-1,j}]} - 1. \quad (4.19)$$

Сравнив два варианта по уровню частот и количеству дополнительных валов, а также по объему передач, выбираем лучший.

Если второй вариант оказался лучшим, то выбираем предельное значение k' , а в качестве переменного параметра используем j .

Приняв предельно допустимое количество интервалов регулирования для всех дополнительных промежуточных передач, определяем количество интервалов повышающей передачи между последним дополнительным валом и шпинделем:

$$e''_{j-(k'+1),j} = e_{j-1,j} - [e'_{j-1,j}] - k''[e''_{j-1,j}]. \quad (4.20)$$

Рассчитываем количество повышающих передач в группе:

$$P''_{j-(k'+1),j} = \frac{e''_{j-(k'+1),j}}{[e''_{j-(k'+1),j}]} \quad (4.21)$$

Определяем передаточные отношения повышающих передач в группе:

$$i_{p''_{j-(k'+1),j}} = \varphi^{e''_{j-(k'+1),j} - z_{j-1}(p''_{j-(k'+1),j-1})}. \quad (4.22)$$

Определяем последовательно группы передач между валами k' и j . Выбираем максимальное значение j и текущий номер вала $k' - 1 \equiv j'$.

Определяем остаточное количество интервалов в группах передач:

$$e_{j',j} = e_j - p''_{j(k'+1),j} Z_{j-1}.$$

Рассчитываем количество интервалов повышающих передач:

$$e''_{j'} = e_{j',j} - [e''_{j',j}].$$

Определяем количество повышающих передач между валами j' , j :

$$p''_{j',j} = \frac{e''_{j',j}}{[e''_{j',j}]}.$$

Рассчитываем передаточные отношения повышающих передач в группе:

$$i_{j',j} = \varphi^{e''_{j',j} - z_{j-1}(p''_{j',j-1})}. \quad (4.23)$$

Пример: $Z = 23$, $\varphi = 1,41$, $n_{дв} = 1400$, $n_{min} = 10$.

1. Определяем максимальное количество интервалов в приводе по (4.1):

$$e_{max_p} = \frac{\lg 140}{\lg 1,41} = 14,05.$$

2. Рассчитываем минимальное количество валов по (4.2):

$$k_p = \frac{14,0}{4} + 1 = 4,5.$$

Принимаем $k = 5$.

3. Количество скоростей на каждом валу по (4.3): $Z_4 = \frac{Z_5}{P_{4,5}}$;

так как $Z_5 = 23$ не делится на $P_{4,5}$, то вводим прямые передачи между 1 и 5 валами и $Z_5^C = 23 - 1 = 22$, тогда $Z_4 = \frac{22}{2} = 11$.

Принимаем $P_{3,4} = 2$; $Z_3 = \frac{Z_4}{P_{3,4}}$; так как $Z_4 = 11$ не делится на $P_{3,4}$

без остатка, то $Z_4^C = Z_4 - 1 = 11 - 1 = 10$; $Z_3 = \frac{Z_4}{P_{3,4}} = \frac{10}{2} = 5$.

Принимаем $P_{2,3} = 2$, тогда $Z_2 = \frac{Z_3}{P_{2,3}}$; так как $Z_3 = 5$ не делится

на два без остатка, то вводим еще одну сложенную группу передач: $Z_3^C = Z_3 - 1 = 5 - 1 = 4$; $Z_2 = 2$. Принимаем $P_{1,2} = 2$, тогда $Z_1 = 1$.

4. Записываем структурную формулу привода по (4.5):

$$Z = \left[\left[(P_{1,2})_{x_2} (P_{2,3})_{x_3} + 1 \right] (P_{3,4})_{x_4} + 1 \right] (P_{4,5})_{x_5} + 1 = ((2 \cdot 2 + 1)2_5 + 1)2_{11} + 1.$$

Количество валов в приводе по структуре: $k_\Phi = P + 1 = 5$.

Принимаем минимальное количество валов: $k = 5$.

5. Количество интервалов регулирования для групп передач каждой группы передач по (4.7) и (4.8):

$$e_{4,5} = (P_{4,5} - 1)Z_4 = 11; e_{3,4} = (P_{3,4} - 1)Z_3 = 5; e_{2,3} = (P_{2,3} - 1)Z_2 = 2;$$

$$e_{1,2} = (P_{1,2} - 1)Z_1 = 1;$$

$$e_{1,5} = \frac{\lg\left(\frac{22400}{1400}\right)}{\lg 1,41} = 8; e_{1,4} = 0; e_{1,3} = \frac{\lg\left(\frac{710}{1400}\right)}{\lg 1,41} = -2.$$

6. Допускаемое количество интервалов по (4.9)–(4.12):

$$[e_{4,5}] = [e'_{4,5}] + [e''_{4,5}] = 6;$$

$$[e_{3,4}] = [e_{2,3}] = [e_{1,2}] = [e_{4,5}].$$

Так как $P_{1,3} = P_{1,4} = P_{1,5} = 1$, то $[e_{1,5}] = [e''_{1,5}] = 2$; $[e_{1,4}] = [e''_{1,4}] = 2$;
 $[e_{1,3}] = [e'_{1,3}] = 4$.

7. Запас повышающих передач регулирования в каждой группе по (4.13):

$$\begin{aligned}\Delta e_{4,5} &= [e_{4,5}] - e_{4,5} = 6 - 11 = -5; \\ \Delta e_{3,4} &= [e_{3,4}] - e_{3,4} = 6 - 5 = 1; \Delta e_{2,3} = [e_{2,3}] - e_{2,3} = 6 - 2 = 4; \\ \Delta e_{1,2} &= e_{\max} - [e'_{4,5}] + [e'_{3,4}] + [e'_{2,3}] + [e''_{1,2}] = 16 - 12 = 4; \\ \Delta e_{1,3} &= [e_{1,3}] - e_{1,3} = 4 - 2 = 2; \Delta e_{1,4} = 2 - 0 = 2; \Delta e_{1,5} = 2 - 8 = -6.\end{aligned}$$

8. Анализируем каждую группу передач от последней до первой.

8.1. Так как $\Delta e'_{4,5} < 0$, то принимаем параллельное соединение в этой группе передач.

