

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»**

**Кафедра «Физика и электротехника»**

# **ФИЗИКА: ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

**ПОСОБИЕ**

**для студентов технических специальностей  
дневной формы обучения**

**Гомель 2019**

УДК 537(075.8)  
ББК 22.33я73  
Ф50

*Рекомендовано научно-методическим советом  
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 27.02.2018 г.)*

Составители: *П. А. Хило, А. И. Кравченко*

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого  
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Бабич*

**Физика:** электричество и магнетизм : пособие для студентов техн. специальностей  
Ф50 днев. формы обучения / сост.: П. А. Хило, А. И. Кравченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 265 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Мб RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Представлен лекционный материал по разделу «Электричество и магнетизм» курса «Физика». Составлен в соответствии с требованиями образовательных стандартов и типовых учебных планов.

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 537(075.8)  
ББК 22.33я73

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2019

## Предисловие

Настоящее пособие представляет собой курс лекций по второй части курса физика «Электричество и магнетизм» и предназначен для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

Пособие составлено в соответствии с требованиями общеобразовательных стандартов и учебных программ. Предлагаемое пособие представляет собой часть традиционного курса, читаемого на кафедре физика на протяжении многих лет. В данном пособии в доступной форме без громоздких математических выкладок рассмотрены основные вопросы электростатики, законы цепей постоянного и переменного тока, основные положения теории магнитного поля, электромагнитной индукции и теории электромагнитных волн. В большинстве случаев теоретический материал рассматривается применительно к конкретным расчётным задачам. Что позволит студенту глубже изучить и усвоить предлагаемый теоретический материал.

Авторы надеются, что настоящее пособие поможет получить студенту те основы знаний, которые позволят понимать явления в окружающей природе, помогут будущему инженеру разобраться в новых технологиях.

## ЧАСТЬ II. Электричество и магнетизм

### Глава 1. Электрическое поле в вакууме

#### 1.1. Электромагнитное поле. Электрические заряды. Закон сохранения заряда. Закон Кулона

В основе учения об электромагнетизме лежит представление, об электромагнитном поле.

Электромагнитное поле – это особый вид материи, посредством которого осуществляется электромагнитное взаимодействие частиц и тел, обладающих электрическим зарядом.

При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются два его проявления, две неразрывно связанные стороны – электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле – одна из сторон электромагнитного поля, создаётся электрическими зарядами и изменяющимся магнитным полем и передаёт действие электрических сил.

Магнитное поле – одна из сторон электромагнитного поля, создаётся движущимися электрическими зарядами и изменяющимся электрическим полем и передаёт действие магнитных сил.

Электрическая и магнитная силы – две неразрывные составляющие электромагнитной силы.

Электрическое поле неподвижных заряженных тел называется электростатическим полем. Силы, действующие на заряженные тела в таких полях, называются электростатическими или кулоновскими.

Электрический заряд – скалярная физическая величина, характеризуются свойство материальных объектов вступать в электромагнитное взаимодействие и определяющая интенсивность этого взаимодействия. Электрическим зарядом обладают элементарные частицы материи – электроны, протоны, позитроны и др.

Известны два рода электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными (термины «положительное» и «отрицательное» электричество были введены В. Франклином (США) в XVIII в.). Экспериментально установлено, что абсолютная величина электрического заряда всех заряженных элементарных частиц одинакова и равна:

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Этот минимальный электрический заряд называется элементарным.

Любой электрический заряд, отличный от элементарного, является дискретным образованием: он состоит из целого числа элементарных зарядов:  $q = \pm|e| \cdot N$ , где  $N$  целое положительное число (1, 2, 3, ...).

Заряд, состоящий из очень большого числа элементарных зарядов, называется макроскопическим.

Электрический заряд – неотъемлемое свойство заряженных элементарных частиц. Заряженная частица не может «потерять» заряд так же, как она не может «лишиться» массы. Неуничтожимость элементарного заряда проявляется в законе сохранения электрического заряда: если система является замкнутой, то полный электрический заряд системы сохраняется:  $q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const}$

$$\text{или } q_1 + q_2 + \dots + q_n = q'_1 + q'_2 + \dots + q'_n, (1.1)$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_n$  – заряды тел системы в момент времени  $t$ ,  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$  – то же в момент времени  $t'$ .

В отличие от массы, электрический заряд является релятивистски – инвариантной величиной: он один и тот же во всех инерциальных системах отсчёта.

Все элементарные заряды находятся в состоянии движения. Рассматриваемые в электростатике неподвижные заряды есть результат макроскопического усреднения: если сумма скоростей всех элементарных зарядов, образующих данный макроскопический заряд, в рассматриваемой системе отсчёта равна нулю, то такой заряд проявляет себя в этой системе как «неподвижный».

Элементарный заряд называется свободным, если он свободно может перемещаться по всему объёму тела, и связанным, если он такой возможности не имеет. То же для макроскопического заряда.

С любым элементарным зарядом связано электромагнитное микрополе.

Электрическое и магнитное поля, изучаемые электростатикой и макроскопической электродинамикой, являются усреднёнными: они результат наложения микрополей, созданных большой совокупностью элементарных зарядов.

Заряженное тело оказывает (через посредство электрического поля) силовое действие на другие заряженные тела.

Ш. Кулон (Франция) в 1785 г. установил закон взаимодействия

неподвижных точечных электрических зарядов. Заряд называется точечным размером, если он сосредоточен на теле, размерами которого можно пренебречь. Согласно закону Кулона, электрическая сила, с которой точечный заряд  $q_1$  действует в вакууме на другой точечный заряд  $q_2$  (рис.1.1), пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей заряды:

$$\vec{F}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}, (1.2)$$

где  $\vec{r}_{12}$  радиус – вектор, проведённый от  $q_1$  к  $q_2$ ;  $r_{12}$  – модуль этого вектора;  $k$  – положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Если  $q_1$  и  $q_2$  – заряды одного знака, т.е.  $q_1 \cdot q_2 > 0$ , то  $\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$ , если противоположного ( $q_1 \cdot q_2 < 0$ ), то  $\vec{F}_{21} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$ .

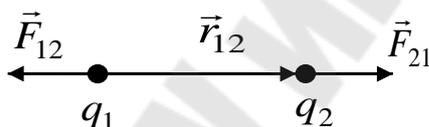


Рис. 1.1  $q_1$

Сила  $\vec{F}_{12}$  с которой заряд  $q_2$  действует на заряд  $q_1$  равна по модулю и противоположна по направлению силе  $\vec{F}_{21}$ , с которой  $q_1$  действует на  $q_2$ :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}. (1.3)$$

$$\text{Модули сил } \vec{F}_{21} \text{ и } \vec{F}_{12} \text{ равны: } F = k \cdot \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}, (1.4)$$

где  $r$  – расстояние между зарядами.

Закон Кулона выполняется только для неподвижных зарядов.

Закон Кулона справедлив не только для точечных зарядов, но и для зарядов, равномерно распределённых по поверхности или объёму сферы (взаимодействие в двух последних случаях таково, как если бы заряды были сосредоточены в центре сфер) (рис.1.2).

Расчёт силы электростатического взаимодействия между заряженными телами, размеры которых соизмеримы с расстоянием между ними, производится следующим образом. Оба заряда  $q_1$  и  $q_2$  разбивают на столь малые порции  $dq$ , что каждую такую порцию можно

считать точечным зарядом. По (1.2) находят силу, действующую со стороны заряда  $dq$  первого тела на такой же заряд второго тела. Произведя интегрирование по всем элементам обоих тел, находят силу  $\vec{F}_{21}$ , с которой заряд  $q_1$  действует на  $q_2$ . С такой же по модулю, но противоположной по направлению силой заряд  $q_2$  действует на заряд  $q_1$ .

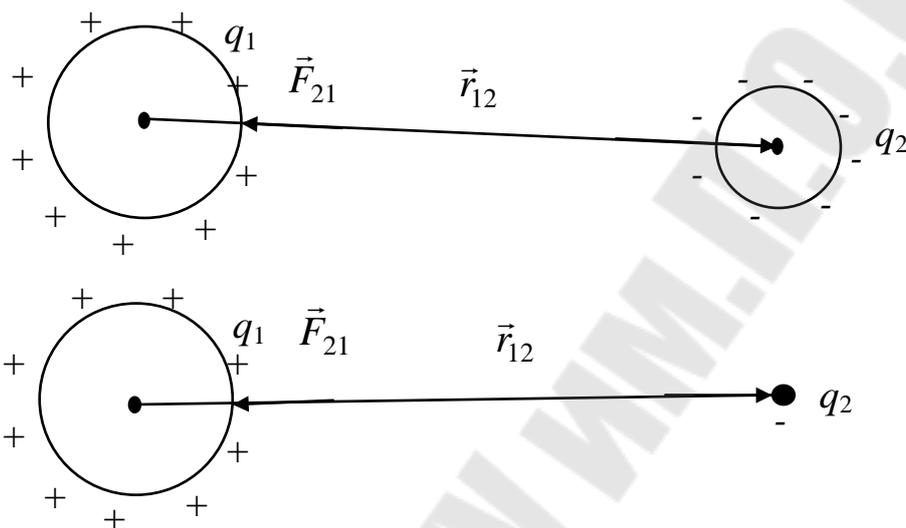


Рис. 1.2

Как и в предыдущих разделах курса, в электростатике мы будем пользоваться только Международной системой единиц (СИ).

Единица заряда в СИ – кулон – устанавливается не из закона Кулона, а из других закономерностей. Это приводит к тому, что в (1.3) сохраняется размерный коэффициент пропорциональности  $k$ .

Как видно из (1.3), коэффициент  $k$  равен модулю силы, с которой взаимодействовали бы в вакууме два единичных точечных заряда, расположенных на единичном расстоянии друг от друга, т.е. если

$$|q_1| = |q_2| = 1, |r| = 1, \text{ то } |k| = |F|.$$

Коэффициент  $k$  определяется экспериментально: измерив величину силы  $\vec{F}$ , с которой взаимодействуют два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , расположенные на некотором расстоянии  $r$  друг от друга в молекулярном вакууме, и подставив эти величины в (1.3), находят  $k$ . Если величина  $\vec{F}$  измерена в ньютонах,  $q_1$  и  $q_2$  – в кулонах, а  $r$  – метрах, т.е. в единицах СИ, то  $k$  получается равным:

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Таким образом, можно было бы пользоваться (1.3), понимая под  $k$  записанное выше значение.

Чтобы избавиться от этого множителя в наиболее употребительных формулах, О. Хевисайд (Англия) предложил ввести его искусственно в закон Кулона, представив коэффициент пропорциональности  $k$  в виде произведения двух сомножителей – безразмерного и размерного:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.5)$$

где  $\epsilon_0$  – коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной.

Тогда закон Кулона примет вид:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12}. \quad (1.6)$$

Введение в закон Кулона вместо коэффициента  $k$  равного ему коэффициента видоизменяет все формулы электростатики: из одних формул множитель  $4\pi$  исчезает (в результате сокращения), и это делает формулы более простыми, в других же формулах он, наоборот, появляется, что усложняет их вид.

«Исправленные» указанным образом формулы называются рационализированными формулами, а системы единиц, основывающиеся на рациональных формулах, – рационализированными системами. Международная система единиц является рационализованной.

## 1.2. Напряжённость электрического поля.

### Принцип суперпозиции полей

Электрическое взаимодействие зарядов осуществляется через посредство электрического поля. Каждый заряд создаёт в окружающем пространстве электрическое поле и через него действует на другие заряды.

Электрический заряд тела, с помощью которого обнаруживается и исследуется электрическое поле, называется пробным зарядом. Пробный заряд должен быть достаточно малым по модулю. С пробным зарядом связано его собственное электрическое поле. Это поле, воздействуя на заряды, создающие исследуемое поле, вызывает их перераспределение, в результате чего исследуемое поле всюду, в том числе и в том месте, где находится пробный заряд, искажается. Чем

меньше пробный заряд, тем меньше он исказит исследуемое поле. Пробный заряд должен быть точечным. Сила, действующая на пробный заряд, характеризует свойства поля, усреднённые по тому объёму, который занимает этот заряд, поэтому, чем меньше объём, занимаемый пробным зарядом, тем ближе найденные средние характеристики к истинным, «точечным» характеристикам. Пробный заряд должен быть положительным ( $q_+$ ).

Как показывает опыт, сила, действующая на пробный заряд, помещённый в данную точку поля, зависит как от свойств поля в этой точке, так и от величины пробного заряда.

Сила же, отнесённая к единице пробного заряда, зависит от свойств поля в рассматриваемой точке и, следовательно, может служить его характеристикой в этой точке. Эта векторная характеристика поля называется напряжённостью («полем»).

Напряжённость электрического поля в данной точке – векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на находящиеся в нём электрические заряды и равная силе, с которой поле действовало бы на единичный точечный, положительный заряд, помещённый в эту точку:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}. \quad (1.7)$$

Напряжённость характеризует поле в каждой точке независимо от того, есть в этой точке пробный заряд или нет.

Поле называется однородным, если напряжённость во всех его точках одинакова. Чтобы найти напряжённость поля точечного заряда  $q$  в вакууме, нужно в (1.7) подставить выражение для силы, с которой заряд  $q$  действует на пробный заряд  $q_+$ .

По закону Кулона:

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_+}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}, \quad (1.8)$$

где  $\vec{r}$  – радиус – вектор, проведённый от заряда  $q$  в точку поля,

где находится  $q_+$ . Следовательно,  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}. \quad (1.9)$

Из (1.9) видно, что вектор  $\vec{E}$  в каждой точке поля точечного заряда  $q$  направлен (радиально) от  $q$ , если  $q > 0$ , и к  $q$ , если  $q < 0$  (рис. 1.3). Модуль вектора напряжённости поля точечного заряда равен:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.10)$$

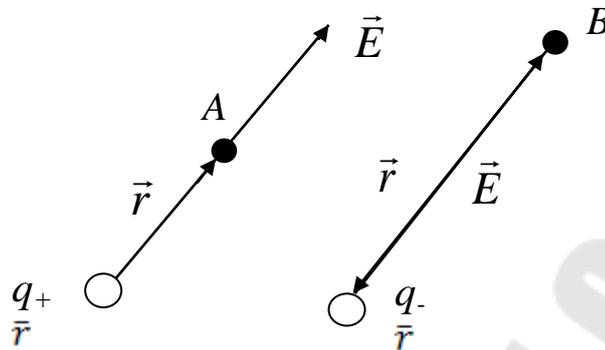


Рис. 1.3

Из (1.7) следует, что на точечный заряд  $q$  в точке поля с напряжённостью действует сила:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1.11)$$

Если  $q > 0$ , то  $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E}$ , если  $q < 0$ , то  $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E}$ .

Электростатическое поле создаётся неподвижными электрическими зарядами и неразрывно с ними связано. Электрические заряды могут быть точечными, или протяжёнными.

Пусть поле создано в вакууме системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Заряд  $q_1$ , взятый в отдельности (т.е. в отсутствии других зарядов), действует на пробный заряд  $q_+$ , помещённый в данную точку, с силой  $\vec{F}_1$ , заряд  $q_2$  – с силой  $\vec{F}_2$  и т.д. Опыт показывает, что результирующая сила, действующая на пробный заряд, равна сумме сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (1.12)$$

Разделив (1.12) на  $q_+$ , получим выражение для результирующей напряжённости:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (1.13)$$

или  $\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$ , где  $\vec{E}_i$  – напряжённость, создаваемая зарядом  $q_i$ .

Таким образом, напряжённость поля, созданного системой зарядов, равна сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Соотношение (1.13) выражает принцип независимости действия полей, принцип суперпозиций.

При непрерывном распределении зарядов суммирование (1.13) заменяется интегрированием элементарных напряжённостей создаваемых отдельными элементарными порциями заряда  $dq$ :

$$\vec{E} = \int d\vec{E}. \quad (1.14)$$

Принцип суперпозиции справедлив не только для электростатических, но и вихревых электрических полей.

### 1.3. Расчёт электрических полей на основе принципа суперпозиций полей

Рассчитать поле – значит определить в любой его точке модуль и направление вектора напряжённости. Эта задача в общем случае решается на основе закона Кулона и принципа суперпозиции.

В случае системы точечных зарядов расчёт поля сводится к нахождению по (1.9) напряжённостей, создаваемых отдельными зарядами, и к последующему суммированию этих напряжённостей.

Если заряд  $q$  протяжённый, то его разбивают на столь малые порции  $dq$ , что каждую такую порцию можно считать точечным зарядом. Чтобы выразить  $dq$ , нужно знать закон распределения  $q$  в пространстве. Заряд, распределённый по объёму, поверхности или линии, называется соответственно объёмным, поверхностным, линейным.

Распределение заряда по объёму, поверхности, линии характеризует объёмная  $\rho$ , поверхностная  $\sigma$ , линейная  $\tau$  плотности зарядов.

Объёмная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице объёма:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.15)$$

Поверхностная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице поверхности:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}. \quad (1.16)$$

Линейная плотность заряда – заряд, отнесённый к единице длины:

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}. \quad (1.17)$$

Если известны  $\rho$ ,  $\sigma$  или  $\tau$  как функции координат, то элементарная порция заряда  $dq$  выразится следующим образом:

$dq = \rho dV$ ,  $dq = \sigma dS$ ,  $dq = \tau dl$ , где  $dV$ ,  $dS$ ,  $dl$  – элементы объёма, поверхности, линии.

Для нахождения напряжённости  $\vec{E}$ , создаваемой протяженным зарядом  $q$  в данной точке, разбивают заряд на элементарные порции  $dq$ , определяют напряжённость  $d\vec{E}$  и интегрируют полученное выражение.

а) *Поле электрического диполя.* Электрический диполь – это система двух равных по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов  $q_+$  и  $q_-$ , смещённых на некоторое расстояние друг относительно друга. Ориентацию диполя в пространстве указывает плечо диполя – вектор, проведённый от отрицательного заряда к положительному и равный по модулю расстоянию между зарядами (рис. 1.4).

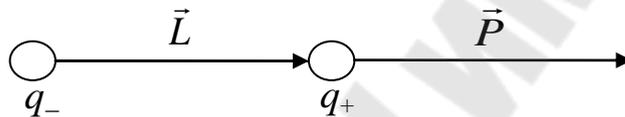


Рис. 1.4

Вектор  $\vec{P}$ , равный произведению модуля одного из зарядов диполя на плечо диполя, называется электрическим моментом диполя:

$$\vec{P} = |q|\vec{L}. \quad (1.18)$$

В соответствии с принципом суперпозиции, напряжённость  $\vec{E}$ , создаваемая диполем в произвольной точке, равна сумме напряжённостей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ , создаваемых зарядами  $q_+$  и  $q_-$  диполя:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

Найдём напряжённость в точке М, лежащей на оси диполя и отстоящей от центра диполя на расстоянии  $r \gg l$  (рис. 1.5). Так как в этой точке  $\vec{E}_+ \uparrow \vec{E}_-$ , то модуль результирующей напряжённости равен разности модулей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ :  $E_{||} = E_+ - E_-$ ,

$$\text{где } E_+ = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}, \quad E_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \text{ и, следовательно,}$$

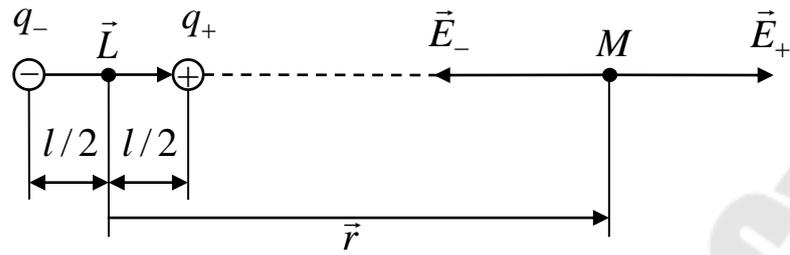


Рис. 1.5

$$E_{||} = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{2|q|lr}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

Пренебрегая в знаменателе величиной  $\frac{l^2}{4}$  по сравнению с  $r^2$  и учитывая, что  $|q| \cdot l$  – модуль электрического момента диполя, получим:

$$E = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.19)$$

Найдём напряжённость поля диполя в точке  $N$ , отстоящей от центра на расстоянии  $r \gg l$  и лежащей на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя (рис. 1.6). Так как расстояния от  $q_+$  и  $q_-$  до  $N$  одинаковы, то  $E_+ = E_-$ .

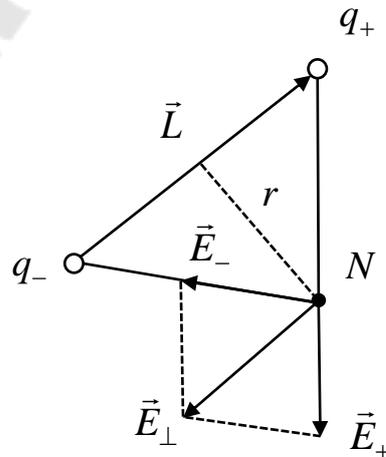


Рис. 1.6

Равнобедренные треугольники, основания которых  $\vec{E}_\perp$  и  $\vec{L}$  подобны. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}, \text{ или } E_\perp = E_+ \cdot \frac{l}{r}, \text{ так как } \left(\frac{l}{2}\right)^2 \ll r^2, \text{ а}$$

$$E_+ = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ получим:}$$

$$E_\perp = \frac{|q|l}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.20)$$

Можно показать, что модуль напряжённости поля в произвольной точке, отстоящей от центра диполя на расстоянии  $r \gg l$  равен:

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (1.21)$$

где  $\alpha$  - угол между  $\vec{L}$  и  $\vec{r}$  (рис. 1.7).

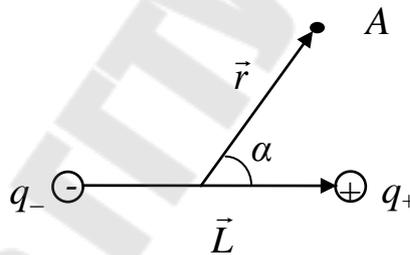


Рис. 1.7

Таким образом, напряжённость поля электрического диполя пропорциональна электрическому моменту диполя, обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя до точки наблюдения и зависит от угла между осью диполя и направлением к точке наблюдения.

б) Поле равномерно заряженного проволочного кольца. Пусть  $r_0$  – радиус кольца,  $\tau$  – линейная плотность заряда кольца,  $h$  – расстояние от центра кольца до точки на оси кольца, в которой определяется напряжённость. Разобьём кольцо на элементы. Выберем произвольный  $dl$ , обладающая зарядом  $\tau dl$  этот элемент создаёт в рассматриваемой точке напряжённость  $d\vec{E}$ . Разложим  $d\vec{E}$  на две составляющие:  $d\vec{E}_\parallel$ , параллельную оси кольца и,  $d\vec{E}_\perp$ , перпендикулярно к ней. При суммировании составляющая  $d\vec{E}_\perp$  компенсируется составляющей  $d\vec{E}'_\perp$ ,

создаваемой зарядом диаметрально противоположного элемента  $dl'$  (рис. 1.8).

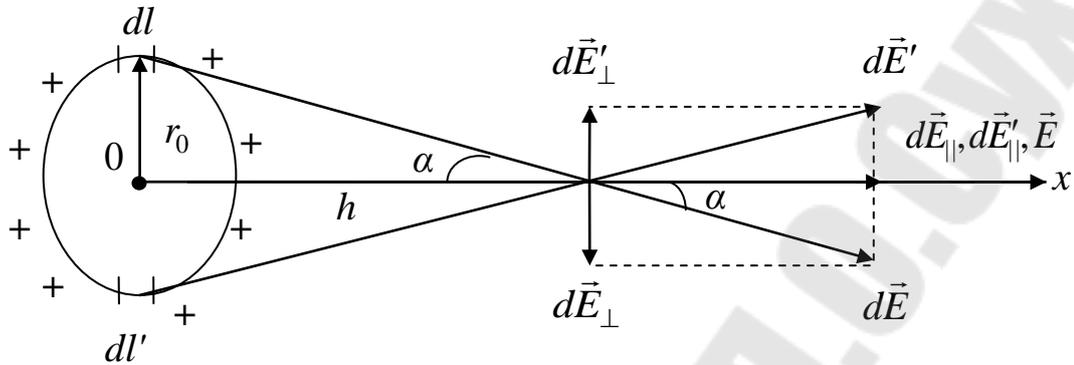


Рис. 1.8

Результирующая напряжённость  $\vec{E}$  направлена вдоль оси кольца. Модуль  $\vec{E}$  равен интегралу модулей всех:  $d\vec{E}_{||}$ :

$$E = \int_L dE_{||}.$$

Из рис. 1.8 видно, что  $dE_{||} = dE \cos \alpha$ . Выразим  $dE$  и  $\cos \alpha$ :

$$dE = \frac{|\tau| dl}{4\pi\epsilon_0 (r_0^2 + h^2)} \text{ и } \cos \alpha = \frac{h}{(r_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Следовательно, } dE_{||} = \frac{|\tau| dlh}{4\pi\epsilon_0 (r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Проинтегрируем последнее выражение по  $l$  в пределах от 0 до  $2\pi r_0$  и после сокращения на  $2\pi$ , получим:

$$E = \frac{|\tau| hr_0}{2\epsilon_0 (r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.22)$$

$$\text{Тогда } \vec{E} = \frac{|\tau| hr_0}{2\epsilon_0 (r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}. \quad (1.23)$$

В центре кольца ( $h = 0$ ) напряжённость получается равной нулю.

в) *Расчёт поля тонкого стержня равномерно заряженного по длине.* Пусть тонкий стержень длиной  $l$  (рис. 1.9) несёт равномерно распределённый по длине заряд с линейной плотностью  $\tau$ ,  $r_0$  рассто-

яние от стержня (в средней его части) до точки в которой рассчитывается напряжённость поля  $\vec{E}$ .

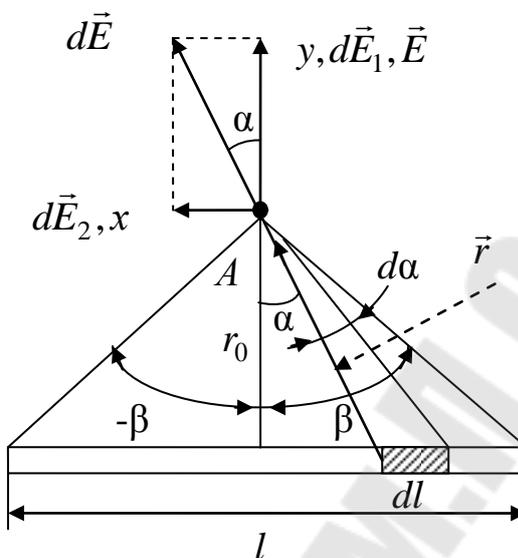


Рис. 1.9

Если выделить на стержне дифференциально малый участок  $dl$ , то находящийся на нем заряд  $dq = \tau dl$  можно рассматривать как точечный и тогда напряжённость поля в точке  $A$  будет равна:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Как следует из рисунка:

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha}; \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha},$$

где  $r_0$  - расстояние от стержня до точки  $A$ .

Тогда величина  $d\vec{E}$ :

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha.$$

С другой стороны:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 \text{ и } \vec{E} = \int d\vec{E}_1 + \int d\vec{E}_2, \quad (1.24)$$

где  $dE_1 = dE \cdot \cos \alpha$ ,  $dE_2 = dE \cdot \sin \alpha$  и тогда

$$dE_1 = \frac{\tau \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha, \text{ а } dE_2 = \frac{\tau \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha.$$

Интегрируя величины векторов  $d\vec{E}_1$  и  $d\vec{E}_2$  в пределах от  $-\beta$  до  $+\beta$  получим:

$$E_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{\tau \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos \alpha d\alpha = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left| \sin \alpha \right|_{-\beta}^{+\beta} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} |\sin \beta - \sin(-\beta)| = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cdot 2 \sin \beta \text{ и}$$

$$E_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{\tau \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left| \cos \alpha \right|_{-\beta}^{+\beta} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} |\cos \beta - \cos(-\beta)| = 0.$$

Тогда  $\vec{E} = \vec{E}_1 = \left( \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin \beta \right) \vec{j}$ , (1.25)

где  $\sin \beta = \frac{l}{2\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$ . Для стержня

бесконечной длины  $\beta = \pi/2$  и  $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \vec{j}$ . (1.26)

#### 1.4. Линии вектора напряжённости

Электрическое поле можно описать аналитически, задав уравнение, выражающее зависимость вектора напряжённости от координат:  $\vec{E} = \vec{E}(r)$ .

Электрическое поле можно изобразить графически с помощью линий вектора напряжённости (эти линии называются линиями поля или силовыми линиями) (рис. 1.10).

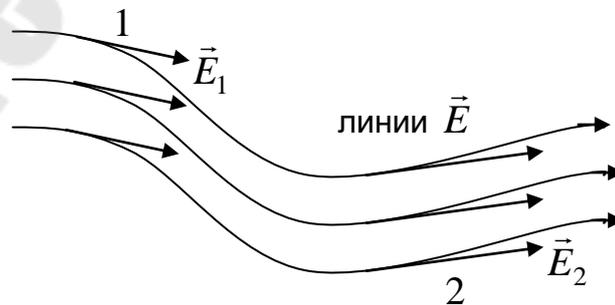


Рис. 1.10

Линия вектора напряжённости – это линия, проведённая в электростатическом поле так, что вектор напряжённости направлен по ка-

сательной к этой линии. Линиям  $\vec{E}$  приписывается направление, совпадающее с направлением  $\vec{E}$  в каждой точке поля.

С помощью линий  $\vec{E}$  можно охарактеризовать не только направление, но и модуль  $\vec{E}$ . Принято проводить линии  $\vec{E}$  с такой густотой, чтобы число их через единичное сечение, перпендикулярное к линиям, было равно или пропорционально модулю напряжённости в этом месте. Изображая картину поля, нужно заранее выбрать масштаб плотности его линий. Это лишний раз подчёркивает, что линии  $\vec{E}$  – лишь удобное наглядное изображение поля, но не более. Линии  $\vec{E}$  обладают следующими особенностями.

1. Линии  $\vec{E}$  электростатического поля всегда разомкнуты: они начинаются на положительных зарядах и обрываются на отрицательных. Линии могут так же уходить в бесконечность или приходить из бесконечности (рис. 1.11).

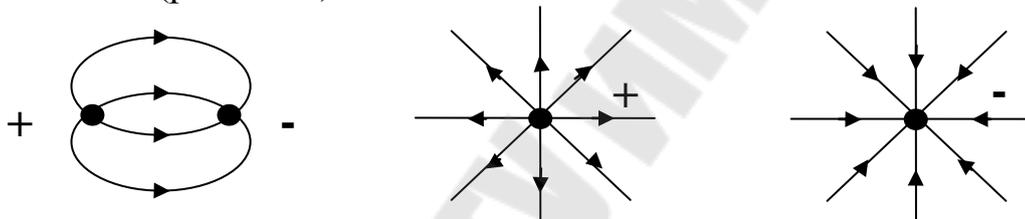


Рис. 1.11

То, что линии электростатического поля начинаются или обрываются на зарядах, означает, что заряды являются источниками такого поля.

2. Линии  $\vec{E}$  нигде не пересекаются. Это является следствием того, что напряжённость – однозначная характеристика поля: в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  имеет единственное направление. Если бы линии поля пересекались, то в точке пересечения можно было бы провести две касательные и, следовательно, в этой точке вектор  $\vec{E}$  имел бы два направления, что невозможно.

3. Линии  $\vec{E}$  однородного поля параллельны друг к другу и проходят с одинаковой густотой; линии неоднородного поля не параллельны.

4. Линии  $\vec{E}$  нельзя отождествлять с траекториями движения положительно заряженных частиц. Касательные к траектории указывают направление скорости, касательные к линиям  $\vec{E}$  – направление силовой линии (силы). В случае криволинейного движения направление силы и скорости не совпадает.

## 1.5. Поток вектора напряжённости

Расчёт электрического поля, основанный на непосредственном применении закона Кулона и принципа суперпозиции, – задача не-сложная принципиально, но, как правило, громоздкая математически. Для облегчения расчётов был разработан ряд вспомогательных методов и принципов. Один из таких приёмов основан на теореме Гаусса. Прежде, чем сформировать эту теорему введём понятие потока вектора напряжённости.

*Определение.* Элементарным потоком вектора напряжённости через элементарную площадку  $dS$ , ориентированную в электрическом поле произвольно, называется скалярная величина:

$$dN = \vec{E}d\vec{S}, \quad (1.27)$$

где  $\vec{E}$  – напряжённость в месте, где находится площадка;

$d\vec{S} = dS\vec{n}_0$  – вектор, численно равный площади поверхности  $dS$  и совпадающий по направлению с направлением единичного вектора  $\vec{n}_0$ , перпендикулярного к этой площадке (рис. 1.12).

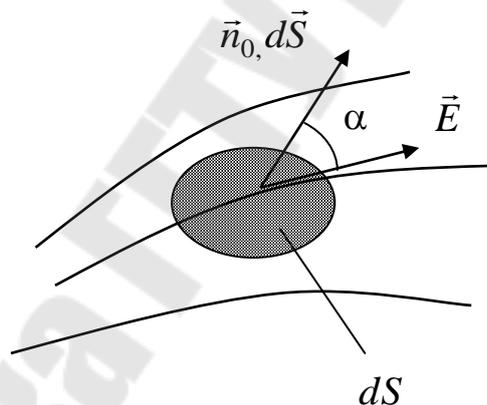


Рис. 1.12

Площадка  $dS$  должна быть столь малой, чтобы её можно было считать плоской, а напряжённость поля одинаковой во всех её точках. Чтобы найти поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$  (рис. 1.13), нужно проинтегрировать (1.27) по  $S$ :

$$N = \int_S \vec{E}d\vec{S}. \quad (1.28)$$

Если поверхность  $S$  – замкнутая, знак интеграла снабжается кружком:

$$N = \oint_S \vec{E}d\vec{S}. \quad (1.29)$$

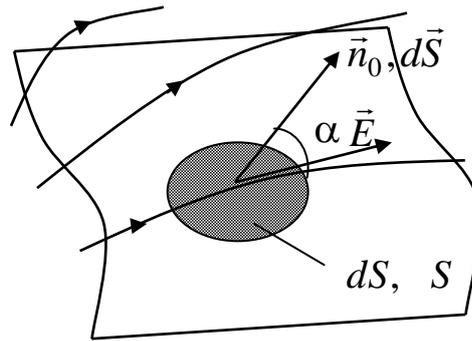


Рис. 1.13

В ряде случаев поток (1.29) вычисляется просто. Так, если поле однородно, а поверхность  $S$  плоская, то поток  $\vec{E}$  через эту поверхность равен:

$$N = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \cos \alpha = E \cos \alpha \int_S dS,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{n}_0$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  – величина алгебраическая. Знак потока зависит от выбора направлений нормалей к элементарным площадкам  $dS$ , на которые разбивается поверхность  $S$  (рис. 1.14). В случае замкнутых поверхностей (именно о таких поверхностях пойдёт речь при рассмотрении теоремы Гаусса) под нормалью к площадке  $dS$  следует понимать внешнюю нормаль, т. е. нормаль, обращённую наружу.

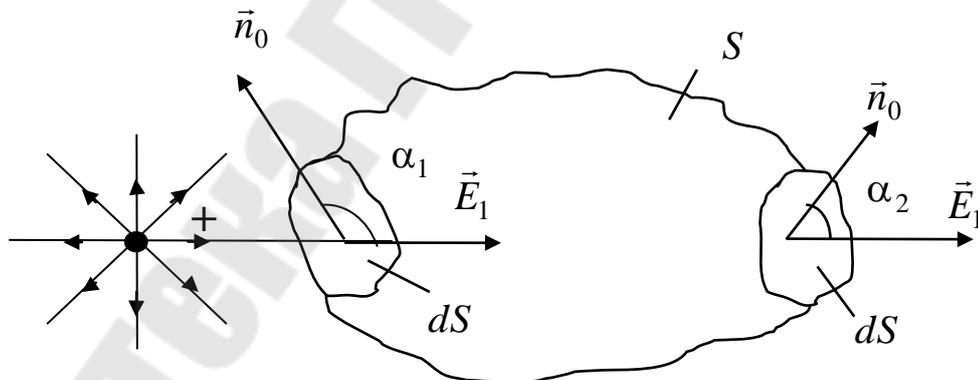


Рис. 1.14

При таком выборе направления нормали поток через площадку  $dS$  будет положительным, если угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{n}_0$  – острый (вектор  $\vec{E}$  направлен наружу, линии поля «выходят» из объёма, ограниченного поверхностью). Если же угол между внешней нормалью и направлением  $\vec{E}$  тупой, то поток будет отрицательным (вектор  $\vec{E}$  направлен внутрь объёма, линии  $\vec{E}$  «входят» в этот объём).

## 1.6. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса устанавливает связь между потоком вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность и суммарным электрическим зарядом, находящимся в объёме, ограниченном этой поверхностью.

Пусть электрическое поле создано в вакууме положительным зарядом  $q$ . Охватим этот заряд произвольной замкнутой поверхностью  $S$  (рис. 1.15) и вычислим поток  $\vec{E}$  через неё.

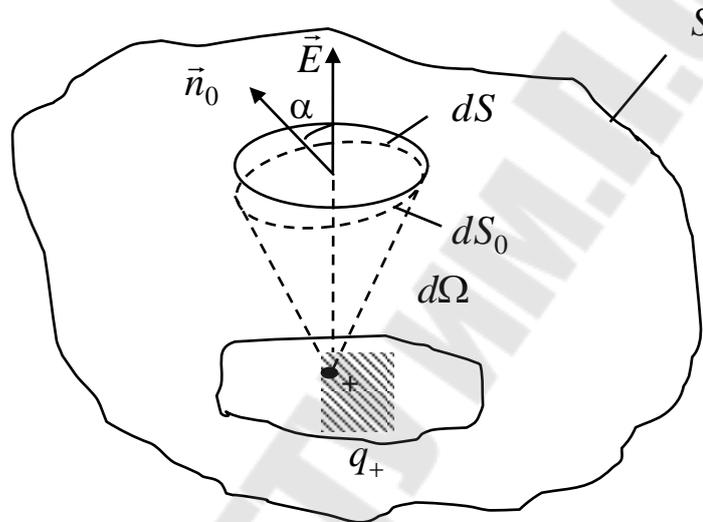


Рис. 1.15

Поток  $\vec{E}$  через элементарную площадку  $dS$ , нормаль к которой образует с  $\vec{E}$  угол  $\alpha$ , равен:

$$dN = E dS \cos \alpha = E dS_0, \quad (1.30)$$

где  $dS_0$  – проекция  $dS$  на плоскость, перпендикулярную к  $\vec{E}$  в том месте, где находится площадка  $dS$ . Площадка  $dS$  отстоит от заряда, создающего поле, на расстоянии  $r$ . Следовательно, модуль вектора напряжённости в том месте, где находится  $dS$ , равен:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.31)$$

Подставим (1.31) в (1.30):

$$dN = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS_0}{r^2}.$$

Площадка  $dS_0$  – элементарная. Её можно считать участком сферической поверхности радиуса  $r$ . Но тогда  $dS/r^2 = d\Omega$  телесный угол, под которым видна площадка  $dS$  из точки, в которой находится

заряд  $q$ .

Следовательно,

$$dN = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega. \quad (1.32)$$

Таким образом, мы перешли от переменной  $S$  к переменной  $\Omega$ . Проинтегрировав (1.32) по  $\Omega$  от 0 до  $4\pi$  (вся поверхность видна из точки, где находится заряд  $q$  под углом  $4\pi$ ), мы получим поток  $\vec{E}$  через поверхность  $S$ :

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.33)$$

Если поле образовано системой зарядов, то под  $q$  (1.33) следует понимать алгебраическую сумму зарядов, охватываемых поверхностью  $S$ :

$$q = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.34)$$

В случае, когда заряды, охватываемые поверхностью  $S$ , распределены непрерывно,  $q$  вычисляется по одной из формул:

$$q = \int_V \rho \cdot dV, \quad q = \int_S \sigma \cdot dS \quad \text{и} \quad q = \int_l \tau \cdot dl,$$

где  $\rho, \sigma, \tau$  – объёмная, поверхностная и линейная плотности зарядов;  $V, S, l$  – объем, поверхность, линия по которым распределены заряды, охватываемые поверхностью  $S$ .

Если замкнутая поверхность  $S$  не охватывает заряд, создающий поле, то поток  $\vec{E}$  через такую поверхность равен нулю.

Таким образом, теорема Гаусса утверждает, что поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой

поверхностью, делённой на  $\epsilon_0$ : 
$$N = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

## 1.7. Применение теоремы Гаусса к расчёту электрических полей

Как мы уже говорили, теорема Гаусса облегчает расчёт электрических полей. Заметим, однако, что она облегчает расчёт в том случае, если электрическое поле обладает симметрией и если вспомогательная замкнутая поверхность (её называют гауссовой) выбрана пра-

вильно: форма этой поверхности должна быть такой, чтобы её элементы  $dS$  были либо параллельны, либо перпендикулярны к линиям поля. Модули напряжённости на всех площадках, перпендикулярных к полю, должны быть одинаковы. Последнее достигается выбором поверхности, симметричной относительно заряда, попадающего внутрь поверхности. Схема расчёта поля на основе теоремы Гаусса такова. В зависимости от «формы» поля выбирают симметричную гауссову поверхность, причём так, чтобы точка, в которой рассчитывается  $\vec{E}$ , принадлежала этой поверхности. Вычисляют поток  $\vec{E}$  через эту поверхность (в основе вычисления лежит только определение потока  $\vec{E}$ ). Далее находят заряд, охватываемый гауссовой поверхностью. Выражение для потока  $\vec{E}$  через гауссову поверхность приравнивается охватываемому поверхностью заряду, делённому на  $\epsilon_0$ . Составленное равенство решают относительно  $\vec{E}$ . Рассмотрим примеры:

*а) Поле равномерно заряженной проводящей сферы.* Пусть  $r_0$  – радиус сферы (рис. 1.16),  $S_0$  – площадь её поверхности,  $q$  – заряд сферы и  $r$  – расстояние от центра сферы до точки, в которой нужно найти напряжённость поля ( $r > r_0$ ).

Электрическое поле равномерно заряженной сферы симметрично относительно её центра; значит, геометрическое место точек, в которых модули напряжённости одинаковы, представляют собой также сферу, центр которой совпадает с центром заряженной сферы. Следовательно, в качестве гауссовой поверхности следует выбрать сферу радиуса  $r$ . Во всех точках этой сферы вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к её поверхности и поток  $\vec{E}$  равен:

$$|N| = ES$$

Площадь поверхности сферы равна:

$$S = 4\pi r^2.$$

Поток получается равным:

$$|N| = E4\pi r^2. \quad (1.36)$$

Внутри гауссовой сферы попадает весь заряд  $q$ , создающий поле. По теореме Гаусса:

$$|N| = \frac{|q|}{\epsilon_0}. \quad (1.37)$$

Приравняв правые части (1.36) и (1.37) получим:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.38)$$

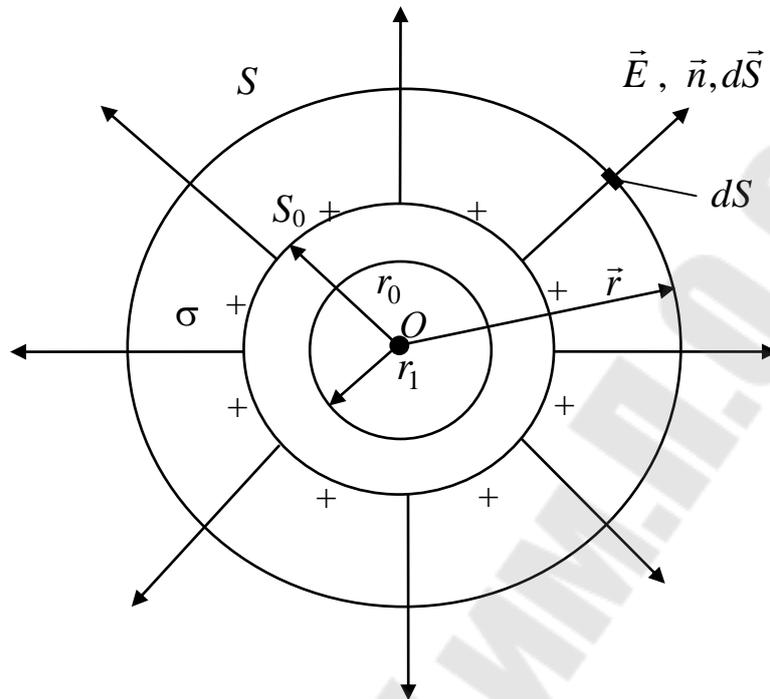


Рис. 1.16

Напряжённость поля в точках, лежащих на заряженной сфере ( $r = r_0$ ), равна:

$$E_0 = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}. \quad (1.39)$$

Сравнивая (1.38) и (1.39) с полем точечного заряда, мы видим, что электрическое поле, равномерно заряженной сферы таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре сферы.

Поток  $\vec{E}$  через гауссову сферу  $S_1$  радиуса  $r_1$ , меньшего, чем  $r_0$ , равен 0, так как внутри этой сферы нет зарядов, все они, по условию задачи, распределены по поверхности  $S_0$ :  $N = ES_1$ .

Из этого соотношения следует, что во всех точках поверхности  $S_1$  напряжённость поля  $\vec{E}$  равна 0. Таким образом, в точках, для которых  $r < r_0$  электрическое поле отсутствует. Рис. 1.17 поясняет это, здесь изображена зависимость  $E = E(r)$ , где  $r$  – расстояние от центра заряженной сферы до данной точки.

При переходе через заряженную поверхность  $S_0$  напряжённость поля скачком изменяется от нуля до  $E_0 = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$ .

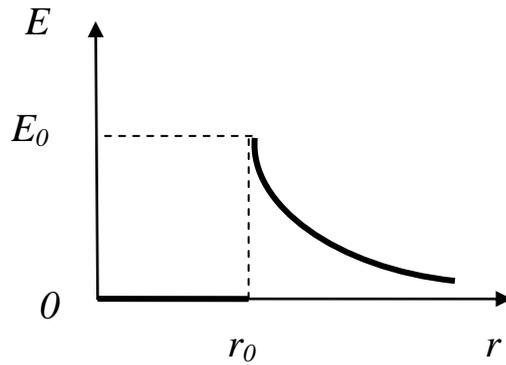


Рис. 1.17

б) Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Пусть  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда плоскости (рис. 1.18). Для определённости заряд плоскости будем считать положительным. Найдём поле в точке  $P$  на расстоянии  $r$  от плоскости.

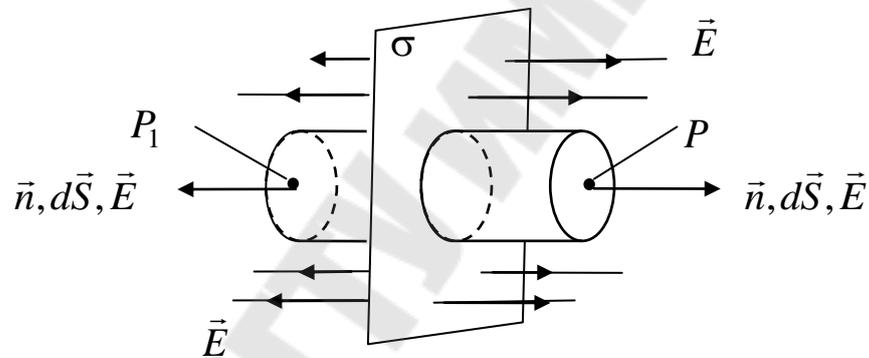


Рис. 1.18

Электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости симметрично относительно её поверхности, вследствие симметрии, линии  $\vec{E}$  идут в обе стороны от плоскости, перпендикулярно к ней. В точках  $P$  и  $P_1$ , расположенных по обе стороны от плоскости на одинаковых расстояниях, векторы напряжённости должны иметь одинаковые модули, но противоположные направления. Следовательно, гауссовой поверхностью может служить цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны линиям поля, а основания, которой отстоят от плоскости на одинаковых расстояниях  $r$ . Полный поток  $\vec{E}$  через эту поверхность определяется потоком через основания  $S$  цилиндра площадью  $S$ :

$$|N| = ES + ES = 2ES. \quad (1.40)$$

Поток через боковую поверхность равен нулю, так как вектор  $\vec{E}$

параллелен этой поверхности ( $\cos(\vec{E} \hat{n}) = 0$ ). Внутри цилиндра попадает заряд:  $q = \sigma S$ . (1.41)

По теореме Гаусса:

$$|N| = \frac{|q|}{\epsilon_0} = \frac{|\sigma|S}{\epsilon_0}. \quad (1.42)$$

Приравняв правые части (1.40) и (1.42), получим:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}. \quad (1.43)$$

Мы видим, что величина  $\vec{E}$  не зависит от расстояния до плоскости.

в) Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей. Пусть поверхностные плотности зарядов плоскостей 1 и 2 равны по модулю и противоположны по знаку  $\sigma_+ = \sigma_-$  (рис. 1.19).

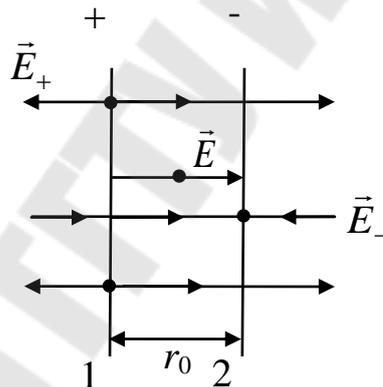


Рис. 1.19

Результирующее поле, создаваемое обеими плоскостями, найдём, основываясь на принципе суперпозиции. Положительно заряженная плоскость создаёт поле с напряжённостью, модуль которой равен:

$$E_+ = \frac{|\sigma_+|}{2\epsilon_0}.$$

Отрицательно заряженная плоскость создаёт поле с напряжённостью, модуль которой равен:

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0},$$

так как  $|\sigma_+| = |\sigma_-|$ , то и  $E_+ = E_-$

В пространстве между плоскостями поля  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  имеют одинаковые направления, поэтому модуль результирующей напряжённости здесь равен сумме модулей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ .

$$E = E_+ + E_- = \frac{|\sigma_+|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}, \quad (1.44)$$

где  $|\sigma|$  – абсолютная величина поверхностной плотности заряда любой из плоскостей.

В пространстве вне плоскостей поля  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  имеют противоположные направления, поэтому, при наложении они взаимно компенсируют друг друга. Модуль результирующей напряжённости здесь равен разности модулей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ ,

$$E_{\text{вне}} = E_+ - E_- = 0.$$

Таким образом, поле оказывается отличным от нуля только в пространстве между плоскостями. Рисунок 1.20 изображает график зависимости напряжённости поля двух заряженных плоскостей, в пространстве между ними и вне.

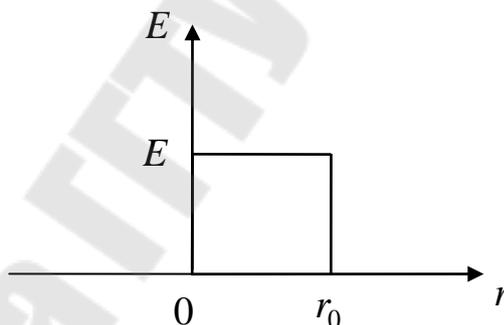


Рис. 1.20

г) *Поле равномерной бесконечно заряженной прямой нити.* Пусть  $\tau$  – линейная плотность заряда нити. Для определённости будем считать заряд нити положительным. Найдём поле в точке  $P$  на расстоянии  $r$  от нити (толщиной нити пренебrecь). Рассматриваемое электрическое поле симметрично относительно нити (рис. 1.21). Из симметрии следует, что линии  $\vec{E}$  – суть радиальные прямые, перпендикулярные к нити. Геометрическим местом точек, в которых модули  $\vec{E}$  одинаковы, является боковая часть цилиндрической поверхности. Следовательно, в качестве гауссовой поверхности следует выбирать цилиндрическую поверхность, радиусом  $r$  и высотой  $h$ , коаксиальную с нитью.

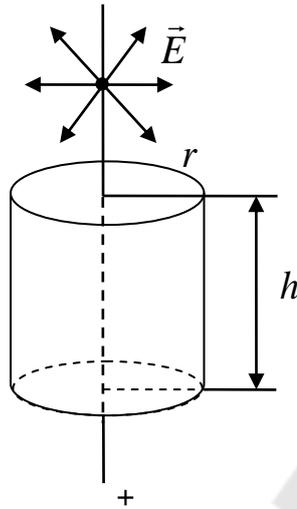


Рис. 1.21

Поток  $\vec{E}$  через эту поверхность складывается из потока через боковую поверхность и основания. Поток через боковую поверхность:

$$|N| = E2\pi rh, \quad (1.45)$$

а потоки  $\vec{E}$  через основания цилиндра равны нулю, так как основания параллельны линиям  $\vec{E}$ . Гауссова поверхность отсекает заряд:

$$q = \tau h.$$

По теореме Гаусса:

$$|N| = \frac{|q|}{\epsilon_0} = \frac{|\tau|h}{\epsilon_0}. \quad (1.46)$$

Приравняв выражения для  $|N|$ , получим: 
$$E = \frac{|\tau|}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.47)$$

Таким образом, поле бесконечной равномерно заряженной прямой нити (поле линейного заряда) обратно пропорционально расстоянию от нити. Формула (1.47) справедлива и для бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра, для точек вне цилиндра. На рис. 1.22 приведён график зависимости  $E = E(r)$  для такого цилиндра радиусом  $r_0$ .

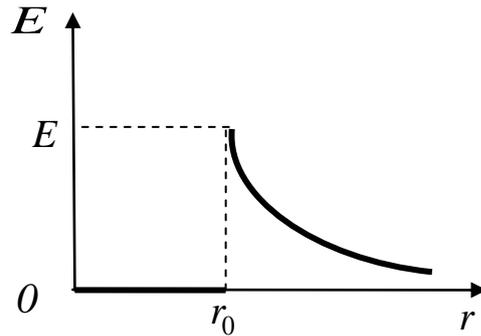


Рис. 1.22

### 1.8. Работа сил электростатического поля. Циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Напомним, сила называется консервативной, если совершаемая ею работа не зависит от формы пути, по которому происходит перемещение точки приложения силы. Пусть точечный заряд  $q'$  перемещается по произвольному пути  $S_{12}$  из положения  $\vec{r}_1$ , в положение  $\vec{r}_2$  в электростатическом поле, созданном другим точечным зарядом  $q$  (рис. 1.23). Элементарная работа, совершаемая при перемещении заряда  $q'$  на  $d\vec{r}$ , равна:  $dA = \vec{F}' d\vec{r}$ .

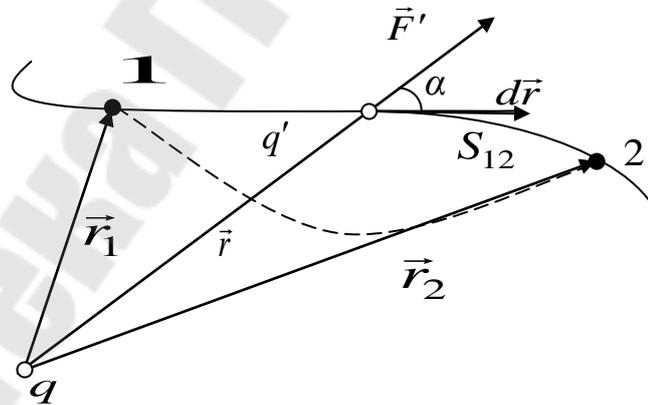


Рис. 1.23

Сила, действующая на заряд  $q'$  равна:

$$\vec{F}' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \text{ где } \vec{r} \text{ – радиус – вектор, проведённый от } q \text{ к } q'.$$

Подставив выражение для в формулу и воспользовавшись тем обстоятельством, что скалярное произведение вектора на его элементарное

приращение равно произведению модуля вектора на элементарное приращение модуля, получим:

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} d\vec{r} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr. \quad (1.48)$$

Проинтегрировав (1.48) по  $r$  от  $r_1$ , до  $r_2$  получим работу на участке 1, 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (1.49)$$

Мы видим, что работа сил электростатического поля зависит от заряда  $q$ , создающего поле, от перемещаемого заряда  $q'$  расстояний  $r_1$  и  $r_2$ , от заряда  $q$  до начальной и конечной точек пути, но не зависит от длины и формы пройденного пути  $S_{12}$  (в (1.49) отсутствуют величины, характеризующие форму пути). Если бы перемещение заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2 происходило по другому пути (на (рис. 1.23) этот путь изображён пунктирной линией), то работа всё равно была бы равна (1.49).

Полученный результат нетрудно обобщить на случай поля созданного любой совокупностью неподвижных зарядов. В самом деле, любую систему зарядов можно представить в виде суммы точечных зарядов. Тогда работа перемещения заряда, в результирующем поле будет равна сумме работ в полях отдельных точечных зарядов (это вытекает из принципа суперпозиции). Так как работа в поле каждого заряда, не зависит от формы пути, то от формы пути не зависит и полная работа.

Таким образом, работа сил электростатического поля не зависит от формы пути. Следовательно, электростатические, кулоновские, силы консервативны, а их материальный носитель – электростатическое поле потенциально.