8.2. Количество дополнительных валов параллельного соединения повышающих передач по (4.18):

$$k''_{4,5} = \frac{e_{4,5} - [e'_{4,5}]}{[e''_{4,5}]} - 1 = 2,5.$$

8.3. Количество дополнительных валов последовательного соединения понижающих передач по (4.19):

$$k'_{4,5} = \frac{e_{4,5} - [e''_{4,5}]}{[e'_{4,5}]} - 1 = 1,25.$$

8.4. Принимаем $k'' = 3$ и $j' = 5'''$, $5''$, $5'$

8.5. Количество интервалов повышающей передачи между последним дополнительным валом и шпинделем по (4.20):

$$e''_{5,5''} = e_{4,5} - [e'_{4,5}] - 3[e''_{4,5}] = 1.$$

8.6. Определяем передаточные отношения передач между валами IV и V:

– понижающих по (4.14): $e'_{4,5} \equiv [e'_{4,5}]$;

$$i'_{14,5} = \frac{1}{\varphi^{e'_{4,5} - z_4(P'_{4,5} - 1)}} = \frac{1}{1,41^4}.$$

– повышающих по (4.22):

$$i''_{14,5'} = \varphi^{e''_{4,5'} - z_4(P''_{4,5'} - 1)} = 1,41^2;$$

$$i''_{2_{5',5''}} = \varphi^{e_{5',5''} - z_{5'}(P_{5',5''}'' - 1)} = 1,41^2;$$

$$i''_{3_{5'',5''}} = \varphi^{e_{5'',5''} - z_{5''}(P_{5'',5''}'' - 1)} = 1,41^2;$$

$$i''_{4_{5'',5}} = \varphi^{e_{5'',5} - z_{5''}(P_{5'',5}'' - 1)} = 1,41.$$

9. Анализ группы передач между валами III, IV.

Так как $\Delta_{3,4} > 0$, то, приняв $e'_{3,4} \equiv [e'_{3,4}]$, определим количество интервалов $e''_{3,4} = e_{3,4} - e'_{3,4} = 1$ и передаточные отношения передач:

– *понижающих* по (4.14):

$$i'_{1_{3,4}} = \frac{1}{\varphi^{e_{3,4}^1 - z_3(P_{3,4}^1 - 1)}} = \frac{1}{1,41^4};$$

– *повышающих*:

$$i'_1 = \varphi^{e_{3,4}'' - z_3(P_{3,4}'' - 1)} = 1,4.$$

10. Анализ группы передач между валами II, III.

Так как $\Delta e_{2,3} > 0$, а $P_{2,3} = 2$, то, приняв $e^1_{2,3} \equiv [e^1_{2,3}]$, определим: $e'' = e_{2,3} - e^1_{2,3} = -2$; $e''_{2,3} < 0$; – значит, все передачи понижающие.

Определим передаточные отношения передач этой группы по (4.14):

$$i'_{1_{2,3}} = \frac{1}{\varphi^{e_{2,3}^1 - z_2(P_{2,3}^1 - 1)}} = \frac{1}{1,41^4};$$

$$i^1_{2,3} = \frac{1}{\varphi^{4 - 2(2-1)}} = \frac{1}{1,41^2}.$$

11. Анализ группы передач между валами I, II:

$\Delta e_{1,2} > 0$; $P_{1,2} = 2$. Определим: $e''_{1,2} = e_{1,2} - e^1_{1,2} = -1 < 0$;

$e'_{1,2} = e_{\max} - ([e_{4,5}]) + [e_{3,4}] + [e_{2,3}] = 2$ – значит, все передачи понижающие.

Определим передаточные отношения передач этой группы по (4.14):

$$i^1_{1,2} = \frac{1}{\varphi^{e'_{1,2} - z_1(P'_{1,2} - 1)}} = \frac{1}{1,41^2};$$

$$i'_{2,2} = \frac{1}{\varphi^1} = \frac{1}{1,41}$$

12. Анализ группы передач между валами I, III:
 $\Delta e_{1,3} > 0$; $P_{1,3} = 1$ – передача понижающая и

$$i'_{1,3} = \frac{1}{\varphi^{e_{1,3}} - z_1(P'_{1,3} - 1)} = \frac{1}{1,41^2}$$

13. Анализ группы передач между валами I, IV. Так как $\Delta e_{1,4} > 0$;
 $P_{1,4} = 1$, то эта передача понижающая и $i_{1,4} = \frac{1}{\varphi^{e_{1,4}} - z_1(P'_{1,4} - 1)} = 1$.

Анализ группы передач между валами I, V: $\Delta e_{1,5} = -6 < 0$;
 $P_{1,5} = 1$.

Для наглядного восприятия полученных расчетов построим график частот, используя структурную формулу привода:

$$(2_1 2_2 + 1)_1 2_5 + 1) 2_{11} + 1.$$

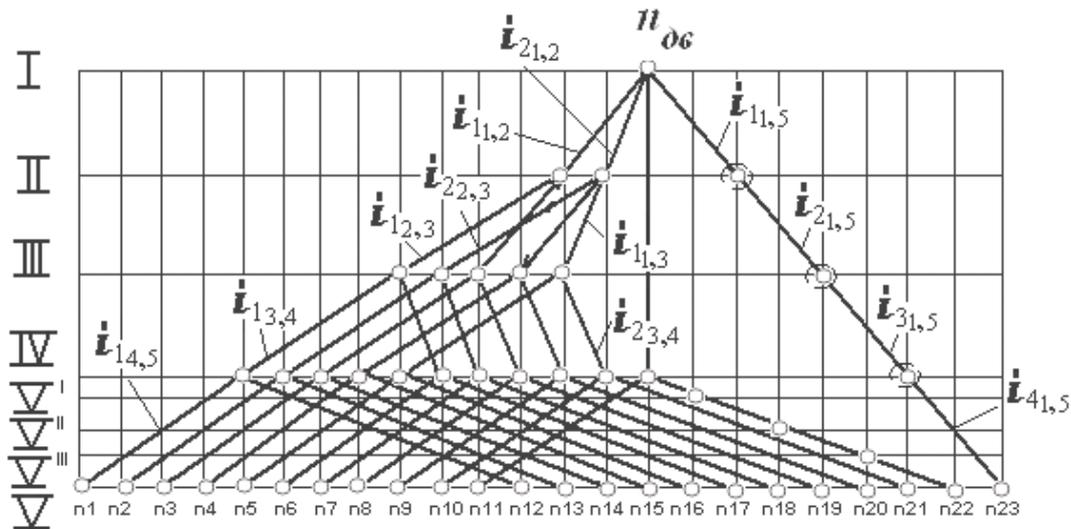


Рис. 4.1. График частот привода

На рис. 4.2 приведена кинематическая схема привода.

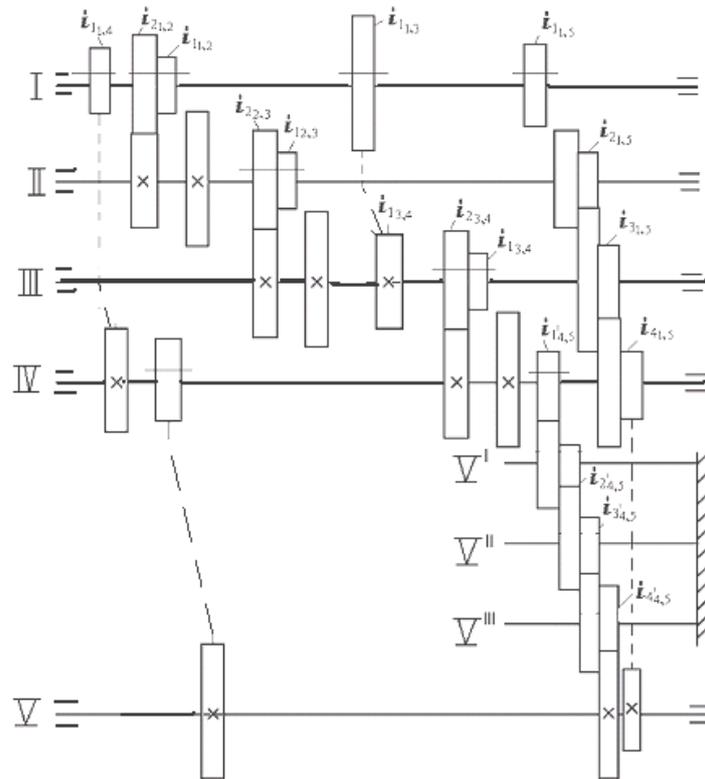


Рис. 4.2. Кинематическая схема привода

Графически изображаем структуру привода в виде направленного графа.