Независимость работы сил электростатического поля от формы пути является признаком потенциальности этого поля. Это условие можно сформулировать несколько иначе, введя понятие о циркуляции вектора напряжённости. Из (1.49) следует, что работа сил электростатического поля при перемещении заряда по некоторому замкнутому пути  $L$  равна нулю (рис. 1.24). В самом деле, если точечный заряд  $q'$  перемещается из точки 1 в точку 2 по одному пути, например  $1b2$ , а затем снова возвращается, по уже другому пути  $2c1$ ,

то согласно (1.49), работы, совершаемые на этих участках, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку:  $A_{1b2} = -A_{2c1}$ .

Отсюда следует, что полная работа  $A$ , совершаемая при перемещении заряда по замкнутому пути  $L_{1b2c1}$ , равна нулю:

$$A_{1b2} + A_{2c1} = 0.$$

Эту работу можно выразить обычным образом - через интеграл элементарных работ:  $A = \oint_L dA$ , где интегрирование производится по замкнутому контуру  $L$ .

Элементарная работа равна:  $dA = \vec{F}'d\vec{l} = q'\vec{E}d\vec{l}$ , где  $\vec{E}$  – напряжённость поля.

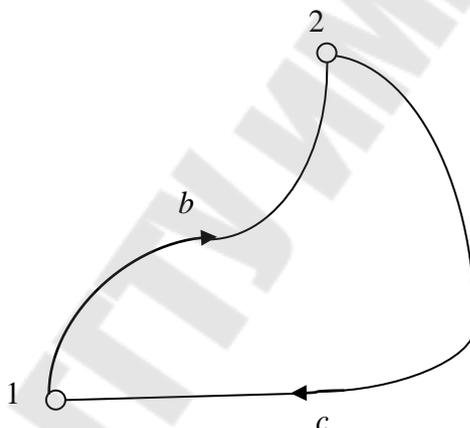


Рис. 1.24

Таким образом,  $\oint_L q'\vec{E}d\vec{l} = 0$ , или после сокращения на  $q'$  ( $q' \neq 0$ ):

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (1.50)$$

Интеграл (1.50) называется циркуляцией вектора напряжённости. Таким образом, циркуляция вектора напряжённости электростатического поля равна нулю.

### 1.9. Потенциал электростатического поля

Будем исследовать с помощью пробного заряда  $q_+$  энергетическое состояние электростатического поля. Пробный заряд

и заряд, создающий электростатическое поле, обладают взаимной потенциальной энергией. Потенциальная энергия  $W$  пробного заряда внесённого в данную точку поля, зависит как от величины пробного заряда, так и от свойств поля в этой точке.

Энергия же, отнесённая к единице пробного заряда  $\frac{W}{q_+}$  зависит от того, в какую точку поля помещён пробный заряд. Следовательно, величина  $\frac{W}{q_+}$  может служить характеристикой поля в данной точке.

Эта величина называется потенциалом электростатического поля. Потенциал электростатического поля в данной точке – скалярная физическая величина, характеризующая энергетическое состояние поля в этой точке и равная потенциальной энергии, которой обладал бы единичный точечный положительный заряд, помещённый в эту точку:

$$\varphi = \frac{W}{q_+}. \quad (1.51)$$

Из формулы (1.51) следует, что потенциальная энергия точечного заряда  $q$  помещённого в точку поля с потенциалом  $\varphi$ , равна:

$$W = q\varphi. \quad (1.52)$$

Из механики известно, что если сила стационарна и консервативна то работа этой силы равна убыли потенциальной энергии того тела, к которому эта сила приложена. Электростатические силы стационарны и консервативны. Следовательно, их работа равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда:

$$A_{12} = W_1 - W_2,$$

но согласно (1.52)  $W_1 = q\varphi_1$ ,  $W_2 = q\varphi_2$ , следовательно:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.53)$$

Таким образом, работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Как и потенциальная энергия, потенциал определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора нулевого уровня потенциала.

Нулевой уровень потенциала, начало отсчёта  $\varphi$  – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю.

Нулевой уровень потенциала может быть выбран в бесконечности, на поверхности Земли и, вообще говоря, где угодно. При перемещении заряда  $q_+$  из точки с потенциалом  $\varphi$  в точку с нулевым потенциалом силы поля совершают работу

$$A_{\varphi,0} = q_+(\varphi - 0) = q_+\varphi. \quad (1.54)$$

Из (1.54) следует:

$$\varphi = \frac{A_{\varphi,0}}{q_+}. \quad (1.55)$$

Потенциал данной точки поля относительно некоторого уровня численно равен работе, совершаемой силами электростатического поля при перемещении единичного точечного положительного заряда из данной точки в точку этого уровня.

Говоря о потенциале поля в какой – либо точке, следует обязательно указывать, относительно какого уровня определён этот потенциал. Потенциал – величина алгебраическая. Потенциал данной точки положителен, если потенциальная энергия положительного точечного заряда, помещённого в эту точку, положительна, или что тоже самое, при перемещении этого заряда на нулевой уровень потенциала силы поля совершают положительную работу.

Из формулы,  $W = q\varphi$  видно, что знак потенциальной энергии положительного заряда совпадает, а отрицательного противоположен знаку потенциала той точки поля, в которую заряд помещён.

Если поле создано системой зарядов, то потенциал результирующего поля в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом системы в отдельности (принцип суперпозиции).

Если поле создано системой точечных зарядов, потенциал результирующего поля равен:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i, \quad (1.56)$$

где  $\varphi_i$  - потенциал создаваемый зарядом  $q_i$ . Если поле создано непрерывно распределённым зарядом, то потенциал этого поля равен интегралу:

$$\varphi = \int d\varphi, \quad (1.57)$$

где  $d\varphi$  – потенциал, создаваемый отдельной порцией заряда  $dq$ .

В электростатическом поле можно провести не только линии вектора напряжённости, но и построить эквипотенциальные поверхности. *Эквипотенциальная поверхность* – поверхность, все точки которой имеют один и тот же потенциал. Эквипотенциальные поверхности обладают следующими свойствами:

1. Работа при перемещении заряда между любыми двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \text{ так как } \varphi_1 = \varphi_2.$$

2. Вектор  $\vec{E}$  и его линия перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Элементарная работа перемещения вдоль эквипотенциальной поверхности равна:

$$dA = \vec{E}d\vec{r} = |q||E||dr|\cos\alpha = 0,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{E}$  и  $d\vec{r}$ , т.е. между  $\vec{E}$  и элементом потенциальной поверхности. Работа при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю, так как при  $|q| \neq 0, |E| \neq 0, |dr| \neq 0 - \cos\alpha = 0 (\alpha = \frac{\pi}{2})$ .

На рисунке 1.25 изображены линии напряжённости (сплошные линии) и сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа (пунктиры) поля бесконечно равномерно заряженной плоскости.

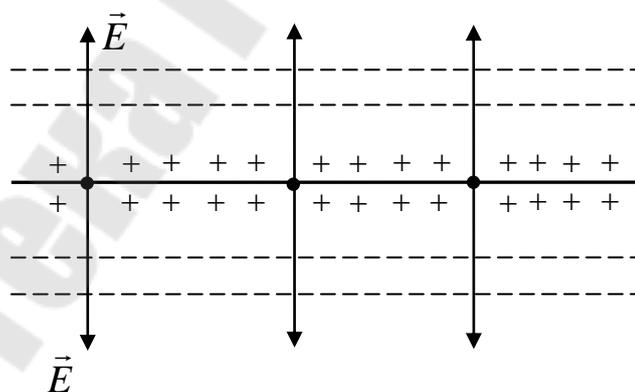


Рис. 1.25

### 1.10. Связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля

Электростатическое поле в каждой своей точке может быть задано либо с помощью вектора напряжённости (силовое описание),

либо с помощью потенциала (энергетическое описание). Ясно, что между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  должна существовать связь. Установим эту связь. Рассмотрим в неоднородном электростатическом поле две бесконечно близкие точки 1 и 2, лежащих на оси  $x$  (рис. 1.26). Потенциал точки 1 равен  $\varphi$ , потенциал точки 2 равен  $\varphi + d\varphi$ . При перемещении заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 силы поля совершают работу.

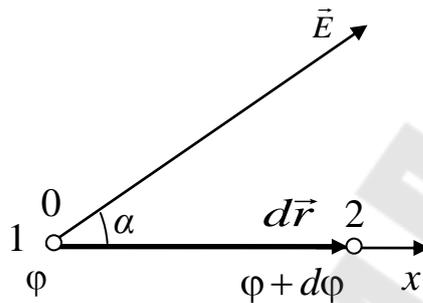


Рис. 1.26

Эта работа может быть выражена двояким образом:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = qE dx \cos \alpha = qE_x dx \quad (1.58)$$

$$\text{и } dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -qd\varphi. \quad (1.59)$$

Приравняв правые части (1.58) и (1.59) и сократив на  $q$  получим:

$$E_x dx = -d\varphi \text{ и } E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (1.60)$$

Производная  $\frac{d\varphi}{dx}$  — характеризует быстроту изменения потенциала вдоль оси  $x$ . Так как потенциал может изменяться не только вдоль оси  $x$ , но и вдоль оси  $y$  и  $z$ , то следует писать частную производную:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (1.61)$$

Проекция  $\vec{E}$  на оси  $y$  и  $z$  равны соответственно:

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.62)$$

$$\text{и } E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.63)$$

Как известно для нахождения вектора по его проекциям необходимо каждую из проекций умножить на единичный вектор соответствующей оси и затем сложить полученные векторы:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (1.64)$$

Подставив в (1.64) выражения (1.61) – (1.63), получим:

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.65)$$

Векторная величина, стоящая в правой части (1.65), называется градиентом потенциала и обозначается  $\text{grad}\varphi$ :

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.66)$$

Направление  $\text{grad}\varphi$  – это направление, по которому вектор  $\text{grad}\varphi$  имеет наибольшую положительную проекцию. Но проекция  $\text{grad}\varphi$  на данное направление быстроту изменения  $\varphi$  вдоль этого направления. Если проекция положительна, то  $\varphi$  по этому направлению возрастает. Следовательно,  $\text{grad}\varphi$  имеет направление, по которому потенциал с наибольшей быстротой возрастает.

Таким образом, градиент потенциала – это вектор, направленный в сторону быстреего возрастания: потенциала и численно равный приращению потенциала на единицу длины этого направления. Учитывая обозначение градиента  $\varphi$  получим:

$$\vec{E} = - \text{grad}\varphi. \quad (1.67)$$

Напряжённость в каждой точке электростатического поля равна по абсолютной величине и противоположна по направлению градиенту потенциала в этой же точке (рис. 1.27). В направлении  $\vec{E}$  потенциал с наибольшей быстротой уменьшается.

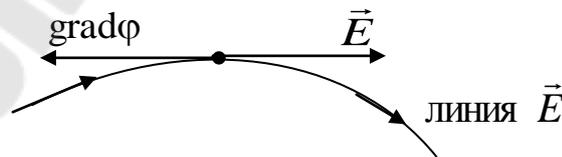


Рис. 1.27

Модуль градиента потенциала равен  $|d\varphi/dr|$ . Таким же будет и модуль вектора напряжённости:

$$|\vec{E}| = \left| \frac{d\phi}{dr} \right|. \quad (1.68)$$

Если поле однородно, то напряжённость численно равна абсолютной величине разности потенциалов, приходящейся на единицу длины линии поля:

$$|\vec{E}| = \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{|\Delta r|} = \frac{|U_{12}|}{d}, \quad (1.69)$$

где  $|\Delta \vec{r}| = d$  – расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , отсчитанное вдоль линии поля, а  $|\phi_1 - \phi_2| = |U_{12}|$  – абсолютная величина разности потенциалов.

### 1.11. Расчёт потенциала и разности потенциалов в электрическом поле

*Порядок расчёта потенциала.* Как известно из механики, потенциальная энергия тела определяется по действующей на него консервативной силе  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  неопределённым интегралом:

$$W(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + C, \quad (1.70)$$

где  $d\vec{r}$  – элементарное приращение радиуса – вектора  $\vec{r}$  (перемещение точки приложения силы);  $C$  – произвольная постоянная.

Подставив (1.70) в выражение для потенциала (1.51) и учитывая, что  $\frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_+} = \vec{E}(\vec{r})$  – напряжённость поля, получим расчётную формулу

для потенциала:

$$\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) + C. \quad (1.71)$$

Найдём, пользуясь (1.71), потенциал поля точечного заряда. Согласно (1.9):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \text{ следовательно,}$$

$$\phi(\vec{r}) = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} d\vec{r} + C = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C, \quad (1.72)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Примем  $C = 0$ . Это означает, что за нулевой уровень потенциала выбрана бесконечность. Таким образом, потенциал поля точечного заряда относительно бесконечности получается равным:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.73)$$

Обратим внимание на то, что потенциал поля точечного заряда является функцией не радиуса – вектора  $\vec{r}$ , а просто расстояния  $r$  от заряда, до рассматриваемой точки. Следовательно, один и тот же потенциал имеет бесчисленное множество точек, равностоящих от заряда, создающего поле. Данную же напряжённость в поле точечного заряда имеет одна единственная точка. Формулой (1.73) можно воспользоваться для вычисления потенциала полей, созданных системой точечных или протяжённых зарядов.

Если поле создано системой точечных зарядов, то сначала по (1.73) находят потенциалы, создаваемые в данной точке отдельными зарядами, после чего суммируют все потенциалы:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (1.74)$$

Если заряд, создающий поле распределён непрерывно, то его разбивают на малые порции  $dq$ , определяют потенциал, создаваемый в данной точке такой порцией:  $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

После чего интегрируют:

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.75)$$

*Примеры расчёта потенциала.*

1. Найдём потенциал (относительно бесконечности) поля электрического диполя.

По принципу суперпозиции:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \quad (1.76)$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  потенциалы, создаваемые в рассматриваемой точке положительным и отрицательным зарядом.

Согласно (1.73):

$$\varphi_+ = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{и} \quad (1.77)$$

$$\varphi_- = -\frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r_1}, \quad (1.78)$$

где  $|q|$  – абсолютная величина заряда,  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от отрицательного и положительного зарядов диполя до точки, в

которой определяется потенциал. Подставив (1.77), (1.78) в (1.76) получим:

$$\varphi = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \quad (1.79)$$

Найдём потенциал поля диполя в точке, отстоящей от диполя на расстоянии, значительно превышающем размеры диполя (рис. 1.28):  $r \gg l$ . Тогда приближённо можно считать, что:  $r_1 \approx r \approx r_2$ ,  $\alpha_1 \approx \alpha \approx \alpha_2$ ,  $r_1 - r_2 \approx l \cos \alpha$ ,  $r_1 \cdot r_2 \approx r^2$ , где  $\alpha$  – угол между направлением плеча, диполя и направлением к точке наблюдения.

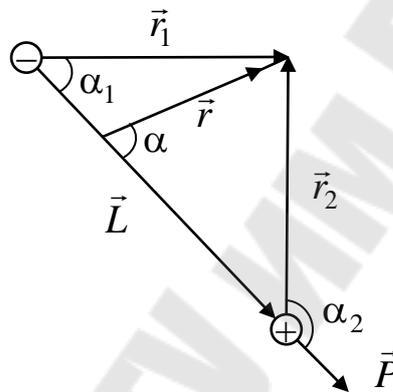


Рис. 1.28

Подставив последние соотношения в (1.79) и учитывая, что  $|ql|$  – модуль электрического момента диполя, получим:

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos a. \quad (1.80)$$

Таким образом, потенциал поля электрического диполя: пропорционален электрическому моменту и косинусу угла, между плечом диполя и радиус – вектором  $\vec{r}$  и обратно пропорционален квадрату расстояния от диполя до точки наблюдения.

2. Потенциал поля созданного равномерно заряженным тонким кольцом. Радиус кольца  $r_0$  и линейная плотность зарядов  $\tau$  (рис. 1.29). Найдём потенциал относительно бесконечности в точке  $P$  на оси кольца, на расстоянии  $h$  от его центра.

Потенциал, создаваемый в точке  $P$  зарядом элемента кольца  $dl$  равен:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.81)$$

где  $r = \sqrt{r_0^2 + h^2}$  – расстояние от элемента  $dl$  до точки  $P$ .

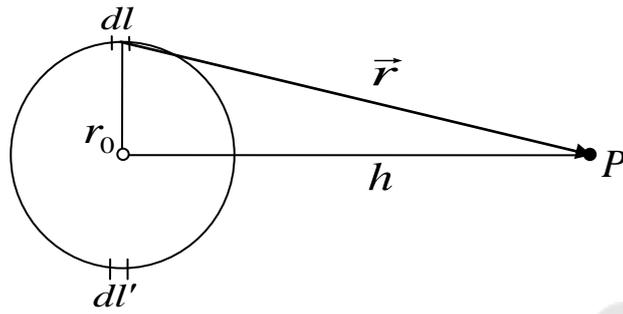


Рис. 1.29

При интегрировании (1.81) учтём, что все элементы кольца находятся от точки  $P$  на одинаковых расстояниях, поэтому интегрировать будем по  $l$  от 0 до  $2\pi r_0$ :

$$\varphi = \int_0^{2\pi r_0} \tau dl / 4\pi\epsilon_0 \sqrt{r_0^2 + h^2} = \tau r_0 / 2\epsilon_0 \sqrt{r_0^2 + h^2}. \quad (1.82)$$

В центре кольца ( $h = 0$ ) потенциал получается равным:

$$\varphi_0 = \frac{\tau}{2\epsilon_0}. \quad (1.83)$$

*Порядок расчёта разности потенциалов.*

Для расчёта разности потенциалов воспользуемся связью потенциала с напряжённостью электростатического поля. Из (1.71) следует, что приращение потенциала при перемещении на расстоянии  $dr$  равно:

$$d\varphi = -\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}. \quad (1.84)$$

Проинтегрировав (1.84) по  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$  ( $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  – радиус-векторы начальной 1 и конечной 2 точек), найдём разность потенциалов между точками 1 и 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}. \quad (1.85)$$

*Примеры расчёта разности потенциалов.*

1. Найдём разность потенциалов между двумя разноимённо заряженными бесконечными плоскостями (рис. 1.30).

Поверхностные плотности зарядов плоскостей одинаковы по абсолютной величине:  $|\sigma_+|$  и  $|\sigma_-|$ ; расстояние между плоскостями  $r_0$ ;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – потенциалы плоскостей 1 и 2. Согласно (1.85),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Поле в пространстве между плоскостями равно:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.86)$$

где  $\vec{r}$  – радиус – вектор, проведённый точке от плоскости 1 к плоскости 2 перпендикулярной ней. Подставим (1.86) в выражение для разности потенциалов, а затем интегрируем по  $r$  от 0 до  $r_0$ , получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{r_0} \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r} = \int_0^{r_0} \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} dr = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} r_0. \quad (1.87)$$

Таким образом, разность потенциалов между двумя бесконечными плоскостями пропорциональна расстоянию между плоскостями.

Так как во всем пространстве за плоскостями поле равно нулю ( $E = 0$ ), то из (1.87) следует, что во всех точках слева от плоскости 1 потенциал одинаков и равен  $\varphi_1$ . На том же основании потенциал одинаков и равен  $\varphi_2$  во всех точках, лежащих правее плоскости 2. Ход  $\varphi = \varphi(r)$  изображён на рисунке 1.30. За нуль потенциала принят потенциал плоскости 2. В пространстве между плоскостями происходит падение потенциала.

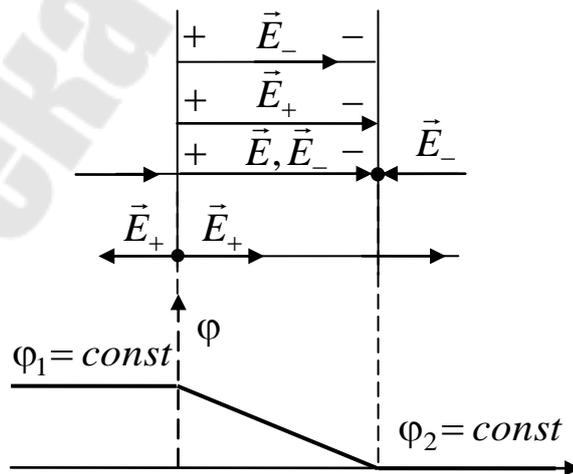


Рис. 1.30

2. Найдём разность потенциалов между двумя концентрическими сферами радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , равномерно

заряженными по поверхности (рис. 1.31).

Согласно (1.86):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Поле в пространстве между сферами создаётся только зарядом внутренней сферы. Напряжённость в произвольной точке N равна:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (1.88)$$

где  $q$  – заряд внутренней сферы;  $\vec{r}$  – радиус – вектор, проведённый в точку  $P$  из центра сфер. Интегрируем по  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}. \quad (1.89)$$

Если заряды сфер равны по модулю и противоположны по знаку, то электрическое поле отлично от нуля только в пространстве между сферами. Отсутствие поля внутри малой сферы вытекает из условия равновесия зарядов.

За пределами внешней сферы суммарное поле в этом случае равно нулю, так как напряжённости полей, создаваемых зарядами внутренней и внешней сфер, равны по модулю и противоположны по направлению.

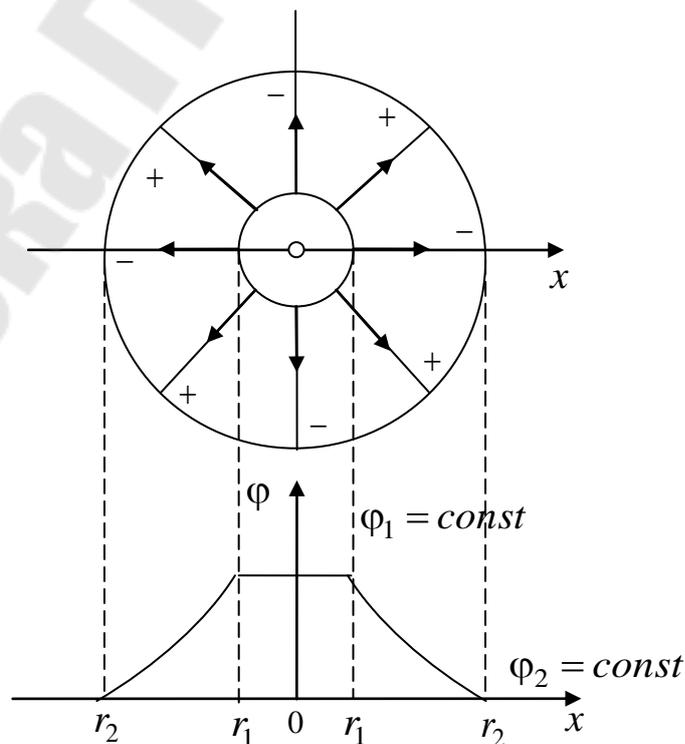


Рис. 1.31

Из связи напряжённости с потенциалом следует, что потенциалы всех точек, лежащих внутри меньшей сферы, одинаковы и равны  $\varphi_1$ , потенциалы всех точек, лежащих за пределами большей сферы, также одинаковы и равны  $\varphi_2$ . Между сферами происходит падение потенциала (от внутренней сферы к внешней, если заряд внутренней сферы положителен). График  $\varphi = \varphi(r)$  приведён на рисунке 1.31. Потенциал внешней сферы принят равным нулю.

Напряжённость поля в пространстве между двумя концентрическими сферами не зависит ни от радиуса, ни от заряда внешней сферы. Разность потенциалов между этими сферами зависит от их радиусов, опять – таки не зависит от заряда внешней сферы. Следовательно, внешняя сфера может быть, и не заряжена: на разности потенциалов это никак не скажется. Для чего же обычно заряжают внешнюю сферу, да ещё и зарядом, равным по модулю и противоположным по знаку заряду внутренней сферы? Только для того, чтобы скомпенсировать во внешнем пространстве поле, созданное зарядом внутренней сферы.

## **Глава 2. Электрическое поле в диэлектриках**

### **2.1. Проводники, диэлектрики, полупроводники**

В зависимости от способности проводить электрический ток все вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Проводники – это вещества, хорошо проводящее электрический ток. В таких веществах имеются свободные носители заряда, концентрация которых может достигать  $10^{29}$ . Проводниками являются металлы, электролиты, расплавы, ионизированные газы плазма и т. д.

Диэлектрики – это вещества, плохо проводящие электрический ток (в данной главе рассматриваются электрические свойства диэлектриков). При не слишком высоких температурах и при не очень сильных полях диэлектрики проводят ток в  $10^{15} - 10^{20}$  раз хуже, чем проводники. Свободных носителей заряда в диэлектриках почти нет. Диэлектриками являются газы при обычных условиях, многие чистые жидкости, фарфор, мрамор и др.

Полупроводники – это проводники, которые по своей способности проводить электрический ток занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Полупроводниками яв-

ляются химически чистые элементы (кремний, германий, селен и др.)

## 2.2. неполярные и полярные молекулы

Как известно, молекулы построены из атомов. Атом состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов, обращающихся вокруг ядра. В отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов молекулы либо совпадают, либо не совпадают. Молекула, у которой центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего поля совпадают (электрический момент молекулы равен нулю), называется неполярной.

Диэлектриками с неполярными молекулами являются водород, кислород, азот, благородные газы (гелий, неон, аргон), метан, полиэтилен, полистирол и др. Молекула, у которой центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля не совпадают, называется полярной. Полярные молекулы обладают электрическим моментом и создают в окружающем пространстве электрическое поле. На рисунке 2.1 изображена модель полярной молекулы воды, состоящая из двух положительных ионов водорода и одного отрицательного иона кислорода. Диэлектриками с полярными молекулами являются вода, соляная кислота, аммиак, метиловый спирт.

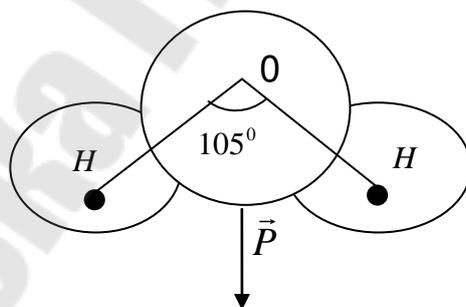


Рис. 2.1

Под действием внешнего электрического поля неполярные молекулы поляризуются: в результате смещения положительных зарядов в направлении поля, а отрицательных против поля у них появляется электрический момент, направление которого совпадает с направлением внешнего поля. В умеренных полях электрический момент  $\vec{p}$ , приобретаемый молекулой, пропорционален внешнему полю  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = a\epsilon_0\vec{E} \quad (2.1)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $a$  – коэффициент пропорциональности, называемый поляризуемостью молекулы.

Поляризуемость молекулы – мера того насколько легко индуцируется у молекулы дипольный момент под действием внешнего поля. Смещение зарядов в неполярных молекулах происходит подобно упругой деформации, т.е. так, как если бы между зарядами действовали упругие силы. Смещение исчезает вместе с исчезновением электрического поля. Поэтому неполярные молекулы часто называют «квазиупругими» диполями.

Действие однородного электрического поля на полярные молекулы оказывается ориентирующим: поле стремится «развернуть» молекулярные диполи так, чтобы их электрические моменты совпадали с направлением поля. Рассмотрим, от чего зависит вращательное действие электрического поля на молекулярные диполи. Если электрическое поле однородно, то на заряды  $q_+$  и  $q_-$  диполя действуют равные по модулю и противоположные по направлению силы  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$ . (рис. 2.2)

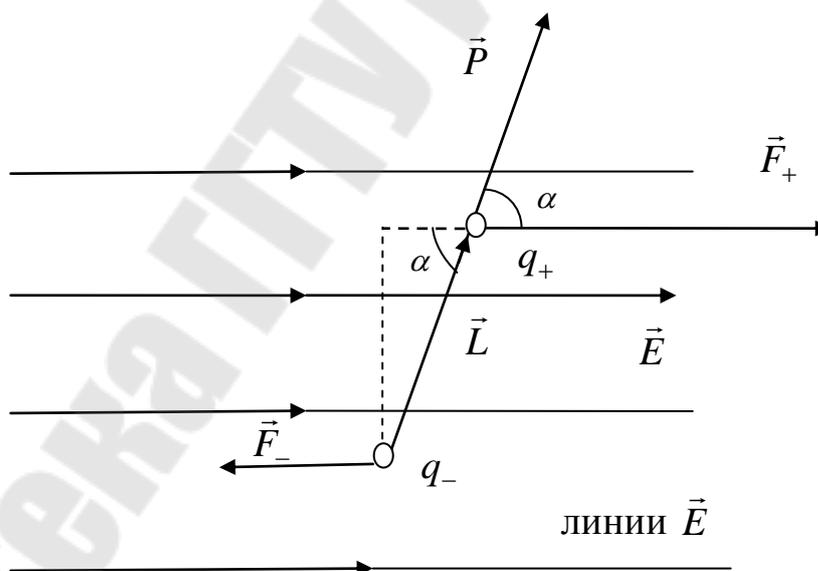


Рис. 2.2.

Эти силы образуют пару сил. Модуль вращательного момента этой пары относительно оси, проходящей через один из зарядов, равен:

$$M = Fl \sin \alpha,$$

где  $F$  – модуль силы  $\vec{F}_+$  (или  $\vec{F}_-$ );  $l \sin \alpha$  – плечо этой силы.

Модуль  $\vec{F}$  равен  $F = |q|E$ . Подставив выражение для  $F$  в формулу для момента и учтём, что  $|q|l$  – модуль электрического момента,

диполя:

$$M = pE \sin \alpha, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ , (2.2) – числовое значение векторного произведения векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ . Следовательно:

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}], \quad (2.3)$$

Вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен к плоскости, в которой лежат  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ ; если смотреть с его конца, то поворот от  $\vec{p}$  к  $\vec{E}$  (по кратчайшему пути) должен происходить, против часовой стрелки.

Диполь в электростатическом поле обладает потенциальной энергией  $W = -\int \vec{F}d\vec{r} + C$ .

При вращательном движении величинами, аналогичными  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  являются  $\vec{M}$  и  $d\alpha$  – момент силы, и угловое перемещение, поэтому  $W = \int \vec{M}d\alpha + C$ , или учитывая (2.2),  $W = \int pE \sin \alpha d\alpha + C$ .

Взяв интеграл, получим:

$$W = -pE \cos \alpha + C. \quad (2.4)$$

Приняв потенциальную энергию диполя, расположенного перпендикулярно к полю ( $\alpha = 90^\circ$ ) равной нулю, найдём, что  $C = 0$ . Тогда:

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p}\vec{E}. \quad (2.5)$$

В неоднородном поле силы, действующие на заряды  $q_+$  и  $q_-$  диполя, не равны по модулю (рис. 2.3).

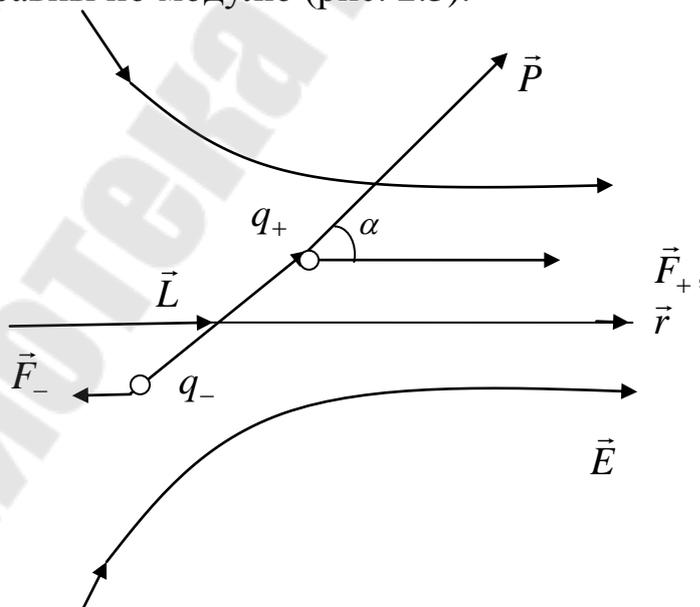


Рис. 2.3.

Также силы создают не только вращательный момент, но и вы-

зывает поступательное движение диполя. Продифференцировав (2.5) по  $\vec{r}$  – направлению быстрейшего возрастания  $\vec{E}$  – и взяв полученную производную со знаком “–”, мы найдём проекцию на ось  $r$  результирующей силы, действующей на диполь:

$$F_r = \frac{dW}{dr} = \vec{p} d\vec{E}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что если угол между  $\vec{p}$  и  $\frac{d\vec{E}}{dr}$  острый, то  $\vec{F}_r > 0$ , т.е. сила  $\vec{F}_r$  втягивает диполь в область более сильного поля; если этот угол тупой, то  $\vec{F}_r < 0$ , сила  $\vec{F}_r$  выталкивает диполь в область более сильного поля.

Собственные дипольные моменты молекул, если они существуют, как правило, гораздо больше моментов, приобретённых неполярными молекулами в обычных электрических полях. Внешние поля на величину момента полярных молекул практического влияния не оказывают. Поэтому также молекулы называют «жёсткими» диполями.

### 2.3. Поляризация диэлектриков

Во внешнем электрическом поле диэлектрики поляризуются – приобретают вполне определённый электрический момент и сами становятся источниками электрического поля. Поляризация сопровождается появлением на внешних границах диэлектрика поверхностного электрического заряда, называемого связанным или поляризационным: связанные заряды – это заряды, являющиеся неотъемлемой частью молекулярной структуры диэлектрика, заряды, входящие в состав его атомов и молекул, но не заряды, сообщённые диэлектрику извне. Избыточный заряд, сообщённый диэлектрику извне («сторонний» заряд), называют свободным. Иными словами, при рассмотрении вопроса, об источниках электростатического поля понятие свободного заряда диэлектрика не ассоциируется со свободой перемещения заряда, по всему объёму диэлектрика.

Распределение поверхностного связанного заряда характеризуется его поверхностной плотностью  $\sigma'$

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS}, \quad (2.7)$$

где  $dq'$  – связанный заряд, сосредоточенный на площадке  $dS$ . Количественной характеристикой интенсивности поляризации явля-

ется вектор поляризации  $\vec{P}$  – величина, равная электрическому моменту единицы объёма поляризованного диэлектрика.

Если вектор поляризации во всех точках диэлектрика одинаков, поляризация называется однородной, если неодинаков – неоднородной.

С точки зрения микроскопической теории, вектор поляризации представляет собой векторную сумму дипольных электрических моментов всех молекул, заключённых в единице объёма, диэлектрика. Если поляризация однородна, то

$$\vec{P} = \sum \frac{\vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{p}_i$  – электрический момент  $i$  – ой молекулы;  $\Delta V$  – объём, по которому производится суммирование электрических моментов.

Если поляризация неоднородна, то

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum \frac{\vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (2.9)$$

Опыт показывает, что вектор  $\vec{P}$  в каждой точке поляризованного диэлектрика в не очень сильных полях и при не слишком высоких частотах изменений этих полей пропорционален напряжённости  $\vec{E}$  поля, существующего в этой же точке, и совпадает с  $\vec{E}$  по направлению:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.10)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;

$\chi$  – диэлектрическая восприимчивость вещества, величина показывающая, как сильно поляризуется данное вещество во внешнем электрическом поле, и численно равная величине вектора поляризации, приобретаемой диэлектриком в поле с напряжённостью (в СИ):

$$E = 1/\varepsilon_0, \quad [B/m].$$

Между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанного заряда существует связь. Установим эту связь. Выделим элемент внешней поверхности поляризованного диэлектрика  $dS$  так, чтобы он «рассёк» некоторые молекулярные диполи (рис. 2.4). Каждой «рассечённой» молекуле припишем некоторый средний (эффективный) дипольный момент:  $\vec{p} = |q|\vec{L}$ ,

где  $|q|$  – абсолютная величина одного из зарядов диполя и  $\vec{L}$  – плечо диполя.

Элемент  $dS$  «рассечёт» все диполи, центры которых лежат внутри объёма  $dV = ldS \cos \alpha$ ,  
 где  $l$  – длина плеча диполя;  
 $\alpha$  – угол между внешней нормалью к  $dS$  и моментами  $\vec{p}$  диполей.

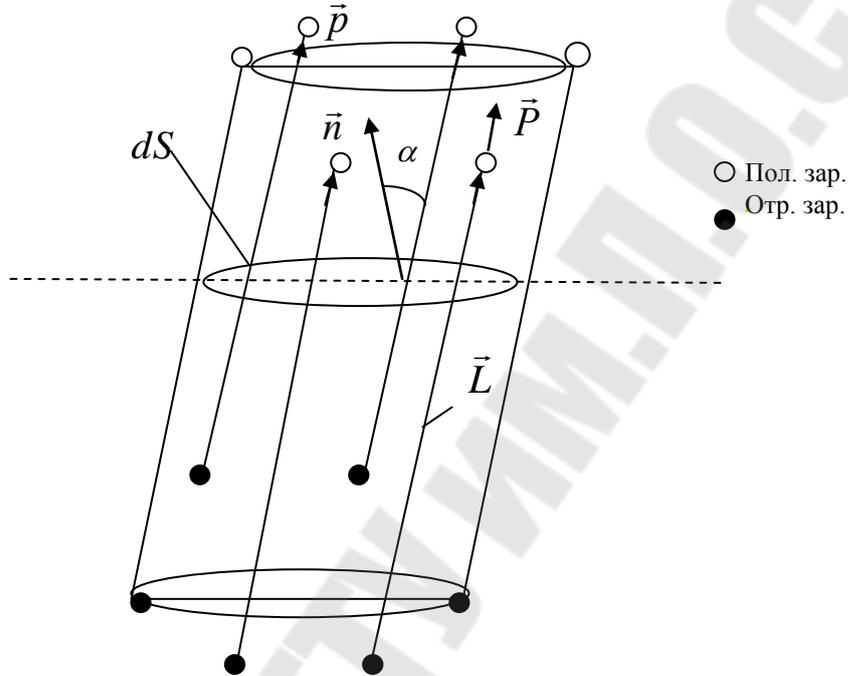


Рис. 2.4

Если число молекул в единице объёма диэлектрика равно  $n$ , то число диполей, «рассечённых» площадкой  $dS$ , составит:

$$ndV = nldS \cos \alpha.$$

Если угол  $\alpha$  между моментами  $\vec{p}$  и внешней нормалью к  $dS$  острый, то на внешней стороне  $dS$  площадке окажется слой положительных зарядов «рассечённых» диполей. Сумма этих зарядов равна:

$$dq' = |q|nldS \cos \alpha.$$

Величина  $|q|l = p$  – есть модуль дипольного момента одной молекулы, а  $|q|nl = P$  – модуль вектора поляризации. Следовательно,

$$dq' = PdS \cos \alpha. \quad (2.11)$$

Разделив (2.11) на  $dS$ , получим выражение для поверхностной плотности связанных зарядов:

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Но  $P \cos \alpha = P_n$  есть проекция  $\vec{P}$  на направление внешней нормали. Тогда  $\sigma' = P_n$ . (2.13)

Таким образом, проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль к элементу поверхности диэлектрика равна поверхностной плотности связанных зарядов, сосредоточенных на этом элементе. Соотношение (2.13) справедливо для любого диэлектрика и для любого поля. Зная распределение вектора поляризации по поверхности диэлектрика, можно найти распределение связанного заряда.

Спроектируем (2.10) на внешнюю нормаль и учтём (2.13), получим:

$$\sigma' = \chi \varepsilon_0 E_n. \quad (2.14)$$

Из (2.14) видно, если  $E_n > 0$  (линии  $\vec{E}$  выходят из диэлектрика), то  $\sigma' > 0$  и на такой поверхности появляются положительные связанные заряды; если  $E_n < 0$  (линии  $\vec{E}$  входят в диэлектрик), то  $\sigma' < 0$ : на такой поверхности появляются отрицательные связанные заряды. Связанные заряды не появляются в тех точках поверхности диэлектрика, в которых вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной к поверхности (в этом случае  $E_n = 0$ ) и, следовательно:

$$\sigma' = \chi \varepsilon_0 E_n = 0$$

## 2.4. Электрическое поле в диэлектрике

Говоря об электрическом поле внутри диэлектрика, имеют в виду макроскопическое поле – поле, усреднённое по малому объёму. Электрическое поле как внутри, так и вне его равно сумме двух полей: первичного, внешнего поля  $\vec{E}_0$  и вторичного, собственного поля диэлектрика  $\vec{E}'$ , созданного связанными зарядами этого диэлектрика:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (2.15)$$

Поляризация диэлектрика обусловлена именно этим результирующим полем  $\vec{E}$ . Поле связанных зарядов  $\vec{E}'$  внутри диэлектрика всегда ослабляет внешнее поле: суммарное поле, которое существует в данной точке внутри диэлектрика всегда меньше внешнего:

$$\vec{E}_{\text{внутр}} < \vec{E}_0.$$

Однако поле связанных зарядов никогда не компенсирует внешнее поле внутри диэлектрика полностью – оно компенсирует его лишь частично. То, что связанные заряды всегда ослабляют внешнее поле в диэлектрике, отнюдь не означает, что поле  $\vec{E}'$  в диэлектрике всегда противоположно полю  $\vec{E}_0$ . Направление  $\vec{E}'$  зависит помимо прочего от формы диэлектрика и от его расположения во внешнем поле. В зависимости от этих факторов

угол между  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  может принимать любые значения от 0 до  $\pi$ . На рисунке 2.5 указаны направления векторов  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  внутри однородного диэлектрика, имеющего форму большой плоскопараллельной пластины и расположенного в однородном внешнем поле так, что его грани не перпендикулярны к линиям поля  $\vec{E}_0$ .

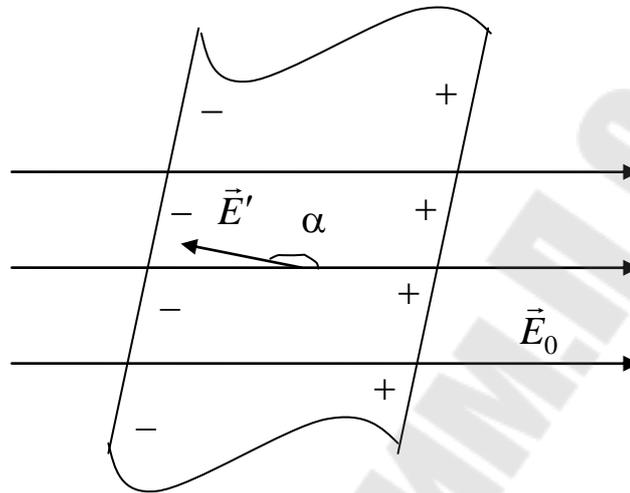


Рис. 2.5

Поле  $\vec{E}'$  в этом случае подобно полю бесконечных разноименно заряженных плоскостей: оно перпендикулярно к граням пластины. Угол между  $\vec{E}_0$  и  $\vec{E}'$  не равен  $\pi$ .

Вне диэлектрика поле связанных зарядов может и усиливать и ослаблять внешнее поле, поэтому полное поле здесь может быть больше или меньше внешнего, или равно ему. Рисунок 2.6 поясняет это. Длинный тонкий стержень из однородного диэлектрика расположен параллельно линиям однородного поля.

Связанные заряды появляются на концах стержня. Поле этих зарядов подобно полю двух точечных разноименных зарядов. Из рисунка видно, что в точке *A* результирующее поле больше, а в точке *B* меньше внешнего поля  $\vec{E}_0$ .

Найдем связь между внешнем полем  $\vec{E}_0$  и полным полем  $\vec{E}$  в диэлектрике. Внесем бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика в однородное поле  $\vec{E}_0$  и расположим ее перпендикулярно к линиям поля (рис. 2.7) под действием поля диэлектрик поляризуется, на его поверхностях появляются связанные заряды с плотностью  $|\sigma'|$ . Эти заряды создают внутри пластины однородное поле  $\vec{E}'$ , направленное противоположно  $\vec{E}_0$ . Модуль напря-

жённости результирующего поля равен:

$$E = E_0 - E', \quad (2.16)$$

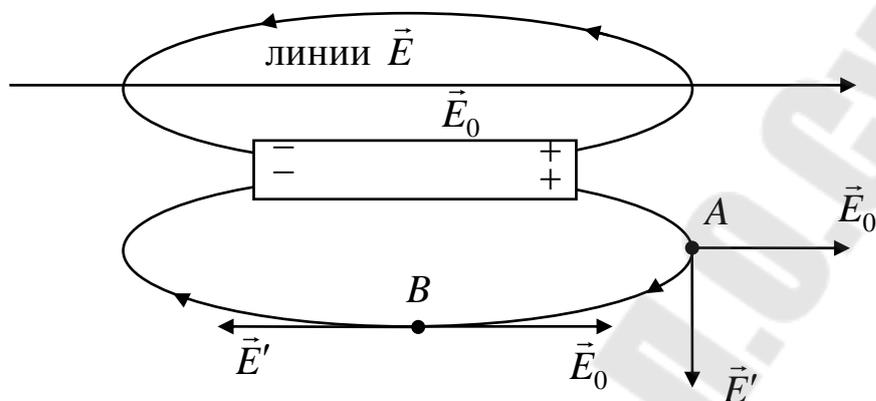


Рис. 2.6

заряды с плотностью  $|\sigma'|$ . Эти заряды создают внутри пластины однородное поле  $\vec{E}'$ , направленное противоположно  $\vec{E}_0$ . Модуль напряжённости результирующего поля равен:  $E = E_0 - E'$ , (2.16)

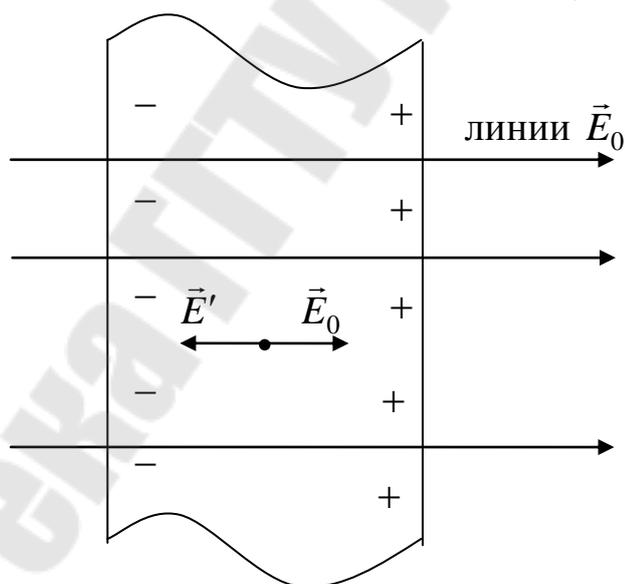


Рис. 2.7

где  $E' = |\sigma'| / \epsilon_0$

В соответствии с (2.13) и (2.14):

$$|\sigma'| = P = \chi \epsilon_0 E$$

Следовательно,  $E' = \chi E$ . (2.17)

Подставив (2.17) в (2.16), получим  $E = E_0 - \chi E$ , откуда:

$$(1 + \chi)E = E_0. \quad (2.18)$$

Направления  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_0$  в рассматриваемом случае совпадают:

$$(1 + \chi)\vec{E} = \vec{E}_0. \quad (2.19)$$

Безразмерная величина  $\varepsilon = 1 + \chi$ , (2.20)

называется относительной диэлектрической проницаемостью вещества. Таким образом,  $\varepsilon\vec{E} = \vec{E}_0$  и (2.21)

$$\varepsilon = \frac{\vec{E}_0}{\vec{E}} \quad (2.22)$$

В рассматриваемом случае однородный диэлектрик заполняет объём, ограниченный двумя эквипотенциальными поверхностями. Последние выражения справедливы и в том случае, когда однородный диэлектрик заполняет всё пространство, где существует внешнее поле. В обоих случаях относительная диэлектрическая показывает во сколько раз внешнее поле больше поля в диэлектрике. Во всех других случаях совпадение направления  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_0$  не имеет места (рис.2.6)

## 2.5. Индукция электрического поля

Ранее была сформулирована теорема Гаусса для потока вектора  $\vec{E}$ . Её физический смысл в том, что электростатическое поле создается любыми неподвижными электрическими зарядами и свободными и связанными. Следовательно, при наличии диэлектрической среды поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность  $S$  пропорционален алгебраической сумме всех свободных  $q$  и всех связанных  $q'$  зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (q + q'). \quad (2.23)$$

Выберем внутри поляризованного диэлектрика произвольную замкнутую поверхность  $S$  и применим к ней соотношение (2.23). Выразим  $q'$  в функции вектора поляризации  $\vec{P}$ . Поверхность  $S$  «рассечёт» некоторые молекулярные диполи. Вклад в  $q'$  внесут только эти «рассечённые» диполи поскольку алгебраическая сумма зарядов диполей попавших внутрь  $S$  целиком равна нулю. Выделим элемент поверхности  $dS$  (см. рис. 2.4). Припишем каждому «рассечённому» диполу дипольный момент  $\vec{P}$ . Если угол  $\alpha$  между моментами  $\vec{P}$  и внешней нормалью к  $dS$  острый, то с внутренней стороны элемента оказываются отрицательные заряды «рассечённых» диполей. Повто-

рив те же рассуждения, что и в параграфе 2.4, мы найдём, что сумма этих зарядов равна по абсолютной величине и противоположна по знаку потоку вектора поляризации через  $dS$ :

$$dq' = -PdS \cos \alpha = -\vec{P}d\vec{S}, \quad (2.24)$$

где  $\vec{P}$  – вектор поляризации,  $d\vec{S}$  – вектор, численно равный  $dS$  и совпадающий по направлению с внешней нормалью к  $dS$ . Полный связанный заряд  $q'$ , заключённый в объёме, ограниченном  $S$  получим, проинтегрировав (2.24) по всей поверхности  $S$ :

$$q' = -\oint_S \vec{P}d\vec{S}. \quad (2.25)$$

Интеграл  $\oint_S \vec{P}d\vec{S}$  есть поток вектора поляризации  $\vec{P}$  через поверхность  $S$ . Таким образом, избыточный связанный заряд, охватываемый произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , равен взятому со знаком минус потоку вектора поляризации через эту поверхность. Подставив (2.25) в (2.23):

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q - \oint_S \vec{P}d\vec{S}).$$

Умножим обе части этого равенства на  $\epsilon_0$  и перенесем слагаемое  $\oint_S \vec{P}d\vec{S}$  в левую часть:

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})d\vec{S} = q. \quad (2.26)$$

$$\text{Физическая величина } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.27)$$

называется электрической индукцией (или электрическим смещением) поля. Введем индукцию (2.27) в (2.26):

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q. \quad (2.28)$$

Таким образом, поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью (теорема Гаусса для  $\vec{D}$ ).

В изотропных диэлектриках связь  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  выражается более простой чем (2.27), формулой действительно, в таких диэлектриках

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}. \quad (2.29)$$

Подставив (2.29) в (2.27) и учитывая, что  $1 + \chi = \epsilon$ , получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (2.30)$$

Таким образом, в изотропных диэлектриках направление электрической индукции совпадает с направлением вектора результирующей напряжённости. В анизотропных диэлектриках направления  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  могут не совпадать, следовательно, направления  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  также могут быть различными. Поле вектора  $\vec{D}$  можно изобразить с помощью линий  $\vec{D}$ .

Для описания электрического поля вводятся напряженность  $\vec{E}$  и индукция  $\vec{D}$ . Из этих двух характеристик важнейшей, фундаментальной является  $\vec{E}$ . Введение  $\vec{D}$  в какой – то мере оправдано тем, что поток  $\vec{D}$  не зависит от среды, от её диэлектрических свойств.

Соотношение (2.28) иногда оказывается полезным. Однако из (2.28) отнюдь не следует, что индукция вообще не зависит от среды, т.е. индукция в каждой точке такая же, как и в её отсутствии. От среды не зависит не сама индукция, а её интегральная функция – поток  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность. Индукция же в общем смысле зависит от среды. Так в неоднородной среде, диэлектрическая проницаемость которой в разных точках разная,  $\vec{D}$  зависит от  $\varepsilon$ ; в пространственно ограниченных диэлектриках индукция зависит от формы и размеров диэлектриков, т.е.  $\vec{D} \neq \vec{D}_0$ , где  $\vec{D}_0$  – индукция в точке в отсутствие диэлектриков.

Можно показать, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями, а также через границу диэлектрика с вакуумом нормальная (перпендикулярная к границе) составляющая вектора  $\vec{D}$  и тангенциальная (параллельная границе) составляющая вектора  $\vec{E}$  не изменяются (при условии, что на границах нет свободных зарядов); тангенциальная составляющая  $\vec{D}$  и нормальная составляющая  $\vec{E}$  скачкообразно изменяется – испытывает разрыв. Такое поведение векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  означает, что на границах диэлектриков линии  $\vec{D}$  преломляются, но остаются непрерывными, линии  $\vec{E}$  и преломляются и испытывают разрыв: часть линий  $\vec{E}$  на границах диэлектриков либо обрываются (на отрицательных связанных зарядах), либо преломляются. На рис.2.8 показан ход линии  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  при переходе из одного диэлектрика в другой. Если граница перпендикулярна линиям поля, то при её переходе вектор  $\vec{D}$  не изменяется ни по модулю, ни по направлению; вектор  $\vec{E}$  изменяет-

ся только по модулю: он увеличивается при переходе в среду с меньшей диэлектрической проницаемостью) и уменьшается при переходе

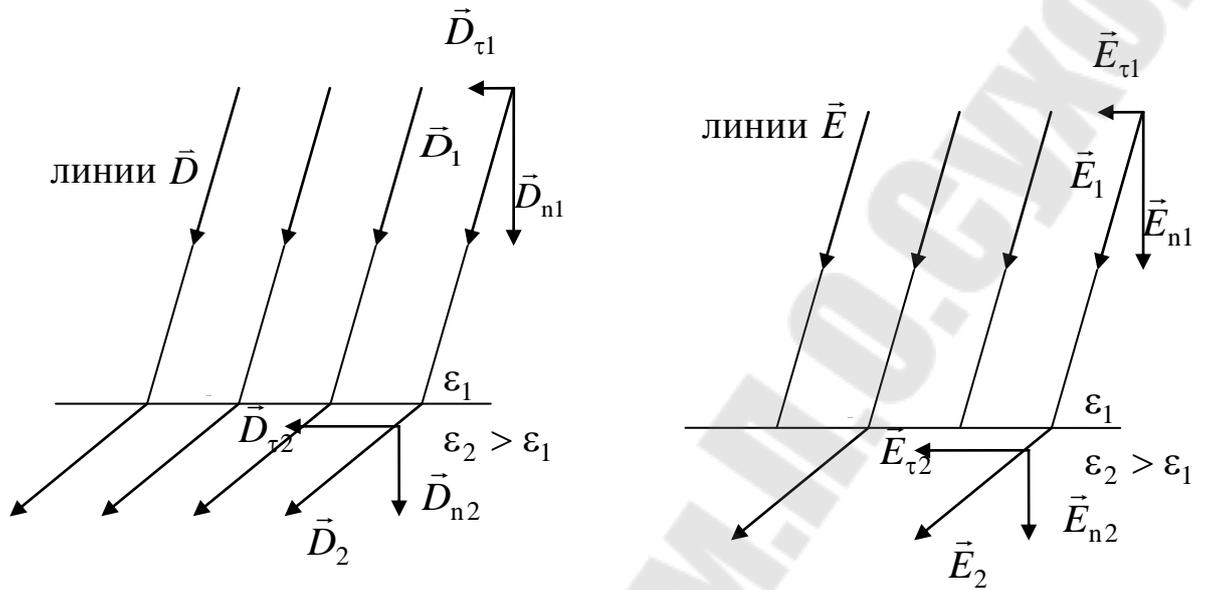


Рис.2.8

в среду с большей диэлектрической проницаемостью (рис. 2.9).

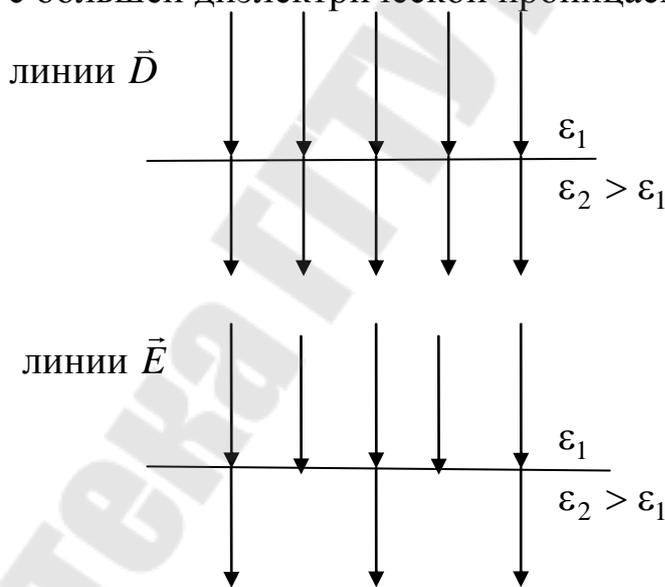


Рис. 2.9

## 2.6. Расчёт электростатического поля при наличии диэлектриков

Если среда однородна, изотропна и заполняет либо всё пространство, где существует электрическое поле, либо область между двумя эквипотенциальными поверхностями, то напряжённость поля в такой среде согласно (2.22) в  $\epsilon$  раз меньше напряжённости, создавае-

мой тем же распределением свободных зарядов в вакууме. В этих случаях рассчитав (напряжённость) поле, создаваемое свободными зарядами в вакууме, и разделив его на  $\epsilon$  мы найдём поле в среде.

*Приведём соответствующие формулы.*

Величина напряжённости поля точечного заряда и равномерно заряженной сферы:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (2.31)$$

Величина напряжённости поля бесконечно равномерно заряженной плоскости:

$$E = |\sigma| / 2\epsilon_0\epsilon. \quad (2.32)$$

Величина напряжённости поля в пространстве между двумя бесконечными равномерно заряженными параллельными плоскостями:

$$E = |\sigma| / \epsilon_0\epsilon. \quad (2.33)$$

Величина напряжённости поля бесконечно заряженной нити:

$$E = \tau / 2\pi\epsilon_0\epsilon r. \quad (2.34)$$

В рассматриваемых случаях сила взаимодействия свободных зарядов и потенциал поля точечного заряда, равномерно заряженной сферы уменьшаются в  $\epsilon$  раз:

$$\vec{F} = \frac{|q_1||q_2|\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}, \quad (2.35)$$

$$\varphi = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (2.36)$$

При наличии диэлектриков конечных размеров и произвольной формы расчёт поля усложняется, хотя на первый взгляд может показаться, что особых трудностей возникать не должно. В самом деле, в случае произвольных диэлектриков связь между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  следующая:

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}.$$

Поток  $\vec{D}$  согласно (2.28) зависит только от распределения свободных зарядов. Определив по (2.28) индукцию в интересующей нас точке и разделив её на  $\epsilon_0\epsilon$  мы решим поставленную задачу – найдём напряжённость. В приведенных здесь выражениях всё верно, кроме одного: теорема Гаусса для  $\vec{D}$  (2.28) без дополнительных условий не позволяет найти  $\vec{D}$  в рассматриваемой точке. Причины следующие: во-первых, связанные заряды, возникающие при поляризации диэлек-

триков могут вызвать перераспределение свободных зарядов. Это обстоятельство затрудняет вычисление свободного заряда, нападающего внутрь гауссовой поверхности. Во-вторых, на границах диэлектриков, а в неоднородных диэлектриках и внутри их вектор  $\vec{D}$  изменяется и по модулю и по направлению. Это не позволяет вычислить поток  $\vec{D}$  через гауссову поверхность, основываясь на определении потока (направление и модуль  $\vec{D}$  в определённых точках гауссовой поверхности остаются неизвестными). Чтобы рассчитать электростатическое поле при наличии пространственно ограниченных диэлектриков по только что описанной схеме, нужно знать распределение свободных зарядов и граничные условия для  $\vec{D}$ . Расчёт  $\vec{E}$  можно осуществить также и непосредственно, основываясь на принципе суперпозиции. Но для этого нужно знать распределение и свободных и связанных зарядов.

## 2.7. Поляризация деформационная или ориентационная

Вернёмся к вопросу о механике поляризации. Поляризация диэлектриков с неполярными молекулами называется деформационной. Различают электронную и ионную деформационную поляризацию. Внешнее электрическое поле деформирует электронные оболочки молекул, смещает их центры в направлении, противоположном  $\vec{E}$ , в результате чего молекулы приобретают дипольные моменты (электронная деформационная поляризация). На поверхностях, сквозь которые линии поля входят в диэлектрик, появляются отрицательные связанные заряды, на поверхностях, сквозь которые линии поля выходят, - положительные (рис. 2.10).

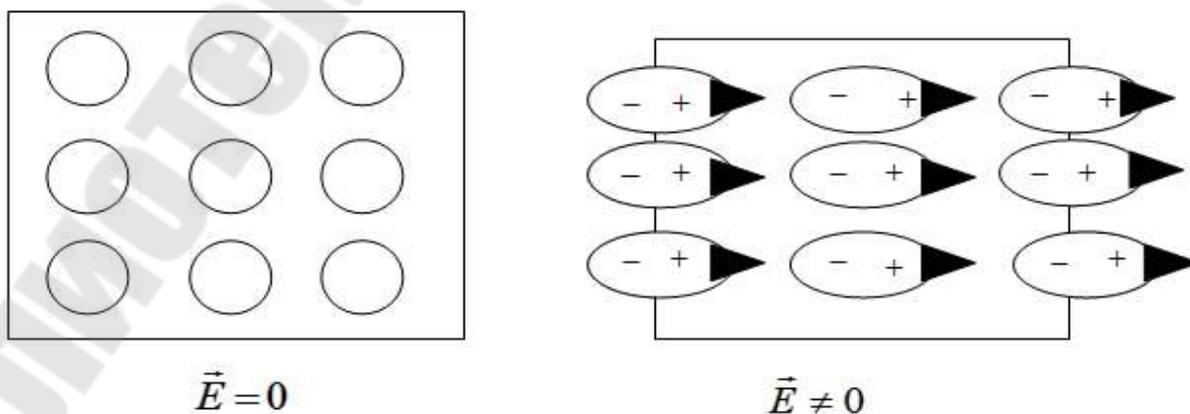


Рис. 2.10

Кристаллическую решётку ионных кристаллов (KCl, NaCl)

можно представить состоящей из двух подрешёток - положительной и отрицательной, вставленной одна в другую. Внешнее электрическое поле смещает эти подрешётки (ионная деформационная поляризация).

Время установления электронной поляризации  $\approx 10^{-15}$  с, ионной в 100 - 1000 раз больше вследствие того, что более массивные ионы медленнее, чем электроны, смещаются под действием поля. Диэлектрическая восприимчивость и относительная диэлектрическая проницаемость диэлектриков с неполярными молекулами в умеренных полях практически не зависит от поляризующего поля и температуры, а вектор поляризации пропорционален  $\vec{E}$ . На рис. 2.11 приведены графики:  $\chi = \chi(E)$ ,  $\chi = \chi(T)$ ,  $P = P(E)$

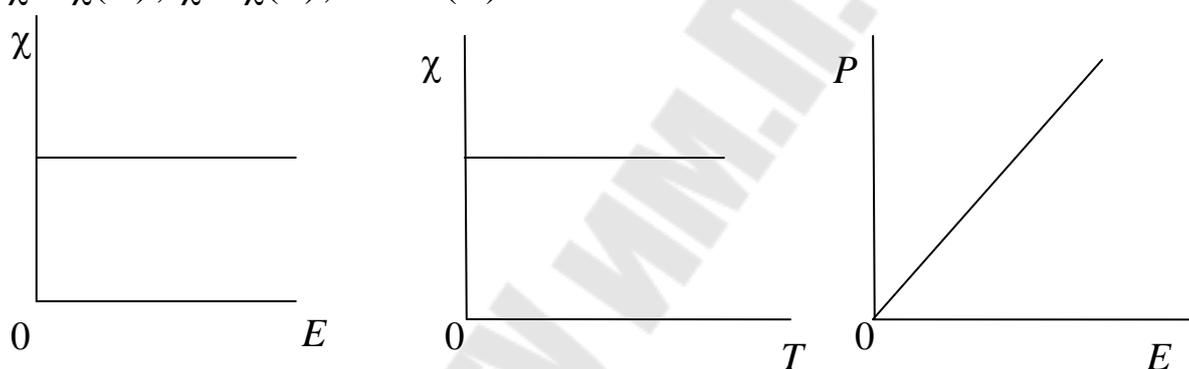


Рис. 2.11

Так как внешнее поле деформирует электронные оболочки всех без исключения атомов и молекул диэлектрика, то деформационная поляризация имеет место во всех диэлектриках.

Поляризация диэлектриков с полярными молекулами называется ориентационной. В отсутствие внешнего электрического поля в таких диэлектриках молекулярные диполи ориентированы беспорядочно, поэтому электрический момент диэлектрика равен нулю. При наличии внешнего поля молекулярные диполи стремятся расположиться упорядоченно, вдоль поля, однако тепловое движение нарушает эту ориентацию. По истечению некоторого времени после включения электрического поля наступает динамическое равновесие между этими двумя процессами, в результате чего устанавливается некоторая преимущественная ориентация диполей (рис. 2.12). При этом кроме ориентационной поляризации имеет место и деформационная поляризация. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков в не очень сильных полях не зависят от температуры: при повышении температуры  $\chi$  и  $\epsilon$  уменьшаются. Это объясняется тем, что с повышением

температуры усиливается деформирующие действия теплового движения. Вектор поляризации полярных диэлектриков сначала растёт пропорционально  $\vec{E}$ , затем рост  $\vec{P}$  замедляется и в очень сильных полях (но не при высоких температурах) прекращается вовсе – наступает диэлектрическое насыщение. Это соответствует состоянию,

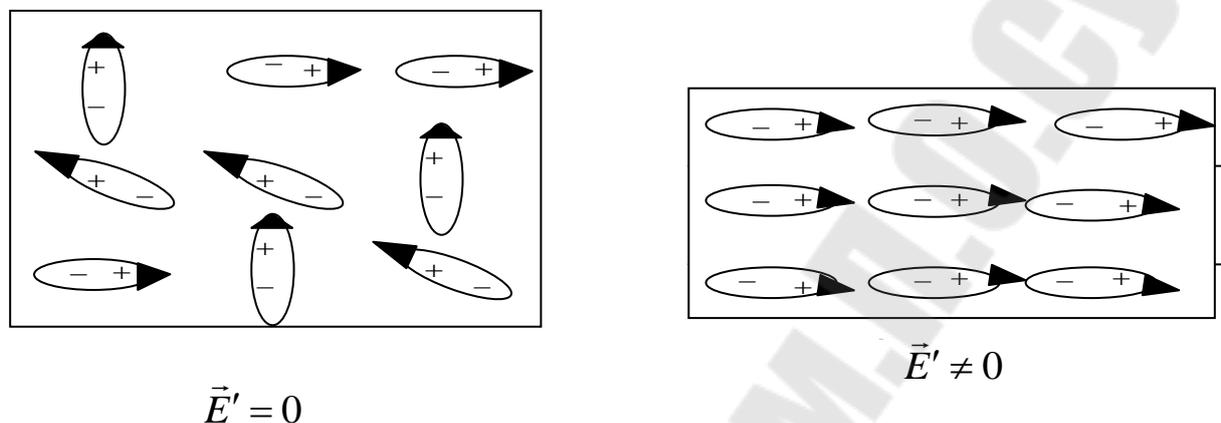


Рис. 2.12

когда все молекулярные диполи выстраиваются вдоль поля. На рис. 2.13 приведены графики  $\chi = \chi(E)$ ,  $\chi = \chi(T)$ ,  $P = P(E)$  для полярных диэлектриков.

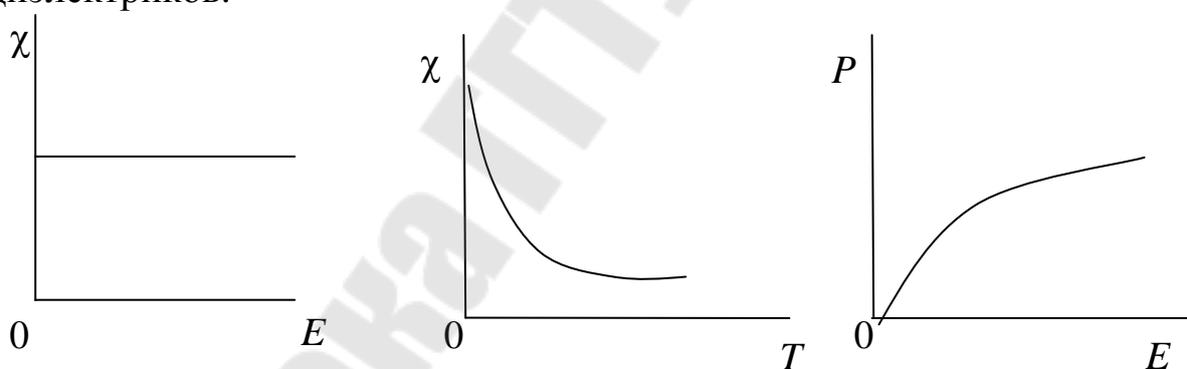


Рис. 2.13

Время установления ориентационной поляризации довольно велико и в значительной мере зависит от температуры и частоты изменений поля. Так как молекулы обладают определенным моментом инерции, им требуется некоторое время, чтобы повернуться в направлении поля. При больших частотах внешнего поля молекулы не успевают поворачиваться вслед за изменениями поля, поэтому при увеличении частоты полярный вклад в диэлектрическую восприимчивость уменьшается.

## 2.8. Сегнетоэлектрики

Особую группу диэлектрических веществ образуют сегнетоэлектрики: сегнетова соль (двойная натриевокалиевая соль винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6\cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), метатитанат бария ( $\text{BaTiO}_2$ ) и др. Электрические свойства сегнетовой соли впервые исследованы советскими физиками И.В. Курчатовым и П.П. Кобеко, свойства метатитаната бария – также советскими физиками Б.И. Вулом и И.И. Гольдманом.

Сегнетоэлектрики обладают следующими особенностями:

1. Диалектическая проницаемость в определенном температурном интервале весьма велика – может достигать десятков тысяч (а для сравнения укажем, что  $\epsilon$  для обычных диэлектриков не превышает нескольких десятков).
2. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость зависят от температуры и поляризующего поля (последняя зависимость имеет место при температурах, ниже некоторой характеристической, называемой точкой Кюри). На рисунке 2.14 приведены графики  $\epsilon = \epsilon(T)$  и  $\epsilon = \epsilon(E)$  для метатитаната бария, как видим зависимости являются нелинейными.

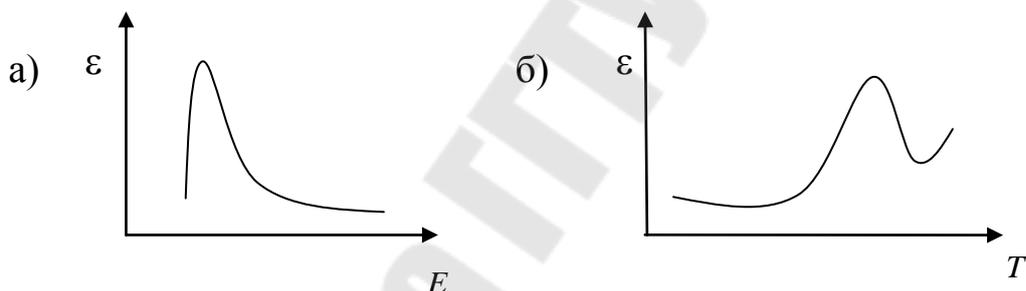


Рис. 2.14

3. Зависимость вектора поляризации от поляризующего поля не является линейной.

4. Поляризация сегнетоэлектрика определяется не только существующим поляризационным полем, но и предысторией поляризации. При изменении поляризующего поля вектор поляризации отстает от изменений поля. Это явление называется диэлектрическим гистерезисом. На рис. 2.15 изображен график зависимости  $P_x$  от  $E_x$  ( $P_x$  и  $E_x$  – проекции векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  на ось  $x$ , совпадающую с первоначальным направлением  $\vec{E}$ ). Как видно из графика первоначально поляризуемость растет (кривая 1). При некотором  $E_x$  наступает насыщение. Если поляризующее поле уменьшать, то изменения  $P_x$  отстают от изменений  $E_x$  и следует не первоначальной кривой 1, а кривая 2. При

$\vec{E}=0$ , в отсутствие внешнего поля,  $P_x \neq 0$ : сегнетоэлектрик обладает поляризацией, которая называется остаточной ( $P_{xo}$ ). Чтобы устранить эту поляризацию нужно включить внешнее поле противоположное первоначальному. Поле  $E_{xc}$ , направление которого противоположно первоначальному поляризующему полю и которое полностью снимает остаточную поляризацию, называется коэрцитивной силой. Если поле противоположного направления увеличивать, то через некоторое время вновь наступает насыщение. В неполяризованное состояние диэлектрик возвращается по кривой 3. При циклическом изменении поля получается петлеобразная кривая, называемая петлей гистерезиса.

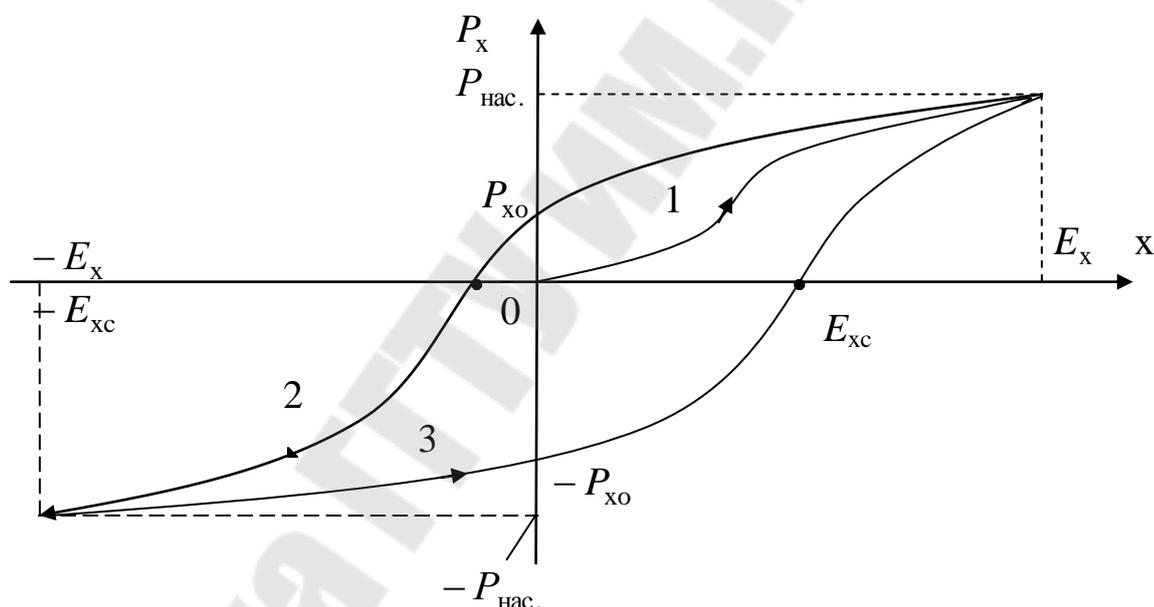


Рис. 2.15

5. Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, выше или ниже которой сегнетоэлектрик утрачивает свои особые свойства и становится обычным диэлектриком. Эта температура называется точкой Кюри. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: нижнюю  $-15^\circ\text{C}$  и верхнюю  $+22,5^\circ\text{C}$  в интервале от  $-15^\circ\text{C}$  до  $+22,5^\circ\text{C}$  сегнетова соль является сегнетоэлектриком с проницаемостью  $\approx 10^4$ . Точка Кюри метатитаната бария  $+125^\circ\text{C}$ , а проницаемость  $10^3$ .

В сегнетоэлектриках между молекулами имеет место весьма сильное взаимодействие, благодаря которому наиболее устойчивым и энергетически выгодным оказывается состояние с параллельной ориентацией молекулярных диполей. Области в сегнетоэлектриках, в которых электрические моменты молекулярных диполей параллельны,

называются доменами. В пределах каждого домена диэлектрик поляризован до насыщения. Области самопроизвольной (спонтанной) поляризации сравнительно не велики. Это вытекает из закона сохранения энергии и подтверждается следующим:

1. Если бы сегнетоэлектрик состоял из одного только домена, то далее в отсутствие внешнего электрического поля он обладал бы значительным электрическим моментом и сам бы создавал в окружающем пространстве сильное собственное поле. Такой сегнетоэлектрик обладал бы большей энергией. Энергия, затрачиваемая на создание собственного поля, существенно уменьшится, если вместо одного домена образуется два или четыре, поляризованных так, как это показано на рис. 2.16, стрелками:

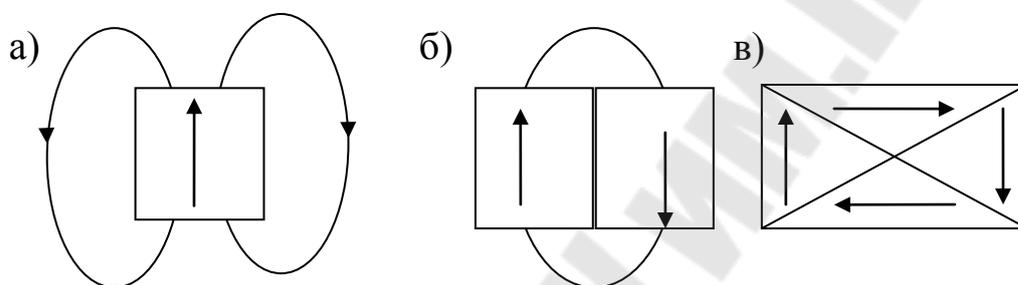


Рис. 2.16

2. На границе между двумя соседними доменами происходит «разворот» молекулярных диполей от одной ориентации к другой. При повороте диполя во внешнем электрическом поле совершается работа. Следовательно, энергия затрачивается и на образование границ между доменами.

3. Энергия двух доменов одинакового объёма поляризованных в различных кристаллографических направлениях оказывается различной. Разность этих энергий называется энергией анизотропии. В отсутствие поляризующего поля размеры доменов и их форма определяются минимумом энергии, затрачиваемой на создание собственного поля, энергии границ и энергии анизотропии. При этом сегнетоэлектрик разбивается на домены таким образом, что его результирующий момент практически равен нулю (рис. 2.17.а)

При наличии внешнего электрического поля удельная энергия, отдельных доменов оказывается неодинаковой: она меньше у тех доменов, в которых вектор поляризации образует с направлением поля острый угол, и больше у тех, у которых этот угол тупой. Действие поля на сегнетоэлектрик первоначально проявляется в смещении границ между доменами, причем это смещение происходит так, что объём доменов с благоприятной ориентацией вектора  $\vec{P}$  (с меньшей энерги-

ей) растет за счет доменов, ориентированных неблагоприятно (рис. 2.17.б). Начальное смещение границ (в слабых полях) носит обратный характер, поэтому поляризация точно следует за изменениями

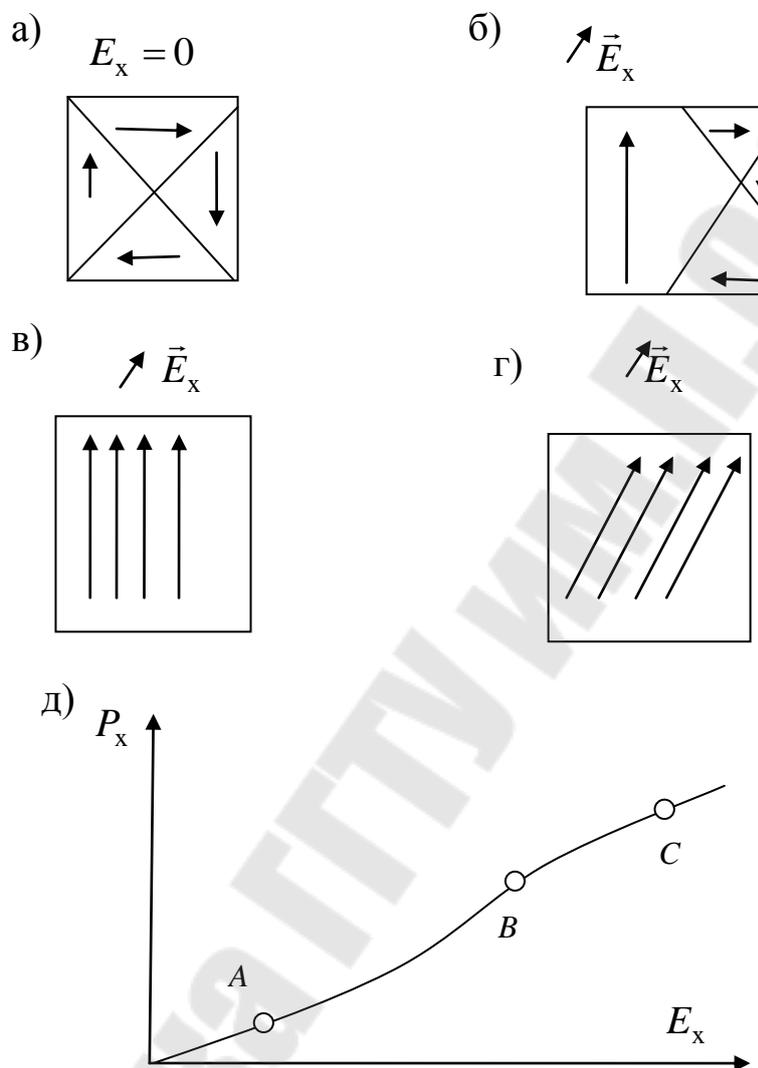


Рис. 2.17

поляризующего поля (рис. 2.17.д; участок ОА). Наконец, границы исчезают вовсе (рис.2.17.в). При дальнейшем увеличении поля происходит поворот (вслед за полем) электрических моментов доменов (рис. 2.17.д; участок ВС), которые, в конце концов при некотором значении поляризации устанавливаются параллельно полю (рис. 2.17.г). Сегнетоэлектрик превращается в один гигантский домен, поляризованный до насыщения (рис. 2.17.д; состояние С).

## 2.9. Пьезоэлектрический эффект. Электрострикция

Пьезоэлектрический эффект, или просто пьезоэффект, состоит в

том, что на гранях некоторых кристаллов появляются связанные электрические заряды. Пьезоэлектрический эффект наблюдается у кварца, сегнетовой соли, метатитаната бария, турмалина.

Пространственную решетку кристаллов, у которых наблюдается пьезоэффект, можно представить состоящей из двух или нескольких простых решеток, образованных из ионов разных знаков. При механической деформации эти решетки сдвигаются, в результате чего возникает поляризованное состояние. Прямой пьезоэффект используется в пьезоэлектрических звукоснимателях, микрофонах и т.д. Существует и обратный пьезоэффект, заключающийся в деформации диэлектрика при его поляризации. Объясняется этот эффект тем, что электрическое поле смещает простые решетки кристалла. Обратный пьезоэффект используется в генераторах ультразвука. Прикладывая к кристаллу переменное напряжение, частота которого совпадает с собственной частотой кристалла, можно получить достаточно интенсивные колебания. Если колебания кристалла происходят в какой-либо среде, например в жидкости, то они генерируют в этой среде звуковые волны.

Во всех диэлектриках имеет место электрострикция - увеличение или уменьшение одних размеров диэлектрика за счет уменьшения или увеличения других. Электрострикцию следует отличать от обратного пьезоэффекта. Обратный пьезоэффект наблюдается только у некоторых диэлектриков, электрострикция – у всех. Обратный пьезоэффект обусловлен смещением простых решеток в целом, электрострикция объясняется действием поля на отдельные молекулярные диполи. Деформация при обратном пьезоэффекте зависит от поля по линейному закону и при изменении направления поля изменяет свой знак (это значит, что растяжение переходит в сжатие, если направление поля изменяется на противоположное); деформация же, обусловленная электрострикцией, зависит от поля по квадратичному закону и не изменяет своего знака при изменении направления поля.

Изучение электрических свойств диэлектриков имеет важное теоретическое значение; знание дипольных моментов молекул различных веществ помогает установлению структурных формул молекул и выяснению типа связей между атомами и группами атомов в молекулах, поскольку каждому типу связи соответствует определенное значение дипольного момента.

## Глава 3. Проводники в электростатическом поле

### 3.1. Распределение зарядов на проводнике

Электрические заряды, сообщенные проводнику извне, в состоянии равновесия распределяются так, что электрическое поле внутри проводника отсутствует

$$\vec{E} = 0. \quad (3.1)$$

Это условие вытекает из закона сохранения энергии. Если бы поле внутри заряженного проводника было отлично от нуля, то это вызвало бы электрический ток (в проводнике есть свободные заряды). На поддержание этого тока требуется источник энергии, которого в проводнике нет. Избыточные заряды, сообщенные проводнику, в состоянии равновесия распределяются только по внешней поверхности проводника.

Из условия равновесия зарядов следует, что потенциал всех точек проводника как внутри, так и на поверхности одинаков. В самом деле, так как поле внутри проводника отсутствует, то при перемещении заряда из любой внутренней точки проводника на поверхность проводника потенциальная энергия перемещаемого заряда не изменяется (перемещение не требует совершения работы). Потенциальная энергия изменяется только при перемещении заряда с поверхности проводника в окружающее пространство (поле вне проводника не равно нулю, поэтому такое перемещение потребует совершения работы). Перемещаем ли мы заряд в некоторую точку из точки, находящейся внутри проводника, или из точки, находящейся на его поверхности, потенциальная энергия заряда изменяется при этом на одну и ту же величину (электростатические силы совершают одну и ту же работу). Подтвердим сказанное расчетом. Выберем две произвольные близкие точки  $a$  и  $b$ , одна из которых находится внутри заряженного проводника, другая – на его поверхности (рис. 3.1).

Расстояние между точками  $dr$ . Потенциал точек  $a$  и  $b$  обозначим  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ . Очевидно,

$$\varphi_b = \varphi_a - d\varphi, \quad (3.2),$$

где  $d\varphi$  – приращение потенциала на отрезке  $dr$ .

Из связи потенциала с напряжённостью следует:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

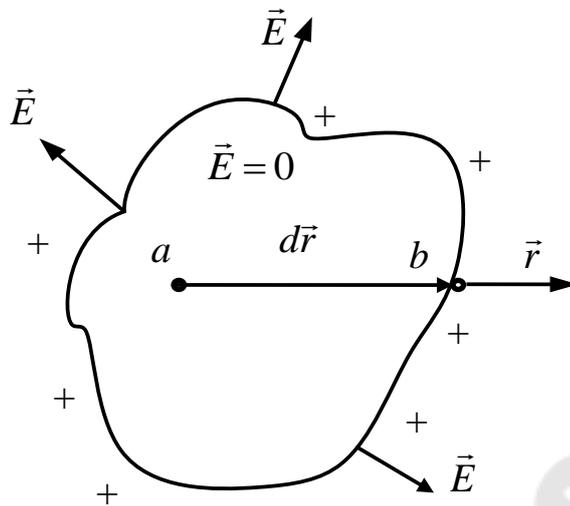


Рис. 3.1

где  $\vec{r}$  – направление, проходящее через точки  $a$  и  $b$ . Так как поле внутри проводника отсутствует, то  $\vec{E}_r = 0$ . Расстояние между точками  $dr$  не равно нулю. Следовательно,  $d\varphi = 0$ . Подставив  $d\varphi = 0$  в (3.2) получим:  $\varphi_b = \varphi_a$ .

Если потенциал точки  $b$  не равен нулю, то потенциал точки  $a$ , также не равен нулю. Таким образом, в условиях равновесия зарядов и поверхность, и объём являются эквипотенциальными.

Если заряды на проводнике находятся в равновесии, то в любой точке поверхности проводника вектор напряженности поля перпендикулярен к поверхности, т.е. нормальная составляющая напряженности  $\vec{E}_n$  равна полному полю  $\vec{E}$  ( $\vec{E}_n = \vec{E}$ ), а касательная составляющая  $\vec{E}_\tau$  равна нулю ( $\vec{E}_\tau = 0$ ). Действительно, если бы  $\vec{E}_\tau \neq 0$ , то это вызвало бы движение зарядов по поверхности проводника, и, следовательно, равновесие зарядов отсутствовало бы. Можно доказать теоретически и убедиться на опыте, что поверхностная плотность зарядов в отдельных точках проводника тем больше, чем больше кривизна поверхности проводника. Рассмотрим это на простой модели. Пусть два достаточно удалённых друг от друга проводящих шара радиусом  $r_1$  и  $r_2$  соединены тонким проводом. Если сообщить одному из шаров некоторый заряд, то он «растечётся» по внешней поверхности шаров и соединительного провода так, что потенциалы шаров окажутся одинаковыми. Так как шары достаточно удалены друг от друга и полем соединительного провода можно пренебречь, потенциалы шаров можно вычислить по формуле (1.73):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (3.3, \text{ а}) \text{ и}$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}, (3.3, б)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – заряды шаров.

Выразим  $q_1$  и  $q_2$  через поверхностные плотности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1; q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2. \text{ и подставим в выражение (3.3).}$$

$$\text{Тогда } \varphi_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} r_1 \text{ и } \varphi_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} r_2.$$

Учитывая, что  $\varphi_1 = \varphi_2$ , получим:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}. (3.4)$$

Величина обратная радиусу шара, есть кривизна его поверхности:

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. (3.5)$$

Таким образом, если два заряженных шара соединены проводником, т.е. образуют единый проводник, то поверхностная плотность зарядов будет больше на том из шаров, кривизна которого больше (меньше радиус).

В случае проводника произвольной формы каждый элемент его поверхности можно рассматривать как участок сферической поверхности определенной кривизны. Только что полученный вывод можно в первом приближении распространить и на этот случай.

Найдем, как связана напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника произвольной формы с поверхностной плотностью зарядов, сосредоточенных на нем. Воспользуемся теоремой Гаусса. Так как линии  $\vec{E}$  перпендикулярны к поверхности проводника, то в качестве гауссовой поверхности можно выбрать поверхность прямого цилиндра высотой  $dh$ , основания  $dS$  которого параллельны элементу поверхности проводника, заключенного внутри цилиндра. Поток  $\vec{E}$  через эту поверхность равен:

$$|dN| = EdS.$$

Внутри цилиндра попадает заряд:

$$|dq| = |\sigma|dS.$$

По теореме Гаусса:

$$|dN| = \frac{1}{\varepsilon_0} |dq| \quad (\text{предполагается, что проводник находится в вакууме}).$$

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}, \quad (3.6)$$

так как, напряжённость электрического поля вблизи заряженного проводника пропорциональна поверхностной плотности зарядов.

Если проводник находится в безграничной однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , то

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.7)$$

Так как, поверхностная плотность зарядов больше там, где больше кривизна поверхности проводника, напряженность поля оказывается наибольшей вблизи краёв и острых выступов проводника (рис. 3.2).

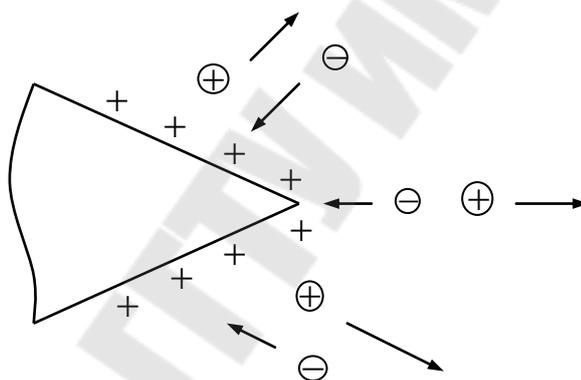


Рис.3.2

Электрическое поле вблизи таких мест может быть столь сильным, что оказывается способным ионизировать молекулы воздуха. Возникает явление, называемое стеканием зарядов с проводника. В общих чертах оно заключается в следующем. Образующиеся в процессе ионизации ионы под действием поля приходят в движение: ионы того же знака, что и заряд острия, перемещаются от острия, ионы противоположного знака – к острию. Первые при своем движении увлекают нейтральные молекулы воздуха, в результате возникает заметное его движение, своеобразный «электрический ветер». Вторые, подойдя к острию, частично нейтрализуют заряд острия, в результате чего поле вблизи острия ослабевает.

На явлении стекания зарядов основано действие молниеотвода. Сильные электрические поля, окружающие тонкие заряженные проволоки или острые выступы, заряженные проводников, нашли прак-

тическое применение в ряде приборов (струнный электрометр, катушка Румфорта, счётчик Гейгера, ионный микроскоп и др.).

Так как избыточные заряды распределяются только по внешней поверхности проводника, то наличие в проводнике каких либо внутренних полостей никак не влияет на характер этого распределения. Равновесное распределение зарядов на полой проводнике будет точно таким же, как и на сплошном при условии, конечно, что внешняя форма сплошного проводника такая же, как и полого.

Свойство избыточных зарядов распределяться только по внешней поверхности проводника также нашло практическое применение. Чтобы заряд, сосредоточенный на некотором проводнике, полностью передать другому проводнику, последнему следует придать форму почти замкнутой плоскости. Если первый проводник ввести внутрь этой полости и коснуться её, то весь заряд этого проводника перейдёт на внешнюю поверхность полости (с момента соприкосновения проводников образуется единый проводник, внутри которого не может быть избыточных зарядов: все они переходят на внешнюю поверхность).

### **3.2. Явление электростатической индукции**

Если не заряженный проводник внести во внешнее электрическое поле, то в проводнике происходит явление электростатической индукции: свободные заряды проводника под действие поля смещаются (положительные – в направлении поля, отрицательные – против поля). В результате на поверхности (и только на поверхности) проводника появляются заряды, называемые индуцированными. (Явление электростатической индукции называют также электризацией через влияние).

Эти заряды создают внутри проводника поле, противоположное по направлению внешнему полю. Разделение зарядов на проводнике происходит до тех пор, пока результирующее электрическое поле в проводнике не исчезнет. Это наблюдается при любых напряженностях внешнего поля. Индуцированные заряды всегда полностью компенсируют внешнее поле внутри проводника. Проводники, образно говоря, «разрушают», «уничтожают» электрическое поле в этой области пространства, которую они сами занимают (связанные заряды компенсируют внешнее поле в диэлектриках лишь частично).

Индуцированные заряды в отличие от связанных зарядов могут,

сняты с проводника, например в результате заземления.

На рисунке 3.3 показано, как это можно сделать:

а) индуктирующий заряд  $q$  (заряд, создающий внешнее поле) вызвал разделение зарядов в проводнике;

б) проводник «заземлили», отрицательные заряды ушли «в землю»;

в) заряд  $q$  удалён: оставшийся на проводнике положительный растекается по его поверхности в соответствии с условием равновесия.

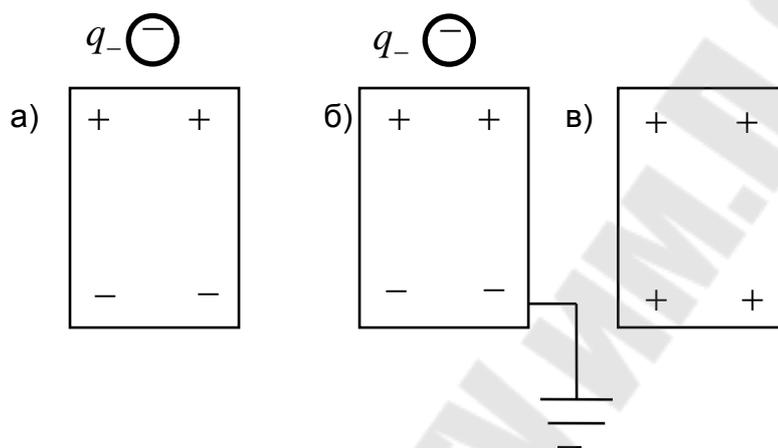


Рис.3.3

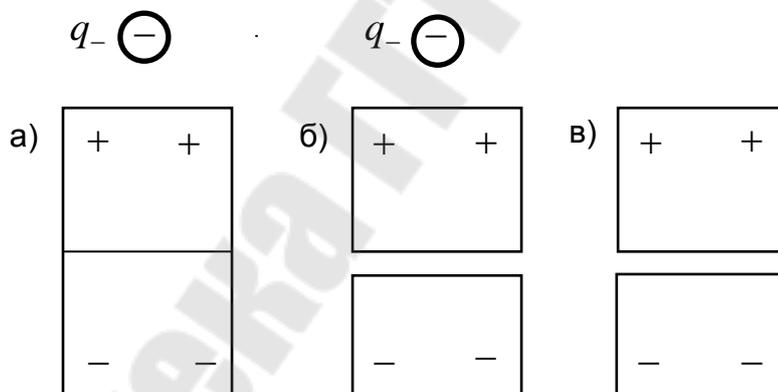


Рис.3.4

Индукцированные заряды в отличие от связанных зарядов могут быть отделены друг от друга, для этого достаточно в присутствии индуктирующего заряда разъединить разноименно заряженные части проводника. Рассмотрим рис. 3.4: а) разделение заряда в проводнике а завершилось; при этом 1 и 2 плотно прижаты друг к другу; б) в при-

сутствии индуцирующего заряда  $q$  заряженные части проводника 1 и 2 слегка раздвинуты; в) заряд  $q$  удален: части 1 и 2 раздвинуты на большое расстояние, заряды на них растекаются по поверхности в соответствии с условием равновесия. Если эти разноименно заряженные части в отсутствии заряда  $q$  снова соединить, то электризация проводника исчезнет, и проводник вновь окажется не заряженным. Это свидетельствует о том, что при электризации через влияние заряды не «создаются», а только перераспределяются.

Поляризованное состояние диэлектрика при определенных условиях может быть сохранено и в отсутствии внешнего электрического поля, например в сегнетоэлектриках. Электризация проводников, обусловленная электростатической индукцией, в отсутствии внешнего поля не может быть сохранена.

Индуцированные заряды могут вызвать перераспределение зарядов, создающих внешнее поле. Это приводит к искажению внешнего поля.

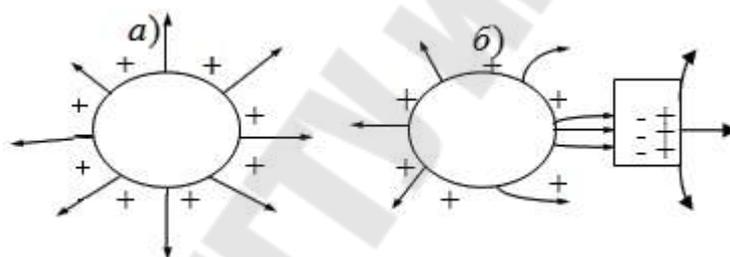


Рис.3.5

На рис. (3.5 а) показано, какими были линии поля заряженного проводящего шара до внесения в это поле незаряженного проводника. После внесения проводника заряд шара перераспределяется: на стороне, обращённой к проводнику, поверхностная плотность заряда увеличилась, на противоположной стороне уменьшилась, в результате чего поле шара стало другим (рис. 3.5 б).

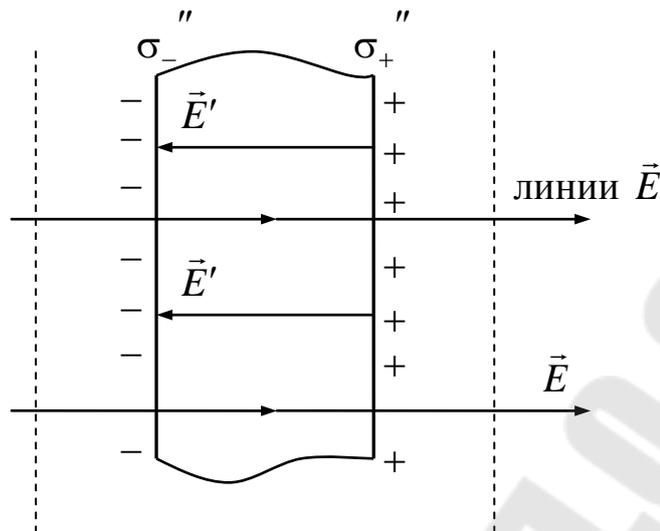


Рис.3.6

Проводник, внесённый в электрическое поле не вызывает перераспределения зарядов, создающих это поле, и следовательно, не искажает это поле, если он заполняет всю область между какими-либо двумя эквипотенциальными поверхностями. В этом случае поля, созданные индуцированными зарядами противоположных знаков, во внешнем пространстве компенсируют друг друга, в результате чего заряды, создающие внешнее поле, не перераспределяются и это поле не искажается. На (рис.3.6) сплошными линиями изображены линии однородного внешнего поля, пунктирами – сечение эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа. Если в это поле внести большую плоскопараллельную металлическую пластину, то заряды, индуцируемые на ее поверхности, образуют две параллельные разноименно заряженные плоскости с одинаковой по абсолютной величине поверхностной плотностью зарядов  $|\sigma_+''| = |\sigma_-''|$ . Как известно, поле такой системы зарядов во внешнем пространстве равно нулю.

Электрическое поле внутри проводника отсутствует независимо от того, сплошной проводник или полый («разрушают» поле в проводнике индуцированные заряды, а они распределяются во внешней поверхности).

Отсутствие поля в полых проводниках используют для электростатической защиты. Чтобы оградить чувствительные приборы к внешним полям, схемы, участки цепей и т.д., их экранируют, т.е. помещают внутрь тонких полых замкнутых проводников, которые, как правило, заземляют. При этом вместо сплошных экранов часто используют проволочную сетку.

Замкнутый полый проводник защищает от действия только тех

полей, которые созданы внешними зарядами. Если избыточные заряды имеются внутри полости, то поле в ней отлично от нуля.

### 3.3. Электроёмкость проводников

Между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует прямо пропорциональная зависимость

$$q = C\varphi. \quad (3.8)$$

Уединённый проводник – проводник, удаленный от других тел на бесконечно большое расстояние. Практически проводник можно считать уединённым, если сообщаемый ему заряд не вызывает сколько-нибудь заметного смещения зарядов в ближайших проводнику телах.

Коэффициент пропорциональности в (3.8) называется электроёмкостью проводника. Из (3.8) следует:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.9)$$

Электроёмкость уединённого проводника – скалярная величина, характеризующая способность проводника накапливать электрический заряд и численно равная заряду, который необходимо сообщить не заряженному проводнику, чтобы потенциал его стал равен единице, при условии, что все другие тела бесконечно удалены и что потенциал бесконечно удалённых точек принят равным нулю. Электроёмкость уединённого проводника зависит от формы и размеров проводника, от диэлектрической проницаемости окружающей проводник среды, но не зависит от материала проводника, его температуры и агрегатного состояния, от размеров и формы внутренних полостей, от заряда и потенциала проводника.

Чтобы рассчитать ёмкость уединённого проводника нужно вычислить потенциал проводника, обусловленный зарядом проводника. Затем заряд проводника разделить на потенциал.

Найдём ёмкость уединённого шара радиуса  $r_0$ , погруженного в однородную безграничную среду с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Сообщим шару заряд  $q$ . Шар приобретает потенциал относительно бесконечности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0}. \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.9), получим:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_0.$$

Замечание. Понятие емкости применимо только к проводникам, т.к. заряженному диэлектрику нельзя приписать определенного потенциала: он в разных точках диэлектрика разный.

### 3.4. Взаимная ёмкость. Конденсатор

Уединённые проводники обычных размеров обладают ничтожно малой ёмкостью и поэтому не способны накапливать сколько –нибудь заметные электрические заряды. Между тем часто возникает потребность в достаточно «мощных» источниках зарядов.

Если проводник не является уединённым, то его ёмкость зависит помимо всего прочего и от относительного расположения окружающих проводник тел. В самом деле, если вблизи данного проводника оказываются какие –либо тела, то при сообщении проводнику заряда на этих телах появляются (вследствие индукции или поляризации) индуцированные или связанные заряды, причём ближайшими к наводящему заряду  $q$  оказываются заряды противоположного знака (рис. 3.7).

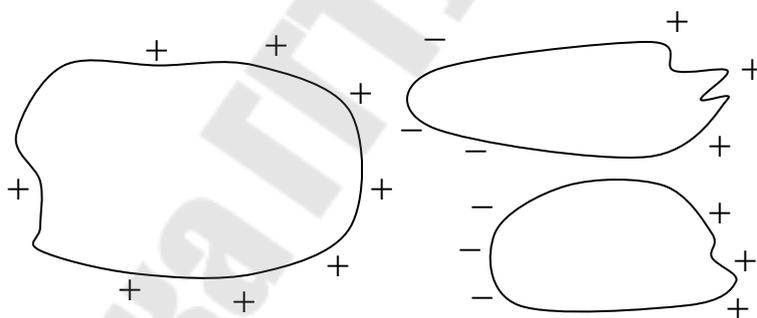


Рис.3.7

Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом  $q$  в том месте, где находится проводник. В результате потенциал проводника уменьшается, а ёмкость увеличивается. Эффект особенно усиливается, если к заряженному проводнику приближать тела, заряженные разноименно с зарядом проводника (поле проводника в этом случае особенно сильно ослабляется, при чем не только в том месте, где находится проводник, но и во всем пространстве).

Располагая соответствующим образом проводники и заполняя пространство между ними диэлектриками с большой диэлектрической проницаемостью и высокой электрической прочностью (большим сопротивлением на пробой), можно сосредотачивать на проводниках

значительные заряды. Практический интерес представляет система из двух близко расположенных проводников, заряды которых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. В таком случае, говорят – проводники обладают взаимной ёмкостью.

Взаимной ёмкостью двух проводников называется величина, численно равная абсолютной величине заряда, который необходимо перенести с одного проводника на другой, чтобы абсолютная величина разности потенциалов между ними стала равной единице:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\varphi|}. \quad (3.11)$$

где  $|\Delta\varphi|$  – разность потенциалов между проводниками.

Взаимная ёмкость двух проводников зависит от их формы, размеров, взаимного расположения, диэлектрической проницаемости среды и от расположения окружающих проводников тел (на потенциалы проводников оказывают влияние поля индуцированных и связанных зарядов этих тел).

Чтобы взаимная ёмкость проводников не зависела от окружающих тел, нужно, чтобы электрическое поле, созданное зарядами проводников, было сосредоточено только между проводниками. Это достигается тем, что проводникам придают форму либо двух близко расположенных параллельных пластин, либо двух коаксиальных цилиндров, либо двух концентрических сфер и сообщают им равные по абсолютной величине и противоположные по знаку заряды. Такая система проводников (обкладок) называется конденсатором. В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические, цилиндрические и т.п. конденсаторы.

Ёмкостью конденсатора называется физическая величина численно равная отношению заряда конденсатора к абсолютной величине разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\varphi|}. \quad (3.12)$$

Ёмкость конденсатора зависит от формы, размеров и взаимного расположения обкладок, а также проницаемости  $\varepsilon$  диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. При зарядке конденсатора одна из обкладок обычно заземляется. Если не заземлённой обкладке сообщается заряд  $q_+$ , то на заземлённой автоматически появляется заряд  $q_-$ , равный по абсолютной величине  $q_+$ .

Ёмкость конденсатора рассчитывается следующим образом. Предполагают, что обкладкам сообщаются заряды  $q_+$  и  $q_-$ . Находят разность потенциалов между обкладками  $\Delta\varphi$ . Затем заряд конденсатора делят на абсолютную величину  $|\Delta\varphi|$ .

*Найдём ёмкость плоского конденсатора.* Пусть  $S$  – площадь одной обкладки;  $r_0$  – расстояние между обкладками;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика (диэлектрик однородный изотропный и заполняет всё пространство между обкладками);  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – потенциалы обкладок.

По 1.87 разность потенциалов между двумя параллельными бесконечными плоскостями по абсолютной величине равна

$$|\Delta\varphi| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0\varepsilon} r_0. \quad (3.13)$$

где  $|\sigma|$  – абсолютная величина поверхностной плотности заряда;  $r_0$  – расстояние между плоскостями.

Если расстояние между пластинами плоского конденсатора мало по сравнению с линейными размерами пластин, то искажением поля вблизи краев пластин можно пренебречь и считать, что разность потенциалов равна (3.13). Учитывая, что  $|\sigma| = \frac{q}{S}$ , получим:

$$|\Delta\varphi| = \frac{|q|}{\varepsilon_0\varepsilon S} r_0. \quad (3.14)$$

Подставив в (3.14) в (3.12), найдем  $C$ :

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{r_0}. \quad (3.15)$$

Ёмкость плоского конденсатора зависит от площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости диэлектрика.

*Найдём ёмкость сферического конденсатора.*

Пусть  $r_1$  – радиус внутренней обкладки;

$r_2$  – радиус внешней обкладки;

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

При наличии однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все пространство между сферами, разность потенциалов между сферами меньше разности потенциалов между ними в отсутствие диэлектрика (1.89) в  $\varepsilon$  раз, т.е.

$$|\Delta\varphi| = \frac{|q|(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}. \quad (3.16)$$

Разделив  $|q|$  на  $|\Delta\varphi|$ , найдем ёмкость сферического конденсатора.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}. \quad (3.17)$$

Ёмкость сферического конденсатора зависит от радиусов внутренней и внешней обкладок (она тем больше, чем больше радиусы обкладок и чем меньше расстояние между ними) и от электрических свойств диэлектрика.

Преобразуем (3.17), разделив числитель и знаменатель на  $r_2$ :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}$$

При  $r_2 = \infty$  (практически при  $r_2 \gg r_1$ )

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1, \quad (3.18)$$

т.е. внутреннюю обкладку в этом случае можно рассматривать как уединённый шар. Из (3.16) и (3.15) видно, что при любом конечном значении  $r_2$  ёмкость сферического конденсатора больше ёмкости уединённого шара радиуса  $r_1$ .

Если расстояние между обкладками сферического конденсатора значительно меньше их радиусов, то ёмкость такого конденсатора можно приближенно рассчитывать по (3.15), понимая под  $S$  площадь одной из обкладок (любой), а под  $r_0$  расстояние между обкладками.

Кроме ёмкости конденсаторы характеризуются еще рабочей, испытательной и пробивной разностями потенциалов. Рабочая разность потенциалов – разность потенциалов, которую конденсатор должен выдержать долгое время (в рабочем режиме).

Испытательная разность потенциалов – разность потенциалов, которую конденсатор должен выдержать при кратковременном испытании (примерно до 1 минуты). Испытательная разность потенциалов обычно превышает рабочую в 2 – 3 раза.

Пробивная разность потенциалов – разность потенциалов, при которой наступает пробой диэлектрика (проскакивание искры между обкладками, в результате чего диэлектрик теряет свои изолирующие свойства).

Все названные характеристики конденсаторов зависят от конструкции обкладок и от электрической прочности диэлектрика. Электрическая прочность, или пробивная напряжённость, – это предельная для данного диэлектрика напряжённость поля, при которой диэлектрик ещё сохраняет свои изолирующие свойства. Так, электрическая прочность радио фарфора составляет  $1.5 - 2 \cdot 10^7$  (В/м).

### 3.5. Соединение конденсаторов

Батарея конденсаторов – несколько соединённых друг с другом конденсаторов. Заряд батареи конденсаторов – абсолютная величина заряда, который проходит по проводнику, соединяющему положительный и отрицательный полюсы батареи.

Ёмкость батареи – величина, численно равная отношению заряда батареи к абсолютной величине разности потенциалов действующей на батарею:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\phi|}. \quad (3.19)$$

Соединение конденсаторов может быть параллельным и последовательным (рис. 3.8, рис. 3.9).

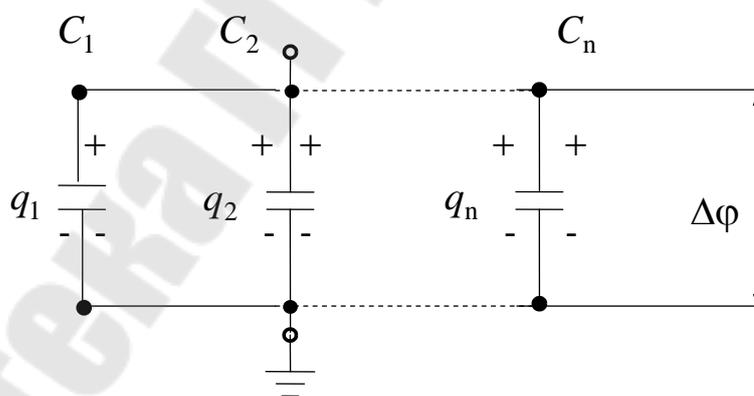


Рис.3.8

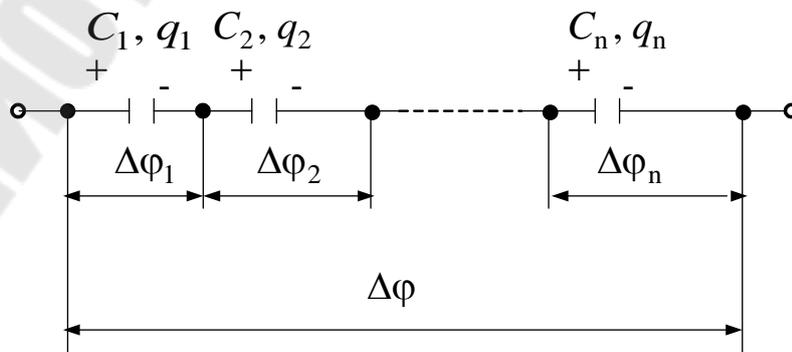


Рис.3.9

После зарядки параллельно соединённых конденсаторов на каждом конденсаторе будет действовать одна и та же разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$|q| = \sum |q_i| = \sum C_i |\Delta\varphi| = |\Delta\varphi| \sum C_i. \quad (3.20)$$

Подставив (3.20) в (3.19), получим:

$$C = \sum C_i. \quad (3.21)$$

При параллельном соединении конденсаторов ёмкость батареи равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов.