При построении графа вначале обозначается первый вал привода и от него стрелки соединяются в точке, обозначающей второй вал, и т. д. На графе обозначаются количество колес на валах, передаточные отношения передач.

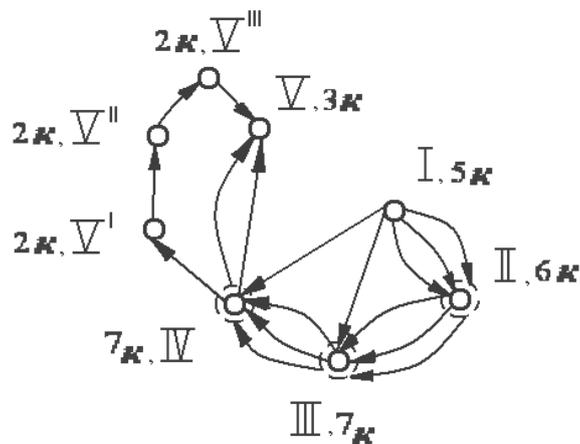


Рис. 4.3. Направленный граф привода

В расчет входит определение чисел зубьев колес в групповых и одиночных передачах. Передаточные отношения, выраженные через ϕ , необходимо представить в виде простых дробей:

$$i = \frac{1}{\phi} = \frac{1}{1,26} \approx \frac{4}{5}; \quad \frac{1}{1,41} = \frac{5}{7}; \quad \frac{1}{1,58} = \frac{7}{11};$$

$$\frac{1}{1,26^2} = \frac{7}{11}; \quad \frac{1}{1,41^2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1,58^2} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{1}{1,26^3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1,41^3} = \frac{19}{53}; \quad \frac{1}{1,58^3} = \frac{1}{4}.$$

Модули колес в пределах одной группы чаще всего одинаковы. Следовательно:

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 = \dots = S_Z = \text{const}, \quad (4.24)$$

где S_Z – сумма чисел зубьев передач в пределах одной группы.

Введены ограничения:

а) для привода главного движения:

$$S_Z \leq 100 \dots 120; \quad Z_{\min} = 18 \dots 20;$$

б) для привода подач: $Z_{\min} = 16$;

в) для сменных колес установлены значения $S_Z = 72, 90, 120$.

Выразив с помощью простых чисел передаточные отношения, получим:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a}{b}; \quad \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{c}{d} \dots, \quad (4.25)$$

где a, b, c, d – целые числа.

Решая совместно (4.24) и (4.25), определим числа зубьев:

$$Z_1 = \frac{a}{a+b} S_Z; \quad Z_2 = \frac{b}{a+b} S_Z; \quad Z_3 = \frac{c}{c+d} S_Z; \quad Z_4 = \frac{d}{c+d} S_Z. \quad (4.26)$$

Нужно, чтобы Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 были целыми числами. Это выполнимо, если S_Z есть наименьшее кратное суммы $a + b, c + d \dots$. Следовательно, находят суммы $a + b, c + d \dots$, определяют наименьшее кратное и вместо S_Z подставляют в формулы (4.26).

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПРИВодОВ ОБОРУДОВАНИЯ

Моделирование кинематической точности необходимо производить для зависимых кинематических цепей. Последовательность моделирования следующая:

1. По соответствующей нормативно-технической документации и рабочим чертежам устанавливаются значения величин, необходимые для расчета кинематической погрешности и мертвого хода.

2. Рассчитываются значения передаточных коэффициентов:

$$\xi_i = \frac{\prod Z_i}{\prod Z_j}, \quad (5.1)$$

где Z_i – число зубьев ведущих зубчатых колес или число заходов червяка; Z_j – число зубьев ведомых зубчатых (червячных) колес.

Формула (5.1) справедлива для расчета передаточных коэффициентов передач при задании погрешностей звеньев в угловых единицах.

3. Расчет кинематической погрешности

3.1. Рассчитываются максимальные и минимальные значения кинематической погрешности передач, составляющих кинематическую цепь.

3.1.1. Минимальное значение кинематической погрешности передач, мкм:

а) передачи зубчатые цилиндрические по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81:

$$F_{i_0 \min} = 0,62K_S(F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.2)$$

для степеней точности 7, 8:

$$F_{i_0 \min} = 0,71K_S(F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.3)$$

б) передачи зубчатые конические по ГОСТ 1758–81 и ГОСТ 9368–81:

$$F_{i_0 \min} = 0,67K_S(F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.4)$$

для степеней точности 7, 8:

$$F_{i_0 \min} = 0,72K_S(F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.5)$$

в) передачи червячные по ГОСТ 3675–81 и ГОСТ 9774–81:

$$F'_{i0 \min} = 0,62 \left[0,7(f_{hk} + f_{f1}) + F'_{i2} \right]; \quad (5.6)$$

г) передачи зубчатые реечные по ГОСТ 10242–81 и ГОСТ 13506–81:

$$F'_{i0 \min} = 0,62 K_S (F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.7)$$

для степеней точности 7, 8:

$$F'_{i0 \min} = 0,71 (F'_{i1} + F'_{i2}); \quad (5.8)$$

д) передачи винт–гайка:

$$F'_{i0 \min} = 0,62 \delta t_{\Sigma}, \quad (5.9)$$

где δt_{Σ} – накопленная погрешность шага резьбы (разность между действительным и номинальным расстояниями между любыми не соседними профилями витков по образующим среднего диаметра); F'_i – допуск на кинематическую погрешность кинематического звена; f_{hk} – допуск на погрешность винтовой линии на длине нарезанной части червяка; f_{f1} – допуск на погрешность профиля витка червяка; K_S – коэффициент, учитывающий степень влияния изменения кинематической погрешности от начального положения звеньев.