Заряды, накапливаемые при этом отдельными конденсаторами пропорциональны ёмкостям  $|q_1| : |q_2| : \dots : |q_n| = C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_n$ . (3.21)

При зарядке последовательно соединённых конденсаторов все конденсаторы получают один и тот же заряд. В самом деле, если крайней обкладке первого конденсатора сообщить заряд  $q_+$ , то на другой обкладке этого конденсатора по индукции появится заряд  $q_-$ , причём абсолютная величина  $|q_+| = |q_-|$ . Так как вторая обкладка первого конденсатора и первая обкладка второго образуют единый электронеутральный проводник, то на второй обкладке второго конденсатора появится заряд  $q_+$ , равный положительному заряду первого конденсатора. То же самое произойдёт со всеми другими конденсаторами. Разность потенциалов, действующая на батарее по абсолютной величине равна:

$$|\Delta\varphi| = \sum |\Delta\varphi_i| = \sum \frac{|q|}{C_i} = |q| \sum \frac{1}{C_i}. \quad (3.22)$$

Заряд батареи равен заряду одного конденсатора, т.е.  $|q|$ . Подставив (3.22) в (3.19), получим:

$$C = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}}, \quad (3.23) \quad \text{или} \quad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (3.24)$$

При последовательном соединении конденсаторов величина обратная ёмкости батареи, равна сумме обратных ёмкостей отдельных конденсаторов. Разности потенциалов, действующие при этом на конденсаторах, обратно пропорциональны ёмкостям конденсаторов:

$$|\Delta\varphi_1| : |\Delta\varphi_2| : \dots : |\Delta\varphi_n| = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \dots : \frac{1}{C_n}. \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) справедливо только в том случае, если ди-

электрики в конденсаторах идеальные, т.е. совершенно не проводят ток. Реальные заполнители конденсаторов, хотя и слабо, но проводят ток. Поэтому в цепях постоянного тока разности потенциалов, действующей на последовательно соединенных конденсаторах, зависят не от ёмкости конденсаторов, а от сопротивления диэлектриков в них.

### 3.6. Энергия системы неподвижных точечных зарядов

Рассмотрим два неподвижных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов находится в электростатическом поле, созданном другим зарядом. Пользуясь (1.52), энергию взаимодействия двух зарядов можно выразить через потенциалы соответствующих полей.

Если считать, что поле создано зарядом  $q_1$ , то потенциальная энергия рассматриваемых зарядов будет равна:

$$W = q_2\varphi_2, (3.26)$$

где  $\varphi_2$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в той точке, где находится заряд  $q_2$ . Если же полагать, что поле создано зарядом  $q_2$ , то потенциальная энергия этой же системы зарядов будет равна:

$$W = q_1\varphi_1, (3.27)$$

где  $\varphi_1$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в той точке, где находится заряд  $q_1$ . Из (3.26) и (3.27) следует, что  $q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$ . (3.28)

Запишем (3.26) в следующем виде:

$$W = \frac{q_2\varphi_2}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2}.$$

Так как  $q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$ , то  $W = \frac{q_1\varphi_1}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$ . (3.29)

Полученный результат можно обобщить на систему, состоящую из любого числа точечных зарядов. Потенциальная энергия  $n$  точечных зарядов выражается формулой:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i\varphi_i, (3.30)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в той точке, где находится заряд  $q_i$ .

### 3.7. Собственная энергия заряжённого проводника и конденсатора

Заряд, находящийся на проводнике можно рассматривать как систему взаимодействующих между собой точечных зарядов. Такая система обладает потенциальной энергией. Потенциальная энергия, которой обладает заряжённый проводник в отсутствии внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника. Найдем выражение для собственной энергии проводника. Будем заряжать проводник, перенося заряды малыми порциями  $dq$  с нулевого уровня потенциала на поверхность проводника. Пусть очередная порция  $dq$  переносится, когда на проводнике уже имеется некоторый заряд  $q$ , и проводник обладает потенциалом  $\varphi$ . Элементарная работа, совершаемая силами поля, при этом равна

$$dA = dq(0 - \varphi) = -dq\varphi.$$

Приращение заряда проводника выразим через ёмкость проводника и приращение потенциала:

$$dq = Cd\varphi.$$

$$\text{Следовательно, } dA = -C\varphi d\varphi. \quad (3.31)$$

Потенциальная энергия определяется по заданной консервативной силе неопределённым интегралом:

$$W = -\int \vec{F}d\vec{r} + const \text{ или } W = -\int dA + const. \quad (3.32)$$

Поскольку  $\vec{F}d\vec{r} = dA$ . Подставив в (3.32) выражение (3.31) и проинтегрировав его, получим:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} + const. \quad (3.33)$$

$$\text{Примем } const = 0. \text{ Тогда } W = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (3.34)$$

Равенство (3.30) – искомая собственная энергия заряженного проводника. Из (3.7) следует  $\varphi = \frac{q}{C}$ . Подставив это выражение в (3.34), получим:

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.35)$$

По (3.8)  $C = \frac{q}{\varphi}$ . Используя это соотношение, формуле можно

придать вид:

$$W = \frac{q\Phi}{2}. \quad (3.36)$$

Найдем выражение для собственной энергии конденсатора. Так как заряды обкладок конденсатора равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, то процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малых порций заряда  $dq$  с одной обкладки на другую. Элементарная работа, совершаемая силами поля при переносе заряда  $dq$ , равна

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = -dq\Delta\varphi, \quad (3.37)$$

где  $\Delta\varphi$  – разность потенциалов между обкладкой, на которую заряд переносится, и обкладкой, с которой заряд снимается.

Потенциальная энергия конденсатора равна

$$W = -\int dA + const$$

или учитывая (3.37),

$$W = \int dq\Delta\varphi + const. \quad (3.38)$$

Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  выразим через заряд конденсатора и его ёмкость:

$$|\Delta\varphi| = \frac{q}{C}.$$

$$\text{Следовательно, } W = \int \frac{q dq}{C} + const, \quad (3.39)$$

$$\text{или } W = \frac{q^2}{2C} + const.$$

Примем потенциальную энергию незаряжённого конденсатора равную нулю.

$$\text{Тогда } const = 0 \text{ и } W = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.40)$$

Учитывая, что  $|q| = C|\Delta\varphi|$  получаем

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{|q||\Delta\varphi|}{2}. \quad (3.41)$$

### 3.8. Энергия электрического поля

Постараемся выяснить вопрос о локализации собственной энергии проводника конденсатора. Где пространственно сосредоточена

эта энергия: на зарядах или в окружающем проводник электрическом поле?

Решить этот вопрос электростатическими опытами невозможно, так как электростатическое поле неотделимо от создающих его зарядов. Изучение же переменных электрических полей (такие поля могут существовать в отрыве от зарядов). Позволяет заключить, что носителем энергии является поле.

Преобразуем выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряжённость или индукция. Сделаем это на примере плоского конденсатора ёмкостью  $C$ . По (3.41) энергия конденсатора равна:

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}, \quad (3.42)$$

где  $\Delta\varphi$  – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Ёмкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{r_0}, \quad (3.43)$$

где  $S$  – площадь одной обкладки;  
 $r_0$  – расстояние между обкладками.

Поле плоского конденсатора однородно. Поэтому:

$$|\Delta\varphi| = Er_0, \quad (3.44)$$

где  $E$  – модуль напряженности поля. Подставив выражение для  $C$  и  $|\Delta\varphi|$  в (3.42), получим:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S r_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (3.45)$$

где  $V = S \cdot r_0$  – объём, занимаемый полем конденсатора.

Пространственное распределение энергии характеризуется плотностью энергии  $\omega$  – энергией поля, заключенной в единице объёма. Если энергия распределена равномерно, то плотность энергии вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{W}{V}. \quad (3.46)$$

При неравномерном распределении энергии – по формуле:

$$\omega = \frac{dW}{dV}. \quad (3.47)$$

Разделив (3.45) на  $V$ , получим выражение для плотности энер-

гии электрического поля:

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (3.48)$$

Полученное соотношение справедливо для любого поля. Принимая во внимание, что в изотропном диэлектрике

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \text{ плотность энергии можно выразить так:}$$

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.49)$$

## Глава 4. Законы постоянного тока

### 4.1. Понятие об электрическом токе

Электрическим током называется любое упорядоченное движение носителей электрического заряда.

Электрический ток называется макроскопическим или током свободных зарядов, если создается движением свободных носителей заряда. Макро ток, создаваемый движением свободных зарядов в макроскопическом проводнике, называется током проводимости. Ток проводимости в металлах обусловлен движением электронов, в жидких проводниках – движением положительных и отрицательных ионов, в газах – ионов и электронов.

Для того чтобы в проводнике возник электрический ток необходимо создать в нем электрическое поле. При наличии поля на хаотическое движение свободных зарядов накладывается: направленное движение: положительные заряды перемещаются в направлении поля, т.е. в сторону убывания потенциала, отрицательные – против поля (в сторону возрастания потенциала).

Наличие электрического поля и свободных электрических зарядов – неперенные условия существования тока.

Поскольку электрический ток может быть обусловлен движением и положительных и отрицательных зарядов, то необходимо условиться о том, что принимать за направление тока. Независимо от природы носителей заряда за направление тока принимается направление движения положительных зарядов.

Количественной характеристикой интенсивности движения зарядов является сила тока  $i$  – скалярная физическая величина, модуль

которой равен абсолютной величине заряда, прошедшего через данную поверхность  $S$  за единицу времени. Если  $dq$  – заряд, прошедший через  $S$  за время  $dt$ , то:

$$|i| = \frac{|dq|}{dt}. \quad (4.1)$$

Сила тока – величина алгебраическая: она может быть положительной и отрицательной. Если направление тока образует с нормалью к элементам  $S$  острые углы, то  $i > 0$ , если тупые, то  $i < 0$  (направления нормалей выбираются произвольно). Обычно интересуются током, протекающим через площадь поперечного сечения проводника, поэтому под силой тока в проводнике будем подразумевать именно эту величину.

Если ток создается и положительными и отрицательными носителями заряда, то

$$|i| = \frac{|dq_+|}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt}, \quad (4.2)$$

где  $dq_+$  и  $dq_-$  – положительный и отрицательный заряды, прошедшие через рассматриваемую поверхность за время  $dt$ .

Ток называется стационарным или постоянным, если он не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Постоянный ток обозначается буквой  $I$ . В случае постоянного тока дифференциальное соотношение (4.1) заменяется более простым:

$$|I| = \frac{|q|}{t}, \quad (4.3)$$

где  $q$  – заряд, прошедший через данную поверхность  $S$  за конечный промежуток времени  $t$ .

Ток называется пульсирующим, если он изменяется только по модулю.

Ток называется переменным, если он изменяется и по модулю и по направлению. Различают ещё и квазистационарный ток. Это переменный ток, но изменяющийся столь медленно, что к нему можно применять законы постоянного тока.

Может случиться, что ток распределяется по рассматриваемой поверхности не равномерно. Для характеристики распределения тока по поверхности, сквозь которую он течёт, вводится векторная величина, называемая плотностью тока.

Плотность тока – вектор, численно равный модулю тока, прошедшего через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к электрическому полю, вызвавшему ток, и совпадающий по направлению с направлением тока (т.е.

с направлением движения положительных зарядов).

Если  $dS$  – элементарная площадка,  $\alpha$  – угол между нормалью к этой площадке и направлением поля в том месте, где расположена площадка,  $dI$  – ток, протекающий через  $dS$  (рис. 4.1), то числовое значение вектора равно:

$$j = \frac{|dI|}{dS \cos \alpha} = \frac{|dI|}{dS_{\perp}}, \quad (4.4)$$

где  $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$  – проекция  $dS$  на плоскость, перпендикулярную к линиям поля.

Модуль плотности тока определяет абсолютную величину заряда, прошедшего за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению упорядоченного движения носителей заряда. Из (4.4) следует, что

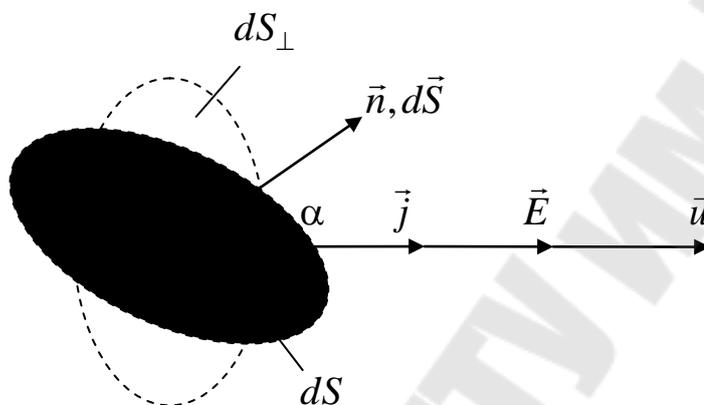


Рис. 4.1

ток, протекающий через элементарную площадку  $dS$ , ориентированную в проводнике произвольно равен:

$$dI = j dS \cos \alpha = \vec{j} d\vec{S}, \quad (4.5)$$

где  $d\vec{S}$  – вектор, численно равный  $dS$  и направленный по нормали к площадке  $dS$ .

Чтобы найти ток, протекающий через всю поверхность  $S$ , например, через площадь поперечного сечения проводника, нужно проинтегрировать (4.5) по  $S$ :

$$I = \int \vec{j} d\vec{S}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) видно, что ток, протекающий через данную поверхность  $S$ , есть поток вектора  $\vec{j}$  через эту поверхность.

## 4.2. Закон Ома для однородного участка цепи

Георг Ом (Германия) в 1828 г. экспериментально установил интегральный закон, согласно которому сила электрического тока, текущего от

точки 1 к точке 2 однородного участка цепи (однородным называется участок цепи, в котором на заряды действуют только электрические силы), пропорциональна разности потенциалов на концах этого участка:

$$I_{12} = \gamma_{12}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.7)$$

Положительная величина  $\gamma_{12}$  называется электрической проводимостью участка. Она численно равна модулю силы тока в участке при единичной разности потенциалов на его концах. Величина, обратная проводимости, называется электрическим сопротивлением  $1/\gamma_{12} = R_{12}$ .

$$\text{Тогда: } I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}. \quad (4.8)$$

Сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна разности потенциалов, приложенной к его концам, и обратно пропорциональна сопротивлению участка.

Сопротивление зависит от формы и размеров проводника, по которому течет ток, его химического состава и физического состояния (температуры, внешнего давления и т.д.).

Если проводник однородный (однородный проводник, свойства которого одинаковы во всех его точках) и всюду имеет одинаковое поперечное сечение, его сопротивление при данной температуре рассчитывается по формуле:

$$R_t = \rho_t \frac{l}{S}, \quad (4.9)$$

где  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $\rho_t$  – удельное сопротивление.

Если  $|l| = 1, |S| = 1$ , то  $|\rho_t| = |R_t|$ , т.е. удельное сопротивление численно равно сопротивлению проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения.

Для большинства проводников удельное сопротивление изменяется с температурой по линейному закону:

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ), \quad (4.10)$$

где  $\rho_t$  – удельное сопротивление при  $t^\circ\text{C}$ ;  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ;  $t^\circ\text{C}$  – температура по Цельсию;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления (численно равен относительному изменению удельного сопротивления при изменении температуры проводника на  $1^\circ\text{C}$ ).

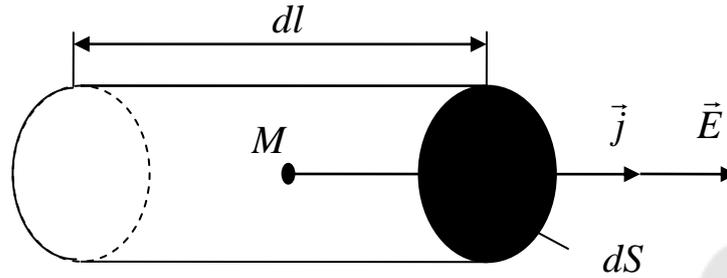


Рис. 4.2

Подставив (4.9) в (4.10) получим:

$$R_t = \rho_0 (1 + \alpha t^\circ) \frac{l}{S} = R_0 (1 + \alpha t^\circ), \quad (4.11)$$

где через  $R_0$  обозначено сопротивление проводника при  $0^\circ \text{C}$ :

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{S}$$

Вернемся к формуле (4.7) Эта формула интегральная. В ней отражается связь силы тока, протекающего через любое сечение проводника с разностью потенциалов на его концах, т.е. связь между величинами, относящимися к разным точкам проводника. Приведем (4.7) к дифференциальному виду. Выделим внутри проводника в окрестности интересующей нас точки  $M$  элементарный объём в форме прямого цилиндра, образующие которого параллельны вектору в точке  $M$  (рис 4.2). Пусть длина выделенного цилиндра  $dl$  площадь основания  $dS$  (электрическое поле такого цилиндра можно считать однородным). Сопротивление выделенного объёма равно:

$$dR = \rho \frac{dl}{dS}$$

Абсолютное значение разности потенциалов между торцами цилиндра равно:

$$|d\varphi| = Edl,$$

где  $E$  – модуль напряжённости поля в точке  $M$ .

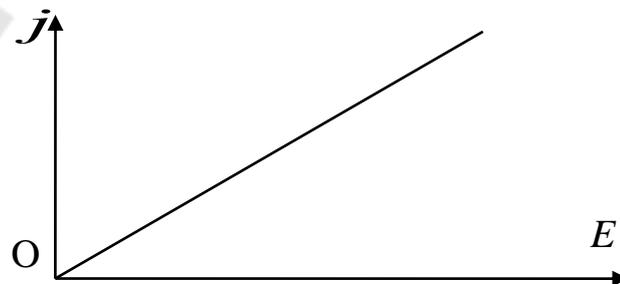


Рис. 4.3

Ток, протекающий через поперечное сечение цилиндра, по абсолют-

ной величине равен:

$$|dI| = j dS$$

Подставив это выражение в (4.7), получим:

$$jdS = \frac{dSEdl}{\rho dl} \text{ или } j = \frac{1}{\rho} E. \quad (4.12)$$

Вектор плотности тока в каждой точке изотропного проводника направлен так же, как и вектор напряжённости, поэтому равенство можно записать в векторном виде:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (4.13)$$

Величина обратная удельному сопротивлению, называется удельной проводимостью или удельной электропроводностью  $1/\rho = \sigma$  (4.14),

тогда:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.15)$$

Формулы (4.12) и (4.15) – закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме: плотность тока в каждой точке такого участка пропорциональна напряженности электрического поля в этой же точке.

Линейная зависимость для металлов сохраняется вплоть до очень сильных полей. На рисунке 4.3 приведён график зависимости  $j$  от  $E$ , а на рисунке 4.4 – график зависимости  $|I|$  от  $|\Delta\phi|$  для металлов.

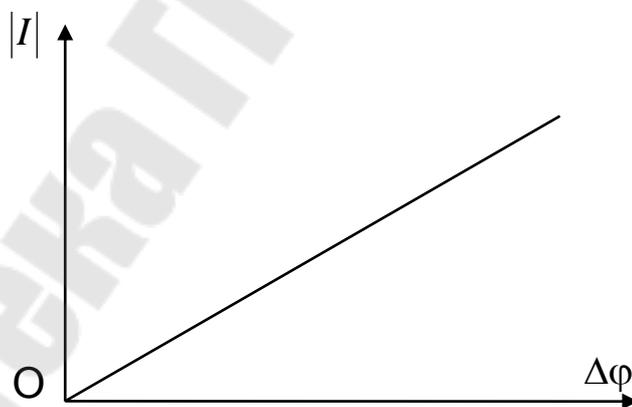


Рис. 4.4

### 4.3. Закон Джоуля – Ленца

При прохождении электрического тока по проводнику энергия тока превращается в другие виды энергии: во внутреннюю энергию проводника и окружающей среды (при нагревании), в механическую энергию проводника (при движении проводника в магнитном поле) и т.д.

Если проводник, по которому течет ток, неподвижен, в проводнике под действием тока не происходит химических реакций и температура проводника не изменяется (стационарное состояние), то вся энергия, выделяющаяся в проводнике, отдаётся в окружающую среду в форме теплопередачи. Э.Х. Ленц (Россия) и Д.П. Джоуль (Англия) установили экспериментальный закон, согласно которому количество тепла, отдаваемого проводником в окружающую среду, пропорционально сопротивлению проводника, квадрату силы тока и времени прохождения тока:

$$Q_{12} = I^2 R_{12} t. \quad (4.16)$$

Все величины в (4.16) измерены в единицах одной и той же системы.

Выделение тепла при прохождении тока по проводнику происходит за счёт работы тока. Если участок цепи, образованный проводником, однородный (не содержит источника), то эта работа совершается силами электростатического поля, существующего в проводнике. Убедимся в этом. Представим  $I^2 R_{12} t$  в выражении (4.16) как  $(IR_{12})(It)$ . Произведение  $IR_{12}$  есть разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , действующая на концах проводника, величина  $It$  есть заряд  $q$ , перенесенный током за время  $t$ . Следовательно:

$$Q_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Но  $q(\varphi_1 - \varphi_2)$  есть работа сил электростатического поля. Таким образом:

$$Q_{12} = A_{12}. \quad (4.17)$$

Формула (4.16) интегральная. Преобразуем ее к дифференциальному виду. Для этого вновь выделим внутри проводника элементарный объём в виде прямого цилиндра, образующие которого параллельны вектору плотности тока и подсчитаем количество тепла, которое выделяет этот объём за время  $dt$ . Это количество в соответствии с законом Джоуля – Ленца равно:

$$dQ = (jdS)^2 \cdot \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt. \quad (4.18)$$

Здесь  $jdS$  – ток, протекающий через поперечное сечение выделенного цилиндра;  $\rho \frac{dl}{dS}$  – сопротивление выделенного объёма;  $dV = dldS$  – объём цилиндра.

Количество тепла, выделяемое единицей объёма проводника за

единицу времени, называется плотностью тепловой мощности тока:

$$\omega = \frac{dQ}{dVdt}. \quad (4.19)$$

Подставив сюда вместо  $dQ$  соответствующее выражение, на основании (4.19), получим:

$$\omega = \rho j^2. \quad (4.20)$$

Наконец, учитывая, что  $j = \sigma E$  и  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  получим:

$$\omega = \sigma E^2. \quad (4.21)$$

Равенство (4.21) – закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме: плотность тепловой мощности тока в данной точке проводника пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой же точке.

#### 4.4. Последовательное и параллельное соединение проводников

Закономерности, имеющие место при последовательном и параллельном соединении проводников (рис. 4.5), вытекают из законов сохранения энергии и заряда. Эти закономерности достаточно хорошо известны из курса физики средней школы. Соотношения, характеризующие последовательное и параллельное соединения потребителей тока, приведены в таблице 4.1

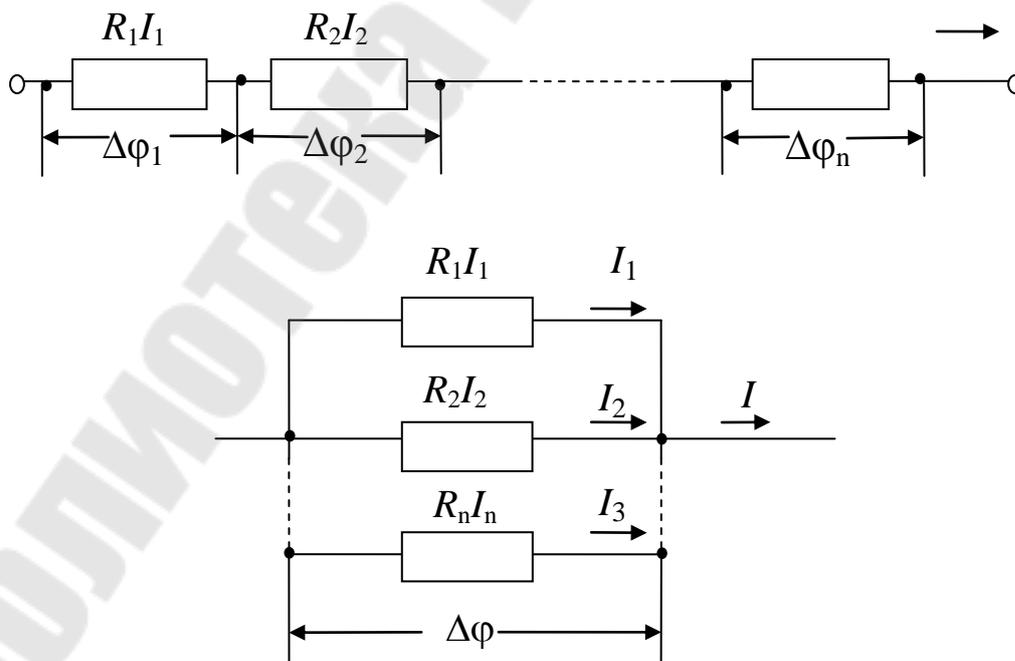


Рис. 4.5

Соотношения, характеризующие последовательное и параллельное соединение проводников

Таблица 4.1

Параметры цепи	Последовательное соединение	Параллельное соединение
Ток	$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$	$I_1 + I_2 + \dots + I_n = I$
Напряжение	$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_n = \Delta\varphi$	$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \dots = \Delta\varphi_n = \Delta\varphi$
Сопротивление	$R_1 + R_2 + \dots + R_n = R$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}$
Мощность	$P_1 + P_2 + \dots + P_n = P$	$P_1 + P_2 + \dots + P_n = P$

#### 4.5. Электродвижущая сила источника тока, разность потенциалов, напряжение

Для возникновения в проводнике электрического тока необходимо, чтобы внутри проводника существовало электрическое поле, признаком которого является наличие разности потенциалов на концах проводника.

Создать электрическое поле в электрической цепи можно за счет имеющихся в ней зарядов. Для этого достаточно разделить заряды противоположных знаков, сосредоточив в одном месте избыточный положительный заряд, в другом – отрицательный (чтобы создать заметные поля, достаточно разделить ничтожно малую часть зарядов).

Разделение разноименных зарядов не может быть осуществлено силами электростатического взаимодействия, т.к. эти силы не только не разъединяют, а наоборот, стремятся соединить заряды противоположных знаков, что неизбежно приводит к выравниванию потенциалов и исчезновению поля в проводниках. Разделение разноименных зарядов в электрической цепи может быть осуществлено только силами не электростатического происхождения. Силы, разделяющие заряды в электрической цепи, создающие в ней электростатическое поле, называются сторонними, или электро разделительными. Устрой-

ства, в которых действуют сторонние силы, называются источниками тока.

Природа сторонних сил может быть различной. В одних источниках эти силы обусловлены химическими процессами (гальванические элементы), в других – диффузией носителей заряда и контактными явлениями (контактные ЭДС), в третьих – наличием вихревого электрического поля (электрические генераторы) и т.д.

Сторонние силы действуют на заряды только в источнике тока, причём там они действуют либо на всем пути следования зарядов через источник, либо на отдельных участках. В связи с этим говорят об источниках с распределёнными и сосредоточенными сторонними силами. Примером источника с распределёнными сторонними силами может служить электрический генератор – в нем эти силы действуют на всей длине обмотки якоря; примером источника с сосредоточенными сторонними силами может служить гальванический элемент – в нем эти силы действуют лишь в тончайшем слое, примыкающем к электродам.

Поскольку сторонние силы действуют только в источнике, а электростатические – и в источнике и во внешней цепи, то во всякой цепи имеются участки, где на заряды одновременно действуют и сторонние и электростатические силы, и участки, где действуют только электростатические силы. Участок цепи, в котором на заряды действуют только электростатические силы, называется, как уже говорилось однородным. Участок, в котором на заряды одновременно действуют и электростатические и сторонние силы, называется неоднородным. Иными словами, неоднородный участок – это участок, содержащий источник тока. На рисунке 4.6 изображена электрическая цепь. Штриховкой покрыта область, в которой действуют и электростатические и сторонние силы (это источник тока, внутренняя часть цепи); не покрыта штриховкой область, где действуют только электростатические силы (внешний участок цепи). В источнике тока перемещение зарядов обусловлено действием и электростатических и сторонних сил, во внешней цепи – только действием электростатических.

Выберем в электрической цепи произвольный неоднородный участок 1 – 2. При перемещении зарядов по этому участку электростатические и сторонние силы совершают работу. Работу сторонних сил характеризует электродвижущая сила (сокращенно – ЭДС). Электродвижущей силой на данном участке цепи 1 – 2 называется скаляр-

ная физическая величина, численно равная работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{\text{стор.12}}}{q_+}. \quad (4.22)$$

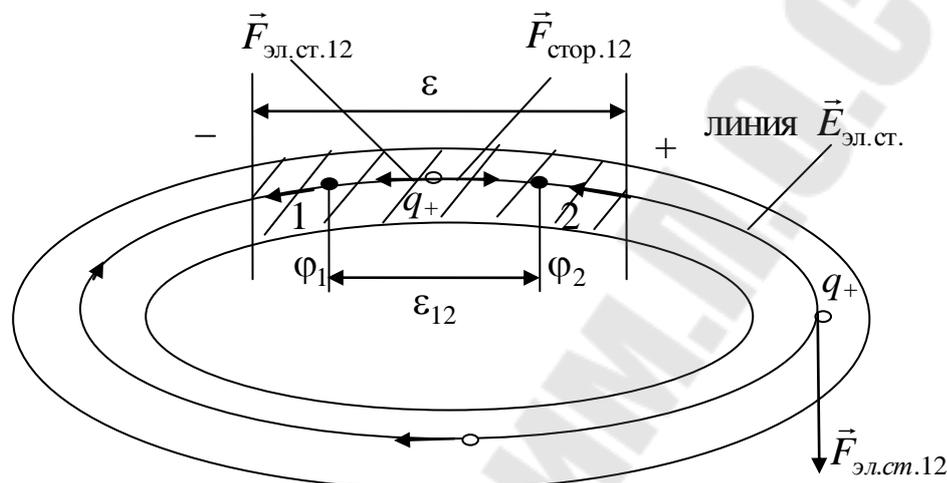


Рис. 4.6

Работу электростатических сил характеризует разность потенциалов. Разностью потенциалов между точками 1 и 2 электрической цепи называется скалярная физическая величина, численно равная убыли потенциальной энергии единичного положительного заряда при его перемещении из точки 1 в точку 2 или, что то же самое, равная работе, совершаемой электростатическими силами при перемещении заряда 1 в точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{эл.ст.12}}}{q_+}. \quad (4.23)$$

Совместную работу сторонних сил и электростатических сил на данном участке цепи характеризует напряжение.

Напряжением  $U_{12}$  на данном участке 1-2 называется физическая величина численно равная алгебраической сумме работ, совершаемых электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$U_{12} = \frac{A_{\text{эл.ст.12}}}{q_+} + \frac{A_{\text{стоп.12}}}{q_+}, \quad (4.24)$$

или учитывая (4.22) и (4.23):

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (4.25)$$

Если сопротивление неоднородного участка 1 – 2 равно  $R_{12}$  и по нему течёт ток  $I$ , то напряжение на этом участке равно произведению силы тока на сопротивление:  $IR_{12}$ . Покажем это, воспользовавшись законом сохранения энергии. Если ток в цепи стационарный, а рассматриваемый участок неподвижен и его температура не изменяется, то единственным результатом работы тока на этом участке будет выделение тепла. Полная работа тока, складывающаяся из работ электростатических и сторонних сил за время  $t$  равна количеству выделившегося тепла:

$$A_{12} = Q_{12}$$

Согласно (4.24) работа равна:

$$A_{12} = q[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}], \quad \text{или учитывая, что } q = It:$$

$$A_{12} = It[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}].$$

По закону Джоуля – Ленца  $Q_{12} = I^2 R_{12} t$

Приравнявая, правые части последних выражений и сокращая  $It$ , получим:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} = IR_{12}, \quad (4.26)$$

где  $(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$ , по определению, – напряжение на участке 1 – 2.

Таким образом, напряжение равно произведению силы тока на сопротивление участка:

$$U_{12} = IR_{12}.$$

Решив (4.25) относительно  $I$ , получим выражение закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R_{12}}. \quad (4.27)$$

Ток, разность потенциалов и ЭДС в этой формуле – величины алгебраические. Чтобы отразить это, запишем (4.27) в виде:

$$\pm I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R_{12}}. \quad (4.28)$$

(формула записана для случая, когда обход осуществляется от точки 1 к точке 2).

Теперь под  $I$  и  $\varepsilon_{12}$  в (4.28) следует понимать модули этих величин. Знак  $I$  и  $\varepsilon_{12}$  зависит от выбора направления обхода участка. Если направление тока совпадает с направлением обхода, его принято считать положительным; если источник тока повышает потенциал в направлении обхода (источник посылает ток в направлении обхода), то ЭДС такого источника считается положительной. Рассмотрим пример (рис 4.7).

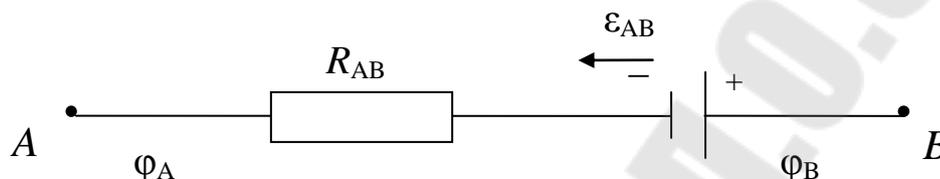


Рис. 4.7

Пусть ток течет от  $B$  к  $A$ , а источник включен так, как это показано на рисунке. При обходе участка от  $A$  к  $B$  закон Ома заменяется следующим образом:

$$-I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) + \varepsilon_{AB}}{R_{AB}}.$$

При обходе от  $B$  к  $A$ :

$$I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) - \varepsilon_{AB}}{R_{AB}}.$$

При изменении направления обхода на противоположное все величины, входящие в выражение закона Ома изменяют свой знак. Все эти величины связаны с работой; а знак работы зависит от направления обхода: если направление обхода изменяется на противоположенное, то изменяется знак работы.

Закон Ома и для однородного и для неоднородного участков — одно из проявлений закона сохранения и превращения энергии.

#### 4.6. Следствия из закона Ома

Обратимся теперь к полной замкнутой цепи. Если рассматривается контур цепи в целом, то говорят об ЭДС, действующей в замкнутой цепи.

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда по всему контуру замкнутой цепи:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор.0}}}{q_+}. \quad (4.29)$$

Кружок  $O$  означает, что речь идёт о работе при переносе заряда по всему контуру замкнутой цепи.

Действие сторонних сил на заряженные частицы эквивалентно действию на них некоторого электрического поля. Стороннюю силу, отнесённую к единице положительного заряда, называют напряжённостью поля сторонних сил:

$$\vec{E}_{\text{стор.}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор.}}}{q_+}. \quad (4.30)$$

Сторонняя сила, действующая на произвольный точечный заряд  $q$  равна:

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{стор.}}$$

Работа, совершаемая сторонними силами при перемещении заряда  $q_+$  по замкнутой цепи, есть криволинейный интервал, взятый по замкнутому пути  $L$ :

$$A_{\text{стор.0}} = \oint_L \vec{F}_{\text{стор.}} d\vec{l} = q_+ \oint_L \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}. \quad (4.31)$$

Подставив (4.31) в (4.29) получим:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (4.32)$$

Правая часть этого выражения есть циркуляция вектора напряжённости поля сторонних сил.

На перемещение заряда по цепи источник затрачивает вполне определенную энергию. По своему смыслу ЭДС есть энергия, затрачиваемая источником на перемещение единичного заряда по всей замкнутой цепи.

Обратимся к следствиям, вытекающим из закона Ома для неоднородного участка цепи. Если источник тока на данном участке отсутствует ( $\varepsilon_{12} = 0$ ), то формула (4.27) переходит в выражение закона Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (4.34)$$

Напряжение и разность потенциалов на однородном участке це-

пи равны.

Если обойти все участки замкнутой цепи и вновь возвратиться в исходную точку, то  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Работа электростатических сил при этом:

$$A_{\text{эл.ст.}} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Отсюда следует, что циркуляция напряжённости поля электростатических сил по замкнутой электрической цепи равна нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (4.35)$$

Отлична от нуля циркуляция напряжённости поля сторонних сил. Совершают работу, в конечном счете, только сторонние силы.

Подставив  $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  в (4.27), получим формулу закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (4.36)$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС источника, действующего в цепи;  $R$  – сопротивление внешнего участка цепи;  $r$  – сопротивление внутреннего участка (источника тока).

Ток в цепи прямо пропорционален ЭДС и обратно пропорционален полному сопротивлению цепи.

Из (4.36) следует, что  $IR + Ir = \varepsilon$ : сумма напряжений на всех участках замкнутой цепи равна электродвижущей силе источника, включенного в цепь.

Если цепь разомкнуть, то тока в ней нет. В этом случае напряжение равно нулю ( $IR = 0$ ). Из (4.27) следует:

$$\varepsilon_{12} = -(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (4.37)$$

т.е. ЭДС равна по абсолютной величине и противоположна по знаку разности потенциалов на зажимах разомкнутого источника тока.

#### 4.7. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

Вычисление токов, текущих в отдельных ветвях сложной разветвлённой цепи, представляет известные трудности. Для облегчения математических расчетов разработан ряд вспомогательных приемов. Один из таких приемов основывается на применении правил Кирхгофа. Правила Кирхгофа являются следствиями, вытекающими из законов сохранения заряда и энергии.

Первое правило относится к узлам цепи. Узел – это точка цепи, в которой сходятся не менее трёх проводников (рис. 4.8)

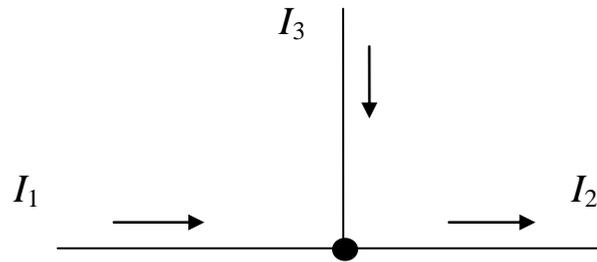


Рис. 4.8

Токам, сходящимся в узле, присписывается в зависимости от направления, знаки «плюс» или «минус». Токам, входящим в узел присписывается один знак, выходящим из узла – другой. Первое правило Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (4.38)$$

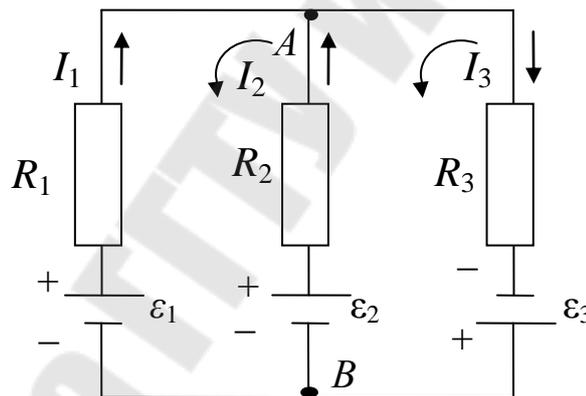


Рис. 4.9

Это правило является следствием закона сохранения заряда и условия стационарности тока. В самом деле, если бы сумма токов подходящих к данному узлу, не была бы равна сумме токов выходящих из него, то в этом узле происходило бы накапливание или (уменьшение) зарядов. Это сопровождалось бы перераспределением потенциалов всех точек цепи и, следовательно, применением токов в отдельных ветвях. Следовательно, токи не были бы стационарными.

Второе правило Кирхгофа относится к отдельным замкнутым контурам разветвлённой цепи: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i. \quad (4.39)$$

Это правило является следствием закона сохранения энергии и легко выводится из закона Ома для неоднородно участка цепи. Пусть токи в отдельных ветвях цепи, изображенной на (рис. 4.9), текут в направлениях указанных стрелками.

Рассмотрим один из замкнутых контуров, например  $A\varepsilon_1 B\varepsilon_2 A$ . Выбираем для этого контура произвольное направление обхода и запишем закон Ома для всех его участков. Если направление обхода выбрано против часовой стрелки, то в соответствии с правилами знаков для  $I$  и  $\varepsilon$  имеем:

$$I_2 R_2 = \varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad -I_1 R_1 = \varphi_B - \varphi_A - \varepsilon_1.$$

Сложив составленные уравнения, получим:

$$I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \quad (4.40)$$

В левой части полученного равенства – алгебраическая сумма напряжений, в правой – алгебраическая сумма ЭДС источников, имеющих в контуре. Таким образом, мы получили уравнение на основании второго правила Кирхгофа (4.39).

## Глава 5. Классическая электронная теория металлов

### 5.1. Природа носителей заряда в металлах

Природа свободных носителей заряда в металлах долгое время оставалась неизвестной. Вплоть до начала XX века основные законы тока не получили достаточного теоретического обоснования, несмотря на широкое практическое применение (закон Ома, например, получил теоретическое подтверждение только спустя 75 лет после открытия).

Для выяснения природы носителей заряда в металлах были поставлены специальные опыты. Рассмотрим некоторые из них.

Рикке своими опытами (Германия, 1901г.) пытался выяснить, связано ли прохождение тока по металлическим проводникам с переносом атомов вещества. Он в течение длительного времени (более года) пропускал достаточно большой постоянный ток через проводник, состоящий из нескольких чередующихся разнородных металлических цилиндров, плотно прижатых друг к другу торцами (в опытах использовались медь и алюминий). Несмотря на то, что через каждый про-

водник за время опыта прошел в одном направлении заряд, измеряемый миллионами кулонов, никаких заметных следов взаимного проникновения металлов друг в друга, за исключением следов, обусловленных обычной диффузией, не было обнаружено. Рикке пришел к выводу, что носителями заряда в металлах являются частицы, во – первых свободные, не связанные с атомами вещества, во – вторых, одинаковые для всех металлов. П. Друде (Германия) и Г. Лоренц (Голландия) выдвинули предположение, что носителями заряда в металлах являются электроны.

Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси (Россия, 1913г.), Р. Толменом и Стюартом (США, 1916г.) были поставлены опыты целью которых, являлось проверить предположение Друде и Лоренца. Если ток в металлах создается свободными частицами, то должны наблюдаться электро инерционные эффекты: при резком торможении проводника эти частицы не смогут остановиться столь же быстро, как и сам проводник и будут еще некоторое время двигаться. В результате в проводнике возникнет кратковременный импульс тока и на его концах появится некоторая разность потенциалов. Замкнув концы этого проводника на гальванометр, можно определить (по направлению тока) знак носителей заряда; измерив при этом заряд, прошедший по цепи, можно рассчитать их удельный заряд.

Количественных измерений Мандельштам и Папалекси в своих опытах не производили. Они приводили в быстрые колебания катушку, замкнутую на неподвижную телефонную трубку. Во время опыта в трубке слышался звук, частота которого соответствовала частоте колебаний катушки.

В опытах Толмена и Стюарта телефон был заменен баллистическим гальванометром (баллистический гальванометр позволяет измерить заряд, прошедший по цепи). Катушка приводилась в быстрое вращение (линейная скорость витков достигала сотен метров в секунду), после чего быстро тормозилась. По отбросу подвижной системы гальванометра определялся заряд, прошедший через прибор. Измерения Толмена и Стюарта дали для удельного заряда носителей тока в металлах значение:

$$\frac{e}{m} \approx -1.6 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} .$$

Это значение оказалось весьма близким к удельному заряду электронов, движущихся в вакууме (соответствующие измерения к этому времени были проделаны Дж. Дж. Томсоном).

Таким образом, опыты Толмена и Стюарта подтвердили предположение об электронном механизме проводимости металлов.

Все металлы в твёрдом состоянии являются кристаллами. Кристаллы характеризуются геометрически правильным расположением атомов. Совокупность равновесных положений атомов образует пространственную кристаллическую решётку. В металлах внешние (валентные) электроны слабо связаны с ядрами атомов. Такие электроны легко отрываются от своих атомов и становятся «свободными». Атомы, потерявшие электроны, превращаются в положительно заряженные ионы. Считается, что атомы одновалентного металла теряют по одному электрону, двухвалентного по два и т.д. Металл, таким образом, представляет собой кристаллическую решётку, состоящую из положительных ионов и заполненную своеобразным «газом» свободных электронов.

Можно оценить концентрацию свободных электронов. В одном моле любого металла содержится  $N_0$  атомов, где  $N_0$  – число Авогадро. Число молей, содержащихся в единице объёма, найдём, разделив плотность металла  $D$  на массу моля  $A$ . Если на каждый атом приходится один свободный электрон, то искомая концентрация равна:

$$n = \frac{D}{A} N_0.$$

Плотности металлов колеблются в пределах  $(1 - 20) \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, массы молей 0,01 – 0,25 кг/моль,  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  1/моль. По порядку величины концентрация свободных электронов в металлах получается равной  $10^{28} - 10^{29}$  1/м<sup>3</sup>.

## 5.2. Классическая теория электропроводности металлов

П. Друде и Г. Лоренц выдвинув предположение о том, что носителями заряда в металлах являются свободные электроны и, применив к ним выводы кинетической теории газов и статистику Максвелла – Больцмана, разработали классическую теорию проводимости металлов. В основе этой теории лежит модель идеального электронного газа.

Предполагается, что свободные электроны в металлах не взаимодействуют на расстоянии ни друг с другом, ни с ионами решётки (именно поэтому каждому электрону приписывается только

кинетическая энергия). В отсутствие электрического поля в проводнике электроны двигаются беспорядочно, случайно, сталкиваясь с ионами кристаллической решетки. В процессе столкновений электроны обмениваются с ионами решетки энергией, в результате чего между решёткой и электронным газом устанавливается тепловое равновесие. Средняя скорость теплового движения электронов (как следует из курса молекулярной физики):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (5.1)$$

Подставив в формулу  $k$ ,  $m$ ,  $T$  получим  $\langle v \rangle \approx 10^5$  м/с.

При наличии электрического поля в проводнике на хаотическое движение электронов накладывается упорядоченное движение.

Найдем связь между плотностью тока и скоростью этого движения. Выберем внутри проводника элементарную площадку  $dS$ , перпендикулярную к вектору плотности тока. За время  $dt$  через  $dS$  пройдут все электроны, находящиеся внутри трубки тока длиной  $\langle u \rangle dt$  и сечением  $dS$ , где  $\langle u \rangle$  – модуль средней скорости направленного движения электронов (рис. 5.1).



Рис. 5.1

Если концентрация электронов в трубке тока  $n$ , то число их в этой трубке равно  $n \langle u \rangle dt dS$ , а абсолютная величина заряда, прошедшего через площадку  $dS$  за время  $dt$ , равна  $n |e| \langle u \rangle dt dS$ , где  $|e|$  – модуль заряда электрона. Разделив это произведение на  $dt dS$ , получим выражения для модуля плотности тока в точке, где концентрация электронов  $n$ , а величина средней скорости направленного движения  $\langle u \rangle$ :

$$j = n |e| \langle u \rangle. \quad (5.2)$$

Соотношению (5.2) можно придать векторный вид:

$$\vec{j} = ne \langle \vec{u} \rangle. \quad (5.3)$$

Поскольку  $e < 0$ , направления  $\vec{j}$  и  $\langle \vec{u} \rangle$  противоположны.

Полученный результат справедлив не только для электронной проводимости, но и для ионной и смешанной. Используя выражение (5.2) можно оценить среднюю скорость направленного движения электронов в металлах. Предельно допустимая плотность тока в медных проводах составляет  $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/мм}^2$ . Подставив  $j = 10^7 \text{ А/мм}^2$ ,  $n = 10^{29} \text{ 1/м}^3$ ,  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  в (5.2), найдём  $\langle u \rangle$ :

$$\langle u \rangle = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Таким образом, даже при самых больших плотностях тока, скорость направленного движения электронов ничтожно мала: она на 8 – 9 порядков меньше скорости теплового движения.

### 5.3. Вывод закона Ома из классических электронных представлений

Электрическое сопротивление, по представлениям классической электронной теории, обусловлено столкновениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки. Ионы, встречающиеся на пути потока упорядоченно движущихся электронов, оказывают на них тормозящее действие. Согласно (5.3)

$$\vec{j} = ne \langle \vec{u} \rangle. \quad (5.4)$$

Поскольку упорядоченное движение электронов в проводниках обусловлено действием электростатических и сторонних сил, то между скоростью направленного движения электронов и напряжённостью этих сил существует связь. Установим эту связь, ограничившись однородным участком цепи.

Друде и Лоренц полагали, что при каждом очередном столкновении с ионом электрон полностью теряет свою скорость упорядоченного движения. Это предположение обязывает считать, что столкновение носит характер абсолютно неупругого удара: электрон на некоторое время захватывается ионом. В противном случае электрон не сможет за одно столкновение отдать иону всю энергию упорядоченного движения: его масса значительно меньше массы иона. В промежутках между столкновениями электрон движется равноускоренно, следовательно, средняя скорость направленного движения электрона равна полу сумме начальной 0 и конечной скорости  $\langle \vec{u}_{\text{max}} \rangle$ :

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{0 + \langle \vec{u}_{\text{max}} \rangle}{2} = \frac{\langle \vec{u}_{\text{max}} \rangle}{2}.$$

Из кинематики  $\langle \vec{u}_{\max} \rangle = \vec{a} \langle \tau \rangle$ , где  $\vec{a}$  – ускорение электрона;  $\langle \tau \rangle$  – среднее время свободного пробега. По второму закону Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m},$$

где  $\vec{E}$  – напряжённость поля в проводнике (предполагается, что поле на пути пробега электрона однородно);  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона.

Промежуток времени между двумя последовательными столкновениями:

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle} \quad (\text{с учётом что } \langle v \rangle \gg \langle u \rangle).$$

Здесь  $\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега,  $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения электронов. Итак,

$$\langle \vec{u}_{\max} \rangle = \vec{a} \langle \tau \rangle = \frac{e \langle \lambda \rangle}{m \langle v \rangle} \vec{E},$$

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{\langle \vec{u}_{\max} \rangle}{2} = \frac{e \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} \vec{E}. \quad (5.5)$$

Средняя скорость направленного движения электронов пропорциональна напряжённости электрического поля в проводнике.

Коэффициент пропорциональности  $b = \frac{e \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}$  не зависит от поля, является характеристикой вещества и называется подвижностью электронов.

$$\text{Таким образом } \langle \vec{u} \rangle = b\vec{E}. \quad (5.6)$$

Из (5.6) ясен физический смысл понятия подвижности (оно применимо к любым носителям заряда). Подвижность – физическая величина, равная по абсолютной величине модулю средней скорости, приобретаемой носителями заряда в электрическом поле единичной напряжённости.

Подвижность носителей заряда, их знак и концентрация являются основными микро характеристиками проводника. Опыт показывает, что подвижность электронов даже в хороших проводниках (серебро, медь, алюминий) весьма мала. Это указывает на то, что электроны испытывают весьма частые соударения с ионами решётки.

Подставив (5.5) в формулу для плотности тока (5.4), получим известную формулу Друде:

$$\vec{j} = ne \langle \vec{u} \rangle = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} \vec{E}. \quad (5.7)$$

Плотность тока пропорциональна напряжённости поля. Следовательно, полученная формула есть закон Ома (в дифференциальном виде). Величина  $\frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} = \sigma$  (5.8) есть удельная электропроводность. Таким образом, удельная электропроводность пропорциональна концентрации электронов и их средней длине свободного пробега.

Если участок цепи неоднородный, соотношение (5.7) остается справедливым, то под  $\vec{E}$  в этом случае следует понимать результирующую напряжённость кулоновского и стороннего полей.

#### 5.4. Вывод закона Джоуля – Ленца из электронных представлений

Электронная теория Друде позволяет в общих чертах объяснить механизм выделения энергии в проводнике с током. Свободные электроны за счет работы электростатических и сторонних сил приобретают дополнительную кинетическую энергию. Эта энергия при столкновениях электронов с ионами решетки превращается в энергию хаотических колебаний этих ионов, т.е. во внутреннюю энергию проводника.

При каждом столкновении с ионом электрон передает ему энергию, которую он дополнительно приобретает на длине свободного пробега, т.е. энергию  $\frac{m \langle \vec{u}_{\max}^2 \rangle}{2}$ . Если концентрация свободных электронов в проводнике  $n$  и каждый из них за единицу времени сталкивается с ионами решетки  $\frac{1}{\langle \tau \rangle}$  раз, то энергия, выделяющаяся в единице объема за единицу времени (плотность тепловой мощности тока) равна:

$$\omega = \frac{m \langle u_{\max}^2 \rangle}{2} n \frac{1}{\tau}. \quad (5.9)$$

Из предыдущего параграфа:  $\langle \vec{u}_{\max} \rangle = \frac{e\vec{E}}{m} \langle \tau \rangle$ ;  $\langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}$ .

Подставив эти выражения в (5.9) и, произведя сокращения, получим:

$$\omega = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2. \quad (5.10)$$

Таким образом, мы пришли к выражению закона Джоуля – Ленца, в котором  $\frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} = \sigma$  – удельная электропроводность проводника.

### 5.5. Закон Видемана – Франца и его объяснение электронной теорией

Опыт показывает, что хорошие проводники электричества являются одновременно и хорошими проводниками тепла. Теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Так, теплопроводность меди при комнатных температурах почти в  $10^4$  раз больше теплопроводности слюды. Это обстоятельство позволяет заключить, что в металлах перенос тепла осуществляется в основном свободными электронами, а не решёткой. Следовательно, между электро- и теплопроводностью должна существовать связь.

Видеман и Франц в 1853г. установили опытный закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности  $\chi$  к коэффициенту удельной электропроводности  $\sigma$  при данной температуре одинаково для всех металлов и при изменении температуры изменяется пропорционально абсолютной температуре:  $\frac{\chi}{\sigma} = CT$ , где  $C$  – практически одинаковая для всех металлов константа.

Теория Друде – Лоренца позволяет в первом приближении объяснить и этот закон. Если пренебречь теплопроводностью решётки и распространить выводы кинетической теории газов на электронный газ, то коэффициенту теплопроводности электронного газа следует приписать значение:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle c_v, \quad (5.11)$$

где  $\rho$  – плотность электронного газа;

$\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения свободных электронов;

$\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега электронов;  
 $c_v$  – удельная теплоёмкость электронного газа при постоянном объёме.

В (5.3) было получено выражение для коэффициента удельной электропроводности:

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Найдём отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту удельной электропроводности:

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{\rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle c_v 2m \langle v \rangle}{3ne^2 \langle \lambda \rangle} = \frac{2\rho c_v m \langle v \rangle^2}{3ne^2}. \quad (5.12)$$

Плотность электронного газа равна  $\rho = nm$ , где  $m$  – масса электрона,  $n$  – концентрация электронов. Удельная теплоёмкость электронного газа:  $c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0 m} = \frac{3k}{2m}$ , где  $N_0$  – число Авогадро;  $k$  – постоянная Больцмана.

Подставим выражение для  $\rho$ ,  $c_v$  в (5.12). Вместо квадрата средней скорости  $\langle v \rangle^2$  подставим, как сделали Друде и Лоренц, средний квадрат скорости  $\langle v^2 \rangle$ , который найдём из выражения для средней кинетической энергии теплового движения электронов:

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

$$\text{Получим: } \frac{\chi}{\sigma} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T, \quad (5.13)$$

т.е. закон Видемана – Франца. Постоянная  $C$  оказывается равной  $3 \left( \frac{k}{e} \right)^2$ . Она определяется универсальными константами – постоянной Больцмана и зарядом электрона – и, следовательно, не зависит от природы металла. Теоретическое значение  $C$  оказалось близким к экспериментальному.

## 5.6. Затруднения классической теории металлов

Классическая теория металлов Друде – Лоренца оказалась бес- сильной объяснить ряд экспериментальных фактов.

1. Опыт показывает, что удельное сопротивление металлов в широком температурном интервале пропорционально абсолютной температуре:  $\rho \sim T$ .

Электронная теория предсказывает иную зависимость  $\rho$  от  $T$ :  
 $\rho \sim \sqrt{T}$ .

Действительно, согласно (5.8)  $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \langle \lambda \rangle}$ . Концентрация электронов  $n$  и их средняя длина свободного пробега  $\langle \lambda \rangle$ , по классической теории не зависят от  $T$ ; средняя же скорость теплового движения пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры:  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ , следовательно  $\rho \sim \sqrt{T}$ .

2. Согласно опытному закону Дюлонга и Пти, молярная теплоёмкость всех одноатомных кристаллов (и металлов, и диэлектриков) практически одинакова и составляет  $3R$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Согласно же классической электронной теории, молярная теплоёмкость металлов должна в 1,5 раза больше молярной теплоёмкости диэлектриков, поскольку теплоёмкость металлов складывается из теплоёмкости решётки (она составляет, по расчётам,  $3R$ ) и из теплоёмкости электронного газа (она, как и теплоёмкость одноатомного идеального газа, равна  $\frac{3}{2}R$ ):

$$C_v = 3R + \frac{3}{2}R = \frac{9}{2}R.$$

Таким образом, налицо совершенно непонятное, с точки зрения классической теории, расхождение теоретического значения теплоёмкости со значением, полученным экспериментально. Это расхождение обязывает сделать принципиальный вывод: энергия теплового движения свободных электронов в металлах практически не изменяется при нагревании, электроны не принимают участие в аккумуляции сообщаемого проводнику тепла – всё тепло аккумулирует решётка.

3. Опыт показывает, что свободные электроны пробегают без столкновений с ионами решётки расстояния, превосходящие расстояние между ионами в десятки и даже сотни раз (чем ниже температура, тем больше расстояние). Электронная же теория полагает, что электроны свободно пробегают лишь расстояние между соседними узлами решётки.

## 5.7. Основные положения квантовой теории металлов

Серьезные затруднения, которые испытывает классическая электронная теория металлов при объяснении целого ряда опытных фактов, несомненно, свидетельствуют о том, что эта теория не учитывает некоторых специфических свойств свободных электронов. Эти свойства электронов учитывает квантовая теория металлов. Квантовая теория металлов создана в 20х годах XX века Я.И. Френкелем (СССР), А. Зоммерфельдом (Германия) и др. на основе идей квантовой механики. Квантовая теория металлов позволяет более строго и с единой точки зрения объяснить электрические, магнитные, тепловые и др. свойства металлов.

В основе квантовой теории металлов лежат принципиально новые по сравнению с классической теорией идеи.

*1. Идея о двойственной, корпускулярно-волновой природе электронов.*

Классическая физика считала, что законы движения микрочастиц и обычных макроскопических тел одинаковы, различие лишь в геометрических размерах тел и масштабах движения. Согласно классическим представлениям, электрон есть частица с резко очерченными границами: движение этой частицы происходит по вполне определенной траектории; положение электрона в пространстве и скорость его движения могут быть определены одновременно и со сколь угодно высокой степенью точности.

Согласно квантовым представлениям электрон нельзя мыслить как частицу в буквальном, классическом смысле, ибо он обладает не только свойствами, присущими макроскопическим телам, – корпускулярными свойствами, но и свойствами, присущими волнам, – волновыми свойствами.

Движение электрона в пространстве следует представлять как процесс распространения своеобразной электронной волны, способной к интерференции, дифракции и т.д. Понятие траектории к электронам и другим микрочастицам неприменимо. Невозможно также одновременное и точное определение положения электрона и его скорости.

*2. Идея о дискретности (прерывности) значений энергии электронов.*

Классическая электронная теория металлов постулирует, что кинетическая энергия свободных электронов в металле может изме-

няться непрерывно и на любую величину, может принимать любые значения. По квантовой теории это не так: энергия свободных электронов может принимать не любые, а только некоторые дискретные значения, изменения её могут происходить не непрерывно, а лишь скачком, сразу на вполне определенную величину.

### *3. Идея о неразличимости электронов в металле.*

По классической статистике Максвелла – Больцмана, частицы, образующие макроскопические системы, различимы, они обладают индивидуальностью и могут быть пронумерованы.

В основе квантовой статистики лежит предположение о том, что частицы не различимы, поэтому квантовая статистика по иному решает вопрос о способах распределения частиц по возможным состояниям, и, в связи с этим, вопрос о числе микрораспределений, определяющих то или иное термодинамическое состояние.

Свободные электроны подчиняются не классической статистике Максвелла – Больцмана, а квантовой статистике Ферми – Дирака.

### *4. Принцип Паули.*

По квантовой теории, состояние электрона, как в изолированном атоме, так и в кристалле определяется набором некоторых квантовых чисел (квантовые числа связаны с характеристиками электрона). Согласно принципу Паули в атоме не может быть двух электронов, находящихся в тождественных квантовых состояниях, т.е. состояниях определяемых одинаковым набором квантовых чисел.

## **5.8. Квантование энергии свободных электронов в металлах**

Полная энергия любого свободного электрона в металле складывается из потенциальной и кинетической энергии. Металл представляет для свободных электронов потенциальную яму с весьма крутыми стенками.

На электрон, покинувший металл, вблизи металла действуют силы «электрического зеркального изображения» и силы двойного электрического слоя. Как появляются эти силы? В металле всегда есть достаточно быстрые электроны, способные покинуть его. Как только электрон, обладающий необходимой энергией, вылетает из металла, в том месте, которое он оставляет, появляется нескомпенсированный положительный индуцированный заряд, равный по модулю заряду электрона; положение этого заряда является зеркальным изображени-

ем вылетевшего электрона: «зеркалом» является поверхность металла (рис. 5.2).

Индукцированный заряд, действуя на вылетевший электрон, заставляет его вернуться обратно в металл. То же самое происходит и с другими электронами, сумевшими покинуть металл. В результате устанавливается динамическое равновесие: число электронов, вылетевших из металла, равно числу электронов, вернувшихся за тот же промежуток времени обратно (рис. 5.2). Но при этом некоторое количество электронов всё время остаётся за пределами металла; эти электроны образуют тонкое облако, обволакивающее металл со всех сторон (рис. 5.3.а). Сам металл заряжается положительно. Электронное облако вместе с избыточным положительным зарядом решётки образует двойной электрический слой (рис. 5.3.б).

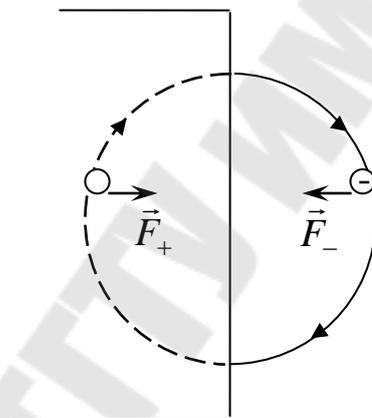


Рис. 5.2

Этот слой не создаёт электрического поля ни внутри металла, ни за его пределами; поле отлично от нуля только в самом слое. Силы, действующие на электрон внутри слоя, направлены к металлу. Эти силы вместе с силой электрического зеркального изображения и препятствуют массовому вылету электронов из металла. При переходе электрона из металла в вакуум электростатические силы двойного слоя совершают отрицательную работу, т.к. перемещение электрона происходит в направлении, противоположном направлению действия этих сил. Работа сил двойного слоя равна убыли потенциальной энергии электрона:

$$A = \varepsilon_n - \varepsilon_{no}, \quad (5.14)$$

где  $\varepsilon_n$  – потенциальная энергия электрона в металле;

$\varepsilon_{no}$  – тоже самое за пределами двойного слоя.

Условимся потенциальную энергию электрона за пределами металла, за пределами двойного слоя считать равной нулю:  $\varepsilon_{no} = 0$ .

Тогда:

$$A = \varepsilon_n \cdot (5.15)$$

Так как  $A < 0$ , то и  $\varepsilon_n < 0$ .

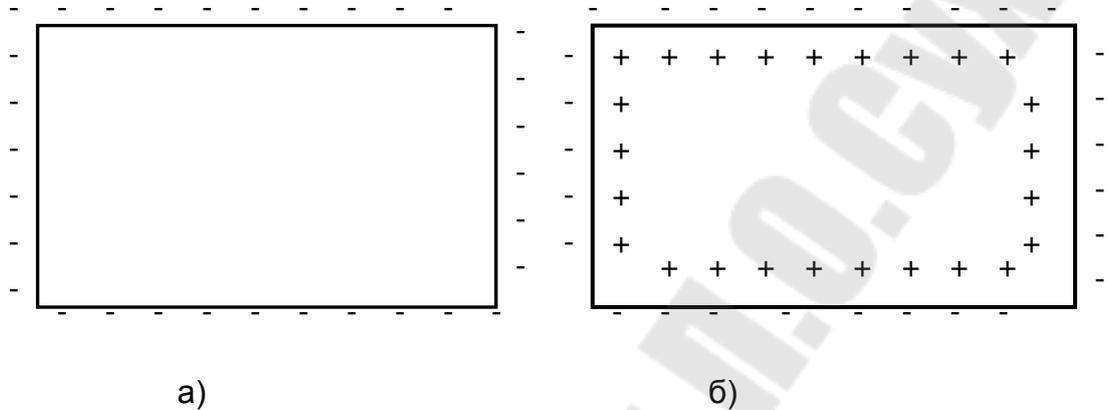


Рис. 5.3

Поскольку каждому вылетающему электрону приходится преодолевать один и тот же двойной слой, то приращение потенциальной энергии одинаково для всех электронов. Следовательно, потенциальная энергия, обусловленная наличием двойного слоя, одинакова для всех электронов. Толщина двойного слоя невелика – порядка нескольких межатомных расстояний ( $\sim 10^{-9}$  м). Это обстоятельство позволяет считать стенки потенциальной ямы почти вертикальными. Ход потенциальной энергии электрона в металле и за его пределами изображен на рис. 5.4. Потенциальная энергия электронов в металле зависит также от избыточного заряда, сообщенного металлу извне. Если металл получает положительный заряд, потенциальная энергия электронов уменьшается (дно потенциальной ямы опускается еще ниже); если отрицательный – энергия увеличивается (дно потенциальной ямы поднимается выше). Избыточный заряд, сообщенный металлу, создает в окружающем пространстве своё электрическое поле. При перемещении электрона из металла на нулевой уровень потенциальной энергии (в этом случае его следует выбирать в бесконечности) работу совершают не только силы двойного слоя, но и силы этого поля.

$$\text{Следовательно, } \varepsilon_n = A + A_{\text{доп}}, (5.16)$$

где  $A$  – работа сил двойного слоя;

$A_{\text{доп}}$  – работа сил поля, созданного избыточным зарядом. Если  $A_{\text{доп}} < 0$  (это отвечает сообщению металлу положительного заряда),

потенциальная энергия электрона уменьшается; если  $A_{\text{доп}} > 0$  (это соответствует сообщению металлу отрицательного заряда), энергия электронов увеличивается.

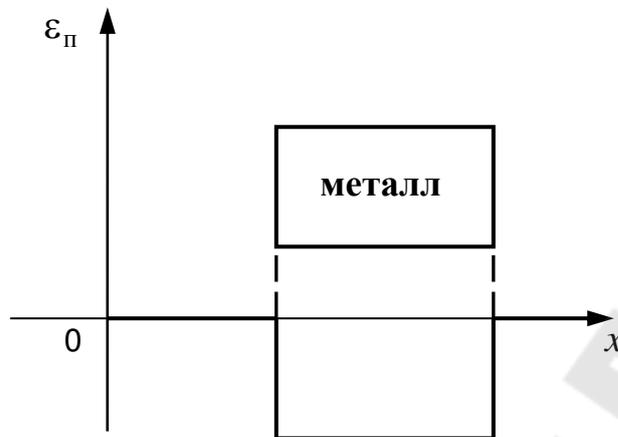


Рис. 5.4

При наличии избыточного заряда потенциальная энергия электрона, прошедшего двойной слой, не становится равной нулю, т.к. поле, созданное избыточным зарядом, существует и за пределами двойного слоя. Потенциальная энергия оказывается больше или меньше нуля в зависимости от знака избыточного заряда.

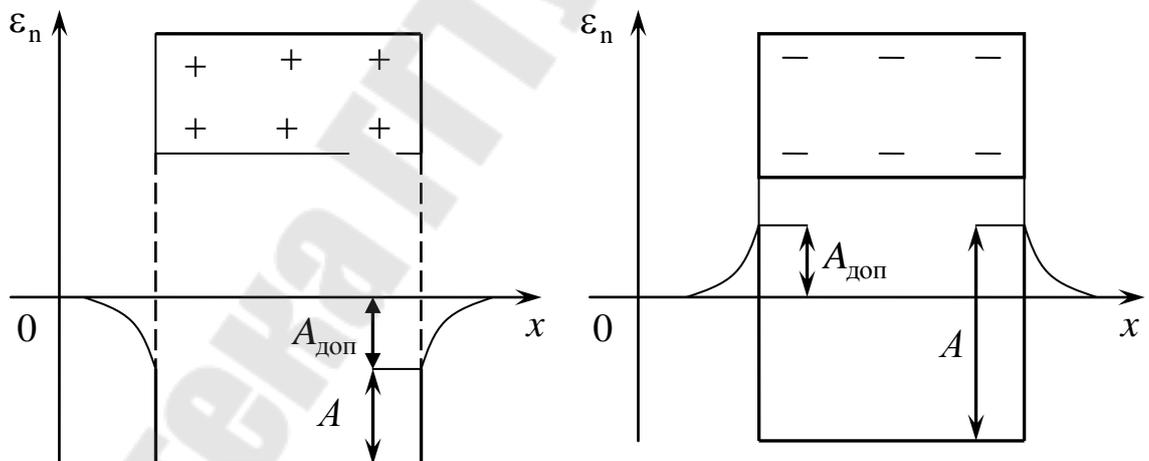


Рис. 5.5

На рис. 5.5 изображены кривые  $\epsilon_n$  для случаев, когда металл заряжен положительно (а) и отрицательно (б).

Кинетическая энергия электронов, как в изолированном атоме, так и в твердом теле квантуется: она может принимать лишь некоторые дискретные значения, разделённые интервалами запрещённых значений. Разрешённые значения энергии (их называют энергетическими уровнями) двух одинаковых невзаимодействующих атомов в точности совпадают. При образовании из отдельных атомов кристал-

лического тела, атомы сближаются на столь малые расстояния, что их электронные оболочки перекрываются; между атомами возникает взаимодействие. Это взаимодействие приводит к тому, что соответствующие энергетические уровни отдельных атомов смещаются друг относительно друга. В результате, вместо одного одинакового для всех атомов уровня возникает  $N$  (число атомов, объединившихся в кристалл) весьма близких, но не совпадающих уровней. Образуется полоса или зона разрешённых энергетических уровней.

Расщепление разных уровней неодинаково. Наиболее сильно расщепляются уровни внешних валентных электронов. Ширина полосы, образовавшейся в результате расщепления таких уровней, может достигать нескольких электрон – вольт. Разность же энергий двух соседних уровней в зоне весьма мала:  $10^{-22} - 10^{-23}$  эВ.

Зоны разрешённых значений энергии разделены зонами запрещённых значений энергии. Особо важную роль в твердых телах играет валентная зона – зона, образовавшаяся в результате расщепления уровней, на которых в изолированном атоме находятся валентные электроны.

Валентная зона в металлах называется зоной проводимости, а электроны, заполняющие эту зону, электронами проводимости или свободными. Именно эти электроны ответственны за тепло – и электропроводность металлов. Зона проводимости в некоторых металлах образуется также в результате перекрытия валентной зоны и полностью свободной вышележащей зоны. На рис. 5.6 жирной линией изображена потенциальная энергия свободных электронов внутри и за пределами металла. Дискретные уровни кинетической энергии отсчитываются от дна потенциальной ямы (чем выше над дном ямы поднят уровень, тем большей кинетической энергией обладает электрон, находящийся на этом уровне, уровень, совпадающий с дном ямы, соответствует нулевому значению кинетической энергии). Расстояние от «нуля» потенциальной энергии до соответствующего уровня кинетической энергии изображает полную энергию электрона (как видно из рисунка полная энергия электрона, занимающего любой уровень зоны, отрицательна).

Итак, свободные электроны в металле обладают одинаковой потенциальной энергией, но различной кинетической, и, следовательно, различной полной энергией.

Заполнение уровней валентной зоны начинается с самых нижних уровней – это следует из принципа минимума энергии. В соответ-

ствии с принципом Паули, на каждом уровне может находиться ограниченное число электронов, каждый уровень заполняется с вполне

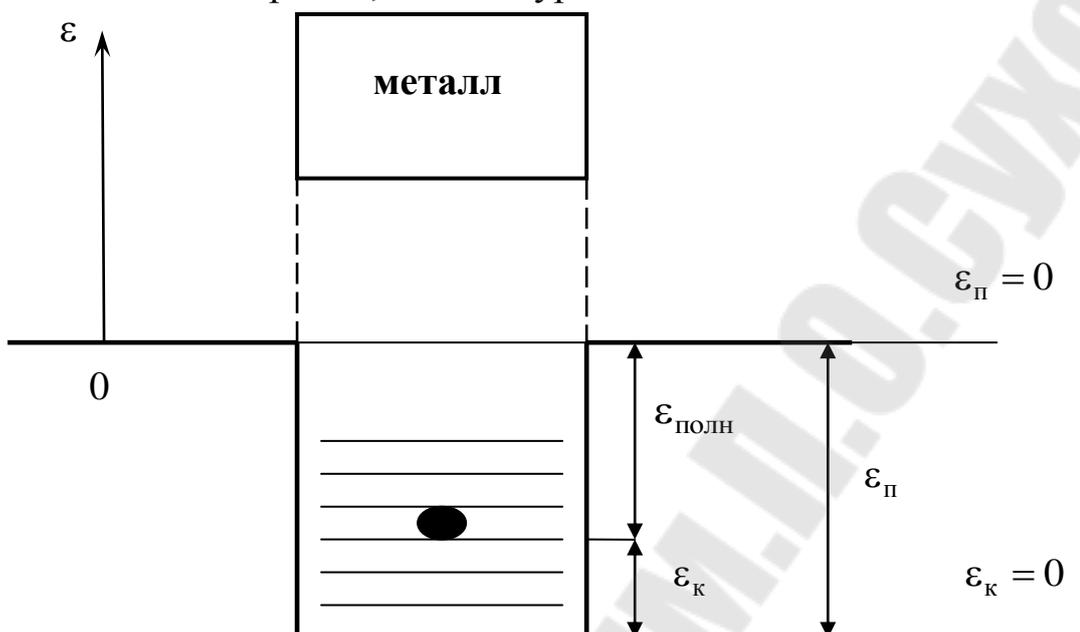


Рис. 5.6

определенной вероятностью, распределение электронов по уровням подчиняется определенному статистическому закону. Характерной особенностью металлов является то, что зона проводимости в них заполнена не полностью. Число возможных квантовых состояний в зоне проводимости больше числа валентных электронов, поэтому часть уровней этой зоны свободна. При  $T \neq 0$  нижние уровни этой зоны заполнены полностью (вероятность заполнения равна единице), самые верхние – свободны (вероятность заполнения равна нулю). В верхней части зоны происходит довольно быстрое изменение вероятности заполнения уровней от единицы до нуля. Особое значение имеет уровень, вероятность заполнения которого при  $T \neq 0$  равна 0,5. Этот уровень называется уровнем Ферми, а кинетическая энергия электронов этого уровня – энергией Ферми. Энергия Ферми  $\mu$  (ее называют также химическим потенциалом) – характерный термодинамический параметр любого твёрдого тела.

### 5.9. Работа выхода

Работа выхода электронов из металла – энергия, которую необходимо сообщить свободному электрону, чтобы он смог совершить работу против сил двойного электрического слоя и покинуть металл.

Различают полную и термодинамическую работу выхода. Энергия  $A_{\text{полн}}$ , необходимая для вырывания неподвижного свободного электрона, называется полной работой выхода. Эта работа равна глубине потенциальной ямы:  $A_{\text{полн}} = |\varepsilon_{\text{п}}|$ . Поскольку неподвижных электронов нет, то фактически для удаления электрона из металла требуется энергия, меньшая  $\varepsilon_{\text{п}}$ . Энергия  $A$ , необходимая для удаления из металла электрона с уровня Ферми, называется термодинамической работой выхода (рис. 5.7). Эта энергия равна:

$$A = |\varepsilon_{\text{п}}| - \mu. (5.17)$$

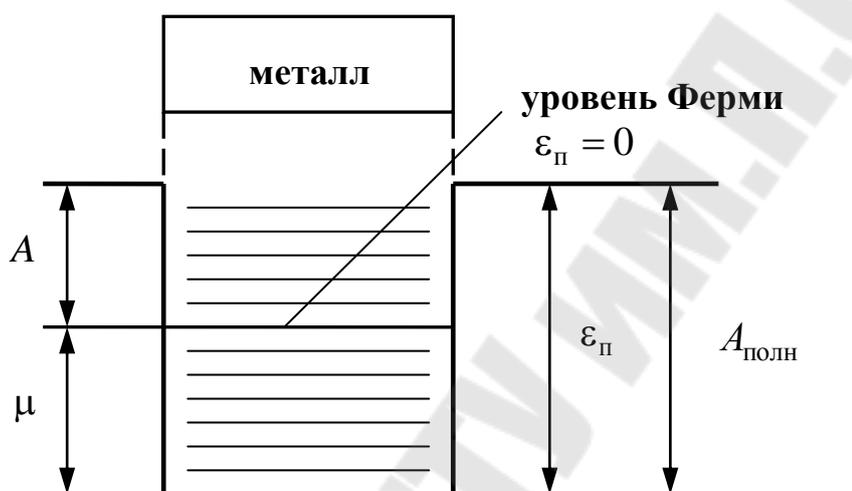


Рис. 5.7

Работа выхода зависит от рода металла, от наличия в нём примесей, от состояния поверхности металла, степени её загрязнения, от наличия внешнего электрического поля, от температуры.

Для химически чистых металлов работа выхода колеблется в пределах от 1 до 5 эВ. Наличие в металле примесей уменьшает работу выхода. Так, наличие на поверхности вольфрама тонкого слоя щелочноземельных металлов (Sr, Ba, Ca) уменьшает работу выхода в 2 – 3 раза.

### 5.10. Термоэлектронная эмиссия

Электронной эмиссией называется процесс испускания («испарения») электронов твердыми или жидкими телами.

Чтобы свободные электроны могли покинуть металл, их необходимо «возбудить» – сообщить им дополнительную энергию. В зависимости от способов возбуждения электронов различают тер-

моэмиссию, фотоэмиссию, вторичную эмиссию, холодную эмиссию. Важное практическое значение имеет термоэлектронная эмиссия. Она является основным источником в вакуумных электронных лампах, электронно – лучевых трубках, газодинамических тиратронах.

Для экспериментального исследования термоэлектронной эмиссии используется вакуумный диод. При помощи схемы, изображённой на рис. 5.8, можно получить кривую зависимости тока эмиссии от анодного напряжения, т.е. вольт – амперную характеристику диода. В отсутствие анодного напряжения ток эмиссии (анодный ток) мал.

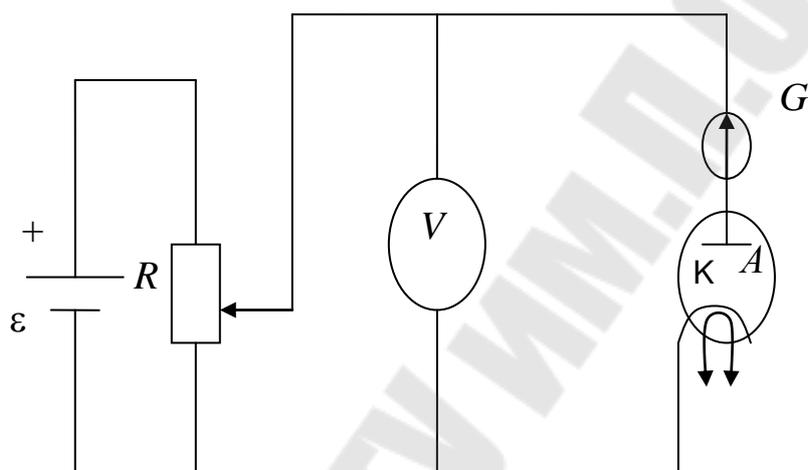


Рис. 5.8

При включении и последующем увеличении анодного напряжения анодный ток возрастает, достигая при некотором  $U_a$  максимального значения  $i_{нас}$ , называемого током насыщения (рис. 5.9). При повышении температуры катода ток насыщения увеличивается. Наличие тока насыщения имеет простое объяснение. Пока анодное напряжение невелико, только часть испарившихся электронов достигает анода, остальные возвращаются обратно в катод. Насыщение наступает тогда, когда ни один из вылетевших электронов не возвращается обратно в катод.

Нелинейность вольт – амперной характеристики диода означает, что диод представляет собой проводник, не подчиняющийся закону Ома. Вольт – амперные характеристики, снятые при разных температурах, при малых значениях анодного напряжения совпадают (рис. 5.9). С.А. Богуславский (СССР) и И. Ленгмюр (США) показали, что в этой области зависимость анодного тока от анодного напряжения выражается формулой:

$$i_a = CU_a^{3/2}, \quad (5.18)$$

где  $C$  – константа, зависящая от формы и размеров катода, но не зависящая от его температуры. Закон Богуславского – Ленгмюра (5.18) называют законом трех вторых.

Величиной, наиболее полно характеризующей интенсивность эмиссии электронов, является плотность тока насыщения. Плотность тока насыщения – это ток насыщения, отнесённый к единице эмитирующей поверхности катода. Измеряя на опыте плотность тока насыщения, можно достаточно точно определить число

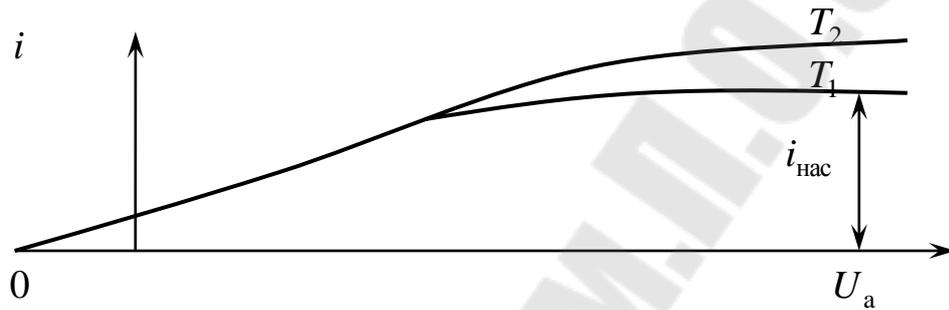


Рис. 5.9

электронов, вылетающих за единицу времени с единицы поверхности катода при различных температурах. Расчёт (на основе квантовой теории) даёт для модуля плотности тока насыщения выражение:

$$j_{\text{нас}} = BT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (5.19)$$

где  $A$  – работа выхода;  $T$  – температура катода,  $B$  – универсальная константа, равна  $1,2 \cdot 10^6 \text{ А}/(\text{м}^2\text{К}^2)$ .

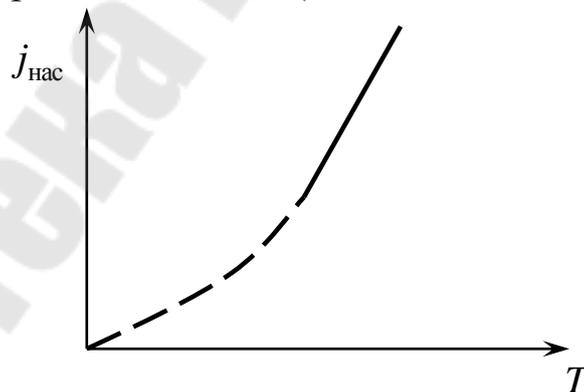


Рис. 5.10

Формула (5.19) получена Дэшменом. Как видно из (5.19), плотность тока насыщения с ростом температуры увеличивается весьма быстро. График зависимости  $j$  от  $T$  представлен на рис. 5.10.

## 5.11. Контактная разность потенциалов

Рассмотрим явления, происходящие при сближении и последующем соприкосновении двух разнородных металлов.

Расположим два металла 1 и 2 с различными работами выхода на некотором расстоянии друг от друга в вакууме (для определённости будем полагать, что металлы имеют форму пластин и обращены друг к другу своими плоскими поверхностями). Пусть работа выхода электронов из металла 1 меньше работы выхода из металла 2.  $A_1 < A_2$  (это означает, что в первом металле уровень Ферми лежит на меньшей глубине, чем во втором, и, следовательно, полная энергия электронов, занимающих уровень Ферми, в металле 1 больше, чем в металле 2). Первоначально энергетические диаграммы электронов этих металлов выглядят так, как это изображено на рисунке 5.11. Электрического поля между металлами нет (потенциальные энергии электронов в вакууме у границ обоих металлов одинаковы – равны нулю), следовательно, первоначально ничто не мешает электронам, вылетевшим из одного металла, достигать поверхности другого. Благодаря термоэлектронной эмиссии металлы будут обмениваться электронами. Согласно (5.19) модуль плотности тока электронов из первого металла:

$$j_1 = BT^2 e^{-\frac{A_1}{kT}}, \text{ а из второго } -j_2 = BT^2 e^{-\frac{A_2}{kT}}, \quad (5.21,2)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – работы выхода из металлов 1 и 2.

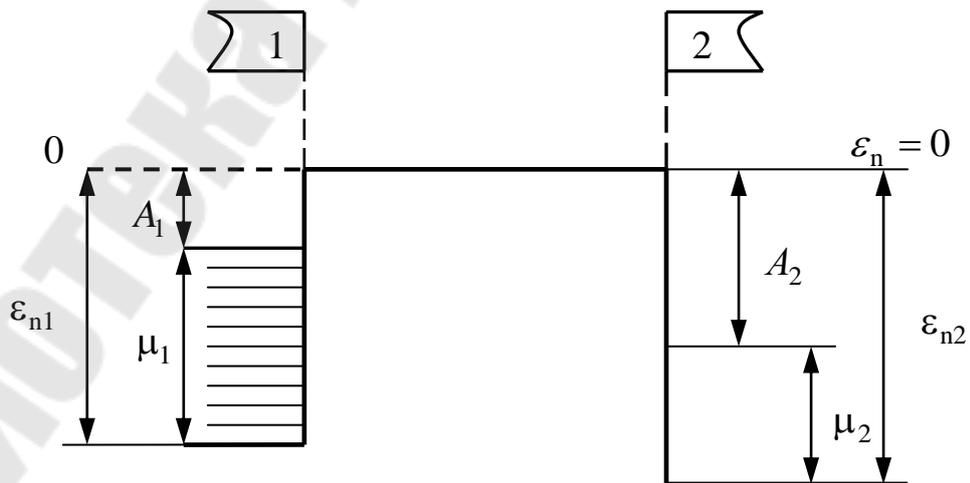


Рис. 5.11

Т.к. по условию  $A_1 < A_2$ , то  $j_1 > j_2$ , т.е. первоначально поток электронов из первого металла во второй будет больше потока из второго в первый. Металлы начнут заряжаться: первый положительно,

второй – отрицательно. В пространстве между металлами возникнет электрическое поле, направленное от первого металла ко второму. Это поле будет ускорять электроны, вылетающие из второго металла, и тормозить электроны, вылетающие из первого. Следовательно, поток электронов из металла 2 в металл 1 остается неизменным, а поток электронов из металла 1 в металл 2 будет постепенно уменьшаться (часть электронов, вылетающих из металла 1, будет отбрасываться этим полем обратно). Разделение зарядов и рост напряжённости поля между металлами будет происходить до тех пор, пока встречные потоки не сравняются.

Преимущественный переход электронов из первого металла во второй можно объяснить следующим образом. Электроны, находящиеся на верхних заполненных уровнях в первом металле обладают большей полной энергией, чем соответствующие электроны во втором металле. Естественно, что при сближении металлов электроны с самых верхних уровней будут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. Вследствие того, что металлы в процессе обмена электронами заряжаются, потенциальные кривые металлов вместе с дискретными уровнями кинетических энергий смещаются: потенциальная кривая первого металла опускается, потенциальная кривая второго – поднимается относительно нулевого уровня  $\varepsilon_n$  (рис. 5.12). При этом высота стенок кривых практически не изменяется. Не изменяется и расстояние от дна ям до соответствующих уровней Ферми, т.е. энергии Ферми металлов. Действительно, расчёт показывает, что энергия Ферми зависит только от концентрации электронов и температуры металла. В процессе обмена электронами температура металлов не изменяется: концентрация же электронов в металлах практически не изменяется, т.к. для создания поля, полностью устраняющего преимущественный переход электронов, потребуется переход весьма небольшого числа электронов.

В статистической физике доказывается, что преимущественный переход электронов из одного металла в другой происходит до тех пор, пока уровни Ферми в обоих металлах не окажутся на одной и той же глубине.

Равенство полных энергий электронов, занимающих уровни Ферми в металлах, является условием термодинамического, статистического равновесия металлов:

$$\mu_1 + \varepsilon_{n1} = \mu_2 + \varepsilon_{n2}. \quad (5.22)$$

Равенство полных энергий электронов, занимающих уровни

Ферми в металлах, является условием термодинамического, статистического равновесия металлов:

$$\mu_1 + \varepsilon_{n1} = \mu_2 + \varepsilon_{n2}. \quad (5.22)$$

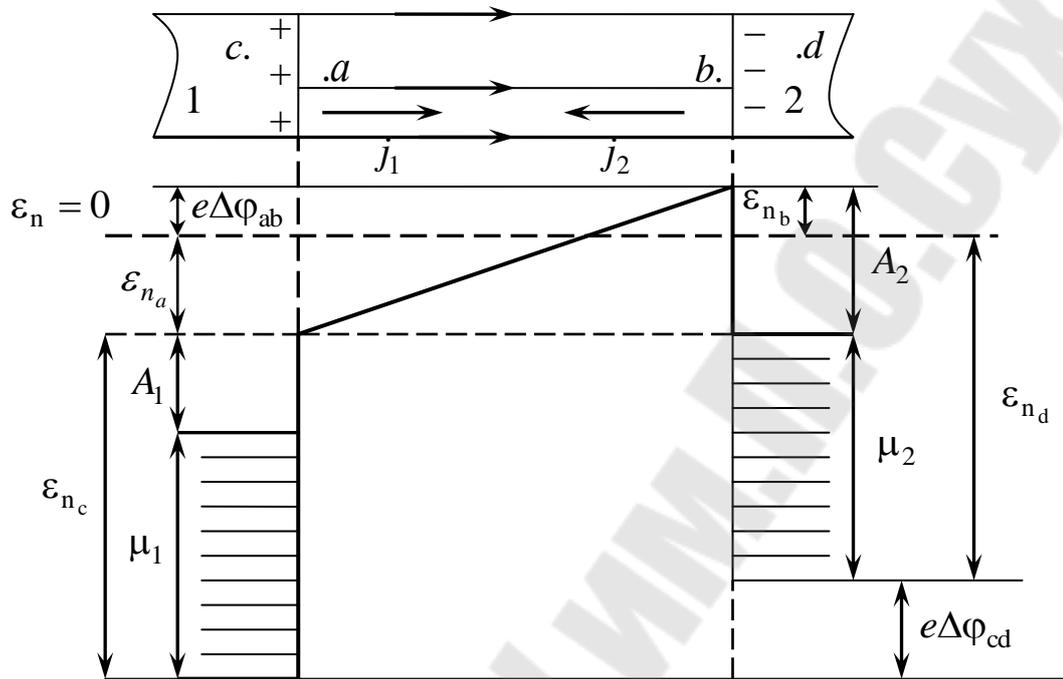


Рис. 5.12

В условиях равновесия потенциальная энергия электрона находящегося вблизи границы второго металла, но за пределами двойного слоя – в точке  $b$  (рис. 5.12), больше потенциальной энергии электрона, находящегося в точке  $a$  вблизи первого металла:

$$\varepsilon_{n_b} > \varepsilon_{n_a}$$

Разделив разность этих энергий на заряд электрона, мы найдем разность потенциалов между точками  $b$  и  $a$ :

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{\varepsilon_{n_b} - \varepsilon_{n_a}}{e}. \quad (5.23)$$

Из рис. 5.12 видно, что разность энергий  $\varepsilon_{n_b} - \varepsilon_{n_a}$  можно выразить через разность работ выхода  $A_1$  и  $A_2$ . Следовательно,

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{A_2 - A_1}{e}. \quad (5.24)$$

Т.к.  $A_2 - A_1 > 0$ , а  $e < 0$ , то  $\varphi_b - \varphi_a < 0$  и  $\varphi_b < \varphi_a$ , т.е. потенциал точки  $a$  выше, чем потенциал точки  $b$ .

Разность потенциалов (5.24) устанавливается в окружающем металлы внешнем пространстве между точками, лежащими вблизи границ металлов (но за пределами двойного слоя). Поэтому эту разность

потенциалов называют внешней контактной разностью потенциалов.

Мы рассмотрели случай, когда металлы обмениваются электронами через вакуум. Но это не единственная возможность установления равновесия. Равновесие устанавливается и тогда, когда металлы просто плотно прижаты друг к другу или соединены каким-нибудь третьим проводником.

Электрическое контактное поле существует только за пределами металлов, оно действует только на электроны, покинувшие металл, поэтому, естественно, это поле не вызывает электрического тока внутри металлов. С внешней контактной разностью потенциалов приходится считаться, например, при конструировании электронных ламп. Как известно, катоды и аноды электронных ламп изготавливаются из разных материалов (катоды обрабатываются так, чтобы работа выхода из них была минимальной). Следовательно, на электронные потоки в лампах оказывает влияние не только поле, обусловленное анодной разностью потенциалов, но и поле, обусловленное внешней контактной разностью потенциалов, а она может достигать нескольких вольт, что вполне соизмеримо с анодной разностью потенциалов.

Внешняя контактная разность потенциалов возникает не только при сближении двух разнородных металлов, но и металла с полупроводником, двух полупроводников.

Если металлы имеют разную энергию Ферми, то в условиях равновесия (в условиях, когда уровни Ферми совпадают) разность потенциалов устанавливается не только между внешними точками металлов, но и между любыми их внутренними точками, например между точками  $c$  и  $d$  (рис. 5.12). Если  $\mu_1 < \mu_2$ , как то показано на рисунке 5.12, то потенциальная энергия электрона в металле 1 ( $\varepsilon_{nc}$ ) меньше потенциальной энергии электрона в металле 2 ( $\varepsilon_{nd}$ ). Разделив разность этих энергий на заряд электрона, мы найдем разность потенциалов между внутренними точками  $c$  и  $d$  металлов:

$$\varphi_c - \varphi_d = \frac{\varepsilon_{nc} - \varepsilon_{nd}}{e}. \quad (5.25)$$

Из рис. 5.12 видно, что разность энергий  $\varepsilon_{nc} - \varepsilon_{nd}$  можно выразить через разность энергий Ферми металлов:  $\mu_1 - \mu_2$ . Следовательно,

$$\varphi_c - \varphi_d = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e}. \quad (5.26)$$

Так как  $\varepsilon_{n_c} - \varepsilon_{n_d} = \mu_2 - \mu_1 < 0$ , и  $e < 0$ , то  $\varphi_c - \varphi_d > 0$  и  $\varphi_c > \varphi_d$ , т.е. потенциал 1 выше потенциала 2. (потенциал  $\varphi_c$  имеют все точки металла 1, потенциал  $\varphi_d$  имеют все точки металла 2). Т.к. разность потенциалов (5.26) устанавливается между внутренними точками металлов, она называется внутренней контактной разностью потенциалов.

Если несколько разнородных металлов соединены последовательно и образуют замкнутую цепь, то алгебраическая сумма скачков потенциала внутри такой цепи равна нулю при условии, если все контакты (слои) имеют одинаковую температуру. Возникновение электрического тока в такой цепи невозможно.

### 5.12. Термоэлектрические явления (явления Зеебека, Пельтье)

Явление Зеебека (Германия, 1821) заключается в том, что в электрической цепи, составленной из последовательно соединенных разнородных металлов (или полупроводников) возникает электродвижущая сила (термо ЭДС), если контакты (слои) металлов поддерживаются при различных температурах. В простейшем случае, когда цепь состоит из двух проводников, она называется термоэлементом или термопарой.

Опыт показывает, что величина термо ЭДС зависит от разности температур слоёв и от рода металлов, образующих термоэлемент:

$$\varepsilon_{\text{терм}} = \alpha_{12}(T_2 - T_1), \quad (5.27)$$

где  $T_1$  – температура холодного слоя;  $T_2$  – температура горячего слоя,  $\alpha_{12}$  - коэффициент термо ЭДС (удельная термо ЭДС).

Коэффициент термо ЭДС численно равен термо ЭДС, возникающей при единичной разности температур слоев. Коэффициент термо ЭДС зависит от рода металлов, образующих термопару, и от интервала температур, к которому он относится. При изменении температуры, коэффициент термо ЭДС может изменять не только модуль, но и знак. Поэтому соотношение (5.27) следует писать в дифференциальном виде:

$$d\varepsilon_{\text{терм}} = \alpha_{12}dT. \quad (5.28)$$

Возникновение термо ЭДС обусловлено рядом причин. Укажем две из них.

1. Энергия Ферми зависит от температуры. Если температуры слоев различны, то внутренние контактные разности потенциалов в холодном и горячем слоях ( $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$ ) неодинаковы. Следовательно, их алгебраическая сумма отлична от нуля (по полярности эти разности противоположны, т.е. действуют навстречу друг другу (рис. 5.13).

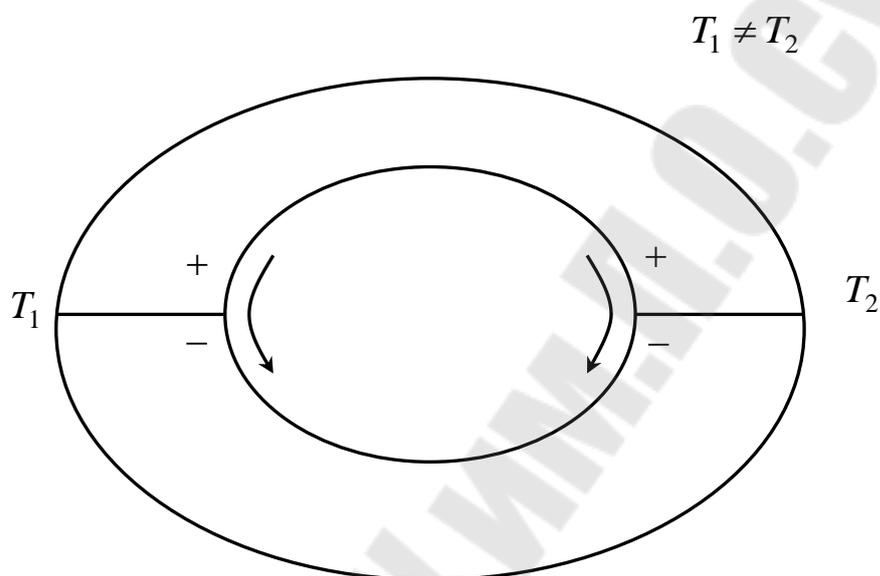


Рис. 5.13

2. Чем выше температура металла, тем больше в нем концентрация электронов с энергией, превышающей энергию Ферми. Если вдоль проводника имеется градиент температуры, то концентрация таких электронов на горячем конце будет больше, чем на холодном. Это вызовет преимущественную диффузию электронов от горячего конца проводника к холодному. В результате на холодном конце сконцентрируется избыточный отрицательный заряд, на горячем, вследствие недостатка электронов, – положительный. В проводнике возникает электрическое поле, которое будет возрастать до тех пор, пока силы этого поля не создадут встречный поток электронов, полностью уравновешивающий диффузионный поток. В равновесном состоянии на концах проводника будет действовать вполне определённая разность потенциалов. Разности потенциалов, обусловленные диффузией электронов, в проводниках, образующих термопару, как правило, различны. Следовательно, их алгебраическая сумма отлична от нуля. Таким образом, результирующая термоэлектродвижущая сила складывается из суммы скачков потенциалов в слоях и изменений потенциала, обусловленных диффузией электронов. Явление Зеебека

используется при измерении температур. На рис. 5.14 изображена схема одного из наиболее распространенных методов. Один из спаев термостатируется – помещается в среду с неизменной температурой, например в сосуд Дьюара с тающим льдом; другой вносят в ту среду, температуру которой измеряют. О разности температур судят по величине термо ЭДС.

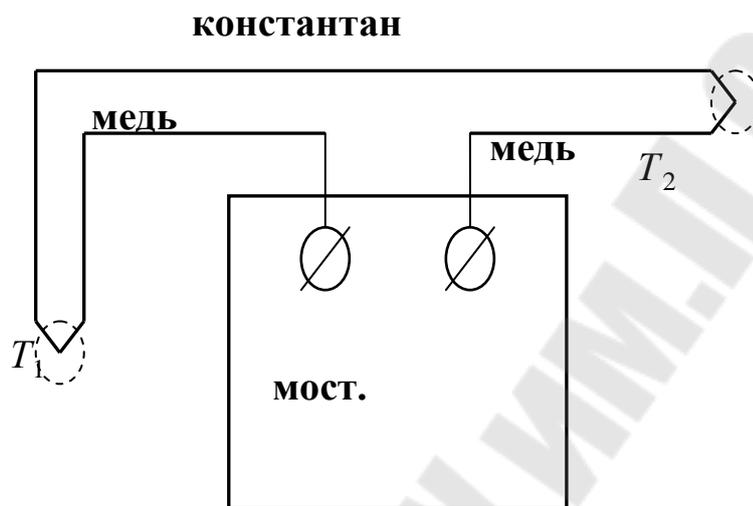


Рис. 5.14

Предпринимались попытки использовать термоэлементы в качестве источников тока. В таких источниках энергия теплового движения электронов преобразуется непосредственно в электрическую энергию. Однако ЭДС термоэлементов, составленных из металлических пар, весьма мала (порядка нескольких микровольт на кельвин), поэтому КПД таких источников мал. Полупроводниковые термоэлементы при сравнительно небольшой разности температур дают более заметную термо ЭДС (до  $10^3$  мкВ/К) и КПД ~ 10 – 12%. Такие термоэлементы уже нашли практическое применение. Явление Пельтье (Франция, 1834г) состоит в том, что при прохождении тока по цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных металлов, в местах спаев поглощается или выделяется (сверх энергии Ленца – Джоуля) некоторое количество тепла  $Q_n$ . Как показывает опыт, это количество тепла пропорционально прошедшему через спай электрическому заряду:

$$Q_n = \Pi q = \Pi It, \quad (5.29)$$

где  $\Pi$  – коэффициент Пельтье.

Коэффициент Пельтье численно равен энергии, выделяющейся (или поглощающейся) в спае при прохождении через спай единично-

го количества электричества. Коэффициент Пельтье – величина алгебраическая, при изменении направления тока в спайе коэффициент изменяет свой знак. По порядку величины коэффициент Пельтье для металлических пар составляет  $10^{-2} - 10^{-3}$  В.

Явление Пельтье объясняется тем, что средняя энергия электронов проводимости, т.е. электронов, участвующих в создании тока, в разнородных металлах, находящихся в контакте, неодинакова. Это означает, что относительная занятость верхних энергетических уровней в этих металлах различна (она меньше в том металле, в котором средняя энергия электронов проводимости меньше).

Пусть направление электростатического поля, создающего ток таково, что электроны переходят из металла с большей энергией (назовем его условно металл 1) в металл с меньшей энергией (металл 2). Перейдя в металл с меньшей энергией, электроны получают возможность отправиться на более низкие уровни (эти уровни в металле 2 более свободны). Переходя на более низкие уровни, электроны освобождают энергию, которая передаётся решётке. Спай нагревается (заметим, что в этом случае контактное электрическое поле замедляет движение электронов через контакт). При противоположном направлении тока спай охлаждается. Это объясняется тем, что электрическое поле, создающее ток, перебрасывает в металл 1 преимущественно быстрые электроны металла 2, электроны, занимающие уровни значительно выше уровня Ферми (медленные электроны не могут в заметном количестве перейти в металл 1 потому, что там уровни, соответствующие энергиям этих электронов, в основном заняты). Переход части быстрых электронов из металла 2 в металл 1 нарушает равновесное распределение электронов в металле 2. Равновесие вновь восстановится, если часть электронов с более низких уровней поднимается на более высокие уровни. Необходимую для этого подъёма энергию электроны заимствуют у решётки. В результате температура металла понижается, спай охлаждается (при таком направлении перехода через спай электроны в контактном поле ускоряются). Явление Пельтье может быть использовано для создания холодильных машин. Не менее перспективно и использование его для электрического обогрева помещений.

### **5.13. Полупроводники. Собственная и примесная проводимость**

Полупроводники по величине электропроводности занимают

промежуточное положение между металлами и диэлектриками. Полупроводниками являются вещества, у которых валентная зона полностью заполнена электронами (см. рис. 5.15), а ширина запрещённой зоны невелика (у собственных полупроводников не более 1 эВ).

Различают собственную и примесную проводимости полупроводников.

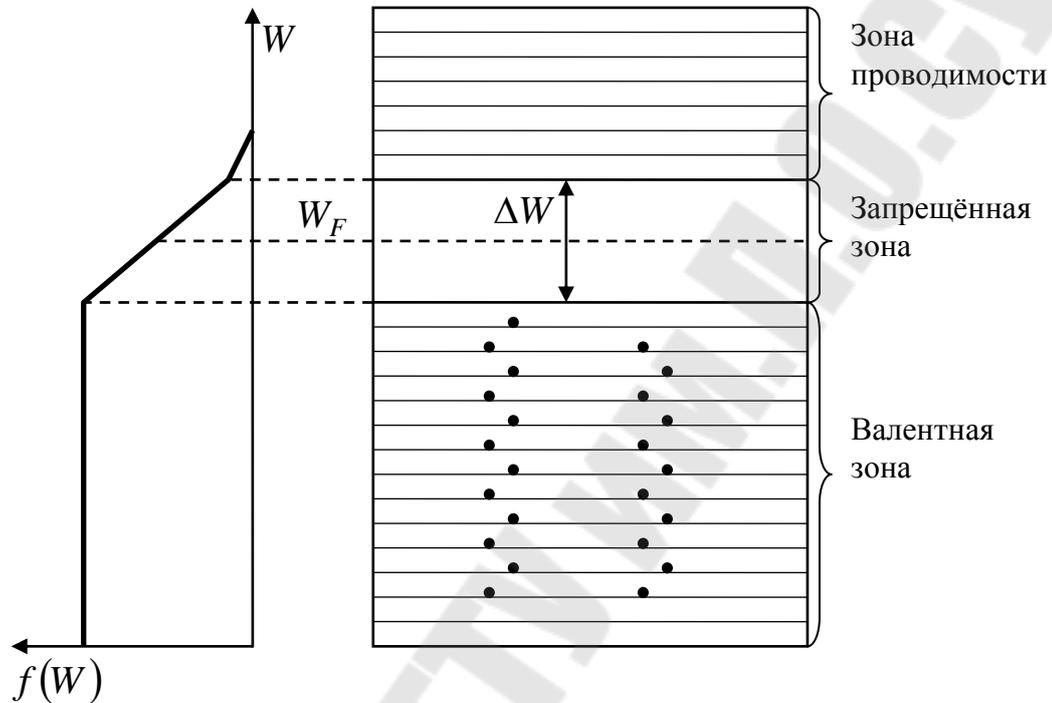


Рис.5.15

Собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока – электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях. Такие свободные от электронов места на уровнях заполненной при абсолютном нуле валентной зоны называют дырками.

Распределение электронов по уровням валентной зоны и зоны проводимости определяется функцией Ферми. Как показывают вычисления уровень Ферми лежит точно посередине запрещённой зоны (рис.5.15). Следовательно, для электронов, перешедших в зону проводимости, величина  $W - W_F$  мало отличается от половины ширины запрещённой зоны. Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения. Вероятность их заполнения электронами можно найти по формуле:

$$f(W) \approx e^{-\frac{W-W_F}{2kT}}. \quad (5.30)$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, будет пропорционально вероятности (5.30). Эти электроны, а также образовавшиеся в таком же числе дырки, являются носителями тока. Поскольку проводимость пропорциональна числу носителей, она также должна быть пропорциональна вероятности (5.30). Отсюда, электропроводность полупроводников быстро растёт с температурой, изменяясь по закону

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}, \quad (5.31)$$

где  $\Delta W$  – ширина запрещённой зоны.

Если на графике откладывать зависимость  $\ln \sigma$  от  $1/T$ , то для полупроводников получается прямая линия, изображённая на рис. 5.16. По наклону этой прямой можно определить ширину запрещённой зоны  $\Delta W$ .

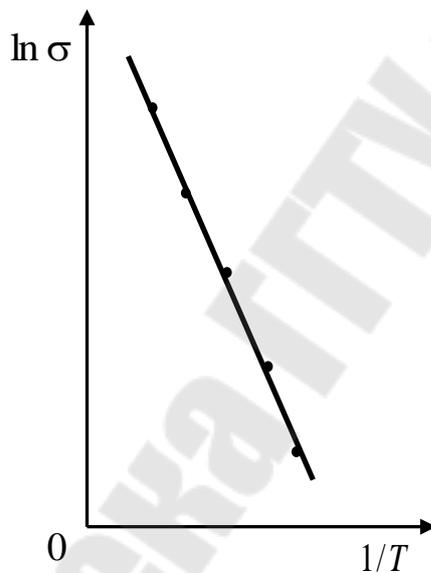


Рис.5.16

В полупроводнике идут одновременно два процесса: рождение попарно свободных электронов и дырок и рекомбинация, приводящая к попарному исчезновению электронов и дырок. Вероятность первого процесса быстро растёт с температурой. Вероятность рекомбинации пропорциональна как числу свободных электронов, так и числу дырок. Следовательно, каждой температуре соответствует определённая равновесная концентрация электронов и дырок, величина которой изменяется с температурой по такому же закону, как и  $\sigma$  (5.31).

В отсутствие внешнего электрического поля электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок – в направлении поля. Оба движения – и дырок, и электронов – приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, собственная электропроводность обуславливается как бы носителями заряда двух знаков – отрицательными электронами и положительными дырками.

Собственная проводимость наблюдается во всех без исключения полупроводниках при достаточно высокой температуре.

*Примесная проводимость.* Этот вид проводимости возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решётки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов. На рис. 5.17 условно изображена решётка германия с примесью 5 – валентных атомов фосфора.

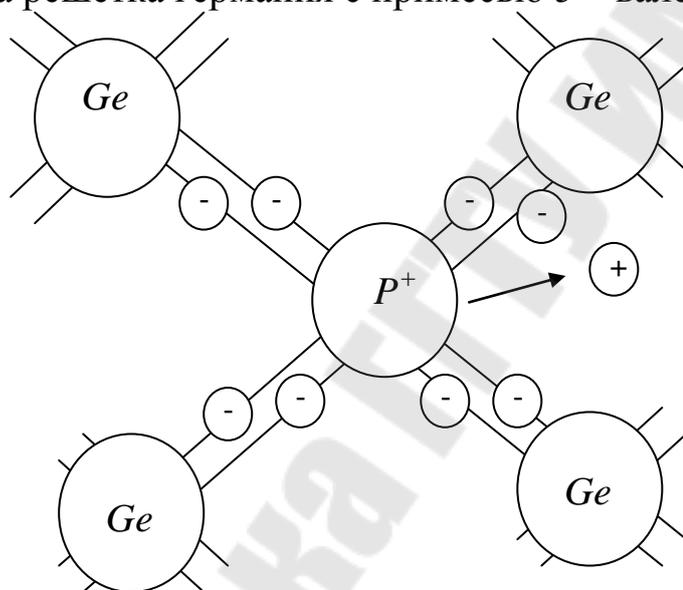


Рис.5.17

Для образования ковалентных связей с соседями атому фосфора достаточно четырёх электронов. Следовательно, пятый валентный электрон оказывается как бы лишним и легко отщепляется от атома за счёт энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон. Образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентных связей, т. е. образованием дырки. Хотя в окрестности атома примеси возникает избыточный положительный заряд, но он связан с этим атомом, и перемещаться по решётке не может. Благодаря этому заряду атом примеси может захватить приблившийся к нему электрон, но связь захваченного электрона с атомом

будет непрочной и легко нарушается вновь за счёт тепловых колебаний решётки.

Таким образом, в полупроводнике с 5 – валентной примесью имеется только один вид носителей тока – электроны. Или, иначе говоря, такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником  $n$  – типа. Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются донорами.

Примеси искажают поле решётки, что приводит к возникновению на энергетической схеме, так называемых локальных уровней, расположенных в запрещённой зоне кристалла. Любой уровень валентной зоны или зоны проводимости может быть занят электроном, находящимся в любом месте кристалла.

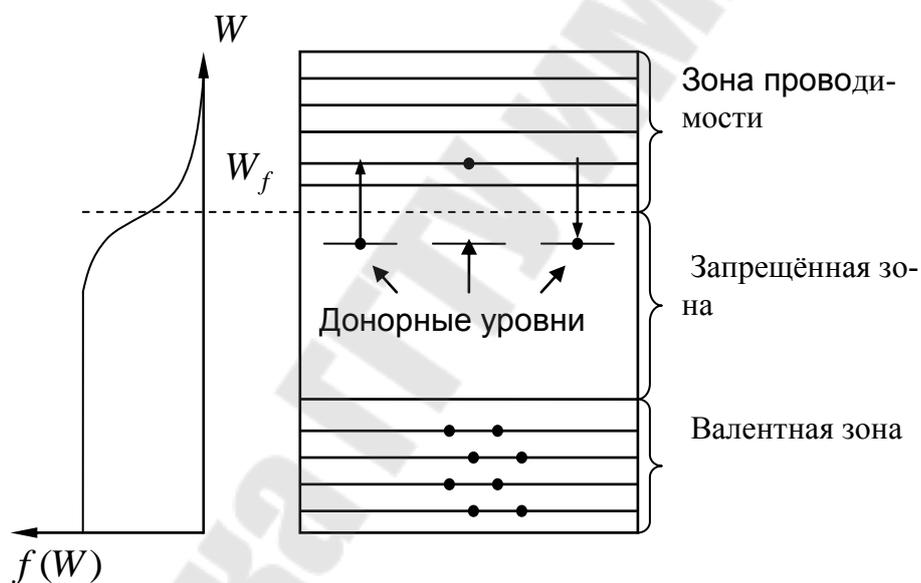


Рис.5.18

Энергию, соответствующую локальному уровню, электрон может иметь, лишь находясь вблизи атома примеси, вызвавшего появление этого уровня. Следовательно, электрон, занимающий примесный уровень, локализован вблизи атома примеси.

Если донорные уровни расположены недалеко от потолка валентной зоны, они не могут существенно повлиять на электрические свойства кристалла. Иначе обстоит дело, когда расстояние таких уровней от дна зоны проводимости гораздо меньше, чем ширина запрещённой зоны. В этом случае энергия теплового движения даже при обычных температурах оказывается достаточной для того, чтобы

перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости.

Уровень Ферми в полупроводниках  $n$  – типа лежит между донорными уровнями и дном зоны проводимости, при невысоких температурах – приблизительно посередине между ними (рис. 5.18).