3.1.2. Максимальное значение кинематической погрешности передач, мкм:

а) передачи зубчатые цилиндрические по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81:

$$F'_{i0 \max} = K \left[\sqrt{(F'_{i1})^2 + E_{\Sigma M_1}^2} + \sqrt{(F'_{i2})^2 + E_{\Sigma M_2}^2} \right]. \quad (5.10)$$

б) передачи зубчатые конические по ГОСТ 1758–81 и ГОСТ 9368–81:

$$F'_{i0 \max} = K \left[\sqrt{(F'_{i1})^2 + E_{\Sigma M_1}^2} + \sqrt{(F'_{i2})^2 + E_{\Sigma M_2}^2} \right]; \quad (5.11)$$

в) передачи червячные цилиндрические по ГОСТ 3675–81 и ГОСТ 9774–81:

$$F'_{i_0 \max} = 0,8 \sqrt{(f_{hk} + f_{f_1})^2 + E_{\Sigma M_1}^2} + \sqrt{(F'_{i_2})^2 + E_{\Sigma M_2}^2}; \quad (5.12)$$

г) передачи зубчатые реечные по ГОСТ 10242–81 и ГОСТ 13506–81:

$$F'_{i_0 \max} = K \left[\sqrt{(F'_i)^2 + E_{\Sigma M_1}^2} + F'_{i_2} \right]; \quad (5.13)$$

д) передачи винт–гайка:

$$F'_{i_0 \max} = \sqrt{(\delta t_{\Sigma})^2 + E_{\Sigma M}^2}, \quad (5.14)$$

где $E_{\Sigma M}$ – суммарная приведенная погрешность монтажа, определяется по формулам (5.15)–(5.18):

– *колеса зубчатые цилиндрические, конические и червячные:*

$$E_{\Sigma M} = \sqrt{\left(\frac{\ell r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \right)^2 + (\ell a \cdot \operatorname{tg} \beta)^2}, \quad (5.15)$$

здесь ℓr – монтажное радиальное биение зубчатого колеса; ℓa – монтажное осевое биение зубчатого колеса; α – угол исходного профиля колеса; β – делительный угол наклона линии зуба, для конических зубчатых колес – к образующей начального конуса.

В том случае если не заданы допуски на монтажные радиальные и осевые биения зубчатых колес, их следует принимать равными:

$$\ell r = 0,85 \sqrt{\sum_{i=1}^n \ell_i^2}; \quad \ell a = 0,85 \sqrt{\sum_{j=1}^n \ell_j^2}, \quad (5.16)$$

где ℓ_i – допуски на погрешности, создающие первичные радиальные биения колеса; ℓ_j – допуски на погрешности, создающие осевые биения колеса.

Допуски на погрешности, создающие первичные радиальные и осевые биения колеса, определяются на основании рабочих чертежей или другой технической документации;

– *цилиндрические червяки.* Показателями точности монтажа червяка являются радиальное биение витков ℓr и осевое биение ℓa :

$$E_{\Sigma M} = 1,2 \sqrt{\ell_a^2 + (\ell r \cdot \operatorname{tg} \alpha_t \operatorname{tg} \gamma)^2}, \quad (5.17)$$

где α_t – торцовый угол профиля; γ – делительный угол подъема линии витка червяка;

– *винты*. Показателями точности монтажа винта являются радиальное биение витков ℓr и осевое биение ℓa :

$$E_{\Sigma M} = \sqrt{\ell_a^2 + (\ell r \cdot \operatorname{tg} \psi)^2}, \quad (5.18)$$

где ψ – угол наклона винтовой линии – по ГОСТ 11708–82; K – коэффициент фазовой компенсации.

3.2. Максимальные и минимальные значения кинематических погрешностей передач переводятся из линейных единиц в угловые:

а) для зубчатых и червячных передач:

$$\delta\varphi = \frac{6,88F'_{i0}}{d}, \quad (5.19)$$

где d – диаметр делительной окружности ведомого колеса, мм;

б) для передачи винт–гайка:

$$\delta\varphi = \frac{21,6F'_{i0}}{P_h}, \quad (5.20)$$

где P_h – ход резьбы, мм.

3.3. Рассчитываются координаты середин полей рассеяния EV_i^φ и поля рассеяния V_i^φ кинематических погрешностей передач, (...'):

$$EV_i^\varphi = \frac{\delta\varphi_{\min i} + \delta\varphi_{\max i}}{2}, \quad (5.21)$$

где i – порядковый номер передачи;

$$V_i^\varphi = \delta\varphi_{\max i} - \delta\varphi_{\min i}. \quad (5.22)$$

3.4. Рассчитывается координата середины поля рассеяния кинематической погрешности цепи, (...'):

$$E_{V\Sigma}^{\varphi,j} = \sum_{i=1}^n \xi_i E_{V_i}^{\varphi,j}. \quad (5.23)$$

3.5. При вероятностном расчете выбирается процент риска.

3.6. Рассчитывается значение кинематической погрешности цепи:
 – по методу максимума–минимума, (...'):

$$\delta\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \xi_i \delta\varphi_{\max i}; \quad (5.24)$$

– по вероятностному методу:

$$\delta\varphi_{\Sigma P} = E_{V_{\Sigma}}^{\varphi} + t_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i V_i^{\varphi})^2}. \quad (5.25)$$

Значение коэффициента t_1 в зависимости от принимаемого процента риска p выбирается из следующего ряда.

Таблица 5.1

Значения коэффициента t

Процент риска p	10	4,5	1,0	0,27
Коэффициент t_1	0,26	0,35	0,48	0,57

Значение кинематической погрешности передачи при расчете по вероятностному методу:

$$F'_{i_0 P} = Kp F'_{i_0 \max}. \quad (5.26)$$

Коэффициент Kp зависит от вида передачи и принимаемого процента риска p .

В том случае если выходное колесо одной или нескольких передач совершает неполный оборот, соответствующие значения кинематических погрешностей умножаются на коэффициент $K\varphi$, значение которого в зависимости от угла поворота выходного колеса φ выбирается по табл. 5.2.

Таблица 5.2

Значения коэффициента $K\varphi$

Угол поворота $\varphi_{\lambda} (...^\circ)$	30	60	90	120	150	180	210
Коэффициент $K\varphi$	0,02	0,07	0,15	0,15	0,37	0,5	0,63
φ	240	270	300	330	360	–	
$K\varphi$	0,75	0,85	0,93	0,98	1	–	

4. Расчет мертвого хода

4.1. Рассчитываются минимальные значения мертвого хода передач, составляющих кинематическую цепь:

а) передача винт–гайка:

$$j_{t \min} = \epsilon'' \cdot \operatorname{tg} \psi, \quad (5.27)$$

где ϵ'' – нижнее отклонение среднего диаметра винта, по ГОСТ 9562–81; ψ – угол наклона винтовой линии, по ГОСТ 11708–82;

б) остальные виды передач:

$$j_{t \min} = \frac{j_{n \min}}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (5.28)$$

где $j_{n \min}$ – гарантированный боковой зазор по видам передач; α – угол зацепления; β – угол наклона зубьев.

4.2. Рассчитываются максимальные значения мертвого хода передач, мкм:

а) передачи зубчатые цилиндрические:

$$j_{t \max} = 0,7(E_{H_{S_1}} + E_{H_{S_2}}) + \sqrt{0,5(T_{H_1}^2 + T_{H_2}^2) + 2f_a^2 + G_{r_1}^2 + G_{r_2}^2}, \quad (5.29)$$

где $E_{H_{S_1}}, E_{H_{S_2}}$ – наименьшие смещения исходного контура, по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81; T_{H_1}, T_{H_2} – допуски на смещение исходного контура, по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9178–81; f_a – предельные отклонения межосевого расстояния, по ГОСТ 1643–81 и ГОСТ 9179–81; G_{r_1}, G_{r_2} – радиальные зазоры в опорах вращения, принимаются равными радиальным биениям;

б) передачи зубчатые конические:

$$j_{t \max} = 0,94(E_{\bar{S}_{S_1}} + E_{\bar{S}_{S_2}}) + \left[0,46 \left\{ \left[f_{AM_1} \sin \delta_1 \right]^2 + \left[f_{AM_2} \sin \delta_2 \right]^2 + \left(G_{a_1}^2 \sin \delta_1 \right)^2 + \left(G_{a_2} \sin \delta_2 \right)^2 + E_{\Sigma}^2 + \left(G_{r_1}^2 \cos \delta_1 \right)^2 + \left(G_{r_2}^2 \cos \delta_2 \right)^2 \right\} + 0,9 \left(T_{\bar{S}_1}^2 + T_{\bar{S}_2}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.30)$$

где $E_{\bar{S}_{S_1}}, E_{\bar{S}_{S_2}}$ – наименьшие отклонения средней делительной толщины зуба по хорде, по ГОСТ 1758–81 и ГОСТ 9368–81; f_{AM_1}, f_{AM_2} –

предельные осевые смещения зубчатого венца по ГОСТ 1758–81 и ГОСТ 9368–81; G_{a_1} , G_{a_2} – осевые зазоры в опорах вращения; принимаются равными осевым биениям; E_{Σ} – предельные отклонения межосевого угла, по ГОСТ 1758–81, ГОСТ 9368–81; T_{S_1} , T_{S_2} – допуск на среднюю делительную толщину зуба по хорде, по ГОСТ 1758–81, ГОСТ 9368–81;

в) передачи червячные цилиндрические:

$$j_{t\max} = 0,94E_{\bar{S}_S} + \sqrt{0,9(T_{\bar{S}}^2 + G_{a_1}^2) + 2(f_a^2 + f_{ac}^2) + G_{r_1}^2 + G_{r_2}^2}, \quad (5.31)$$

где $E_{\bar{S}_S}$ – наименьшее отклонение толщины витка червяка по хорде, ГОСТ 9774–81, ГОСТ 3675–81; $T_{\bar{S}}$ – допуск на толщину витка червяка по хорде, по ГОСТ 3675–81, ГОСТ 9774–81; f_a , f_{ac} – предельные отклонения межосевых расстояний, соответственно, в передаче и в обработке, по ГОСТ 3675–81, ГОСТ 9774–81;

г) передачи зубчатые реечные:

$$j_{t\max} = 0,7(E_{H_{S_1}} + E_{H_{S_2}}) + \sqrt{0,5(T_{H_1}^2 + T_{H_2}^2) + 2f_a^2 + G_{r_1}^2}, \quad (5.32)$$

где $E_{H_{S_1}}$, $E_{H_{S_2}}$ – наименьшие смещения исходных контуров по ГОСТ 10242–81, ГОСТ 13506–81; T_{H_1} , T_{H_2} – допуски на смещения исходных контуров, по ГОСТ 10242–81, ГОСТ 13506–81; f_a – предельное отклонение межосевого расстояния, по ГОСТ 10242–81, ГОСТ 13506–81;

д) передача винт–гайка:

$$j_{t\max} = \varepsilon' \cdot \operatorname{tg} \psi \sqrt{[(\varepsilon'' - \varepsilon') \operatorname{tg} \psi]^2 + (\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \psi)^2 + G_{a_1}^2 + G_{a_2}^2}, \quad (5.33)$$

где ε' , ε'' – соответственно, верхнее и нижнее предельные отклонения среднего диаметра винта, по ГОСТ 9562–81; ε – верхнее отклонение среднего диаметра гайки, по ГОСТ 9562–81; ψ – угол наклона винтовой линии, по ГОСТ 11708–82.

4.3. Максимальные и минимальные значения мертвого хода передач переводятся из линейных единиц в угловые:

а) передачи зубчатые и червячные:

$$j_{\varphi} = \frac{6,88j_t}{d}; \quad (5.34)$$

б) передача винт–гайка:

$$j_{\varphi} = \frac{21,6 j_t}{P_h}, \quad (5.35)$$

где d – диаметр делительной окружности ведомого колеса, мм;
 P_h – ход резьбы, мм.

4.4. Рассчитывается координата середины поля рассеяния мертвого хода передач:

$$E_{V_i}^j = \frac{j_{\varphi_{\min i}} + j_{\varphi_{\max i}}}{2}, \quad (5.36)$$

где i – порядковый номер передачи.

4.5. Поле рассеяния мертвого хода передач, (...):

$$V_i^j = j_{\varphi_{\max i}} - j_{\varphi_{\min i}}. \quad (5.37)$$

4.6. Рассчитывается координата середины поля рассеяния мертвого хода кинематической цепи:

$$E_{V_{\Sigma}}^{\varphi, j} = \sum_{i=1}^n \xi_i E_{V_i}^{\varphi, j}. \quad (5.38)$$

При вероятностном расчете выбирается процент риска.

4.7. Рассчитывается значение мертвого хода кинематической цепи:

а) по методу максимума–минимума (...'):

$$j_{\varphi_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^n \xi_i j_{\varphi_{\max i}}; \quad (5.39)$$

б) по вероятностному методу:

$$j_{\varphi_{\Sigma p}} = E_{V_{\Sigma}}^j + t_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i V_i^j)^2}. \quad (5.40)$$

Значение коэффициента t_2 в зависимости от принимаемого процента риска p выбирается из следующего ряда.

Таблица 5.3

Значение коэффициента t_2

Процент риска p	10	4,5	1,0	0,27
Коэффициент t_2	0,21	0,28	0,39	0,46

В случае необходимости значения мертвого хода кинематической цепи могут быть приведены к ее входу путем деления полученных значений на передаточное отношение цепи.

Литература

1. Михайлов, М. И. Математическое моделирование и САПР процессов резания, станков и инструментов : учеб. пособие / М. И. Михайлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004. – 274 с.
2. Системы автоматизированного проектирования : учеб. пособие для ВТУЗов : в 9 кн. / И. П. Норенков [и др.] ; под общ. ред. И. П. Норенкова. – М. : Высш. шк., 1986.
3. Михайлов, М. И. Методика кинематического расчета смешанной структуры механического привода станка / М. И. Михайлов // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2000. – № 2. – С. 34–42.
4. Борщевский, В. М. Построение с помощью ЭВМ кинематической схемы однородных многошпиндельных насадок / В. М. Борщевский, Э. М. Лившиц // Станки и инструменты. – 1977. – № 11. – С. 19–20.
5. Ляндов, Ю. Н. Функциональная взаимозаменяемость в машиностроении / Ю. Н. Ляндов. – М. : Машиностроение, 1967. – 219 с.
6. Рвачев, В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – Киев : Техника, 1967. – 245 с.
7. Михайлов, М. И. К вопросу о методике моделирования кинематических поверхностей, сформированных режущим инструментом по различным схемам формообразования / М. И. Михайлов // Машиностроение : сб. науч. тр. – Минск : Технопринт, 2000. – Вып. 16. – С. 125–133.
8. Базаров, И. П. Термодинамика / И. П. Базаров. – М. : Физматгиз, 1966. – 292 с.
9. Михайлов, М. И. Износостойкость ограничных дисков / М. И. Михайлов, В. Я. Щерба, В. Я. Прушак. – Гомель : Инфотрибо, 1996. – 160 с.
10. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов : пер. с англ. / Л. Сегерлинд, – М. : Мир, 1979. – 392 с.
11. Лукас, В. А. Теория автоматического управления / В. А. Лукас. – М. : Недра. 1990. – 416 с.
12. Венцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Венцель. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
13. Солонин, Н. С. Расчет сборочных и технологических размерных цепей / Н. С. Солонин, С. И. Солонин. – М.: Машиностроение, 1980. – 110 с.
14. Основы автоматизации машиностроительного производства / Е. Р. Ковальчук [и др.]. – М. : Высш. шк., 1999. – 312 с.