На рис. 5.19 условно изображена решётка кремния с примесью 3 – валентных атомов бора. Трёх валентных электронов атома бора недостаточно для образования связей со всеми четырьмя соседями. Поэтому одна из связей окажется не укомплектованной и будет представлять собой место, способное захватить электрон. При переходе на это место электрона одной из соседних пар возникнет дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникнет избыточный отрицательный заряд, но он будет связан с данным атомом и не может стать носителем тока. Таким образом, в полупроводнике с 3 – валентной примесью возникают носители тока только одного вида

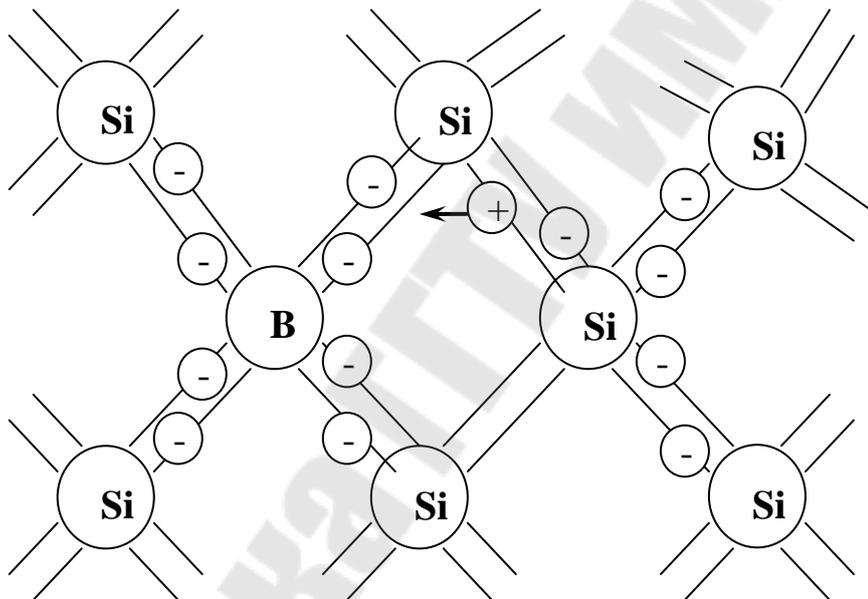


Рис. 5.19

– дырки. Проводимость в этом случае называется дырочной, а о полупроводнике говорят, что он принадлежит к полупроводнику  $p$  – типа. Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются акцепторными.

На схеме уровней (рис. 5.20) акцептору соответствует расположенный в запрещённой зоне недалеко от её дна локальный уровень. Образованию дырки отвечает переход электрона из валентной зоны на акцепторный уровень. Обратный процесс соответствует разрыву одной из четырёх ковалентных связей атома примеси с его соседями и рекомбинации образовавшегося при этом электрона и дырки.

Уровень Ферми в проводниках  $p$  – типа лежит между потолком ковалентной зоны и акцепторными уровнями, при невысоких температурах – приблизительно посередине между ними.

С повышением температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все акцепторные уровни. Вместе с тем по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электрона непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводника будет складываться из примесной и собственной проводимости. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

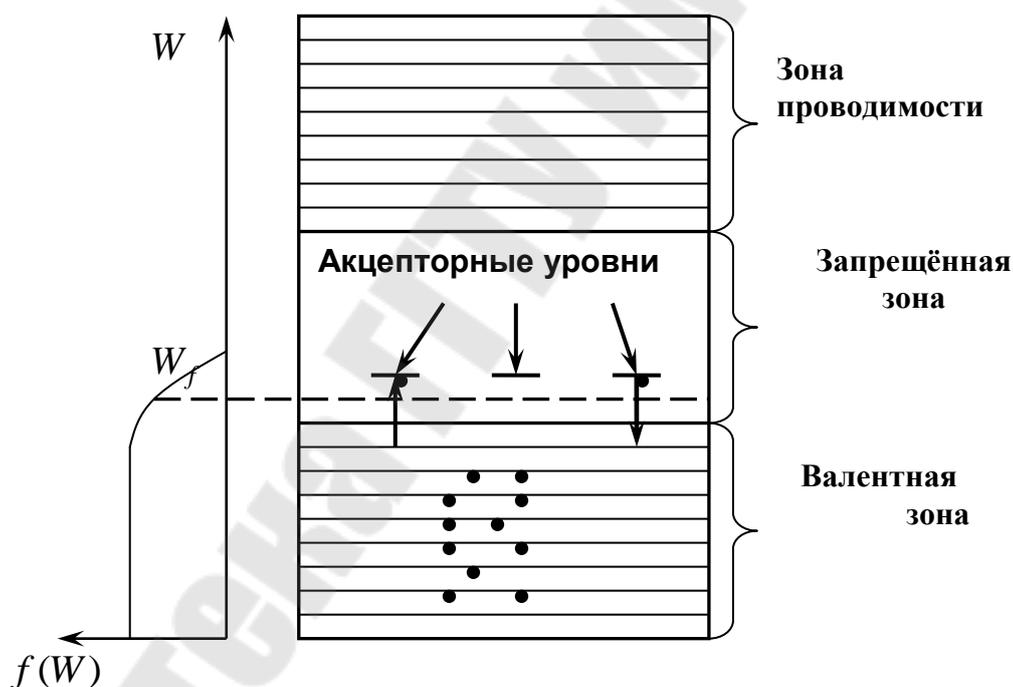


Рис. 5.20

Полупроводники  $n$  и  $p$  лежат в основе построения полупроводниковых устройств, используемых для выпрямления токов и усиления напряжений.

## Глава 6. Магнитное поле в вакууме

### 6.1. Магнитное поле. Магнитное взаимодействие элементов тока

Опыты показывают, что проводники, по которым течёт электрический ток, взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие также можно наблюдать между движущимися зарядами в газоразрядной трубке и проводником с током. Магнитная стрелка вблизи проводника отклоняется при подключении проводника к источнику тока. Эти взаимодействия осуществляются посредством магнитного поля, т.е. проводники с током создают в окружающем пространстве магнитное поле, которое воздействует на всякий проводник с током, находящийся в этом поле. Если токи постоянны, то свойства порождаемого ими магнитного поля в каждой точке пространства, остаются неизменными во времени. Такое постоянное поле мы с Вами и будем изучать.

Проводник с током – это не что иное, как громадное число заряженных частиц, перемещающихся в одном направлении. И поэтому перед тем, как рассмотреть взаимодействие проводников, определим силу взаимодействия отдельных движущихся зарядов. Рассмотрим два точечных положительных заряда  $dq$  и  $dq'$ , движущихся в данной системе отсчёта со скоростями  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$ , причём  $\vec{v} \ll c$  и  $\vec{v}' \ll c$  (рис. 6.1). Пусть скорость  $\vec{v}$  лежит в плоскости  $P$ , а  $\vec{v}'$  пересекает эту плоскость под некоторым углом.

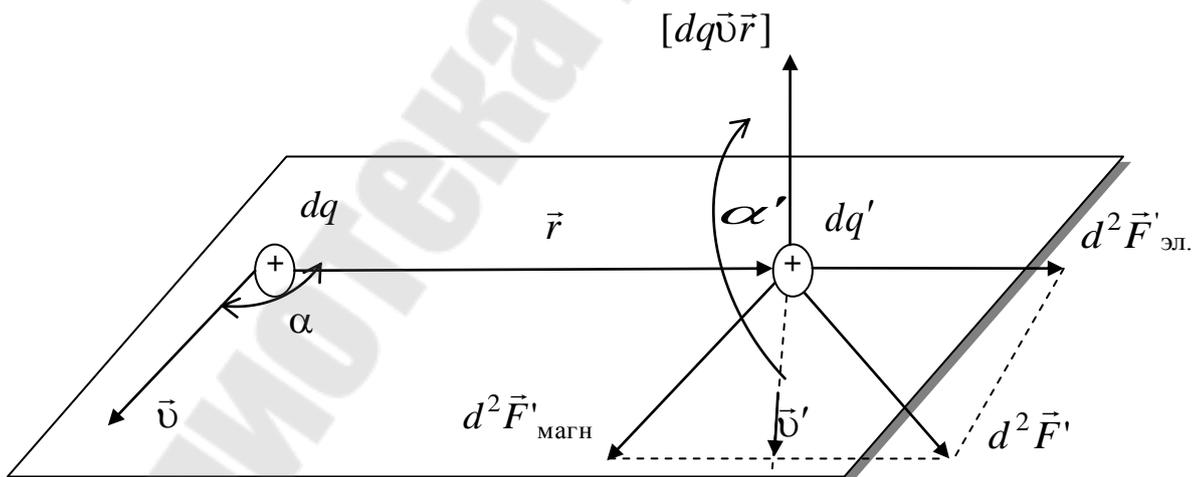


Рис. 6.1

Электрическая сила  $d^2\vec{F}'_{эл}$ , с которой заряд  $dq$  действует на за-

ряд  $dq'$  в вакууме, согласно закону Кулона равна:

$$d^2 \vec{F}'_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dqdq'}{r^3} \vec{r}, \quad (6.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус вектор, проведённый от  $dq$  к  $dq'$ ,  $r$  – модуль этого вектора.

Магнитная сила  $d^2 \vec{F}'_{\text{магн}}$ , с которой  $dq$  действует на  $dq'$  в вакууме, выражается следующим двойным векторным произведением:

$$d^2 \vec{F}'_{\text{магн}} = k \frac{[dq' \vec{v}' [dq \vec{v} \vec{r}]]}{r^3}, \quad (6.2)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц. Формула (6.2) – обобщение опыта. Из этой формулы видно, что модуль и направление магнитной силы зависят от системы отсчёта, относительно, которой рассматривается движение зарядов. В системе, в которой хотя бы один из зарядов покоится, магнитная сила отсутствует.

Опытом установлено, что коэффициент пропорциональности, входящий в (6.2), в системе СИ равен  $10^{-7}$  Гн/м ( $\text{Н}/\text{А}^2$ ) и определяется соотношением:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Величину  $\mu_0$  называют магнитной постоянной. Её числовое значение равно:

$$\mu_0 = 4\pi k = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м } (\text{Н}/\text{А}^2).$$

Таким образом, полная электромагнитная сила, с которой  $dq$  действует на  $dq'$  равна:

$$d^2 \vec{F}' = d^2 \vec{F}'_{\text{эл}} + d^2 \vec{F}'_{\text{магн}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dqdq'}{r^3} \vec{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[dq' \vec{v}' [dq \vec{v} \vec{r}]]}{r^3}. \quad (6.3)$$

Аналогично можно найти силу действия со стороны заряда  $dq'$  на  $dq$ :  $d^2 \vec{F} = -d^2 \vec{F}'$ .

На практике приходится иметь дело с взаимодействием не отдельных точечных зарядов, а целой совокупности движущихся зарядов, т.е. с взаимодействием электрических токов.

Рассмотрим токи  $I$  и  $I'$ , текущие по двум линейным проводникам (рис. 6.2). Будем считать расстояние между проводниками значительно больше диаметра проводников.

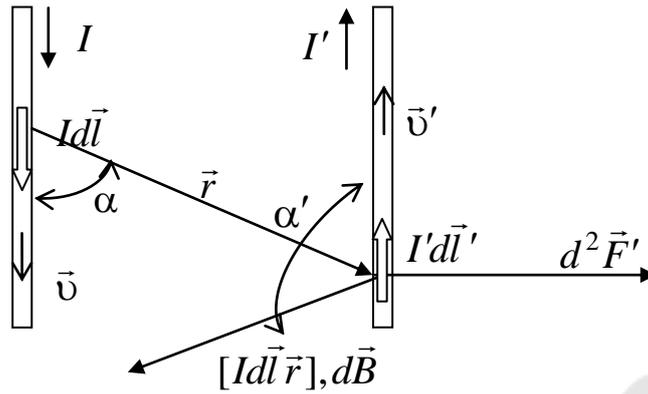


Рис. 6.2

Выделим в проводниках объёмы  $dV = Sdl$  и  $dV' = S'dl'$ .

Элементу длины проводника  $dl$  принято приписывать направление, совпадающее с направлением вектора плотности тока в проводнике. Произведение силы тока  $I$  на вектор  $d\vec{l}$  называется вектором элемента тока  $I d\vec{l}$  или элементом тока.

Преобразуем, выражение для магнитной силы взаимодействия зарядов (6.3) так чтобы в него вошли элементы тока. Представим  $dq\vec{v}$  и  $dq'\vec{v}'$  через  $I d\vec{l}$  и  $I' d\vec{l}'$  следующим образом:

$$dq\vec{v} = n |e| \vec{v} dV = n\vec{v} |e| Sdl = \vec{j} Sdl = I d\vec{l};$$

$$dq'\vec{v}' = n' |e| \vec{v}' dV' = n'\vec{v}' |e| S'dl' = \vec{j}' S'dl' = I' d\vec{l}',$$

где  $n$  и  $n'$  – концентрации носителей заряда в проводниках;

$e$  – элементарный заряд;

$\vec{j}$ ,  $\vec{j}'$  и  $I$ ,  $I'$  – плотности токов и токи в проводниках.

Заменим в выражении (6.3)  $dq\vec{v}$  и  $dq'\vec{v}'$  на  $I d\vec{l}$  и  $I' d\vec{l}'$  соответственно. Таким образом, магнитная сила  $d^2\vec{F}'$ , с которой элемент тока  $I d\vec{l}$  действует на элемент тока  $I' d\vec{l}'$  равна

$$d^2\vec{F}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I' d\vec{l}' [I d\vec{l} \vec{r}]]}{r^3}. \quad (6.4)$$

Направление  $d^2\vec{F}'$  определяем, воспользовавшись следующим правилом. Вначале находим направление вектора  $[I d\vec{l} \vec{r}]$ . Этот вектор перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен так, что если смотреть с его конца, то поворот в этой плоскости от вектора  $I d\vec{l}$  к вектору  $\vec{r}$  должен происходить по кратчайшему пути против часовой стрелки. Затем находим, таким же образом, и направление вектора

силы  $d^2\vec{F}'$  – он лежит в плоскости чертежа и направлен горизонтально вправо. Отсюда следует, что токи противоположного направления отталкиваются, а одного притягиваются.

Магнитные силы – нецентральные силы, они не направлены в общем случае вдоль прямой, соединяющие элементы тока. Модуль магнитной силы равен:  $d^2F' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'dl'Idl \sin \alpha' \sin \alpha}{r^2}$ , (6.5)

где  $\alpha$  – угол между  $Id\vec{l}$  и вектором  $\vec{r}$ ;  $\alpha'$  – угол между  $I'd\vec{l}'$  и вектором  $[Id\vec{l}\vec{r}]$ .

Из (6.5) следует, что  $d^2\vec{F}' = 0$ , если элемент тока  $Id\vec{l}$  и радиус-вектор  $\vec{r}$  направлены вдоль одной прямой в одну сторону ( $\alpha = 0$ ) или в противоположные стороны ( $\alpha = \pi$ ), – или если элемент тока  $I'd\vec{l}'$  перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$  ( $\alpha' = 0$  или  $\alpha' = \pi$ ).

Формула (6.4), выражающая закон взаимодействия элементов тока, называется формулой Неймана.

## 6.2. Индукция магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа

Магнитное взаимодействие электрических токов осуществляется через посредство магнитного поля. Каждый такой ток создаёт в окружающем пространстве магнитное поле и через него действует на другие токи и движущиеся заряды. Рассмотрим подробнее воздействие одних токов на другие.

Выделим в выражении закона магнитного взаимодействия элементов тока (6.4) часть:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3} \text{ и обозначим её } d\vec{B}.$$

$$\text{Тогда } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}. \quad (6.6)$$

Эта часть зависит только от элемента тока  $Id\vec{l}$  и от положения точки, в которой находится другой элемент  $I'd\vec{l}'$ . Следовательно, величина  $d\vec{B}$  может служить характеристикой магнитного поля, которое создаётся элементом тока  $Id\vec{l}$  в этой точке. Эта величина называется – индукцией магнитного поля.

Направление магнитного поля в точке, где располагается  $I'd\vec{l}$  находится по следующему правилу. Вектор  $d\vec{B}$  должен быть перпендикулярен к плоскости (рис. 6.2), в которой лежат вектора  $I'd\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и направлен так, что если смотреть с конца этого вектора, то поворот в этой плоскости оси от вектора  $I'd\vec{l}$  к вектору  $\vec{r}$  должен происходить по кратчайшему пути против часовой стрелки.

Для магнитного поля также справедлив принцип суперпозиции. Индукция магнитного поля, создаваемого током, текущим в проводнике конечных размеров и произвольной формы, равна интегралу индукций  $d\vec{B}$ , создаваемых отдельными элементами этого тока:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}, (6.7) \text{ или } \vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I'd\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. (6.8)$$

Выражения (6.6) и (6.8) не, что иное, как дифференциальная и интегральная формы записи закона Био – Савара – Лапласа.

Теперь дадим определение индукции магнитного поля:  $\vec{B}$  это векторная физическая величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на движущиеся в нем электрические заряды и численно равная модулю силы, с которой магнитное поле действовало бы в данной точке на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно к полю.

Направление вектора индукции перпендикулярно направлению силы, действующей на элемент тока.

Магнитное поле может быть изображено графически – линиями  $\vec{B}$ . Линия вектора  $\vec{B}$  (линия магнитного поля) – линия, проведённая в магнитном поле так, что вектор  $\vec{B}$  в каждой её точке направлен по касательной к ней. Линиям  $\vec{B}$  приписывается направление, совпадающее с направлением  $\vec{B}$ . Линии  $\vec{B}$  всегда замкнуты. Они замыкаются вокруг токов, создающих магнитное поле, и связаны с направлением последних правилом правого буравчика: если поступательное движение буравчика совпадает с направлением тока, то вращение рукоятки указывает направление линий поля (рис. 6.3,а). В случае кольцевого тока вращение рукоятки буравчика удобно совместить с направлением тока, тогда поступательное движение буравчика укажет направление поля в точках, лежащих в плоскости тока (внутри кольца – рис. 6.3,б).

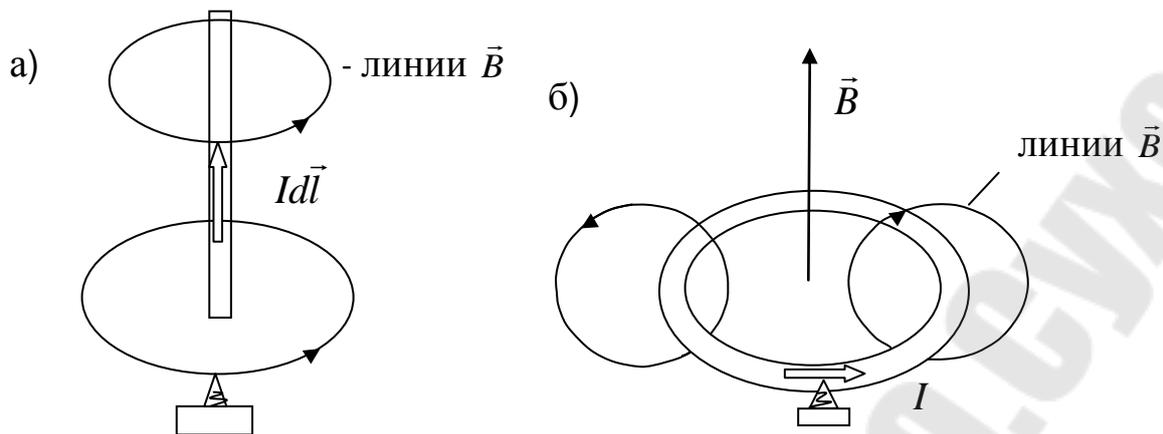


Рис. 6.3

Линии магнитного поля проводят с такой густотой, чтобы их число, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную к вектору  $\vec{B}$ , было равно или пропорционально модулю  $\vec{B}$  в том месте, где находится площадка. Магнитное поле называется однородным, если вектор  $\vec{B}$  одинаков во всех его точках.

Размерность величин вектора  $\vec{B}$  и  $\mu_0$  найдём следующим образом:

$$[B] = \frac{[F]}{[I][L]} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл};$$

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{\text{Вб} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Гн}}{\text{Н}}.$$

### 6.3. Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчёту магнитных полей

Закон Био – Савара – Лапласа позволяет найти индукцию магнитного поля, создаваемого токами. Согласно (6.6) элемент тока  $Id\vec{l}$  создаёт в точке, определяемой радиус – вектором  $\vec{r}$ , магнитное поле с

индукцией  $d\vec{B}$ , равной  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}$ . (6.9)

Модуль  $d\vec{B}$  равен:  $dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}$ , (6.10)

где  $\alpha$  – угол между  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$  (рис. 6.4).

В соответствии с принципом суперпозиции индукция магнитного поля, созданного током, текущим в проводнике конечных размеров и произвольной формы, равна интегралу:

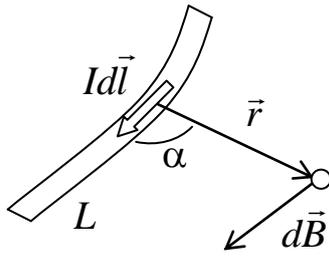


Рис.6.4

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}, \quad (6.11)$$

где  $L$  – контур тока, или учитывая выражение для  $d\vec{B}$ ,

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0 [Id\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (6.12)$$

Рассчитать магнитное поле в данной точке – значит найти в этой точке модуль и направление вектора  $\vec{B}$ . В общем случае это довольно сложная задача, связанная с интегрированием векторных величин. В ряде частных случаев решение оказывается простым.

1) *Магнитное поле прямолинейного тока.* Пусть  $I$  – сила тока в проводнике,  $r_0$  – кратчайшее расстояние от проводника, до точки в которой определяется  $\vec{B}$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между радиус – векторами, проведёнными от концов проводника в точку  $C$ , и направлением тока в проводнике.

Выберем на проводнике произвольно элемент тока  $Id\vec{l}$  (рис. 6.5). Этот элемент тока создаёт в точке  $C$  поле с индукцией  $d\vec{B}$ , которая согласно закону Био – Савара – Лапласа определяется выражением:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 [Id\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}; \text{ а модуль вектора } d\vec{B} = dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \text{ где } \vec{r}$$

это радиус – вектор, проведённый от элемента тока  $Id\vec{l}$  в точку  $C$  поля;  $\alpha$  – угол между элементом тока  $Id\vec{l}$  и радиус – вектором  $\vec{r}$ . Результирующую индукцию магнитного поля определим, используя принцип суперпозиции (6.11), согласно которому  $\vec{B} = \int_L d\vec{B}$ .

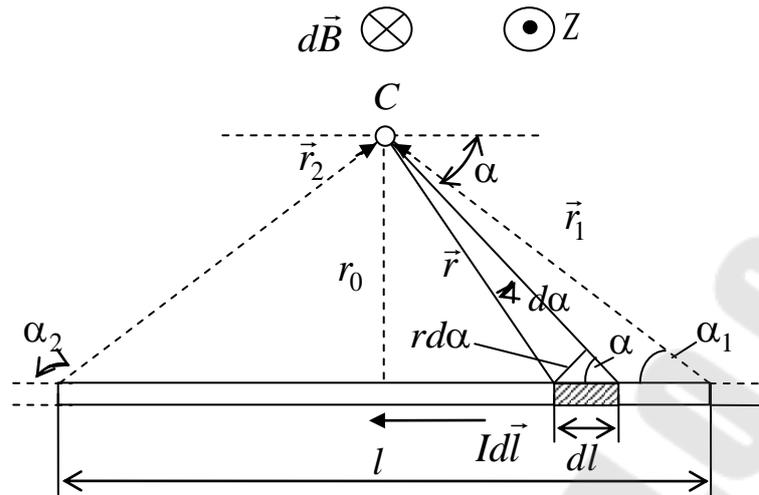


Рис. 6.5

В точке  $C$  векторы  $d\vec{B}$  от различных элементов тока имеют одинаковое направление, противоположное оси  $z$  в данном случае за плоскость чертежа. Поэтому сложение векторов  $d\vec{B}$  можно заменить сложением их модулей. В этом случае выражение (6.12) можно записать в виде:  $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dl$ . (6.13)

Данное выражение содержит две переменные величины: угол и расстояние. Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы в него входила только одна переменная – угол  $\alpha$ . Как следует из рисунка 6.5  $dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha}$ . Тогда  $\frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \frac{\sin \alpha}{r^2} \cdot \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{d\alpha}{r}$ . Величина  $r$  также зависит от  $\alpha$ :  $r = \frac{r_0}{\sin \alpha}$ . Тогда  $\frac{d\alpha}{r} = \frac{d\alpha}{r_0} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{r_0} \cdot d\alpha$ . С учётом полученных соотношений, выражение (6.13) можно переписать в

$$\text{виде: } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6.14)$$

Если точка  $C$  расположена симметрично относительно отрезка проводника, то есть  $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$ , то выражение (6.14) примет вид:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cdot \cos \alpha_1, \quad (6.15)$$

$$\text{где } \cos \alpha_1 = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r_0^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Для бесконечно длинного проводника  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ . Следовательно:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (6.16)$$

2) *Магнитное поле на оси кругового контура с током.*

Пусть сила тока в контуре  $I$ , радиус  $r_0$  и расстояние по оси  $h$  до точки А (рис. 6.6).

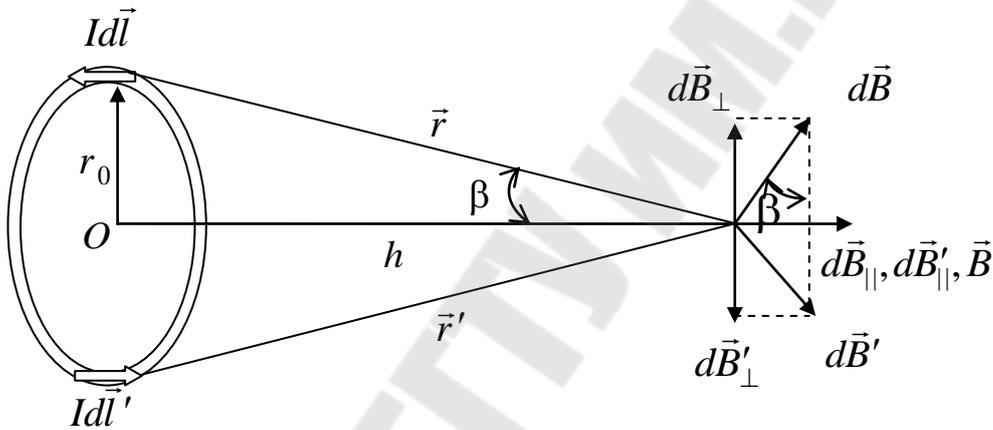


Рис. 6.6

Выделим произвольный элемент тока  $Id\vec{l}$  и диаметрально противоположащий  $Id\vec{l}'$ . Разложим создаваемые этими элементами индукции  $d\vec{B}$  и  $d\vec{B}'$  на две составляющие: составляющие параллельные оси контура  $d\vec{B}_{||}$  и  $d\vec{B}'_{||}$  и перпендикулярные к ней  $\vec{B}$  и  $\vec{r}'$ . Составляющая поля  $\vec{B}$  компенсируется составляющей  $\vec{r}'$ , в силу симметрии. Таким образом, результирующая индукция  $\vec{B}$  направлена вдоль оси контура. Модуль  $B$  равен сумме модулей всех  $d\vec{B}_{||}$ :  $B = \int_L dB_{||}$ . Как

$$\text{видно из рисунка 6.6 } dB_{||} = dB \sin \beta = dB \frac{r_0}{r}. \quad (6.17)$$

По закону Био – Савара – Лапласа величина  $d\vec{B}$  определяется выражением  $dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$  (угол  $\alpha$  между  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$  – прямой).

Подставим полученное соотношение в (6.17) и проинтегрируем по  $L$  от 0 до  $2\pi r_0$ :

$$B = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\mu_0 I dl r_0}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi r_0^2}{r^3},$$

$$\text{или } B = \frac{\mu_0 r_0^2 l}{2(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (6.18)$$

так как  $r = (r_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ . В центре контура ( $h = 0$ ), индукция получается равной  $B = \frac{\mu_0 I}{2r_0}$ . (6.19)

#### 6.4. Циркуляция вектора $\vec{B}$

Найдём циркуляцию вектора магнитной индукции. Рассмотрим магнитное поле стационарного тока проводимости, текущего в прямом проводе бесконечной длины. Контур обхода (контур интегрирования)  $L$  выберем в плоскости перпендикулярной к току. Направление тока и обхода показаны на рисунке 6.7. Скалярное произведение вектора  $d\vec{B}$  на элементарное перемещение  $d\vec{l}$  по контуру  $L$  равно  $\vec{B}d\vec{l} = Bdl \cos \alpha = Bdl_B$ , где  $dl_B$  – проекция вектора  $d\vec{l}$  на направление, совпадающее с  $\vec{B}$ .

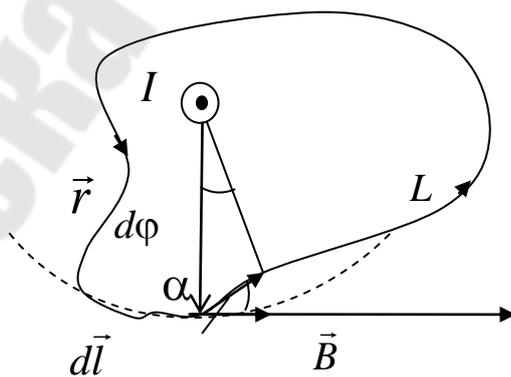


Рис.6.7

Из рисунка следует, что  $dl_B = r d\varphi$ , где  $r$  – модуль радиус-вектора, проведённого от тока к  $d\vec{l}$ ;  $d\varphi$  – угол поворота этого вектора при перемещении на  $d\vec{l}$  по силовой линии. По (6.16)  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

$$\text{Тогда } \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi. \quad (6.20)$$

Циркуляцию  $\vec{B}$  найдём, проинтегрировав (6.20) по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  (при обходе всех элементов контура  $L$  радиус – вектор повернётся на угол  $2\pi$ ):

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I. \quad (6.21)$$

Полученная формула справедлива не только для плоского контура охватывающего прямой ток, но и для любого пространственного (не плоского) контура, охватывающего любой постоянный (и не обязательно линейный) ток.

Если контур обхода не охватывает ток, то циркуляция  $\vec{B}$  равна нулю:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0.$$

Ток и циркуляция в выражении (6.21) – величины алгебраические. Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру  $L$  правилом правого буравчика; ток противоположного направления считается отрицательным (рис. 6.8). Если контур обхода охватывает один и тот же ток  $N$  раз (рис. 6.9),

$$\text{то } \oint_L d\varphi = 2\pi N \text{ и } \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 NI. \quad (6.22)$$

Если контур обхода охватывает  $m$  разных токов, то

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^m I_i, \quad (6.23)$$

где  $\sum_{i=1}^m I_i$  – полный ток, охватываемый контуром обхода  $L$ .

В случае произвольного распределения токов в пространстве полный ток выражается через плотность тока  $\vec{j}$ :

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S}, \text{ где } S \text{ – любая поверхность, опирающаяся на контур}$$

$L$ , по которому берётся циркуляция.

Таким образом, циркуляция вектора индукции магнитного поля, созданного в вакууме постоянными электрическими токами, равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму всех макроскопических токов, охватываемых контуром интегрирования. Это утверждение носит название теоремы о циркуляции вектора

магнитной индукции. Формулы (6.21 – 6.23) не отображают всех взаимных связей между электрическими и магнитными явлениями: они относятся только к случаю магнитных полей, создаваемых в вакууме постоянными макроскопическими токами (проводимости, конвекционными, токами в вакууме). Так как циркуляция вектора  $\vec{B}$  оказалась отличной от 0, то следует заключить, что магнитное поле в отличие от электрического поля не потенциально. Поле, подобное электростатическому полю, называют безвихревым полем, подобное магнитному – вихревое.

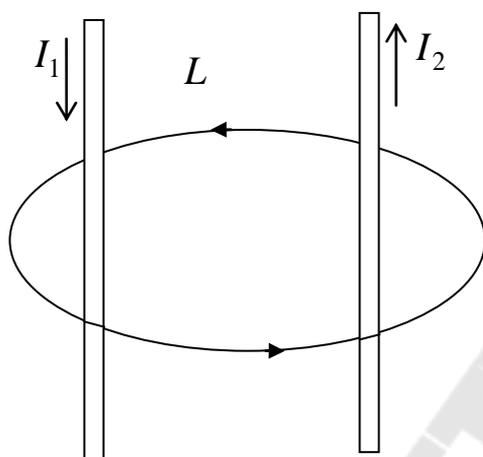


Рис.6.8

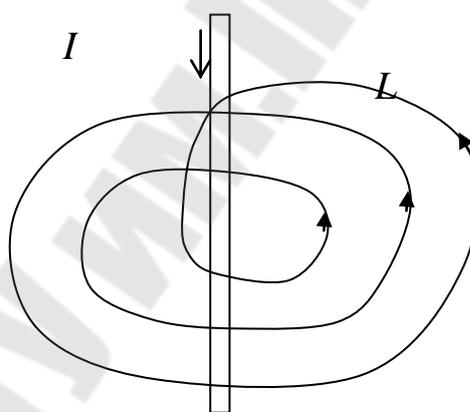


Рис.6.9

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  играет в магнетизме такую же роль, как теорема Гаусса в электростатике: при наличии симметрии токов эта теорема позволяет находить индукцию магнитного поля без непосредственного применения закона Био – Савара – Лапласа.

Схема расчёта магнитного поля на основе теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  такова. Выясняется характер симметрии магнитного поля, после чего выбирается такой замкнутый контур обхода, охватывающий ток, чтобы числовое значение вектора  $\vec{B}$  во всех точках этого контура или хотя бы на отдельных конечных его участках было одинаковым, а угол между направлением  $\vec{B}$  и соответствующими элементами контура – либо 0, либо  $\pi/2$ . Затем вычисляется циркуляция вектора  $\vec{B}$  по этому контуру. Найденное значение циркуляции приравнивается к алгебраической сумме токов охватываемых контуром обхода. Полученное равенство решается относительно  $\vec{B}$ .

Рассмотрим примеры расчёта с использованием теоремы о циркуляции.

1. *Магнитное поле бесконечно длинного соленоида.*

Соленоид – проводник, свёрнутый в виде цилиндрической длинной спирали (рис. 6.10). Пусть  $I$  – ток в соленоиде;  $n$  – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Каждая линия вектора  $\vec{B}$ , будучи замкнутой, проходит как внутри соленоида, так и вне его. Внутри соленоида все линии  $\vec{B}$  проходят через конечную площадь поперечного сечения соленоида. Вне соленоида эти же линии проходят через перпендикулярную к соленоиду поверхность фактически бесконечно большой площади. Числовое значение  $\vec{B}$  равно или пропорционально числу линий  $\vec{B}$  пронизывающих единичную площадку перпендикулярную к линиям. Поэтому, индукция за пределами соленоида пренебрежимо мала по сравнению с индукцией внутри соленоида.

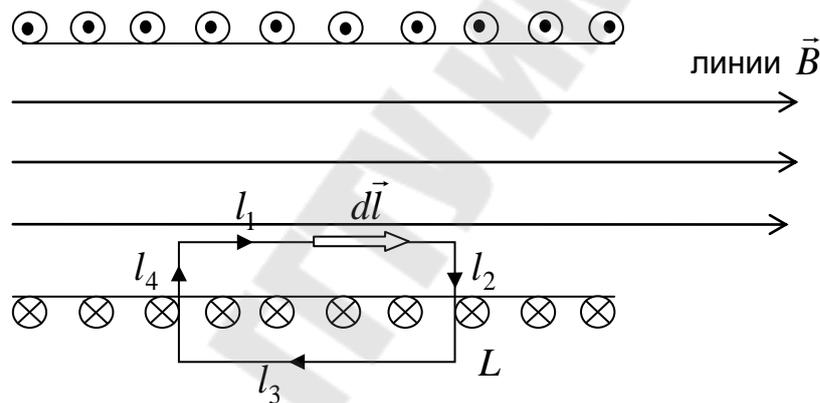


Рис. 6.10

Из соображений симметрии следует, что модуль  $\vec{B}$  внутри соленоида всюду одинаков и линии  $\vec{B}$  индукции параллельны оси соленоида. В качестве контура интегрирования логично выбрать прямоугольник, одна из сторон которого параллельна линиям  $\vec{B}$  внутри соленоида.

Циркуляцию  $\vec{B}$  по этому контуру можно представить следующим образом:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{l_1} B_l dl + \int_{l_2} B_l dl + \int_{l_3} B_l dl + \int_{l_4} B_l dl = Bl_1 = Bl, \quad (6.24)$$

где из четырёх интегралов, стоящих в правой части, второй и четвёртый равны нулю, так как вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен второму и четвёртому элементам контура, по которым они берутся. Третьим интегралом можно пренебречь, так как  $B$  очень мала.

Согласно (6.22):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI \text{ или } \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 n l I, \quad (6.25)$$

где  $N = nl$  – число витков, охватываемых контуром интегрирования. Приравняв правые части выражений (6.24) и (6.25), получим:  $B = \mu_0 n I$ , (6.26)

Формулой (6.26) можно пользоваться и для нахождения индукции в соленоиде конечной длины, если эта длина значительно больше диаметра.

## 2. Расчёт магнитного поля тороида.

Тороид – это соленоид, свёрнутый в виде кольца (рис. 6.11). Магнитное поле полностью заключено внутри тороида. Линии  $\vec{B}$  – окружности, центры которых совпадают с центром тороида. Найдём индукцию в точке, лежащей на осевой линии тороида. Пусть  $r_0$  – радиус этой линии:  $n$  – число витков, приходящихся на единицу длины этой линии;  $I$  – сила тока в тороиде. Геометрическое место точек, в которых модуль  $\vec{B}$  одинаков, представляет собой окружность. Следовательно, контуром обхода  $L$  должна быть окружность. Пусть эта окружность совпадает с осевой линией. Циркуляция  $\vec{B}$  по данному контуру равна:  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r_0 B$ .

Согласно (6.22)  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 NI$ , где  $N$  – общее число витков тороида. Приравняв правые части этих равенств получим:

$$B = \mu_0 \frac{N}{2\pi r_0} I, \text{ где } \frac{N}{2\pi r_0} = n \text{ – число витков, приходящихся на}$$

единицу длины осевой линии тороида.

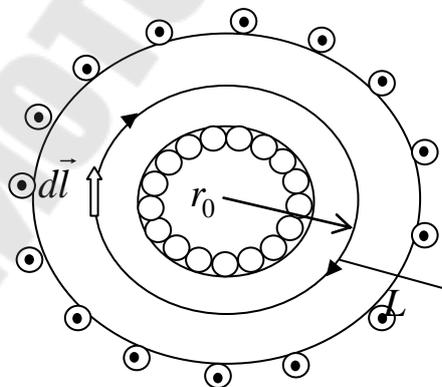


Рис.6.11

Учитывая это, получим, что величина магнитной индукции поля тороида:

$$B = \mu_0 nI . (6.27)$$

Если контур обхода  $L$  радиуса  $r$  проходит вне тороида, то токов он не охватывает и циркуляция  $\vec{B}$  равна нулю ( $B2\pi r = 0$ ). Это означает, что поле вне тороида отсутствует.

## Глава 7. Проводники с током в магнитном поле

### 7.1. Закон Ампера

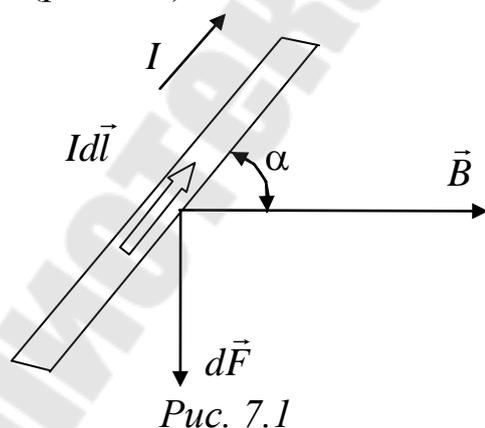
Закон Ампера позволяет находить силу, с которой усреднённое магнитное поле действует как на отдельный элемент электрического тока (дифференциальная форма закона), так и на проводник с током конечных размеров (интегральная форма).

Макроскопическое магнитное поле действует на элемент тока  $Id\vec{l}$  с силой, модуль и направление которой определяется соотношением:

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \vec{B}], (7.1)$$

где  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля в том месте, где находится элемент тока  $Id\vec{l}$ .

Сила  $d\vec{F}$  перпендикулярна к плоскости, в которой лежат  $Id\vec{l}$  и  $\vec{B}$ : и если смотреть с конца  $d\vec{F}$  на эту плоскость, то поворот от  $Id\vec{l}$  к  $\vec{B}$  должен происходить по кратчайшему пути против часовой стрелки (рис. 7.1).



Направление  $d\vec{F}$  можно определять также по правилу левой руки: если расположить левую руку так, чтобы линии поля входили в ладонь, а вытянутые четыре сложенных пальца совпадали с направле-

нием тока в проводнике, то отставленный на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы  $d\vec{F}$ .

Модуль силы Ампера равен:  $dF = IdlB \sin \alpha$ , (7.2)

где  $\alpha$  – угол между  $Id\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Чтобы найти силу, действующую на ток, текущий по проводнику конечных размеров, нужно проинтегрировать (7.1) по контуру тока  $L$  (интегральная форма закона Ампера):

$$\vec{F} = \int_L [Id\vec{l} \vec{B}]. \quad (7.3)$$

Закон Ампера с успехом применяется к решению многих задач.

1. Найдём силу, с которой однородное магнитное поле  $\vec{B}$  действует на прямолинейный отрезок провода длиной  $l$  с током  $I$  (рис. 7.2).

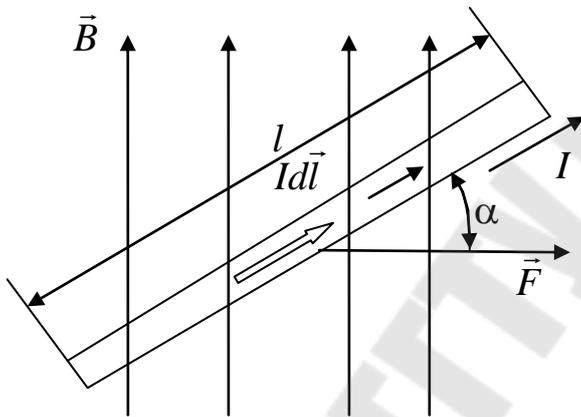


Рис. 7.2

Так как рассматриваемый ток прямолинейный, а магнитное поле однородно, то угол между  $Id\vec{l}$  и  $\vec{B}$  для всех элементов тока один и тот же:  $\alpha$ . Все  $d\vec{F}$  параллельны, следовательно, модуль результирующей силы равен интегралу модулей  $d\vec{F}$ , учитывая (7.2), получим

$$F = \int dF = \int IdlB \sin \alpha = IlB \sin \alpha. \quad (7.4)$$

Как видно из этой формулы, сила, действующая на прямой ток, зависит от ориентации тока; она максимальна, когда ток перпендикулярен к полю ( $\sin \alpha = 1$ ), и минимальна (равно 0), когда ток параллелен или антипараллелен полю ( $\sin \alpha = 0$ ).

2. Сила взаимодействия двух проводников с током. Определим силу взаимодействия двух бесконечно длинных проводников с током  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $r_0$  друг от друга (рис.7.3). Будем считать, что ток  $I_1$ , создаёт поле, а ток  $I_2$  испытывает действие этого

поля. Так как токи параллельны, каждый элемент второго тока находится в поле с одной и той же индукцией  $\vec{B}_1$ , модуль которой равен:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0}.$$

Силу, действующую на отрезок  $l$  второго провода, найдём по закону Ампера:

$$F_{21} = I_2 l B_1 \sin \alpha,$$

где  $I_2$  – ток во втором проводе;

$\alpha$  – угол между направлением тока  $I_2$  и направлением индукции  $\vec{B}$  (этот угол равен  $90^\circ$ ).

Подставив в эту формулу выражение для  $B_1$ , и разделив левую и правую части на  $l$ , найдём модуль силы, действующей на единицу длины второго провода:

$$\frac{F_{21}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0}. \quad (7.5)$$

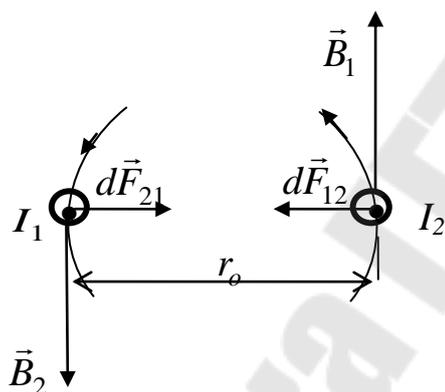


Рис. 7.3

Числовое значение силы, действующей на единицу длины первого тока выражается такой же формулой (при нахождении этой силы полагаем, что поле создаётся током  $I_2$ ). Определив направления  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$ , нетрудно убедиться в том, что токи одного направления притягиваются, токи противоположного направления отталкиваются.

3. *Контур с током в однородном магнитном поле.* На рисунке (7.4) замкнутый плоский контур с током в однородном магнитном поле. Контур представляет собой плоскую прямоугольную рамку со сторонами  $a$  и  $b$ . Магнитный момент тока в рамке равен  $\vec{P}_m = I\vec{S}$  и

образует с направлением магнитного поля  $\vec{B}$  угол  $\alpha$ .

Силы, действующие на стороны  $b$  рамки, равны по модулю, противоположны по направлению и лежат в плоскости рамки. Эти силы взаимно уравниваются. Силы, действующие на стороны  $a$  рамки образуют пару сил. Момент этой пары относительно оси, совпадающей с одной из сторон  $a$ , численно равен  $M = F_a h = F_a b \sin \alpha$ .

Согласно закону Ампера модуль силы  $\vec{F}_a$  равен  $F_a = IBa \sin \alpha$ ,

Следовательно  $M = IBab \sin \alpha$ , где

$ab = S$  – площадь рамки;

$IS$  – модуль магнитного момента  $\vec{P}_m$  тока  $I$ .

Тогда:  $M = P_m B \sin \alpha$ . (7.6)

Учитывая взаимную ориентацию векторов  $\vec{M}$ ,  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}$ , формулу (7.6) можно записать в векторном виде:  $\vec{M} = [\vec{P}_m \vec{B}]$ . (7.7)

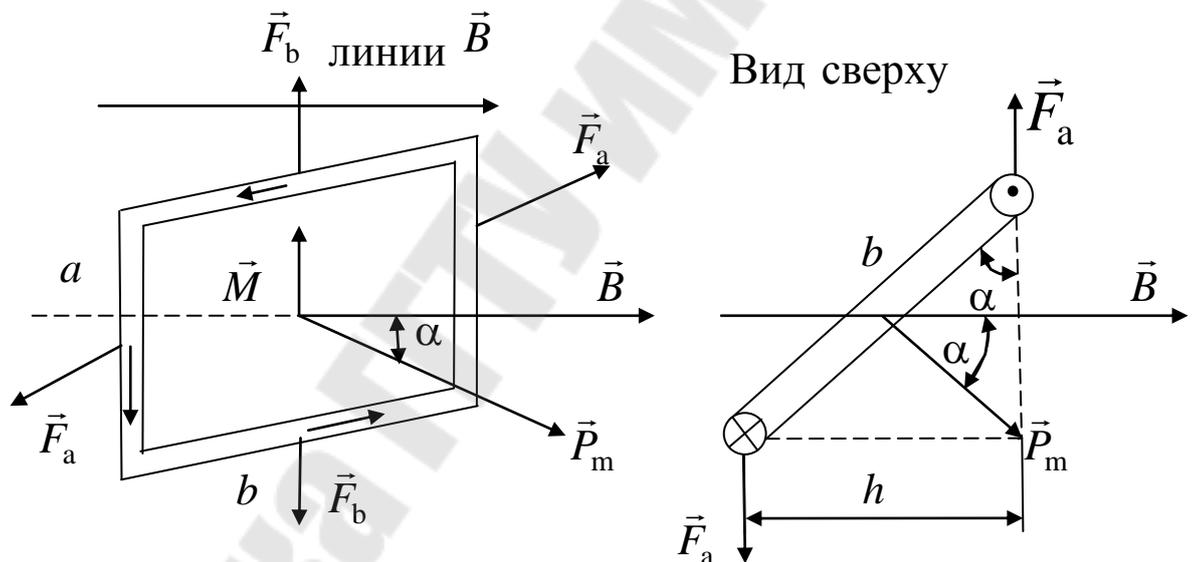


Рис 7.4

Как видно из (7.7), вращательный момент  $\vec{M} = 0$  и, следовательно, рамка находится в равновесии, если магнитный момент тока в рамке параллелен или антипараллелен направлению внешнего магнитного поля ( $\alpha = 0$ , что соответствует устойчивому равновесию, если  $\alpha = \pi$  – неустойчивому); рисунки 7.5,а и 7.5,б поясняют последнее.

В положении устойчивого равновесия рамка приходит под действием вращающего момента  $\vec{M}$ , в положении неустойчивого равновесия под действием дополнительных внешних сил. Магнитные силы, действующие на рамку в положении устойчивого равновесия, растягивают её, в положении неустойчивого равновесия – сжимают. Мож-

но показать, что формула (7.7) справедлива для плоского контура любой формы.

4. *Контур с током, находящийся в магнитном поле, обладает механической энергией.* Мерой приращения этой энергии является работа, совершаемая вращательным моментом

$$dW = -dA.$$

Элементарная работа, совершаемая вращательным моментом, действующим на контур, равна  $dA = M d\alpha \cos(\vec{M}, d\vec{\alpha})$ , где  $d\vec{\alpha}$  – угловое перемещение контура. Учитывая, что модуль вращательного момента  $M = P_m B \sin \alpha$  и то, что  $|d\vec{\alpha}| \cdot \cos(\vec{M}, d\vec{\alpha}) = -d\alpha$  получим  $dW = P_m B \sin \alpha d\alpha$ . Проинтегрируем это выражение. Тогда  $W = -P_m B \cos \alpha + c$ , где  $c$  – постоянная интегрирования.

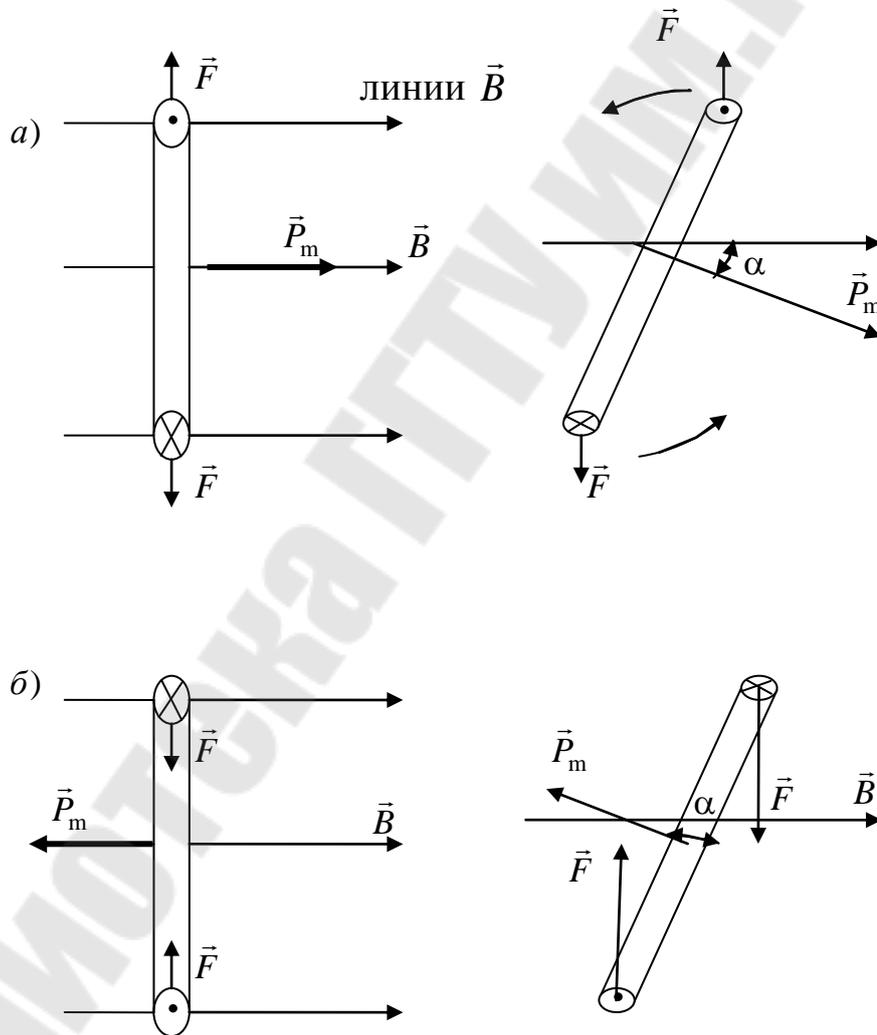


Рис 7.5

Константу  $c$  можно положить равной нулю, приняв  $W = 0$ , при  $\pi/2$ . Тогда  $W = -P_m B \cos \alpha = -\vec{P}_m \vec{B}$ . (7.8)

При увеличении угла  $\alpha$  энергия контура возрастает; она мини-

мальна (равна  $-\vec{P}_m \vec{B}$ ), когда  $\vec{P}_m \uparrow \vec{B}$  ( $\alpha = 0$ ), и максимальна (равна  $+\vec{P}_m \vec{B}$ ), когда  $\vec{P}_m$  противоположно направлено с  $\vec{B}$  ( $\alpha = \pi$ ).

5. *Контур с током в неоднородном магнитном поле.* На рисунке 7.6 изображён контур с током в неоднородном магнитном поле

Контур – плоский, круговой,  $\vec{P}_m \uparrow \vec{B}$  в том месте, где находится центр контура,  $\vec{r}$  – направление быстрейшего возрастания модуля  $\vec{B}$  (линии  $\vec{B}$  в этом направлении сгущаются).

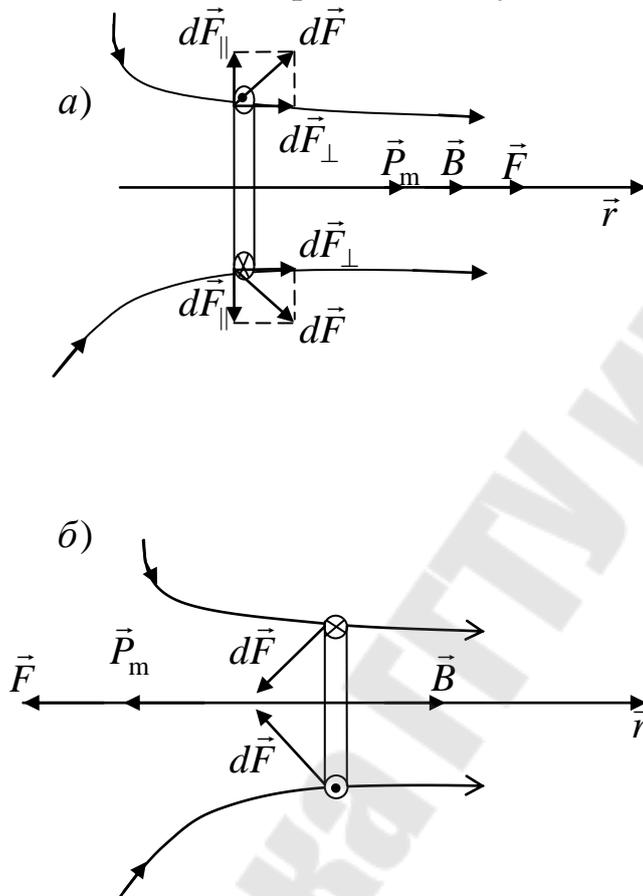


Рис. 7.6

Силы  $d\vec{F}$ , действующие на отдельные элементы контура, не лежат в плоскости контура. Разложим каждую из таких сил на две составляющие:  $d\vec{F}_{\parallel}$  лежащую в плоскости контура, и  $d\vec{F}_{\perp}$ , перпендикулярную к этой плоскости. Силы  $d\vec{F}_{\parallel}$  будут растягивать (при  $\vec{P}_m \uparrow \vec{B}$ ) или сжимать (при  $\vec{P}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$ ) контур. Составляющие  $d\vec{F}_{\perp}$ , складываясь, дадут результирующую силу  $\vec{F}$ , вызывающую поступательное движение контура. Если  $\vec{P}_m \uparrow \vec{B}$ , сила  $\vec{F}$  направлена по  $\vec{B}$  – контур втягивается в область более сильного поля (рис. 7.6.а); если  $\vec{P}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$ , сила  $\vec{F}$  направлена противоположно  $\vec{B}$  – контур выталкивается в более

слабое поле (рис. 7.6.б).

Силу, действующую на контур можно найти на основании (7.8). Продифференцировав  $W$  по  $\vec{r}$  – направлению быстрейшего возрастания  $\vec{B}$  – и взяв найденную производную со знаком минус, мы найдём проекцию силы на это направление:

$$F_r = \frac{\partial W}{\partial r} = p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \alpha. \quad (7.9)$$

Если  $\alpha = 0$ , то  $F_r > 0$ , т.е. сила  $\vec{F}$  направлена в сторону возрастания  $\vec{B}$ ; если же  $\alpha = \pi$ , то  $F_r < 0$ , т.е. сила  $\vec{F}$  направлена в сторону убывания  $\vec{B}$ .

## 7.2. Магнитный поток

Элементарным потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком)  $d\Phi$  через элементарную площадку  $dS$  называется скалярная величина, определяемая выражением:

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS \cos \alpha, \quad (7.10)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  и направлением вектора  $\vec{B}$  в том же месте, где находится эта площадка;

$d\vec{S}$  – вектор численно равный  $dS$  и совпадающий по направлению с направлением  $\vec{n}$  (рис. 7.7).