15. Адаптивное управление технологическими процессами / Ю. М. Соломинцев [и др.]. – М. : Машиностроение, 1986. – 536 с.
16. Технология машиностроения / А. Д. Гусев [и др.]. – М. : Машиностроение, 1986. – 476 с.
17. Бородочев, Н. А. Основные вопросы теории точности производства / Н. А. Бородочев. – М. : АН СССР, 1950. – 416 с.
18. Врагов, Ю. Д. Анализ компоновок металлорежущих станков / Ю. Д. Врагов. – М. : Машиностроение, 1978. – 208 с.
19. Дунаев, П. Ф. Расчет допусков размеров / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. – М. : Машиностроение, 2006. – 400 с.
20. Допуски и посадки : справочник : в 2 ч. / В. Д. Мягков [и др.]. – Л. : Машиностроение, 1982.
21. Зорин, А. А. Расчет сборочных размерных и функциональных цепей : справочник / А. А. Зорин. – М. : Изд-во МАИ, 1992. – 120 с.
22. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – М. : УРСС, 2003. – 408 с.
23. Панкратов, Ю. М. САПР режущих инструментов : учеб. пособие / Ю. М. Панкратов. – СПб. : Лань, 2013. – 336 с.
24. Михайлов, М. И. Сборный металлорежущий механизированный инструмент: Ресурсосберегающие модели и конструкции / М. И. Михайлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 339 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Определение интегральных параметров функций распределения

Уравнение функциональной зависимости:

$$Y = t_x \cdot \cos \theta,$$

где t_x и θ – абсолютное значение и аргумент вектора (случайные величины).

Величины t_x и θ независимые, поэтому математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y :

$$M[Y] = M[t_x]M(\cos \theta);$$

$$D[Y] = D[t_x]D(\cos \theta) + D[t_x][M(\cos \theta)]^2 + D(\cos \theta)[M(t_x)]^2.$$

Формула для определения математического ожидания случайной величины имеет вид: $M_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Для нахождения $M(\cos \theta)$ запишем:

$$M(\cos \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \theta f(\cos \theta) d\theta.$$

При равномерном изменении угла θ от 0 до 2π :

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi}; M(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} |\sin \theta|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} |0 - 0| = 0.$$

При изменении угла θ от 0 до π :

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{\pi}; M(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} |\sin \theta|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} |0 - 0| = 0.$$

Формула для определения дисперсии случайной величины:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M_x^2.$$

Для рассматриваемого случая:

$$D(\cos \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \theta f(\cos \theta) d\theta - M^2(\cos \theta).$$

При угле θ , изменяющемся равномерно от 0 до 2π :

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi};$$

$$D(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - M^2(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{2\pi} - M^2(\cos \theta).$$

После подстановки получим:

$$D(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) - 0 = 0,5.$$

При изменении угла θ от 0 до π :

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{\pi};$$

$$D(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{\pi} - M^2(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) - 0 = 0,5.$$

Определение характеристик рассеяния

Корреляционная связь между случайными величинами возникает в тех случаях, когда на каждую из них помимо общих дополнительно влияют иные факторы.

Пусть X и Y – функции случайных величин:

$$X = f(z_1, z_2, \dots, z_m; u_1, u_2, \dots, u_n);$$

$$Y = f(z_1, z_2, \dots, z_m, v_1, v_2, \dots, v_\ell).$$

Как видно, на величины X и Y влияют общие факторы z_1, z_2, \dots, z_m , на величину X , кроме того, дополнительно влияют факторы u_1, u_2, \dots, u_n , а на величину Y – факторы v_1, v_2, \dots, v_ℓ . В этом случае величины X и Y взаимно коррелированы.

Корреляционная связь характерна для случаев, когда некоторые детали, входящие в одну расчетную схему, изготавливаются с применением одного и того же приспособления или одним и тем же инструментом или на одном настроенном оборудовании по одной и той же числовой программе.

При корреляционной связи каждому значению величины X соответствует какое-то рассеяние величины Y или каждому значению величины Y соответствует какое-то рассеяние величины X .

На результат расчета математического ожидания корреляция не влияет, поэтому далее будем оперировать только дисперсиями случайных величин.

Рассмотрим сначала связь между парой величин X и Y . Характеристикой связи служит ковариация [17], или корреляционный момент:

$$\text{cov}(X, Y) = \mu_{xy} = M[(X - M_x)(Y - M_y)] = M(X, Y) - M[X]M[Y],$$

где M – первый начальный момент, т. е. математическое ожидание случайной величины.

Дисперсия суммы случайных величин $(X + Y)$ [5]:

$$D(X + Y) = M[(X + Y - M_{x+y})^2],$$

где

$$M_{x+y} = M(X + Y) = M[X] + M[Y] = M_x + M_y.$$

С учетом этого получим:

$$D(X + Y) = M \left\{ \left[X + Y - (M_x + M_y) \right]^2 \right\} = M \left\{ \left[(X - v_x) + (Y - v_y) \right]^2 \right\}.$$

После преобразований найдем:

$$D(X + Y) = M \left[(X - v_x)^2 + 2(X - v_x)(Y - v_y) + (Y - v_y)^2 \right],$$

или

$$D(X + Y) = M \left[(X - v_x)^2 \right] + M \left[(Y - v_y)^2 \right] + 2M \left[(X - v_x)(Y - v_y) \right].$$

$$\text{Но согласно [5]: } D[X] = M \left[(X - v_x)^2 \right].$$

Тогда

$$D(X + Y) = D[X] + D[Y] + 2 \text{cov}(X, Y),$$

или

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2r_{xy} \sigma_x \sigma_y,$$

где r_{xy} – коэффициент коррекции между случайными величинами X и Y :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(XY)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M(XY) - M[X]M[Y]}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Перейдем теперь к более общему случаю. Пусть расчетная схема содержит q групп зависимых величин. Внутри каждой группы все величины попарно коррелированы, а величины разных групп независимы. Предположим, что в расчетную схему вошли следующие взаимно коррелированные величины X_q .

Первая группа ($j = 1$): $x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots, x_{m1}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), в которой попарно связаны величины x_{11} и x_{21} , x_{11} и x_{31} , \dots , x_{11} и x_{m1} .

Вторая группа ($j = 2$): $x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots, x_{n2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), в которой попарно связаны величины x_{12} и x_{22} , x_{12} и x_{32} , \dots , x_{12} и x_{n2} .

Последняя группа ($j = q$): $x_{1q}, x_{2q}, x_{3q}, \dots, x_{pq}$ ($i = 1, 2, \dots, p$), в которой попарно связаны величины x_{1q} и x_{2q}, x_{1q} и x_{3q}, \dots, x_{1q} и x_{pq} .

Введем обозначения $Y_{ij} = \xi_{ij} X_{ij}$, где ξ_{ij} – коэффициент приведения, с помощью которого случайные величины X_{ij} приводятся к исходному (конечному) размеру.

Обозначим группу взаимно коррелированных величин через Y_j ($j = 1, 2, \dots, q$). Тогда

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{m1};$$

$$Y_2 = Y_{12} + Y_{22} + \dots + Y_{n2};$$

.....

$$Y_q = Y_{1q} + Y_{2q} + \dots + Y_{pq}.$$

Определим дисперсию коррелированных величин первой группы:

$$Y_1 = \xi_{11}x_{11} + \xi_{21}x_{21} + \dots + \xi_{m1}x_{m1}.$$

Используя известные теоремы теории вероятностей, получим:

$$D[Y_1] = \xi_{11}^2 D[x_{11}] + \xi_{21}^2 D[x_{21}] + \dots + \xi_{m1}^2 D[x_{m1}] + 2 \sum_{i < l} r_{il} \sigma_i \sigma_l \xi_{i1} \xi_{l1};$$

$$D[Y_2] = \xi_{12}^2 D[x_{12}] + \xi_{22}^2 D[x_{22}] + \dots + \xi_{n2}^2 D[x_{n2}] + 2 \sum_{i < l} r_{il} \sigma_i \sigma_l \xi_{i2} \xi_{l2};$$

.....

$$D[Y_q] = \xi_{1q}^2 D[x_{1q}] + \xi_{2q}^2 D[x_{2q}] + \dots + \xi_{pq}^2 D[x_{pq}] + 2 \sum_{i < l} r_{il} \sigma_i \sigma_l \xi_{iq} \xi_{lq}.$$

Но $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_q$, где все Y_j независимы друг от друга, поэтому

$$D[X] = M \left[(X - v_x)^2 \right],$$

или

$$D[Y] = \sum_{ij=11}^{pq} \xi_{ij}^2 D[x_{ij}] + 2 \sum_{j=\ell}^q \sum_i r_{i\ell} \sigma_i \sigma_\ell \xi_{ij} \xi_{\ell j}.$$

Примем для коррелированных величин индекс r . После замены $D[X_{ij}] = \frac{K_{ij}^2 t_{ij}^2}{36}$ и $D[Y] = \frac{K_{\Sigma}^2 t_{\Sigma}^2}{36}$ получим:

$$K_{\Sigma r}^2 t_{\Sigma r}^2 = \sum_{ij}^{pq} \xi_{ij}^2 K_{ij}^2 t_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^q \left(\xi_{ij} K_{ij} t_{ij} \sum_{i=2}^{m(n, \dots, p)} r_{i\ell} \xi_i K_i t_i \right).$$

Если в расчетной схеме имеется только одна группа взаимно коррелированных величин, то

$$K_{\Sigma r}^2 t_{\Sigma r}^2 = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 K_i^2 t_i^2 + 2 \xi_1 K_1 t_1 \sum_{i=2}^m r_{i\ell} \xi_i K_i t_i.$$

В приведенных выше формулах обозначены порядковые номера: i – зависимых величин внутри каждой группы; j – групп зависимых величин; ℓ – величины, коррелированной с величиной $i = 1$ (всегда $\ell > 1$); ij – всех зависимых и независимых величин, входящих в расчетную схему (обозначается двумя цифрами), а также $\sum_{ij=11}^{pq}$ – сумма всех зависимых и независимых величин от $i = 1$ до $i = m$, до $i = n, \dots$, до $i = p$ и от $j = 1$ до $j = q$; $\sum_{j=1}^q$ – сумма зависимых величин групп от $j = 1$ до $j = q$; $\sum_{i=2}^{m(n, \dots, p)}$ – сумма зависимых величин внутри каждой группы.

Как известно, значение коэффициента корреляции $r = -1 \dots 1$. При $r = 0$ связь между случайными величинами исчезает. При $r = -1$ или $r = 1$ корреляционная связь между величинами превращается в функциональную.

Определение коэффициентов корреляции

Коэффициенты корреляции между случайными величинами X и Y :

$$r_{xy} = \frac{\{M(XY) - M[X]M[Y]\}}{(\sigma_x \sigma_y)}.$$

Для случайной величины X :

$$M[X] = \frac{1}{n} \sum_i X_i m_{xi};$$

$$D[X] = \sum_i \frac{1}{n} X_i^2 m_{xi} - M^2[X] = \frac{1}{n^2} \left[n \sum_i X_i^2 m_{xi} - \left(\sum_i X_i m_{xi} \right)^2 \right].$$

Отсюда

$$\sigma_x = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_i X_i^2 m_{xi} - \left(\sum_i X_i m_{xi} \right)^2}.$$

Аналогично для случайной величины Y :

$$\sigma_y = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum_i Y_i^2 m_{yi} - \left(\sum_i Y_i m_{yi} \right)^2}.$$

Корреляционный момент [5]:

$$M(XY) = \frac{1}{n^2} \left(n \sum_x \sum_y m_{xy} X_i Y_i \right).$$

Для упрощения вычислений переходят к новой случайной величине с помощью формул:

$$X'_i = \frac{(X_i - X_0)}{h_1}; \quad Y'_i = \frac{(Y_i - Y_0)}{h_2}.$$

В качестве X_0 и Y_0 принимают среднее значение середин интервалов; h_1 и h_2 – интервалы.

Тогда

$$r_{xy} = \frac{n \sum_x \sum_y m_{xy} X'_i Y'_i - \left(\sum_i m_{xi} X'_i \right) \left(\sum_i m_{yi} Y'_i \right)}{\sqrt{n \sum_i m_{xi} (X'_i)^2 - \left(\sum_i m_{xi} X'_i \right)^2} \sqrt{n \sum_i m_{yi} (Y'_i)^2 - \left(\sum_i m_{yi} Y'_i \right)^2}}.$$

В этих формулах n – общее число наблюдений; m_{xy} – частота совместного наступления событий X и Y ; m_{xi}, m_{yi} – частоты наступления событий X_i и Y_i .