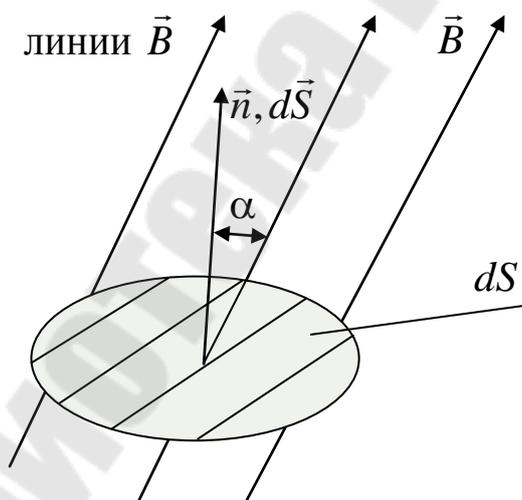


Рис. 7.7

Магнитный поток – величина алгебраическая. Знак  $d\Phi$  зависит от выбора направления нормали  $\vec{n}$ . Направление  $\vec{n}$  выбирается произвольно.

Магнитный поток через поверхность  $S$  конечных размеров и произвольной формы равен интегралу выражения (7.10):

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (7.11)$$

Интеграл в ряде случаев вычисляется весьма просто. В частности, если магнитное поле однородно ( $\vec{B} = const$ ), а поверхность  $S$  плоская то:

$$\Phi = BS \cos \alpha. \quad (7.12)$$

Как доказано, поток магнитной индукции через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (7.13)$$

Так формулируется и записывается теорема Остроградского-Гаусса для потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Непосредственным следствием этой теоремы является непрерывность линий магнитной индукции, о чем уже говорилось ранее: в магнитном поле нет точек, в которых эти линии сходились бы напоподобие точек местонахождения зарядов в электростатике. Поэтому говорят, что в природе не существует магнитных зарядов.

### 7.3. Работа сил магнитного поля

При перемещении проводника или контура с током магнитная сила, действующая на ток, совершает работу.

Пусть прямолинейный проводник длиной  $l$  с током  $I$  перемещается на  $d\vec{r}$  в направлении, перпендикулярном к однородному магнитному полю (рис. 7.8), магнитная сила  $\vec{F}$  совершает работу равную

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos 0^\circ = IBldr. \quad (7.14)$$

Произведение  $ldr = dS$  – площадь, которую описывает проводник при своём движении. Величина  $d\Phi = BdS \cos 0^\circ$  – магнитный поток, пронизывающий эту площадь. Следовательно

$$dA = Id\Phi. \quad (7.15)$$

Таким образом, элементарная работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока в проводнике  $I$  на магнитный поток  $d\Phi$  пронизывающий площадь, которую описывает проводник при своём движении. При

перемещении проводника на конечное расстояние работа равна:

$$A_{12} = \int_0^{\Phi} Id\Phi = I\Phi, \quad (7.16) \quad (\text{при условии что } I = \text{const}).$$

Если перемещение проводника происходит в произвольном направлении, то

$$dA = Fdr \cos \alpha = IBldr \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  или, что тоже самое между  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$ , так как  $\vec{F} \perp \vec{B}$ , а  $\vec{n} \perp d\vec{r}$  (рис. 7.9). Произведение длины проводника на перемещение  $ldr = dS$ , тогда  $d\Phi = BdS \cos \alpha$  и элементарная работа  $dA = Id\Phi$ . Формулы (7.15) и (7.16) справедливы в самом общем случае, когда проводник не прямолинейный, а магнитное поле неоднородно.

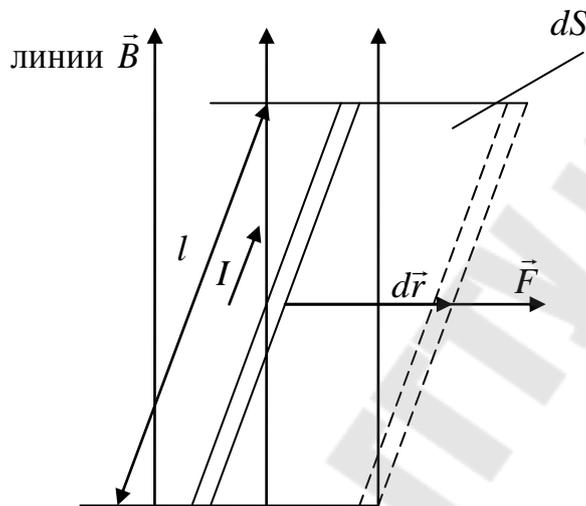


Рис. 7.8

Работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении замкнутого контура с током, равна произведению силы тока в контуре на магнитный поток сквозь поверхность, опирающуюся на контур.

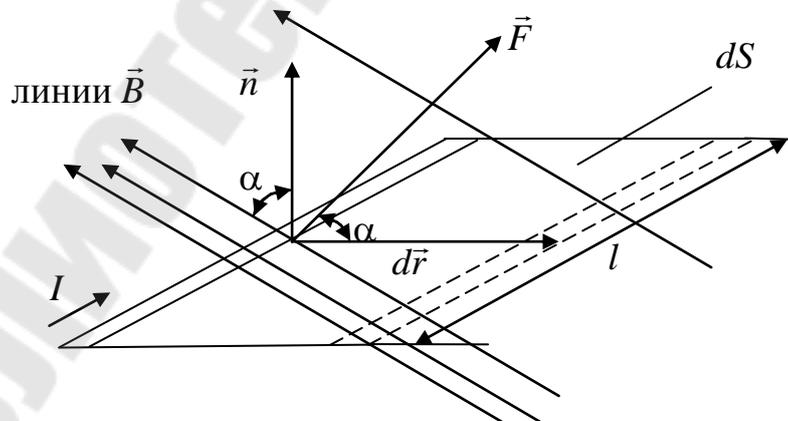


Рис. 7.9

Покажем это. Пусть контур, обтекаемый током  $I$ , переместился поступательно из положения 1 в положение 2 (рис. 7.10)

Магнитное поле направлено за чертёж, ток течёт по часовой стрелке. Разобьём весь контур на два участка  $adc$  и  $sba$ .

Силы, действующие на отдельные элементы участка  $sba$ , образуют с направлением перемещения острые углы. Работа этих сил  $A'_{12}$  положительна. Силы, действующие на элементы участка  $adc$ , образуют с направлением перемещения тупые углы: работа этих сил  $A''_{12}$  отрицательна. В соответствии (7.16):

$$A'_{12} = I(\Phi - \Phi_2) \text{ и } A''_{12} = -I(\Phi - \Phi_1),$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положениях;  $\Phi$  – поток, пронизывающий поверхность, заключённую между участками  $sba$  в начальном положении и  $adc$  в конечном.

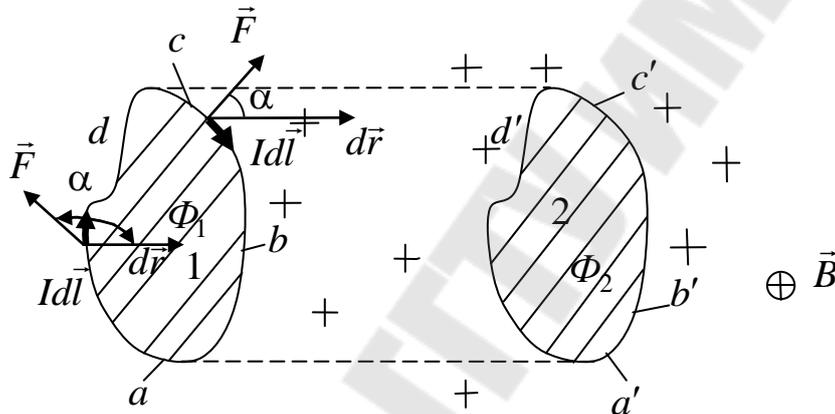


Рис. 7.10

Полная работа равна:

$$A_{12} = A'_{12} + A''_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi. \quad (7.17)$$

Формулу (7.17) можно вывести, основываясь на выражении (7.8)  $W = -\vec{P}_m \vec{B}$ . Работа, действующих на контур сил равна убыли механической энергии контура:

$$A_{12} = W_1 - W_2$$

Энергия контура в начальном положении равна:

$$W_1 = -P_m B_1 \cos \alpha_1, \text{ а}$$

в конечном  $W_2 = -P_m B_2 \cos \alpha_2,$

где  $B_1$  и  $B_2$  – модули индукции поля в тех местах, где находится контур в начальном и конечном положениях (полагаем, что размеры контура таковы, что индукция  $\vec{B}$  в пределах контура одинакова);

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между  $\vec{P}_m$  и векторами  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

Магнитный момент контура численно равен  $P_m = IS$ . Тогда:  
 $W_1 = -ISB_1 \cos \alpha_1 = -I\Phi_1$  и  $W_2 = -ISB_2 \cos \alpha_2 = -I\Phi_2$ ,  
 так как  $\Phi_1 = B_1 S \cos \alpha_1$ ,  $\Phi_2 = B_2 S \cos \alpha_2$  – соответственно магнитные потоки, пронизывающие контур в начальном и конечном положениях. Таким образом:  
 $A_{12} = W_1 - W_2 = -I(\Phi_1 - \Phi_2) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$ , что и требовалось доказать.

## Глава 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

### 8.1. Движение заряженных частиц в электрическом поле

Заряжённая частица в электрическом поле испытывает действие электрической силы

$$\vec{F}_{\text{эл}} = q\vec{E}, \quad (8.1)$$

где  $q$  – заряд частицы,  $\vec{E}$  – напряжённость поля.

Сила вызываемая изменение модуля и направления скорости частицы – оказывает на частицу ускоряющее и отклоняющее действие.

Ускоряющее действие электрического поля используется в ускорителях элементарных частиц: в электронных лампах, электронных микроскопах, в электроннолучевых трубках и т.д.

Связь между действующей разностью потенциалов и изменением скорости частицы нетрудно получить. Так работа, совершаемая электрической силой, равна приращению кинетической энергии частицы:

$$A_{12} = W_{K2} + W_{K1}, \quad (8.2)$$

где  $W_{K1}$  и  $W_{K2}$  начальная и конечная кинетические энергии частицы.

С другой стороны работа  $A_{12}$  определяется через разность потенциалов:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (8.3)$$

где  $q$  – заряд частицы;

$(\varphi_1 - \varphi_2)$  – разность потенциалов, пройденная частицей.

Для нерелятивистских скоростей ( $v \ll c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме):

$$W_k = \frac{m v^2}{2}.$$

Для релятивистских скоростей:

$$W_k = m c^2 - m_0 c^2,$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы;

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \text{релятивистская масса частицы.}$$

Следовательно, для нерелятивистских скоростей:

$$q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} \quad (8.4)$$

Для релятивистских:

$$\begin{aligned} q(\varphi_1 - \varphi_2) &= (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) = m_2 c^2 - m_1 c^2 = \\ &= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Отклоняющее действие электрического поля используется для управления движением заряженных частиц. Устройства, в которых отклонение частиц осуществляется при помощи электрического поля, называются электростатическими системами.

Рассмотрим движение электрона в электростатическом поле, подобно тому, как это происходит в электроннолучевой трубке. Пусть частица с массой  $m$  зарядом  $q$  ( $q > 0$ ) влетает со скоростью  $v_x$  в однородное электрическое поле  $\vec{E}$  в направлении перпендикулярном полю. Движение частицы в рассматриваемом поле складывается из двух независимых прямолинейных движений: равноускоренного по оси  $y$  и равномерного вдоль оси  $x$ . Из рисунка 8.1 видно, что смещение частицы по оси  $y$  при движении в поле на расстоянии  $x_1$  вдоль оси  $x$  равно  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{a t_1^2}{2}, \text{ где } a = \frac{qE}{m} - \text{ускорение частицы.}$$

$$\text{Так как, время движения равно } t_1 = \frac{x_1}{v_x}, \text{ то } y_1 = \frac{qE x_1}{2m v_x^2}.$$

За пределами поля частица летит прямолинейно, под углом  $\alpha$  к первоначальному направлению. Из рисунка 8.1 следует что

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{at_1}{v_x} = \frac{qEx_1}{mv_x^2}.$$

Таким образом полное смещение при движении в поле и за его пределами равно по оси  $y$ :

$$y = y_1 + y_2 = \frac{qEx_1}{2mv_x^2} + \frac{qEx_1x_2}{mv_x^2} = \frac{qEx_1}{mv_x^2} \left( \frac{x_1}{2} + x_2 \right). \quad (8.6)$$

Форма траектории, по которой движется заряженная частица в электрическом поле, зависит от него, под каким углом частица влетает в поле, однородно или неоднородно поле является частица релятивистской или нет и т.д.

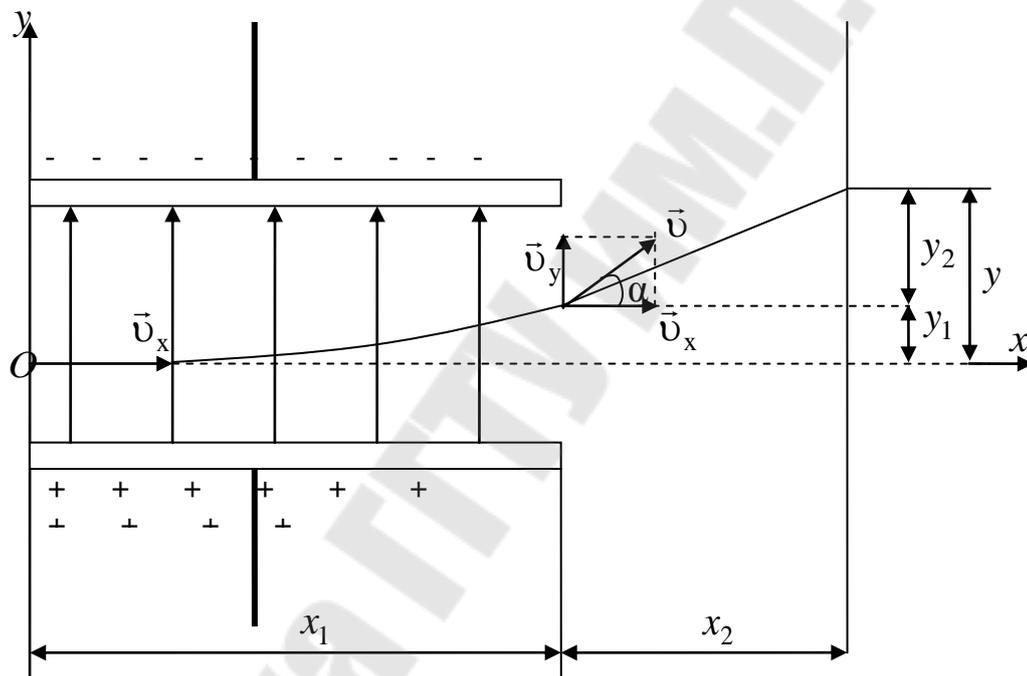


Рис. 8.1

Траектория нерелятивистской частицы в однородном поле либо прямая (если  $\vec{v}_x \uparrow \uparrow \vec{E}$  или  $\vec{v}_x \uparrow \downarrow \vec{E}$ ), либо парабола (при любых других углах между  $\vec{v}$  и  $\vec{E}$ ).

Сочетая ускоряющее действие электрического поля с отклоняющим, можно фокусировать заряженные частицы – стягивать расходящийся пучок частиц в сходящийся. Устройство, в котором фокусировка частиц осуществляется при помощи электрического поля, называется электростатической линзой. Простейшая электростатическая линза состоит из двух цилиндрических электродов, к которым приложена разность потенциалов. Разрез электродов и линии электрического поля в зазоре между электродами показаны на рисунке 8.2.

Электрическую силу, действующую на электрон в щели, можно представить двумя составляющими: перпендикулярной к оси цилиндров  $\vec{F}_\perp$  и параллельной этой оси  $\vec{F}_\parallel$ . Составляющая  $\vec{F}_\parallel$  в обеих половинах щели ускоряет электроны, вследствие чего правую половину щели электроны проходят быстрее, чем левую.

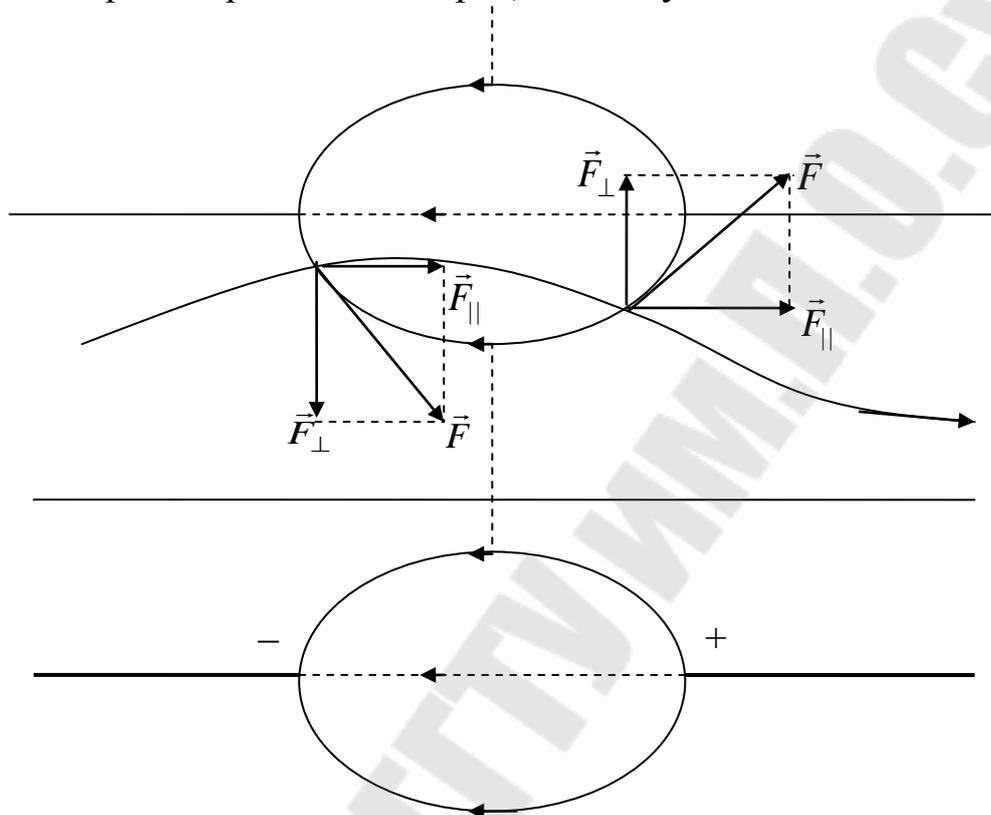


Рис. 8.2

Составляющая  $\vec{F}_\perp$  в левой половине щели смещает электроны к оси, в правой – от оси. Так как время прохождения электронами правой щели меньше времени прохождения левой, скорость, приближающая электроны к оси, (в левой половине щели), будет больше скорости, отклоняющей их от оси (в правой половине щели); результирующая скорость будет направлена к оси. Благодаря этой скорости все электроны влетевшие в линзу под одним и тем же углом, пересекут ось линзы в одной точке – сфокусировавшись.

## 8.2. Движение заряженных частиц в магнитном поле

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца.

Силой Лоренца принято называть силу, с которой магнитное поле действует на определённую движущуюся заряженную частицу.

Направление действия силы Лоренца показано на рисунке 8.3.

Элемент тока проводника  $Id\vec{l}$  содержит громадное число движущихся заряженных частиц. На все носители заряда, заключённые в элементе тока  $Id\vec{l}$  действует магнитная сила  $d\vec{F} = [Id\vec{l}\vec{B}]$ .

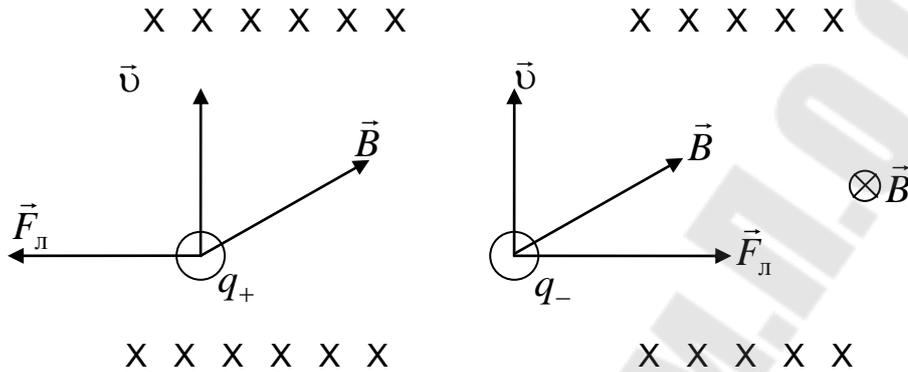


Рис. 8.3

Элемент тока  $Id\vec{l}$  может быть представлен следующим образом:

$$Id\vec{l} = jSd\vec{l} = n|q|\vec{v}Sd\vec{l} = n|q|dV\vec{v},$$

где  $|q|$  – заряд носителя;

$dV$  – объём элемента тока;

$\vec{v}$  – скорость. Следовательно:

$$d\vec{F} = ndV|q|[\vec{v}\vec{B}].$$

На одну частицу действует сила:

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{F}}{ndV} = |q|[\vec{v}\vec{B}]. \quad (8.7)$$

Сила  $\vec{F}_L$ , определяемая выражением (8.7) – сила, которая действует на отдельную заряженную частицу со стороны магнитного поля и называется силой Лоренца. Модуль силы Лоренца равен:

$$F_L = |q| \cdot vB \cdot \sin \alpha.$$

Так как сила Лоренца перпендикулярна к скорости, работы она не совершает.

В зависимости от угла  $\alpha$ , под которым частица влетает в магнитное поле,  $\vec{F}_L$  может принимать любые значения оси от 0 до  $|q|vB$ :

1.  $\alpha = 0$  или  $\pi$ , т.е.  $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$  или  $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$ , сила Лоренца в этом случае равна нулю:  $\vec{F}_L = 0$ . Частица будет двигаться равномерно пря-

молинейной траектории (если магнитное поле однородно);

2.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , сила Лоренца в этом случае играет роль центростремительной силы. По второму закону Ньютона:

$$|q|v_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{r}, \text{ откуда } r = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad (8.8)$$

где  $r$  – радиус кривизны траектории.

Отсюда, радиус кривизны траектории прямо пропорционален модулю скорости  $v_{\perp}$  и обратно пропорционален удельному заряду частицы  $\frac{|q|}{m}$ , а также модулю индукции  $\vec{B}$ .

Если  $\vec{B} = \text{const}$  (однородное поле), то  $r = \text{const}$ , т.е. частица будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной к линиям поля (рис. 8.4).

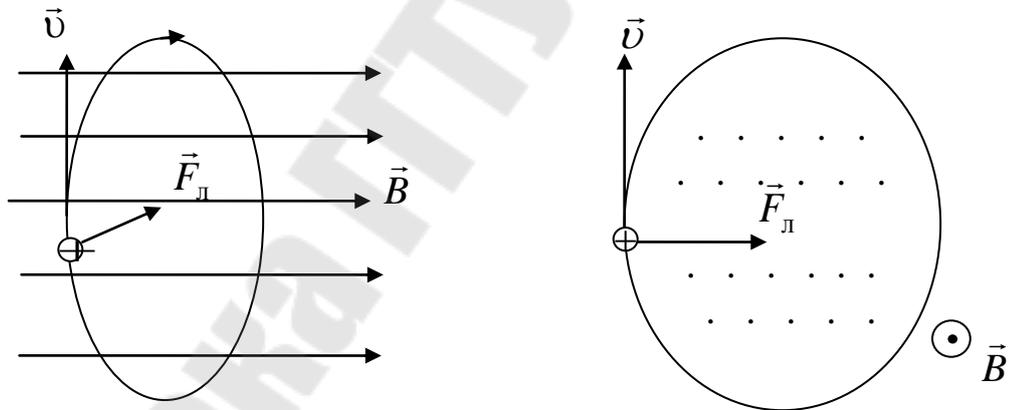


Рис. 8.4

Разделив  $2\pi r$  на  $v_{\perp}$  найдём период обращения частицы  $T$ :

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{1}{\frac{|q|B}{m}}. \quad (8.9)$$

Как видно из рисунка 8.4,  $T$  не зависит от скорости частицы (разумеется, пока  $v \ll c$ );

3.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , (рис. 8.5). Магнитное поле однородно. Разложим  $\vec{v}$  на две составляющие  $\vec{v}_{\parallel}$ , параллельную полю, и  $\vec{v}_{\perp}$ , перпендикулярную к полю:  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ ,  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

Сила Лоренца численно равна:  $F_{\perp} = |q|vB \cdot \sin \alpha = |q|v_{\perp}B$  и лежит в плоскости, перпендикулярной к  $\vec{B}$ . Эта сила вызывает движение по окружности в плоскости перпендикулярной к  $\vec{B}$ . Скорость  $\vec{v}_{\parallel}$  не изменяется, так как вдоль поля никакие силы на частицу не действуют. Поэтому в направлении поля частица будет двигаться равномерно и прямолинейно. Результирующим движением будет движение по цилиндрической спирали, ось которой параллельна  $\vec{B}$ .

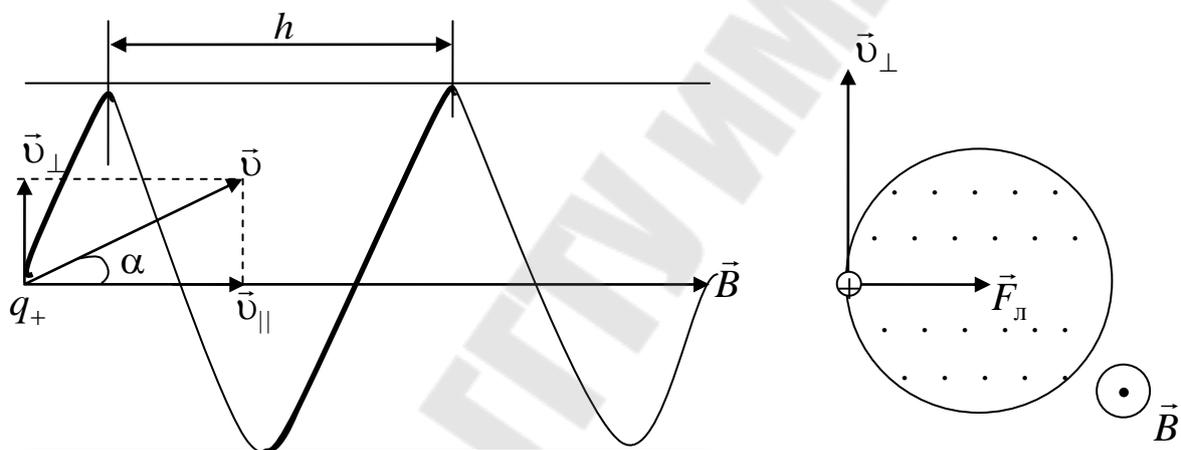


Рис. 8.5

Шаг винта этой спирали равен:  $h = v_{\parallel}T = vT \cos \alpha = 2\pi \frac{v \cos \alpha}{\frac{|q|}{m} B}$ . (8.10)

Направление закручивания спирали зависит от знака заряда частицы: положительная частица закручивается по часовой стрелке, отрицательная – против часовой стрелки (если смотреть с конца  $\vec{B}$ ).

### 8.3. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном поле

Если заряженная частица попадает в область, где имеется и электрическое, и магнитное поле, она испытывает действие силы:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (8.11)$$

Соотношение 8.11 называется формулой Лоренца. Характер движения и форма частицы в этом случае зависят от того, как направлены электрическое и магнитное поле. Особый интерес представляют взаимно перпендикулярные поля. Такие поля используются в магнетронах – генераторах микроволнового излучения, в некоторых ускорителях заряженных частиц, в масс – спектрометрах – приборах для измерения удельного заряда частиц.

#### 8.4. Фокусирующее действие магнитного поля

Магнитное поле, используется для отклонения пучков заряженных частиц и их фокусировки, для стабилизации орбит заряженных частиц и т.д.

Рассмотрим фокусирующее действие магнитного поля. Соответствующее устройство называется магнитной линзой. Магнитная линза представляет собой цилиндрическую катушку, помещённую в панцирь из мягкого железа, с наружной стороны которого вырезана узкая кольцевая щель. При пропускании тока через катушку в щели создаётся сильное неоднородное магнитное поле. Разрез щели в увеличенном виде показан на рисунке 8.6.б. Как видно из рисунка, магнитное поле линзы во всех точках, кроме точек плоскости симметрии, имеет параллельную оси  $\vec{B}_{\parallel}$  и перпендикулярную к оси  $\vec{B}_{\perp}$  составляющие. Попав в поле электрон, испытывает действие силы Лоренца. Составляющая поля  $\vec{B}_{\perp}$  отклоняет электрон в горизонтальной плоскости к нам. Наличие этой скорости и горизонтальной составляющей поля  $\vec{B}_{\parallel}$  приводит к появлению силы Лоренца, отклоняющей электрон к оси линзы. При прохождении правой половины поля боковое движение постепенно ускоряется, но составляющая скоростей, направленная к оси, продолжает расти, (так как горизонтальная боковая скорость уменьшается постепенно, сила Лоренца обусловленная этой скоростью и горизонтальной составляющей поля  $\vec{B}_{\parallel}$  продолжает действовать и, следовательно, ещё сильнее отклонять электрон к оси). Выйдя из поля, электрон пересечёт ось линзы в некоторой точке. Параллельный пучок электронов после прохождения линзы сфокусируется в малом объёме вблизи этой точки.

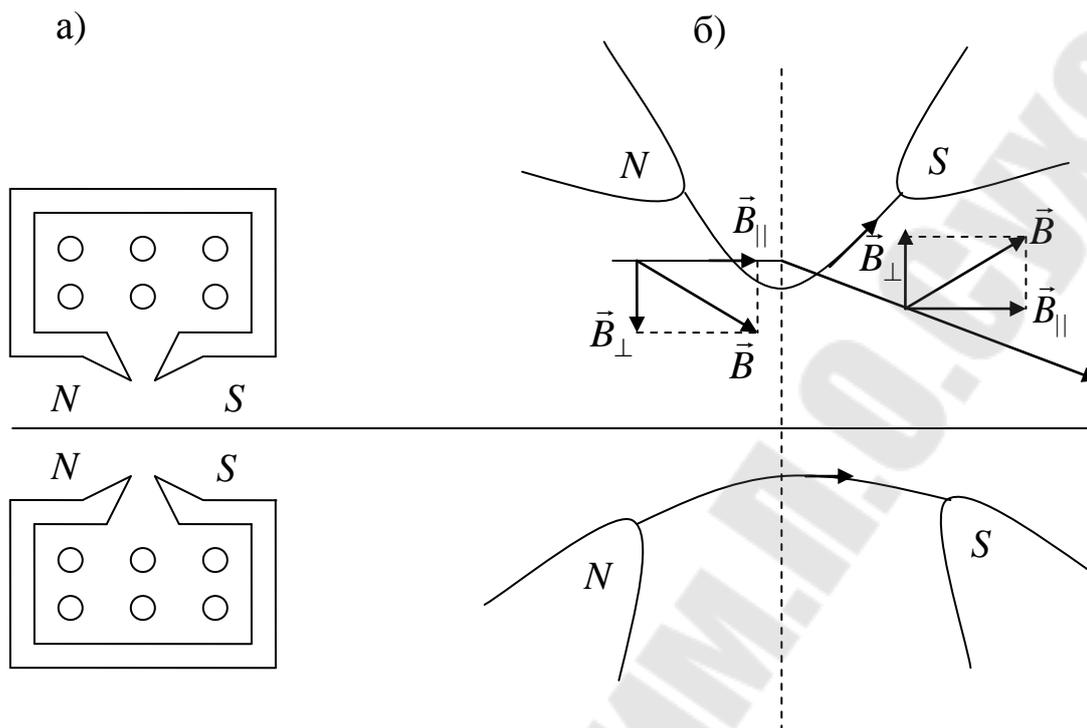


Рис. 8.6

## 8.5. Эффект Холла

В 1880 Э. Холл (США) обнаружил явление, получившее название эффекта Холла. Суть эффекта состоит в следующем. Если металлическую пластинку, по которой течёт ток, поместить в магнитное поле, перпендикулярное к току, то в пластинке возникает поперечная к току разность потенциалов (рис 8.7). Как показывает опыт, эта разность потенциалов пропорциональна силе тока в пластине  $I$ , индукцией магнитного поля  $\vec{B}$  и обратно пропорциональна размеру пластины в направлении магнитного поля:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = R \frac{I}{b} B, \quad (8.12)$$

где,  $R$  – коэффициент Холла – константа, модуль которой равен модулю разности потенциалов, возникающей в пластине единичной ширины при единичном токе и единичной индукции магнитного поля. Появление в пластине разности потенциалов означает появление в ней сторонних сил. В явлении Холла эту роль играет сила Лоренца.

Если магнитное поле и ток (т.е. скорость направленного движения положительных носителей заряда) направлены так, как показано на рисунке, то верхняя грань пластины зарядится положительно, а

нижняя отрицательно. Возникает электростатическое поле, направленное от верхней грани к нижней. Разделение зарядов будет происходить, до тех пор, пока сила Лоренца и электрическая сила не сравняются по модулю:

$$F_{\text{л}} = F_{\text{эл}}. \quad (8.13).$$

При этом между верхней и нижней гранями (между точками 1 и 2, которые в отсутствии магнитного поля имели одинаковые потенциалы) установится разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Если пластина достаточно длинная и широкая то поперечное электрическое поле в ней можно считать однородным.

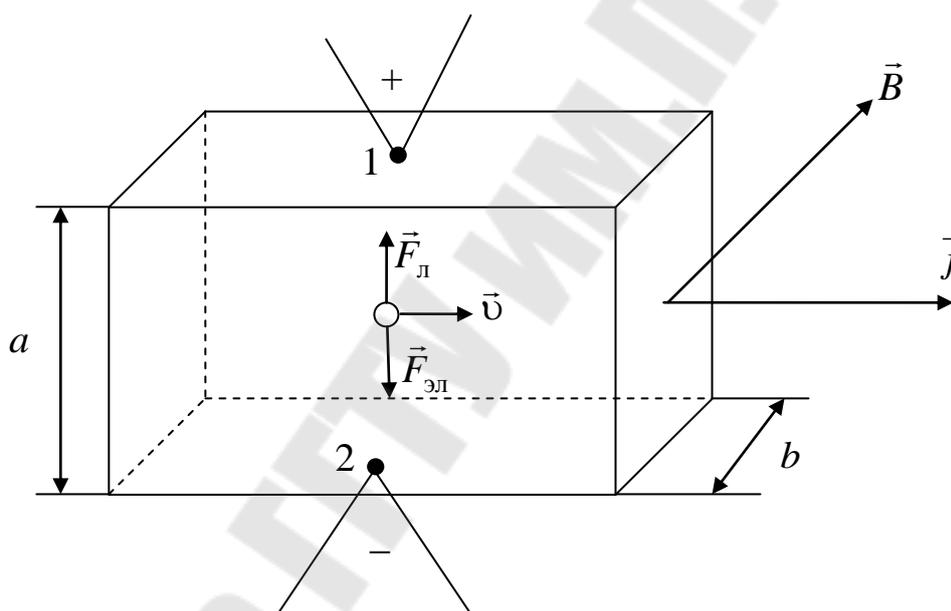


Рис. 8.7

С учётом этого  $\varphi_1 - \varphi_2 = E_{\text{хол}} a$ , (8.14)

где  $a$  – размер пластины в направлении возникающего поперечного электрического поля;

$E_{\text{хол}}$  – модуль напряжённости этого поля.

Модуль силы Лоренца равен:

$$F_{\text{л}} = |q| \langle v \rangle B,$$

где  $|q|$  – где абсолютная величина заряда одного носителя тока;

$\langle v \rangle$  – модуль средней скорости направленного движения носителей.

Модуль электрической силой равен

$$F_{эл} = |q|E_{холл}.$$

Подставив  $F_{л}$  и  $F_{эл}$  в (8.13) найдём  $E_{холл}$

$$E_{холл} = \langle v \rangle B. \quad (8.15)$$

Проекция вектора плотности тока на направление  $\langle v \rangle$  равна:

$$j_v = n|q|\langle v \rangle,$$

где  $n$  – концентрация носителей заряда.

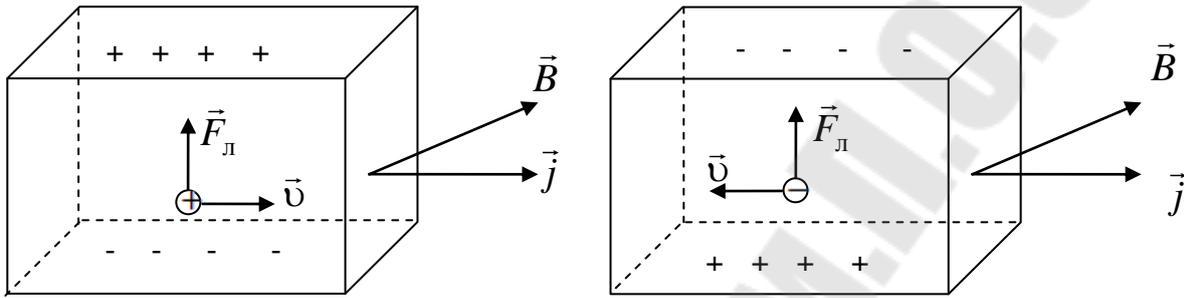


Рис. 8.8

С другой стороны:

$$j_v = \frac{I}{S} = \frac{I}{ab},$$

где  $I$  – сила тока в пластине;

$S$  – площадь поперечного сечения пластины.

Из двух последних уравнений находим  $\langle v \rangle$ :

$$\langle v \rangle = \frac{I}{n|q|ab}. \text{ Следовательно:}$$

$$E_{холл} = \frac{I}{n|q|ab} B \text{ и } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{n|q|} \frac{I}{b} B. \quad (8.16)$$

Из последних соотношений следует, что коэффициент Холла равен

$$R = \frac{1}{n|q|}. \quad (8.17)$$

Определив по холловской разности потенциалов знак коэффициента Холла, можно определить знак носителя заряда (рис 8.7). В формуле (8.16)  $B, b, I$  величины положительные, тогда  $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$ , и  $R > 0$ , отсюда следует, что ток создаётся положительными носителя-

ми; если  $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ , то  $R < 0$ , тогда ток создаётся отрицательными носителями.

### 8.6. Методы определения удельного заряда электрона

1. Метод Дж. Дж. Томсона (Англия) основан на отклонении электронного пучка в электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг к другу и к направлению пучка электронов. Схема установки для измерения удельного заряда приведена на рисунке 8.9.

Вначале определяют скорость электронов. Для этого, одновременно включают электрическое и магнитное поля и добиваются того, чтобы пучок попадал в ту же точку экрана, что и при выключенных полях (точка  $O$ ). Из равенства модулей электрической и магнитной сил

$$|e|E = |e|\upsilon B,$$

находят  $\upsilon$ :

$$\upsilon = \frac{E}{B}. \quad (8.18)$$

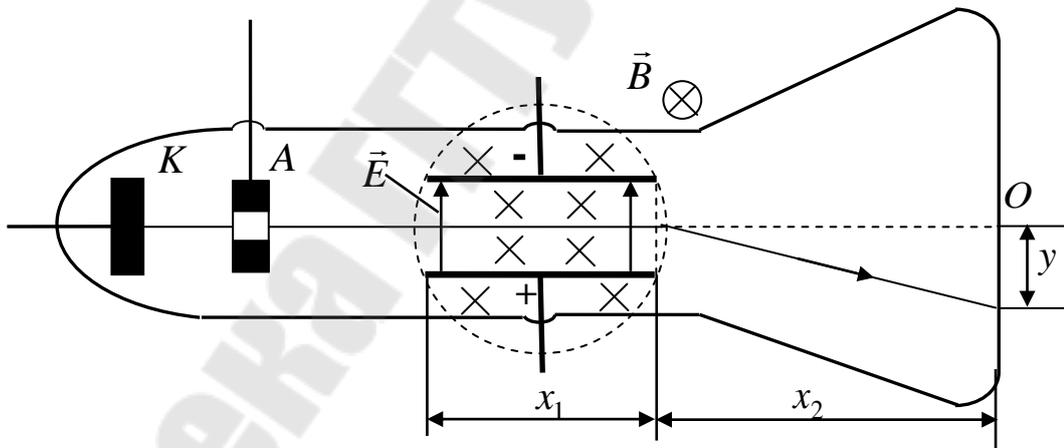


Рис. 8.9

Выключив магнитное поле, определяют величину смещения под действием электрического поля, которое связано с основными параметрами установки соотношением:

$$y = \frac{|e|Ex_1}{m\upsilon^2} \left( \frac{x_1}{2} + x_2 \right).$$

Подставив в эту формулу вместо  $\upsilon$  (8.18) находят  $\frac{|e|}{m}$ :

$$\frac{|e|}{m} = \frac{E}{B^2} \frac{y}{x_1 \left( \frac{x_1}{2} + x_2 \right)}. \quad (8.19)$$

2. Метод Буша – метод основан на магнитной фокусировке электронного пучка (рис. 8.10). В опыте Буша электроны, испущенные раскалённым катодом, ускоряются, проходя разность потенциалов  $|\Delta\phi|$ , приложенную между катодом К и анодом А. В результате они приобретают скорость  $v$ , значение которой может быть найдено из соотношения  $|e\Delta\phi| = \frac{mv^2}{2}$ , то есть  $v = \sqrt{\frac{2|e\Delta\phi|}{m}}$ . (8.20)

После анода, электроны попадают в конденсатор, на который подаётся переменное напряжение. Отклоняясь в поле конденсатора электроны в магнитном поле соленоида С начинают двигаться по различным спиральным траекториям, совершая один полный оборот за время  $T = 2\pi \frac{1}{\frac{|e|}{m} B}$  (8.21)

$$\text{и смещаясь на расстояние } h = 2\pi \frac{v \cdot \cos \alpha}{\frac{|e|}{m} B}. \quad (8.22)$$

Это расстояние в силу малости углов  $\alpha$  ( $\cos \alpha \approx 1$ ) практически одинаково для всех электронов. На выходе соленоида электроны попадают на флуоресцирующий экран Э. Изменяя ток соленоида, подбирают величину магнитной индукции так, чтобы расстояние  $l'$  от конденсатора до экрана удовлетворяло условию:

$$l' = nh, \quad (8.23)$$

где  $h$  – шаг спирали,  $n$  – целое число. В этом случае точка пересечения траекторий электронов попадёт на экран – электронный пучок окажется сфокусированным на экране. Пучок сфокусируется не только на расстоянии  $h$ , но и на расстояниях  $2h$ ,  $3h$  и т.д.

На основании этого, из совместного решения (8.20), (8.22) и (8.23), была получена формула для расчёта удельного заряда электрона ( $n=1$ ):

$$\frac{|e|}{m} = \frac{8\pi^2 |\Delta\phi|}{h^2 B^2}. \quad (8.24)$$

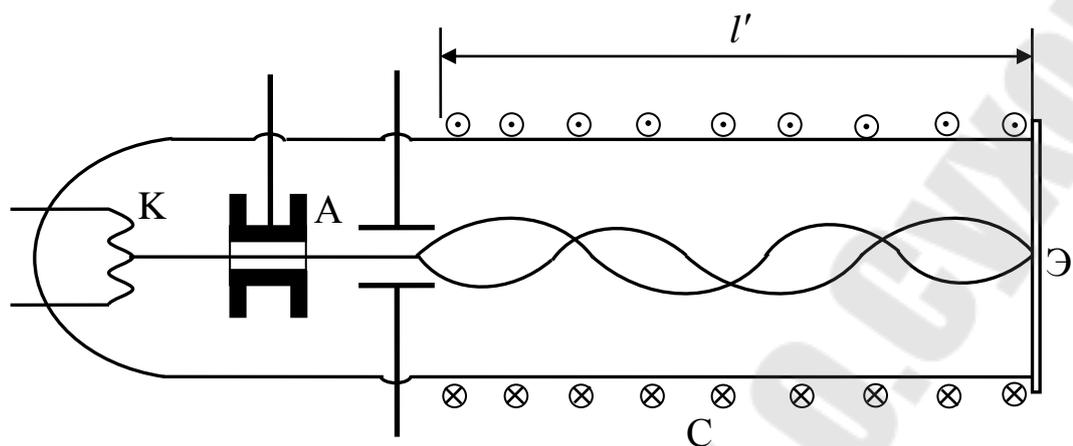


Рис. 8.10

По результатам многих опытов было установлено, что удельный заряд электрона равен:  $\frac{|e|}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

### 8.7. Принцип действия МГД генератора

На тепловых электростанциях внутренняя энергия топлива преобразуется в электрическую энергию довольно сложным путём. Сначала за счёт энергии топлива приводится в действие тепловая машина (турбина, дизель). Тепловая машина вращает генератор. Генератор превращает полученную от тепловой машины механическую энергию в электрическую.

Двойное преобразование энергии (внутренней – в механическую, механической – в электрическую), наличие быстро вращающихся частей делают тепловые электростанции сложными сооружениями, не отличающимися, достаточно высоким КПД. Между тем возможно прямое превращение внутренней энергии топлива непосредственно в электрическую энергию. Соответствующие генераторы называются магнитогиродинамическими (МГД – генераторами).

Принцип действия МГД – генератора заключается в следующем. В камере сгорания создаётся высокая температура до  $2500^{\circ}\text{C}$  (рис. 8.11). При такой температуре продукты сгорания весьма сильно ионизированы. Для увеличения концентрации ионов, к продуктам сгорания добавляются вещества с небольшой энергией ионизации – Cs, Ca, Na, K и др. Полученная таким образом плазма пропускается через по-

степенно расширяющийся раструб.

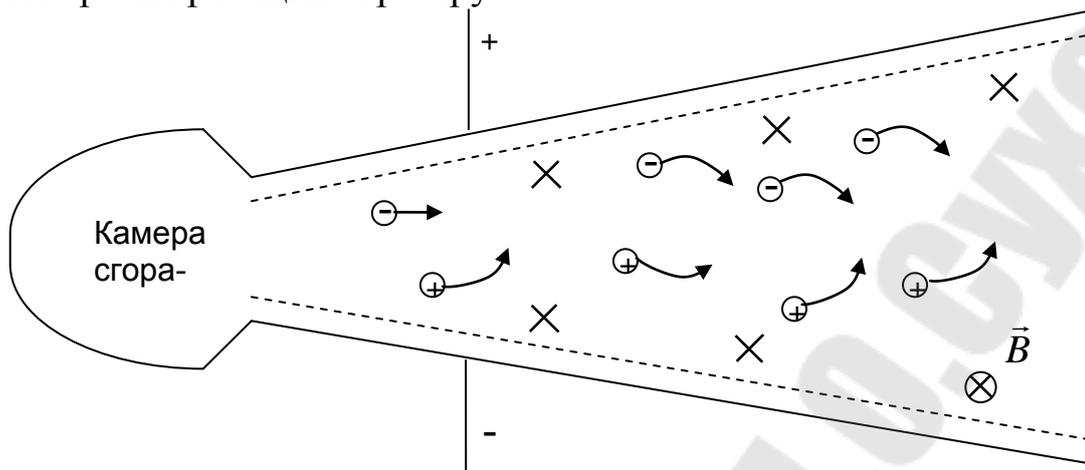


Рис. 8.11

Раструб находится в сильном поперечном магнитном поле (поле направлено за чертёж). Под действием силы Лоренца электроны в плазме отклоняются к одному электроду, положительные ионы – к другому. Между электродами возникает разность потенциалов (до нескольких тысяч вольт), которая и передаётся потребителю. Как показывают расчёты КПД МГД – генераторов может превышать КПД обычных генераторов на 30% – 40%.

## Глава 9. Магнитное поле в веществе

### 9.1. Намагничивание вещества, намагничённость

Все вещества, будучи внесёнными в магнитное поле, намагничиваются – становятся источниками дополнительного магнитного поля. Магнитное поле  $\vec{B}_0$  вызывающее процесс намагничивания данного вещества будем называть первичным, внешним, намагничивающим.

Вещества, способные намагничиваться, называются магнетиками. Так как намагничиваются все без исключения вещества, то все вещества – магнетики.

Внесем какой – нибудь магнетик во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Под действием внешнего магнитного поля внутри магнетика, так и вне его, возникает дополнительное, вторичное собственное магнитное поле вещества  $\vec{B}'$ . Результирующее поле в любой точке равно сумме полей  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (9.1)$$

Под  $\vec{B}'$  в магнетике следует понимать усредненное (макроскопическое), а не истинное (микроскопическое) поле, поскольку последнее очень сильно ( $\approx 10^6$  раз) изменяется в пределах каждого межатомного расстояния.

Среди магнетиков есть ферромагнетики – вещества, намагничиваются очень сильно. Такие вещества мы пока рассматривать не будем.

При намагничивании магнетика каждый его атом создает магнитное поле так, как если бы в атоме циркулировал некоторый замкнутый ток. Этот элементарный ток Ампер называл молекулярным: мы его будем называть микротоком. Магнитное поле микротока можно охарактеризовать магнитным моментом  $\vec{p}_m$ :

$$\vec{p}_m = i' \vec{S}, \quad (9.2)$$

где  $i'$  – сила микротока;

$\vec{S}$  – вектор, численно равный площади  $S$ , охватываемой микротоком, и связанный с направлением микротока правилом правого буравчика: если вращение рукоятки буравчика совпадает с направлением микротока, то поступательное движение буравчика указывает направление  $\vec{S}$  (рис. 9.1).

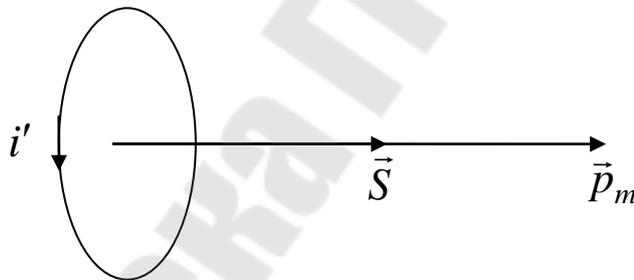


Рис. 9.1

Магнитные поля микротоков, складываясь, дают результирующее собственное поле вещества  $\vec{B}'$ , магнитные моменты этих токов дают некоторый результирующий магнитный момент.

Интенсивность намагничивания вещества характеризует вектор намагниченности  $\vec{J}$  – представляющий собой физическую величину, равную магнитному моменту единицы объема вещества.

Если вектор  $\vec{J}$  всюду одинаков, намагниченность называется однородной, если различен – неоднородной. В случае однородной

намагниченности

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \quad (9.3)$$

где  $\vec{p}_m$  – магнитный момент отдельного атома;

$\Delta V$  – объём, по которому производится суммирование всех  $\vec{p}_m$ .

В случае неоднородной намагниченности вектор намагниченности:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}. \quad (9.4)$$

Магнетик называется однородным, если его магнитные свойства одинаковы во всех точках. В противном случае магнетик называется неоднородным. Магнетик называется изотропным, если его магнитные свойства одинаковы по всем направлениям. В противном случае магнетик называется анизотропным.

Теория и опыт показывают, что в изотропных неферромагнитных магнетиках в не очень сильных полях и при не очень высоких частотах внешнего поля  $\vec{B}_0$  вектор намагничивания  $\vec{J}$  пропорционален  $\vec{B}_0$ :

$$\vec{J} = \chi_B \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (9.5)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;

$\chi_B$  – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый объёмной магнитной восприимчивостью вещества.

Объёмная магнитная восприимчивость  $\chi_B$  по абсолютной величине равна модулю намагниченности, приобретаемой веществом во внешнем поле с индукцией, численно равной магнитной постоянной, т.е. если  $|\vec{B}_0| = \mu_0$ , то  $\chi_B = |\vec{J}|$ .

Между индукцией магнитного поля микротоков  $\vec{B}'$  и намагниченностью вещества  $\vec{J}$  существует связь. Для установления соотношения между  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  мысленно внесём в однородное внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  длинный тонкий цилиндр из однородного изотропного вещества и расположим его вдоль  $\vec{B}_0$  (рис. 9.2.а).

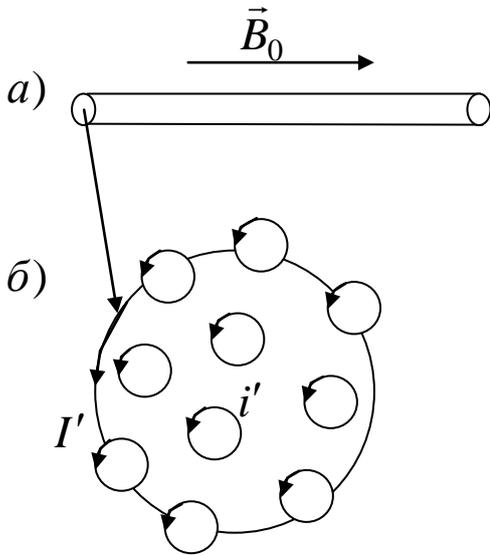


Рис. 9.2

Под действием поля  $\vec{B}_0$  все микротоки расположатся в плоскостях, перпендикулярных к  $\vec{B}_0$ . Рассмотрим одно из поперечных сечений цилиндра (рис. 9.2.б). Как видно из рисунка, смежные микротоки всюду, кроме поверхности цилиндра, текут в противоположных направлениях, их магнитное действие компенсируется. Микротоки, текущие у поверхности цилиндра, складываясь, дают некоторый результирующий поверхностный ток. Этот ток и создаёт внутри цилиндра поле  $\vec{B}'$ . В рассматриваемом случае поле  $\vec{B}'$  подобно магнитному полю соленоида. Обозначим поверхностный ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, т.е. линейную плотность поверхностного тока, через  $I'$ . Тогда согласно (6 – 26) модуль  $\vec{B}'$  равен

$$B' = \mu_0 I'. \quad (9.6)$$

Поверхностный ток, приходящийся на отрезок  $dl$  цилиндра, равен  $I'dl$ . Магнитный момент этого тока –  $I'dlS$ , где  $S$  площадь поперечного сечения цилиндра. Разделив  $I'dlS$  на объем  $dV = dlS$ , мы получим абсолютное значение магнитного момента единицы объема цилиндра, т.е. модуль намагниченности  $J = I'$ . (9.7)

Учитывая (9.7) и то, что направления  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  совпадают, перепишем (9.6) в виде:

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (9.8).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае векторы  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  с точностью до множителя  $\mu_0$  совпадают. Согласно (9.5)  $\vec{J} = \chi_B \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ .

Подставив это выражение в (9.8), получим:

$$\vec{B}' = \chi_B \vec{B}_0. \quad (9.9)$$

С учётом (9.9) выражение для полного поля (9.1) запишется:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \chi_B \vec{B}_0 = (1 + \chi_B) \vec{B}_0. \quad (9.10)$$

$$\text{Безразмерная величина } \mu = (1 + \chi_B) \quad (9.11)$$

называется относительной магнитной проницаемостью вещества. Используя обозначение (9.11), соотношение (9.10) можно записать следующим образом:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (9.12)$$

Относительная магнитная проницаемость показывает, во сколько раз изменяется магнитное поле в веществе по сравнению с магнитным полем в вакууме:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \quad (9.13)$$

## 9.2. Напряжённость магнитного поля в веществе

Одним из фундаментальных положений электромагнетизма является положение о том, что магнитное поле создаётся любыми токами – как макроскопическими, так и микроскопическими. Следовательно, циркуляция вектора  $\vec{B}$  в веществе пропорциональна сумме макро – ( $\sum I$ ) и микротоков ( $\sum i'$ ), охватываемых контуром, по которому берётся циркуляция:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \sum i'. \quad (9.14)$$

Вектор намагниченности можно выразить в функции микротоков. Выбираем внутри намагниченного вещества произвольный замкнутый контур  $L$ . При нахождении циркуляции  $\vec{B}$  по этому контуру в сумму микротоков должны войти микротоки, которые пронизывают контур обхода (только эти токи пронизывают поверхность, ограниченную контуром  $L$ , один раз и поэтому дают некоторый суммарный микроток; все остальные микротоки, пересекающиеся с этой поверхностью, пронизывают её дважды, один раз в одном направлении, другой раз в другом – и поэтому не дают вклада в  $I'$ ).

Подсчитаем число микротоков, «нализывающихся» на произвольный элемент  $d\vec{l}$  контура  $L$ . Пусть  $i'$  – сила микротока,  $S$  – площадь, которую он охватывает,  $\alpha$  – угол между  $d\vec{l}$  и намагниченно-

стью  $\vec{J}$  (рис. 9.3).

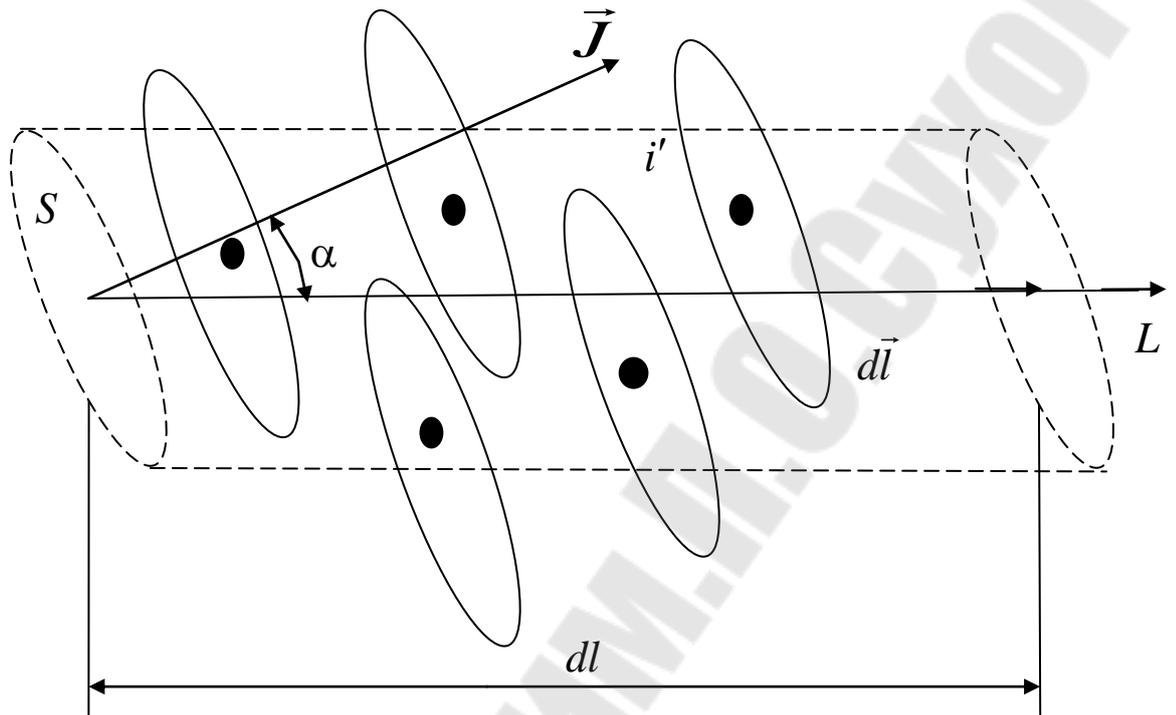


Рис. 9.3

Из рисунка видно, что на вектор  $d\vec{l}$  «направляются» все микро-токи, центры которых лежат внутри наклонного цилиндра объёмом  $dV = Sdl \cos \alpha$ .

Если  $n$  – число микротоков в единице объёма магнетика, то число микротоков, попадающих в этот цилиндр, равно:

$$ndV = nSdl \cos \alpha,$$

а суммарный ток, связанный с  $d\vec{l}$ , равен  $ni'Sdl \cos \alpha$ .

Произведение  $i'S$  есть модуль магнитного момента, создаваемого микротоком  $i'$ , произведение  $ni'S$  – модуль намагниченности  $\vec{J}$ :

$$ni'S = \vec{J}.$$

Следовательно, суммарный микроток, связанный с элементом  $d\vec{l}$  контура обхода равен:

$$ni'Sdl \cos \alpha = Jdl \cos \alpha = \vec{J}d\vec{l}$$

Полный микроток  $I'$ , охватываемый всем контуром  $L$ , равен

$$I' = \oint_L \vec{J}d\vec{l}. \quad (9.15)$$

Таким образом, суммарный микроток, охватываемый произвольным замкнутым контуром  $L$ , равен циркуляции вектора намагниченности, взятой, поэтому же контуру.

Подставим (9.15) в (9.14):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Разделим обе части этого равенства на  $\mu_0$  и перенесём слагаемое  $\oint_L \vec{J} d\vec{l}$  в левую часть:

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum I. \quad (9.16)$$

Величину в скобках обозначается:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (9.17)$$

и называется напряжённостью магнитного поля.

Введём напряжённость (9.17) в (9.16):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (9.18)$$

Если макроскопические токи распределены в пространстве с переменной плотностью  $\vec{j}$ , то сумма  $\sum I$  заменяется интегралом:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S},$$

где  $S$  – произвольная поверхность, опирающаяся на контур, по которому берётся циркуляция:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (9.19)$$

Таким образом, циркуляция вектора напряжённости магнитного поля, созданного электрическими токами, равна полному макроскопическому току, протекающему через любую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур интегрирования. Это утверждение носит название теоремы о циркуляции  $\vec{H}$ .

Поле  $\vec{H}$  можно изобразить графически – с помощью линий вектора  $\vec{H}$ . Линии  $\vec{H}$  строятся так же, как и линии вектора  $\vec{B}$ .

Таким образом, для описания магнитного поля вводятся индукция  $\vec{B}$  и напряжённость  $\vec{H}$ . Из этих двух характеристик важнейшей является  $\vec{B}$ . Введение  $\vec{H}$  оправдано тем, что циркуляция  $\vec{H}$  зависит только от макро токов, которые легко контролировать, легко измерять. Из соотношения (9.18) отнюдь не следует, что напряжённость вообще не зависит от среды (т.е. напряжённость в каждой точке поля при наличии среды такая же, как и в её отсутствие). От среды не зависит не сама напряжённость, а её интегральная функция – циркуляция

$\vec{H}$ . Напряжённость же в общем случае зависит от среды. Так, в неоднородной среде вектор  $\vec{H}$  зависит от распределения магнитной проницаемости, в ограниченных телах напряжённость зависит от формы и размеров тел. Только в двух весьма особых случаях  $\vec{H}$  не зависит от среды: когда однородная изотропная среда заполняет все пространство, где имеется магнитное поле и когда такая среда заполняет область, границы которой нигде не пересекаются с линиями внешнего поля.

Определим напряжённость для ряда сред.

1. *Напряжённость магнитного поля в вакууме.*

Для вакуума  $\vec{J} = 0$  и  $\vec{B}' = 0$ . Следовательно:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 \text{ и}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (9.20)$$

Отсюда напряжённость магнитного поля в вакууме  $\vec{H}_0$  равна магнитной индукции  $\vec{B}_0$  делённой на  $\mu_0$ .

2. *Напряжённость магнитного поля в безграничной однородной изотропной среде.*

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид. Магнитное поле такого соленоида сосредоточено только внутри соленоида. Если сердечник в соленоиде отсутствует, то по (9.20):

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (9.21)$$

Заполним весь объем соленоида однородным изотропным магнетиком. Напряжённость будет равна:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}_0 - \vec{B}'}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (9.22)$$

Но по выражению (9.8)  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$ . Подставив это выражение в (9.22), получим:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (9.23)$$

Правые части (9.23) и (9.21) равны. Следовательно, равны и левые:

$$\vec{H} = \vec{H}_0. \quad (9.23.a)$$

Таким образом, если однородная изотропная среда заполняет

всё пространство, где имеется магнитное поле, то напряжённость магнитного поля в этой среде  $\vec{H}$  совпадает с напряжённостью внешнего поля  $\vec{H}_0$ , т.е. напряжённость такова, как если бы вещества вообще не было.

В случае безграничной изотропной неферромагнитной среды связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  выражается более простой чем (9.17) формулой. Действительно, в такой среде справедливо соотношение:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (9.24)$$

Выразив из (9.23)  $\vec{B}_0$  и подставив в (9.24), получим:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (9.25)$$

### 3. Напряжённость магнитного поля в ограниченных магнетиках.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с однородным изотропным сердечником (рис 9.4). Удалим боковые части 1 и 2 сердечника. Удалённые части содержали микротоки, которые участвовали в создании вторичного, а значит, и полного поля. Следовательно, в коротком сердечнике индукция  $\vec{B}_1$  не равна индукции  $\vec{B}$  в длинном сердечнике

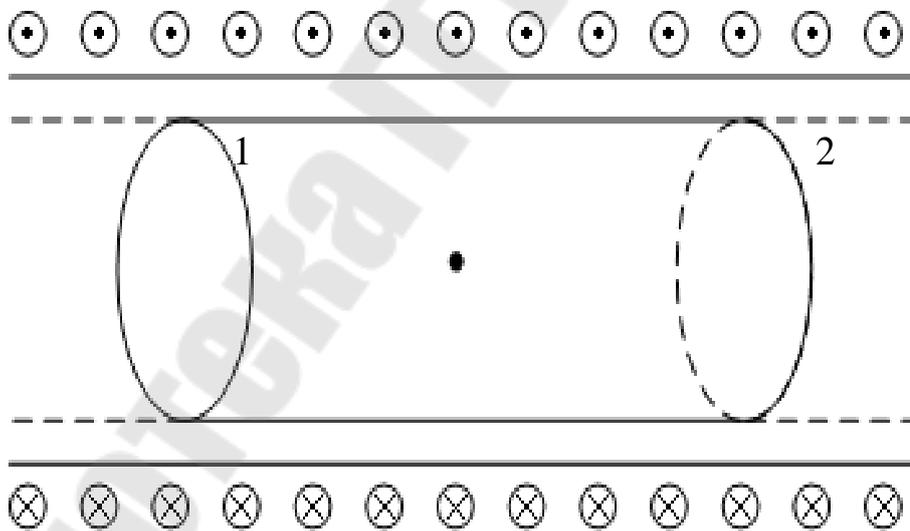


Рис. 9.4

(при том же токе в соленоиде). Так как  $B_1 \neq B$ , то и напряжённость в коротком сердечнике  $\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0 \mu}$  не равна напряжённости в длинном

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}$ ;  $\vec{H}_1 \neq \vec{H}$ . Но  $\vec{H} = \vec{H}_0$  на основании (9.23,а). Следовательно,  $\vec{H}_1 \neq \vec{H}_0$ . Из этого следует, что в ограниченных магнетиках напряжённость магнитного поля не равна напряжённости внешнего поля.

### 9.3. Граничные условия для $\vec{H}$ и $\vec{B}$

При наличии ограниченных магнетиков важное значение приобретают граничные условия, определяющие поведение векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границах раздела магнетиков. Можно показать, что при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  не изменяются; тангенциальная же составляющая вектора  $\vec{B}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  скачкообразно изменяются – испытывают разрыв. Так как одна из составляющих вектора  $\vec{B}$  и вектора  $\vec{H}$  изменяются, то оба вектора при переходе через границы раздела скачкообразно изменяются и по модулю и по направлению, т.е. и  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  зависят от среды. Из граничных условий для  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  следует, что на границах магнетиков линии  $\vec{B}$  преломляются, но остаются непрерывными, линии  $\vec{H}$  – и преломляются, и испытывают разрывы; часть линий  $\vec{H}$  либо заканчивается, либо начинается на границах магнетиков. На рисунке (9.5) показан ход линий  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  при переходе из одного магнетика в другой. Если граница раздела перпендикулярна к линиям поля, то при её переходе вектор  $\vec{B}$  не изменяется ни по модулю, ни по направлению, вектор  $\vec{H}$  изменяется

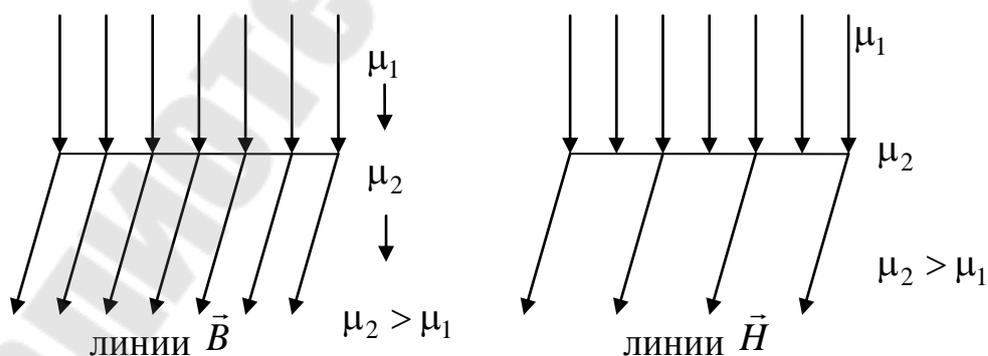


Рис. 9.5

только по модулю: он увеличивается при переходе в среду с меньшей магнитной проницаемостью, уменьшается при переходе в среду с большей магнитной проницаемостью.

#### 9.4. Расчёт магнитного поля в веществе

Если среда однородна, изотропна и безгранична, то магнитное поле можно рассчитать с помощью закона Био – Савара – Лапласа, введя в него относительную проницаемость  $\mu$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}. \quad (9.26)$$

Проинтегрировав (9.26) по контуру тока, можно найти  $\vec{B}$  в интересующей точке. Разделив  $\vec{B}$  на  $\mu\mu_0$ , можно найти  $\vec{H}$ . Приведём формулы, по которым вычисляют  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  магнитных полей, создаваемых проводниками с током различной формы в этих случаях.

Прямой проводник конечной длины:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \text{ и} \\ H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (9.27)$$

Прямой проводник бесконечной длины:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0} \text{ и } H = \frac{I}{2\pi r_0}. \quad (9.28)$$

Круговой ток – на оси:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и } H = \frac{I r_0^2}{2(r_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.29)$$

Круговой ток – в центре:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r_0} \text{ и } H = \frac{I}{2r_0}. \quad (9.30)$$

Длинный соленоид и тороид:

$$B = \mu\mu_0 nI \text{ и } H = nI. \quad (9.31)$$

Если среда безгранична, однородна, изотропна и макро токи симметричны, то можно воспользоваться теоремой о циркуляции  $\vec{H}$ . Действительно, в этом случае нетрудно выбрать простой по форме контур интегрирования, в отдельных точках которого модуль  $\vec{H}$  оди-

наков. Вычислив циркуляцию  $\vec{H}$  по этому контуру и приравняв её к сумме макро токов, охватываемых контуром обхода, можно найти  $\vec{H}$ . Воспользовавшись соотношением  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ , можно найти  $\vec{B}$ . Во всех других случаях расчет магнитного поля в веществе оказывается более сложным. Рассмотрим пример. Найдём напряжённость и индукцию магнитного поля в точках тороида, железный сердечник которого имеет небольшой воздушный зазор рис. 9.6 (по такому принципу устроен лабораторный электромагнит).

Индукция в зазоре ( $\vec{B}_1$ ) и в сердечнике ( $\vec{B}_2$ ) одинакова по модулю (линии  $\vec{B}$  пересекают границу между сердечником и зазором по нормали к поверхности раздела):

$$B_1 = B_2 = B \text{ и } H_1 \neq H_2.$$

Можно ли  $\vec{B}$  найти по формуле (9.31) для тороида со сплошным сердечником? Нет, нельзя – из – за наличия зазора. Наличие зазора приводит к тому, что индукция, как в сердечнике, так и в зазоре оказывается меньше индукции в таком же тороиде без зазора.

Воспользуемся теоремой о циркуляции  $\vec{H}$ . Из симметрии следует, что контур интегрирования должен совпадать с осевой линией тороида (пунктирная линия на рисунке 9.6). По теореме о циркуляции  $\vec{H}$ :

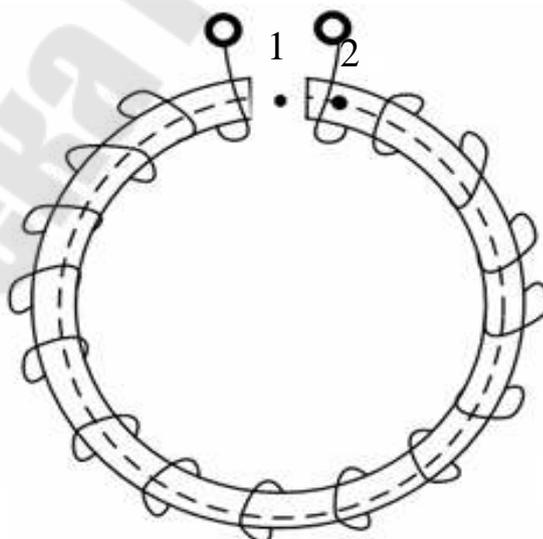


Рис. 9.6

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI,$$

где  $H_1$  и  $H_2$  – напряжённости магнитного поля в зазоре и сер-

дечнике;

$l_1$  и  $l_2$  – ширина зазора, и длина сердечника по осевой линии;

$N$  – число витков тороида;

$I$  – сила тока.

Но  $H_1 \approx \frac{B}{\mu_0 \mu_1}$  и  $H_2 \approx \frac{B}{\mu_0 \mu_2}$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – магнитные проницае-

мости воздуха и железа. Следовательно,  $\frac{B}{\mu_0 \mu_1} l_1 + \frac{B}{\mu_0 \mu_2} l_2 = NI$  откуда:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2}}. \quad (9.32)$$

Пусть  $l_1 \approx 0,1\text{м}$ ,  $l_2 \approx 1\text{м}$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2$  – может достигать нескольких тысяч.

Так как  $\frac{l_1}{\mu_1} \gg \frac{l_2}{\mu_2}$ , то вторым слагаемым в знаменателе выражения (9.32) можно пренебречь:

$$B \approx \mu_0 \mu_1 \frac{NI}{l_1}. \quad (9.33)$$

На основании последнего соотношения (9.33), учитывая, что  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , найдём  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1 = \frac{NI}{l_1} \quad (9.34)$$

$$\text{и } H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{NI}{l_1}. \quad (9.35)$$

Сопоставляя (9.34) и (9.35) получим:

$$H_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_2. \quad (9.36)$$

## 9.5 Магнитные моменты атомов и молекул

Согласно представлениям классической физики, электроны движутся по замкнутым орбитам. Следовательно, каждый электрон создает замкнутый микроток, магнитное поле которого, а также взаимодействие его с внешним полем можно охарактеризовать магнитным моментом. Магнитный момент  $\vec{p}_m$ , обусловленный движением электрона на орбите, называется – орбитальным магнитным моментом

электрона.

Модуль орбитального магнитного момента электрона равен:

$$p_m = iS,$$

где  $i$  – абсолютное значение тока, создаваемое электроном;  
 $S$  – площадь орбиты.

Будем считать орбиту круговой. Через любое сечение электронной орбиты за единицу времени переносится заряд  $|e|v$ , где  $|e|$  – модуль заряда электрона,  $v$  – число оборотов в секунду. Следовательно, создаваемый электроном ток равен  $i = |e|v$ . Частоту обращения  $v$  можно выразить через линейную скорость  $\vec{v}$ :

$$v = \frac{v}{2\pi r},$$

где  $r$  – радиус орбиты.

Площадь орбиты  $S = \pi r^2$ . Таким образом:

$$p_m = iS = (|e|vr)/2. \quad (9.37)$$

Направление движения электрона и направление создаваемого им тока противоположны, т.к.  $e < 0$ . Направление  $\vec{p}_m$  образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему. (рис. 9.7)

Движущийся по орбите электрон обладает орбитальным моментом импульса (орбитальным механическим моментом):

$$\vec{L} = m[\vec{r} \cdot \vec{v}], \quad (9.38)$$

где  $\vec{r}$  – радиус – вектор электрона (рис. 9.7).

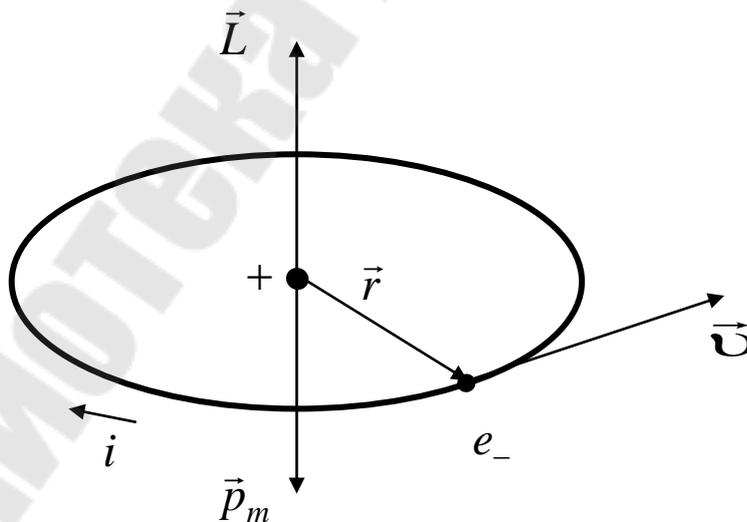


Рис. 9.7

Модуль  $\vec{L}$  равен:

$$L = m\omega r, \quad (9.39)$$

так, как угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{\omega}$  прямой.

Отношение модулей векторов орбитального магнитного и орбитального механического моментов называется орбитальным гиромагнитным отношением:

$$\frac{P_m}{L} = g. \quad (9.40)$$

Так как  $\vec{P}_m$  и  $\vec{L}$  противоположны, то

$$\vec{P}_m = -g\vec{L}. \quad (9.41)$$

Подставив в (9.40) выражения для модулей  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$  получаем:

$$g = \frac{|e|}{2m}. \quad (9.42)$$

Это соотношение справедливо для любых орбит.

Сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов в атоме образует орбитальный магнитный момент атома, а сумма всех орбитальных механических моментов – орбитальный механический момент атома.

Гиромагнитное отношение не зависит от числа электронов, по которым производится суммирование механических и магнитных моментов; для любого числа электронов (в атоме, в магнетике в целом) выполняются соотношения:

$$\frac{|\sum \vec{P}_{mi}|}{|\sum \vec{L}_i|} = g \quad \text{и} \quad \sum \vec{P}_{mi} = -g \sum \vec{L}_i. \quad (9.43)$$

Из (9.43) следует, что вращение магнетика должно сопровождаться намагничиванием, а намагничивание – вращением. Первое явление было открыто Барнеттом (1909 г.), второе – Эйнштейном и де Гаазом (1915 г.) Если магнетик не намагничен, то суммарный магнитный момент, а, следовательно, и суммарный механический момент всех его электронов равен нулю. При намагничивании магнетик приобретает некоторый магнитный момент  $\sum \vec{P}_{mi}$ . Следовательно, электроны приобретают и некоторый механический момент  $\sum \vec{L}_i$ . Но поворот электронных токов происходит под действием внутренних сил, поэтому должен выполняться закон сохранения момента импульса: сам магнетик должен приобрести момент импульса –  $\sum \vec{L}_i$ , т.е. прийти во вращение. При изменении направления намагничивания направление вращения изменяется.

Схема опыта Эйнштейна и де Гааза изображена на рис. 9.8. Железный стержень, подвешенный на кварцевой нити с зеркальцем, помещается в соленоид. По соленоиду пропускается переменный ток. При изменении направления тока в соленоиде направление поворота стержня изменяется на противоположное (поворот стержня фиксируется с помощью светового зайчика, отражающегося от зеркала). Если частота колебаний тока совпадает с частотой собственных крутильных колебаний стержня, то повороты будут заметными и их можно зафиксировать. Измерив магнитный и механический моменты стержня, можно определить гиромагнитное отношение.

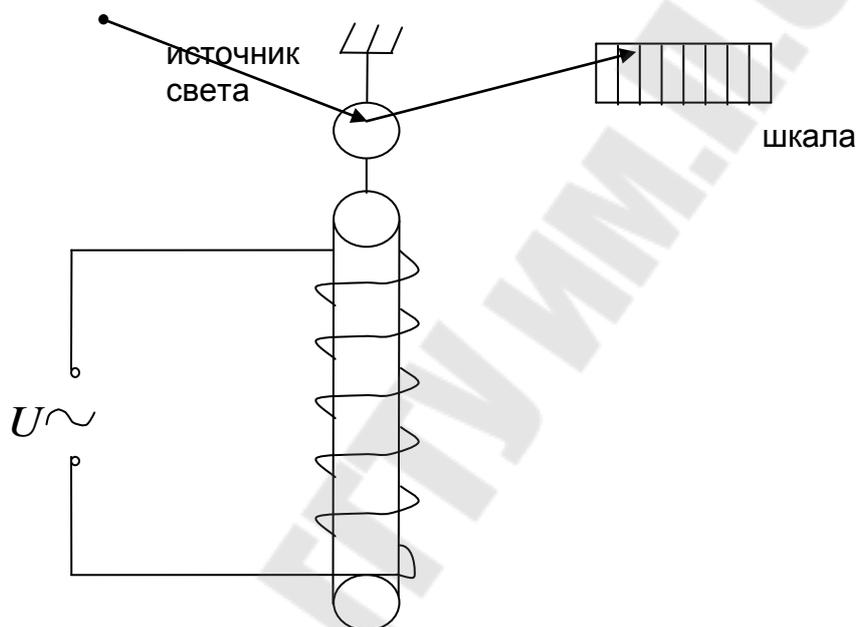


Рис. 9.8

Барнетт приводил в быстрое вращение железный стержень и измерял возникшую при этом намагниченность. По данным опыта также определялось гиромагнитное отношение.

Гиромагнитное отношение в опытах Эйнштейна и де Гааза, а также Барнетта оказалось в два раза больше теоретически ожидаемого значения. Это расхождение эксперимента с теорией оставалось загадкой вплоть до 1925 года. В 1925 году С. Гоудсмит и Уленбек выдвинули предположение о том, что электрон независимо от орбитального движения обладает собственным моментом импульса  $\vec{L}_s$  и собственным магнитным моментом  $\vec{P}_{ms}$ .

Собственный момент импульса электрона называется спином, а собственный магнитный момент – спиновым магнитным моментом.

Предположение Гоудсмита и Уленбека в последующем полно-

стью подтвердилось, и было доказано экспериментально.

Первоначально наличие у электрона спина связывалось с вращением электрона вокруг собственной оси (на английском языке Spin – вращение). Однако такая чисто механическая модель спина противоречит теории относительности (линейная скорость внешних частей электрона должна превышать скорость света), и от неё отказались.

Спин – это квантовомеханическое свойство электрона, которое нельзя представить наглядно.

Спиновый магнитный момент характеризует собственное магнитное поле электрона, и взаимодействие его с магнитным полем, в котором находится электрон. На достаточно больших расстояниях это поле подобно полю контура с током. Во внешнем магнитном поле на спиновый магнитный момент  $\vec{P}_{ms}$  действует вращательный момент. Спином и спиновым магнитным моментом обладают не только электроны, но и многие другие элементарные частицы. Отношение модулей спинового магнитного момента и спина электрона называется спиновым гиромангнитным отношением электрона:

$$\frac{P_{ms}}{L_s} = g_s. \quad (9.44)$$

$$\text{Измерения показывают, что: } g_s = \frac{|e|}{m}, \quad (9.45)$$

т. е. спиновое гиромангнитное отношение в два раза больше орбитального гиромангнитного отношения.

Из (9.44) и (9.45) вытекает:

$$P_{ms} = \frac{|e|}{m} L_s. \quad (9.46)$$

Найденное Эйнштейном, де Гаазом и Барнеттом значение гиромангнитного отношения совпадает именно со спиновым гиромангнитным отношением. Следовательно, магнетизм железа обусловлен не орбитальными, а спиновыми магнитными моментами.

Таким образом, магнитный момент атома складывается из орбитальных и спиновых магнитных моментов входящих в состав атомного ядра протонов и нейтронов. Спины электронов, протонов и нейтронов по абсолютной величине одинаковы.

Что касается спиновых магнитных моментов, то у протонов и нейтронов они значительно меньше, чем у электронов соответственно в 660 и 960 раз. Поэтому часто магнитными моментами ядер пренебрегают.

## 9.6 Диамагнетизм

Все вещества в магнитном отношении делятся на диамагнетики, парамагнетики и магнетики с упорядоченной магнитной структурой – ферромагнетики. С точки зрения макроскопической теории, диамагнетики – это вещества, имеющие отрицательную магнитную восприимчивость и меньшую единицы магнитную проницаемость:

$$\chi_B < 0, \mu < 1.$$

Диамагнетиками являются инертные газы, многие органические соединения, некоторые металлы (Bi, Zn, Au, Cu, Ag, Hg), смолы, молекулярный водород, стекло, мрамор и др. Вектор намагниченности в диамагнетиках антипараллелен намагничивающему полю  $\vec{B}_0$ , поэтому результирующее поле в диамагнетиках  $\vec{B}$  всегда слабее внешнего поля  $\vec{B}_0$ . Восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры и намагничивающего поля (в не очень сильных полях) и весьма мала по абсолютной величине. Так, у меди  $\chi_B = -8,4 \cdot 10^{-7}$ , у висмута  $\chi_B = -1,7 \cdot 10^{-4}$ . Вектор намагниченности диамагнетиков пропорционален намагничивающему внешнему полю  $\vec{B}_0$ . На рисунке (9.9) изображён график зависимости  $J_x$  от  $B_{0x}$  ( $J_x$  и  $B_{0x}$  – проекции  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$  на ось  $x$ , направленную по  $\vec{B}_0$ ).

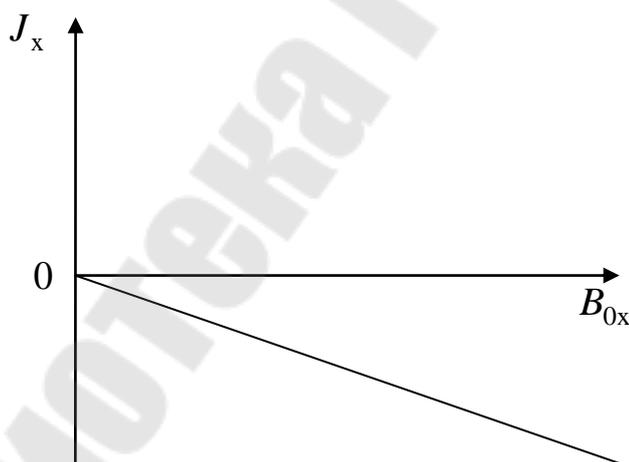


Рис. 9.9

С точки зрения микроскопической теории, диамагнетики – это вещества, молекулы которых в отсутствии внешнего магнитного поля не обладают магнитными моментами.

Рассмотрим механизм намагничивания диамагнетиков.

1. Атомный диамагнетизм (диамагнетизм связанных электро-

нов)

Во внешнем магнитном поле в каждом атоме диамагнетика индуцируется магнитный момент, направленный против этого поля.

Индукцированные магнитные моменты обусловлены изменением угловой скорости обращения электронов. В отсутствие магнитного поля на электрон действует кулоновская сила, играющая роль центростремительной силы.

По второму закону Ньютона:  $F_{\text{эл}} = m\omega_0^2 r$ ,

где  $m$  – масса электрона;

$\omega_0$  – угловая скорость обращения электрона;

$r$  – радиус орбиты.

При наличии магнитного поля на электрон, кроме кулоновской силы, действует ещё сила Лоренца (рис. 9.10). Модуль результирующей этих сил, то есть модуль центростремительной силы равен:

$F_{\text{эл}} - F_{\text{л}}$  и, следовательно  $F_{\text{эл}} - F_{\text{л}} = m\omega_1^2 r$ .

Радиус электронной орбиты при этом не изменяется (объяснение этому факту дает квантовая механика). Так как центростремительная сила уменьшается, то и уменьшается угловая скорость обращения электрона:  $\omega_1 < \omega_0$ . Уменьшение угловой скорости эквивалентно возникновению дополнительного кругового тока  $\Delta i$ , направленного против электронного орбитального тока.

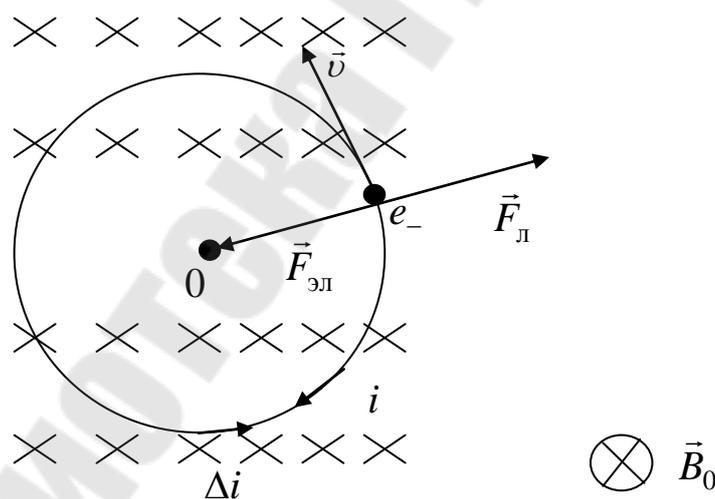


Рис. 9.10

Ток  $\Delta i$  создаёт дополнительный магнитный момент,  $\Delta \vec{P}_{\text{м}}$  направленный против внешнего поля. Если магнитное поле направлено так, как на рисунке 9.11,

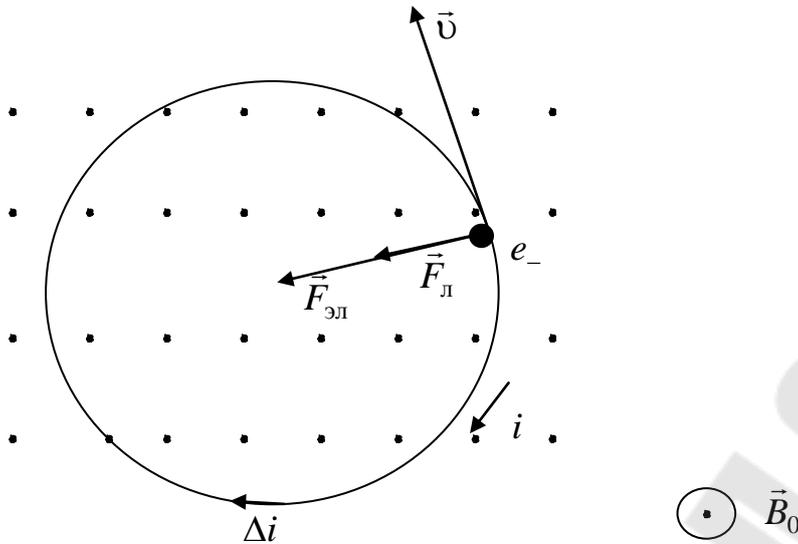


Рис. 9.11

то сила Лоренца и кулоновская сила направлены в одну сторону и угловая скорость обращения электрона возрастает.

Возрастание угловой скорости эквивалентно возрастанию дополнительного кругового тока  $\Delta i$ , совпадающего с орбитальным электронным током. Этот ток создает магнитный момент  $\Delta \vec{P}_m$ , направленный опять – таки против внешнего магнитного поля.

Электронная орбита, не перпендикулярная к магнитному полю, под действием поля прецессирует – совершает такое движение, при котором орбитальный магнитный момент  $\vec{P}_m$  описывает конус, осью которого служит направление  $\vec{B}_0$ . Направление прецессии связано с направлением  $\vec{B}_0$  по правилу правого винта. При этом направление обращения электрона по орбите противоположно направлению прецессии, если угол между  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}_0$  острый, и совпадает с направлением прецессии, если этот угол тупой (рис. 9.12). Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона в плоскости, перпендикулярной к  $\vec{B}_0$ . За счет этого движения возникает магнитный момент  $\Delta \vec{P}_m$ , направленный против поля. Просуммировав магнитные моменты, приобретаемые всеми электронами атома, находят индуцированный магнитный момент атома, сложив магнитные моменты атомов, заключенных в единице объема, находят намагниченность  $\vec{J}$  вещества.

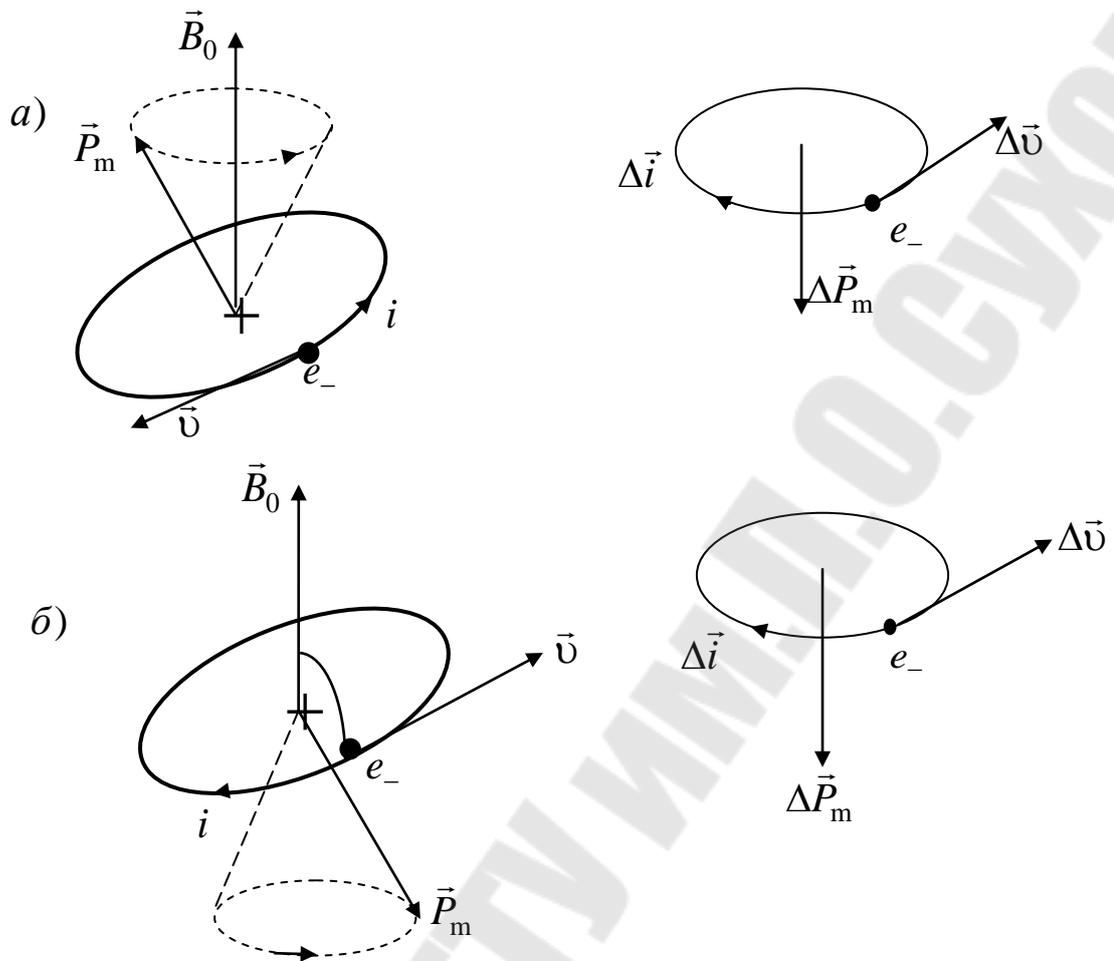


Рис. 9.12

Приобретение атомами магнитных моментов во внешнем магнитном поле за счёт прецессии электронных орбит называется атомным диамагнетизмом, или диамагнетизмом связанных электронов. Этот эффект имеет место во всех без исключения веществах.

## 2. Диамагнетизм свободных электронов.

Как известно, свободная заряженная частица, влетающая в магнитное поле под произвольным углом, движется по винтовой траектории. Движение по такой траектории складывается из движения по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю, и из равномерного прямолинейного движения вдоль (или против) поля. За счёт движения по окружности создаётся магнитный момент, направленный против поля. Подобные магнитные моменты приобретают во внешнем поле свободные электроны в металлах, полупроводниках, ионизированных газах и т.д. Этот тип магнетизма называется диамагнетизмом свободных электронов, или диамагнетизмом Ландау.

## 9.7. Парамагнетизм

С точки зрения макроскопической теории, парамагнетики – это вещества, для которых  $\chi_V$ , как и у диамагнетиков, невелика, но положительна, а  $\mu$  несколько больше единицы:

$$\chi_V \geq 0, \mu > 1.$$

Парамагнетиками являются Na, K, Rb, Cs, Mg, Al, Mn, Pt, O, растворы солей железа и др. Восприимчивость парамагнетиков при обычных температурах лежит в пределах от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$ . Так у алюминия  $\chi_V = 2,5 \cdot 10^{-5}$ , у Pt –  $\chi_V = 3 \cdot 10^{-4}$ , у хлористого железа ( $\text{FeCl}_3$ )  $\chi_V = 2,5 \cdot 10^{-9}$ .

Опыт показывает, что восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна температуре (закон Кюри):

$$\chi_V = \frac{c}{T},$$

где  $c$  – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества.

Закон Кюри справедлив при не слишком низких температурах.

Вектор намагниченности в изотропных парамагнетиках в не очень сильных постоянных внешних полях пропорционален намагничивающему полю и совпадает с ним по направлению. В очень сильных полях ( $10^2$  Тл и более) пропорциональность между  $\vec{J}$  и  $\vec{B}_0$  нарушается, и при некотором  $\vec{B}_0$  наступает насыщение:  $\vec{J}$  перестает зависеть от  $\vec{B}_0$  (рис. 9.13).

С точки зрения макроскопической теории, парамагнетики это вещества, атомы и молекулы которых в отсутствие внешнего магнитного поля обладают магнитными моментами, т.е. являются магнитными диполями. В отсутствие магнитного поля эти диполи ориентируются беспорядочно (вследствие теплового движения), поэтому суммарный магнитный момент парамагнетика равен нулю.

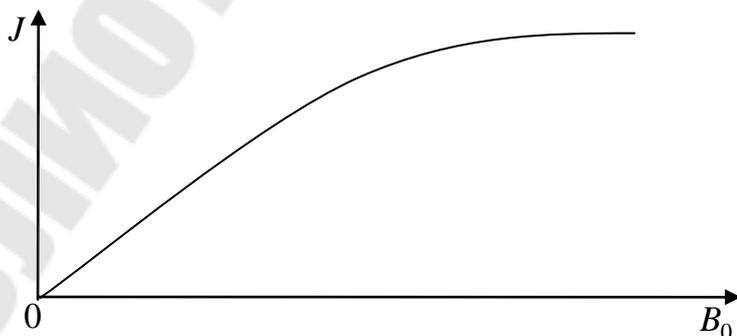


Рис. 9.13

При наличии магнитного поля магнитные моменты приобретают преимущественную ориентацию, в результате чего возникает намагниченность. Интенсивность намагничивания пропорциональна намагничивающему полю  $\vec{B}_0$  и обратно пропорциональна температуре парамагнетика  $T$ : тепловое движение оказывает на магнитные диполи дезориентирующее действие.

Заметим, что в парамагнетиках, наряду с поворотом электронных орбит имеет место прецессия орбит, т.е. на парамагнитный эффект накладывается диамагнитный эффект. Парамагнитный эффект, однако, почти всегда перекрывает диамагнитный, поэтому в парамагнетиках внутреннее магнитное поле усиливает внешнее.

Классическая теория парамагнетиков была разработана П.Ланжевеном (Франция) в 1905 году.

Рассмотрим парамагнетизм свободных электронов (парамагнетизм Паули).

Электронный газ, благодаря наличию у электронов спиновых магнитных моментов, является парамагнитным. В магнитном поле собственные магнитные моменты электронов ориентируются преимущественно по полю, создавая тем самым определенную намагниченность. Будучи парамагнитным, электронный газ, с точки зрения классической теории, должен обнаруживать достаточно заметную температурно-зависящую восприимчивость. Опыт, однако, показывает, что восприимчивость электронного газа в металлах практически не зависит от температуры и, кроме того, значительно меньше того значения, которое показывает классическая теория.

Объяснение этому факту даёт квантовая теория.

В металлах все глубокие энергетические уровни зоны проводимости заполнены парами электронов с противоположно направленными спинами. Частично или полностью свободные уровни имеются только вблизи уровня Ферми и выше его. Электрон, изменяющий ориентацию своего спина, должен покинуть уровень который он до этого занимал (в противном случае на этом уровне окажутся два электрона с одинаково ориентированными спинами – принципом Паули это запрещено). Для перехода на новый уровень требуется энергия. Та энергия, которую электроны получают при включении магнитного поля, не велика. Это приводит к тому, что переходят на новые уровни и ориентируют свои магнитные моменты по полю лишь те электроны, энергия которых близка к энергии Ферми. Подавляющее же большинство электронов не меняет ориентации своих моментов и не вносит

вклада в намагниченность. Вот почему парамагнитная восприимчивость электронного газа не велика. Поскольку энергия Ферми очень слабо зависит от температуры, от температуры практически не зависит и восприимчивость электронного газа.

### 9.8. Ферромагнетизм. Свойства ферромагнетиков

Ферромагнетики – вещества, способные намагничиваться очень сильно, внутреннее поле в таких веществах может в  $10^2 - 10^6$  раз превышать внешнее магнитное поле:  $\chi_B \gg 0$ ,  $\mu \gg 1$ .

Ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd сплавы и соединения этих элементов, некоторые сплавы и соединения Mn и Cr с неферромагнитными элементами и др.

Ферромагнетики кроме способности намагничиваться обладают рядом свойств, существенно отличающих их от других магнетиков.

1. Зависимость намагниченности  $\vec{J}$ , а, следовательно, и индукции результирующего поля  $\vec{B}$  от намагничивающего внешнего поля  $\vec{B}_0$  в ферромагнетиках нелинейная.

Обычно, на графиках изображают зависимость намагниченности и индукции в ферромагнетиках не от  $\vec{B}_0$ , а от  $\vec{H}$ , ( $\vec{H}$ , как известно, также как и  $\vec{B}$ , пропорциональна макро току, создающему намагничивающее поле).

Зависимости  $J$  от  $H$  и  $B$  от  $H$  ферромагнетика (железа), магнитный момент которого первоначально был равен нулю показаны на рисунке 9.14. Как видно из графиков, намагниченность при некотором значении  $H$  достигает насыщения. По достижении насыщения образца,  $B$  растёт с увеличением  $H$  по линейному закону.

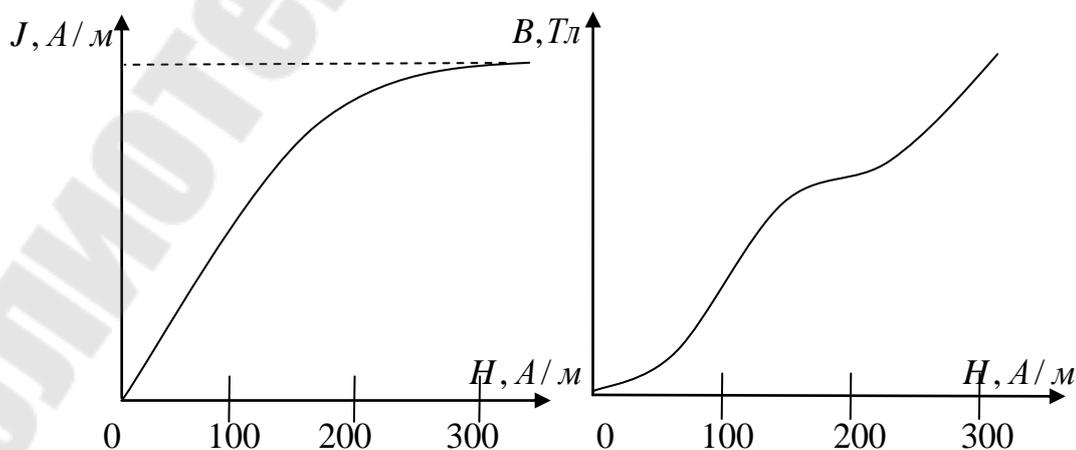


Рис. 9.14

2. Намагниченность ферромагнетика определяется не только существующим внешним полем, но и предысторией намагничивания.

Зависимость намагниченности ферромагнетика при данной напряжённости намагничивающего поля от предшествующих состояний называется магнитным гистерезисом.

Если ферромагнетик намагнитить до насыщения, а затем уменьшить напряжённость намагничивающего поля, то намагниченность  $J_x$  будет следовать не первоначальной кривой 1 (она называется основной кривой намагничивания), а новой кривой 2 (рис. 9.15). При  $H_x = 0$  ферромагнетик не утрачивает намагниченности. Намагниченность  $J_{0x}$ , которой ферромагнетик обладает в отсутствие внешнего магнитного поля, называется остаточной. Чтобы снять остаточную намагниченность, нужно включить внешнее поле, направление которого противоположно первоначальному полю, вызвавшему намагничивание.

Поле  $H_{кх}$  обратного направления, которое полностью снимает остаточную намагниченность, называется коэрцитивной силой. При дальнейшем увеличении обратного намагничивающего поля вновь происходит магнитное насыщение. В не намагниченное состояние ферромагнетик приходит в соответствии с кривой 3.

При циклическом изменении модуля и направления намагничивающего поля получается петлеобразная кривая, называемая петлёй гистерезиса. Если максимальные значения таковы, что достигается насыщение, то получается максимальная петля гистерезиса (сплошная кривая на рис. 9.15), если насыщения не достигается, получается петля, называемая частным циклом (пунктирная кривая). Частных циклов можно получить сколько угодно.

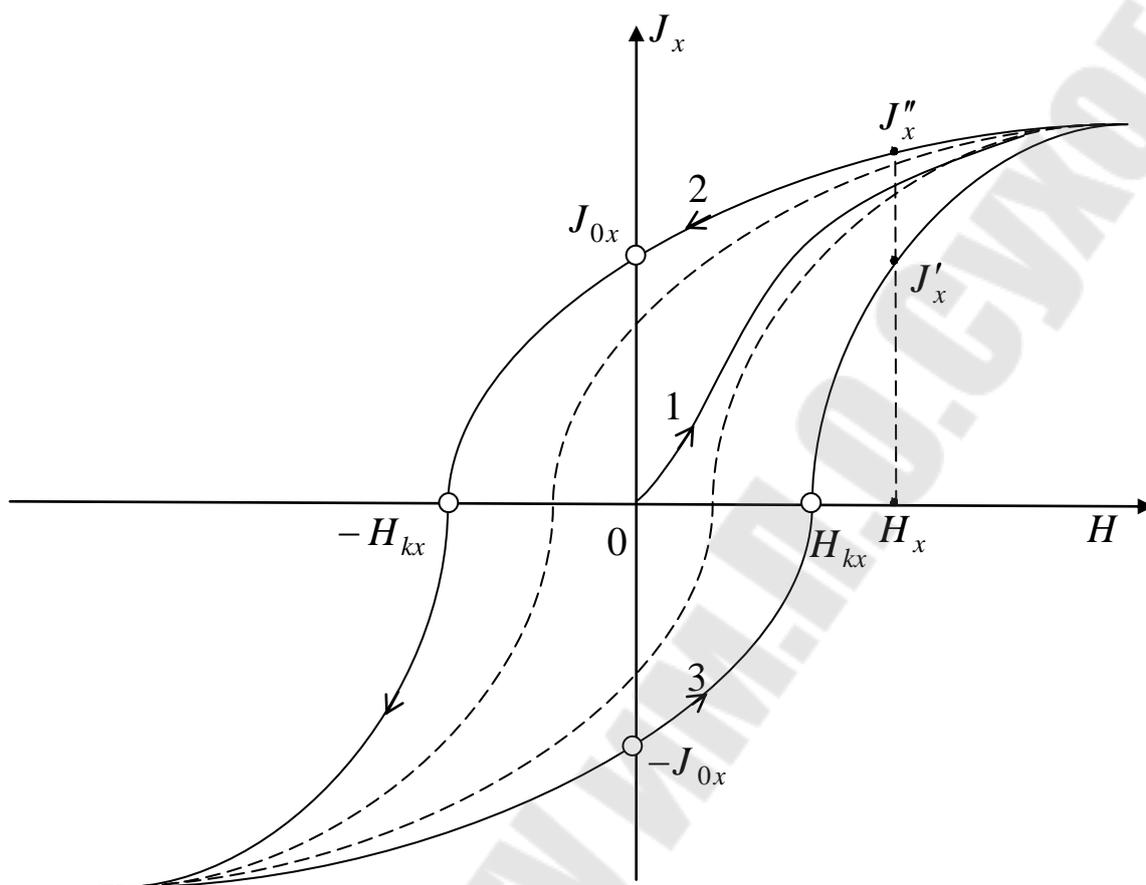


Рис. 9.15

Наличие гистерезиса у ферромагнетиков означает, что намагниченность, а, следовательно, и индукция результирующего поля в них не является однозначной функцией намагничивающего поля  $H$ . При одном и том же значении  $\vec{H}$  намагниченность может принимать любые значения, лежащие в некотором интервале (от  $I_x$  до  $J'_x$  при  $H_x$ , как в случае петли изображённой на рисунке).

Поскольку зависимость  $B$  от  $H$  в ферромагнетиках неоднозначна, понятие магнитной проницаемости применимо только к основной кривой намагничивания. Нелинейный характер этой кривой означает, что  $\mu$  ферромагнетиков зависит от внешнего поля (рис. 9.16). Максимальная остаточная намагниченность  $J_{0x}$ , максимальная коэрцитивная сила  $H_{kx}$  и максимальная магнитная проницаемость  $\mu_{\max}$  – основные характеристики ферромагнетика.

Ферромагнетики с узкой петлёй гистерезиса (с малой максимальной  $H_{kx}$ ) называются магнитно-мягкими. Такие ферромагнетики используются в качестве сердечников в трансформаторах и электрических машинах. Ферромагнетики с широкой петлёй гистерезиса называются магнитно-жесткими. Они используются для изготовления

ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ.

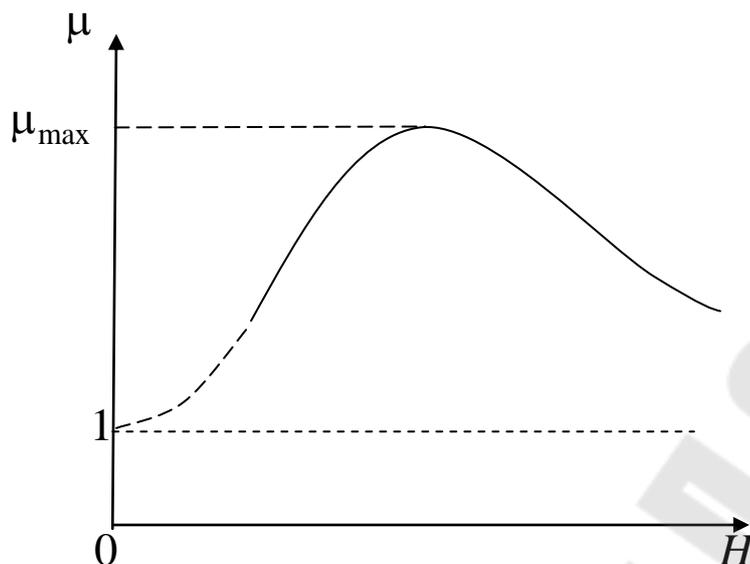


Рис. 9.16

При некоторой температуре, называемой температурой Кюри, ферромагнетик утрачивает свои особые свойства. Точка Кюри для чистого железа составляет 1043К (770°C), для никеля 663К (390°C), кобальта 1422К (1149°C). При температуре выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

*Природа ферромагнетизма.* В ферромагнетиках между атомами имеет место, так называемое обменное взаимодействие, благодаря которому энергетически выгодным оказывается состояние с параллельной ориентацией электронных спинов и, следовательно, спиновых магнитных моментов. Силы, ориентирующие спины электронов параллельно друг другу не магнитные.

Области ферромагнетика, в которых спины параллельны, называются доменами. В пределах каждого домена ферромагнетик самопроизвольно намагничен до насыщения.

Наличие доменов можно обнаружить на опыте. Тонкий порошок ферромагнитного вещества напыляется на полированную и протравленную поверхность ферромагнетика. Частицы порошка концентрируются в тех местах, где поверхность образца пересекается со стенками доменов (здесь магнитное поле весьма неоднородно). Полученные таким образом порошковые фигуры, называемые фигурами Акулова – Биттера, рассматриваются в микроскоп. Существуют и другие методы изучения доменной структуры ферромагнетиков. Размеры доменов, как правило, невелики: порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$  см. Это вытекает из закона сохранения энергии. Если бы ферромагнетик состоял только

из одного домена, то он создавал бы сильное собственное поле и обладал бы значительной магнитной энергией. Энергия, затрачиваемая на создание собственного поля, существенно уменьшится, если вместо одного домена образуется два или, ещё лучше, четыре домена, намагниченных так, как это показано на рисунке 9.17 стрелками.

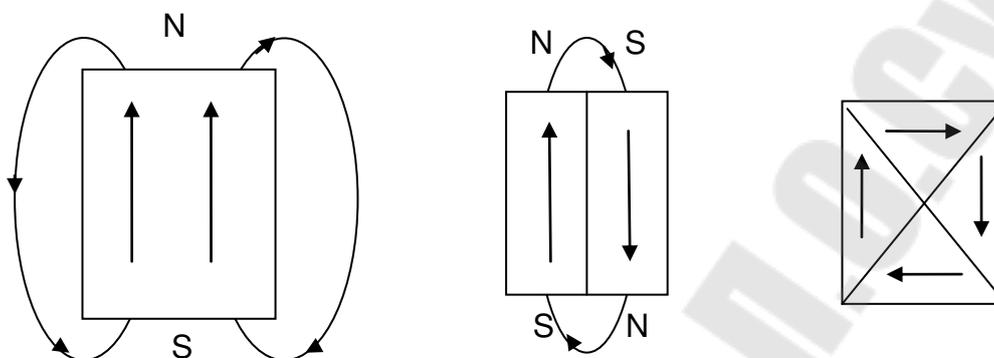


Рис. 9.17

На границе между двумя соседними доменами происходит “разворот” спиновых моментов от одной ориентации к другой. При повороте магнитного диполя во внешнем поле совершается работа. Следовательно, энергия затрачивается и на образование границ между доменами.

Энергия двух доменов одинакового объёма, намагниченных в разных кристаллографических направлениях, оказывается различной. Разность этих энергий называется энергией анизотропии.

В отсутствие намагничивающего поля размеры доменов и их форма определяются минимумом энергии, затрачиваемой на создание собственного поля, энергии границ и энергии анизотропии. При этом ферромагнетик разбивается на домены таким образом, что его результирующий магнитный момент практически равен нулю.

При наличии внешнего магнитного поля удельная энергия доменов оказывается неодинаковой: она меньше для тех доменов, в которых вектор намагниченности образует с направлением внешнего поля острый угол, и больше в том случае, когда этот угол тупой. Действие магнитного поля на ферромагнетик первоначально проявляется в смещении границ между доменами: объём доменов с