Приложение 4

Таблица П.4.1

Значения квалитетов и коэффициентов α , K типовых размеров

Описание размеров	Технологическая операция	Квалитет	α	K
Диаметры отверстий	Шлифование	7, 8	-0,1...-0,3	1,1...1,3
	Протягивание	6, 7	0...-0,2	1,0...1,2
	Развертывание	7, 9	0...-0,2	1,0...1,2
	Обработка на алмазно-расточных станках	6, 7	-0,1...-0,3	1,1...1,3
	Обработка на станках с ЧПУ	7, 8	0...-0,2	
	Обработка на расточных станках с ручным управлением	8, 9	-0,2...-0,4	
	Обработка на токарных станках с ручным управлением	9, 10	-0,2...-0,4	1,2...1,4
	Сверление	10, 11	0...-0,2	1,1...1,3
Диаметры наружных цилиндрических поверхностей	Шлифование	6, 7	+0,1...+0,3	1,1...1,3
	Обработка на станках с ЧПУ	7, 8	+0,1...+0,2	
	Обработка на револьверных станках и автоматах	9, 10	+0,1...+0,3	
	Обработка на токарных и карусельных станках	9, 10	+0,2...+0,4	1,2...1,4
Расстояние между станками охватывающей поверхности	Шлифование	8, 9	-0,1...-0,3	1,1...1,3
	Обработка на фрезерных и строгальных станках	9, 10		
	Обработка на токарных и револьверных станках	10, 11		

Описание размеров	Технологическая операция	Квалитет	α	К
Расстояние между станками охватываемой поверхности	Шлифование	8, 9	0,1...0,3	1,1...1,3
	Обработка на фрезерных и строгальных станках	9, 10		
	Обработка на токарных и револьверных станках	10, 11		
	Отрезка на специальных станках	12		
Расстояние между поверхностями	Шлифование	8, 9	0	1,1...1,3
	Обработка на фрезерных и строгальных станках	9, 10		
	Обработка на токарных и револьверных станках	10, 11		
Расстояние от оси отверстия до базовой поверхности	Шабрение плоскости	7, 8	$\pm 0,1$	1,2...1,4
	Шлифование плоскости	8, 9		
	Фрезерование плоскости	9, 10		1,1...1,3
	Растачивание отверстия на расточном станке с ЧПУ (обрабатывающем центре)	8, 9		
Расстояние между осями отверстий	Обработка отверстий на координатно-расточном станке	6, 7	$\pm 0,1$	1,1...1,3
	Обработка отверстий на станке с ЧПУ (обрабатывающем центре)	7, 8		
	Обработка отверстий на расточном станке	8, 9		1,2 ...1,4

**Значения допусков и коэффициентов α , K
при типовых технических требованиях**

Технические требования	Технологическая операция	t	α	K
Параллельность, перпендикулярность оси отверстия и базовой поверхности или точность угла между ними	Шабрение плоскости	$(0,04...0,08)/L$	$\pm 0,1$	1,2...1,4
	Шлифование плоскости	$(0,05...0,10)/L$		
	Фрезерование плоскости	$(0,1...0,2)/L$		1,1...1,3
	Растачивание отверстия на расточном станке с ЧПУ (обрабатывающем центре)	$(0,08...0,12)/L$		
Параллельность, перпендикулярность осей отверстий или точность угла между ними	Обработка отверстий на координатно-расточном станке	$(0,12...0,15)/L$	$\pm 0,1$	1,1...1,3
	Обработка отверстий на станке с ЧПУ (обрабатывающем центре)	$(0,08...0,12)/L$		
	Обработка отверстий на расточном станке	$(0,1...0,2)/L$		1,2...1,4
Параллельность, перпендикулярность поверхностей или точность угла между ними	Шабрение плоскостей	$(0,02...0,06)/L$	$\pm 0,1$	1,2...1,4
	Шлифование плоскостей	$(0,04...0,08)/L$		
	Фрезерование плоскостей	$(0,1...0,2)/L$		1,1...1,3
	Обработка плоскостей на станке с ЧПУ (обрабатывающем центре)	$(0,08...0,12)/L$		
	Обработка плоскостей на строгальном станке	$(0,1...0,2)/L$		

Приложение 5

Таблица П.5.1

Нормальные линейные размеры, мм (по ГОСТ 6636–69)

Нормальные линейные размеры, мм									
3,2	5,6	10	18	32	56	100	180	320	560
3,4	6,0	10,5	19	34/35	60/62	105	190	340	600
3,6	6,3	11	20	36	63/65	110	200	360	630
3,8	6,7	11,5	21	38	67/70	120	210	380	670
4,0	7,1	12	22	40	71/72	125	220	400	710
4,2	7,5	13	24	42	75	130	240	420	750
4,5	8,0	14	25	45/47	80	140	250	450	800
4,8	8,5	15	26	48	85	150	260	480	850
5,0	9,0	16	28	50/52	90	160	280	500	900
5,3	9,5	17	30	53/55	95	170	300	530	950

Примечание. Под косой чертой приведены размеры посадочных мест для подшипников качения.

Таблица П.5.2

Значения допусков, мкм (по ГОСТ 25346–89)

Интервал размеров, мм	Квалитет														
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Свыше 3 до 6	2,5	4	5	8	12	18	30	48	75	120	180	300	480	750	1200
» 6 » 10	2,5	4	6	9	15	22	36	58	90	150	220	360	580	900	1500
» 10 » 18	3	5	8	11	18	27	43	70	110	180	270	430	700	1100	1800
» 18 » 30	4	6	9	13	21	33	52	84	130	210	330	520	840	1300	2100
» 30 » 50	4	7	11	16	25	39	62	100	160	250	390	620	1000	1600	2500
» 50 » 80	5	8	13	19	30	46	74	120	190	300	460	740	1200	1900	3000
» 80 » 120	6	10	15	22	35	54	87	140	220	350	540	870	1400	2200	3500
» 120 » 180	8	12	18	25	40	63	100	160	250	400	630	1000	1600	2500	4000
» 180 » 250	10	14	20	29	46	72	115	185	290	460	720	1150	1850	2900	4600
» 250 » 315	12	16	23	32	52	81	130	210	320	520	810	1300	2100	3200	5200
» 315 » 400	13	18	25	36	57	89	140	230	360	570	890	1400	2300	3600	5700
» 400 » 500	15	20	27	40	63	97	155	250	400	630	970	1550	2500	4000	6300

**Предельные отклонения линейных размеров, мм
(по ГОСТ 30893.1–2002)**

Класс точности	Предельные отклонения для интервалов размеров					
	от 0,5 до 3	свыше 3 до 6	свыше 6 до 30	свыше 30 до 120	свыше 120 до 400	свыше 400 до 1000
Точный, <i>f</i>	±0,05	±0,05	±0,1	±0,15	±0,2	±0,3
Средний, <i>m</i>	±0,10	±0,10	±0,2	±0,30	±0,5	±0,8
Грубый, <i>c</i>	±0,20	±0,30	±0,5	±0,80	±1,2	±2,0
Очень грубый, <i>v</i>	–	±0,50	±1,0	±1,50	±2,5	±4,0

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Михайлов Михаил Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОРУДОВАНИЯ И ИНСТРУМЕНТОВ

Учебное пособие

Электронный аналог печатного издания

Редактор *А. В. Власов*
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 28.12.18.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 17,63.
Изд. № 891/8.
<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель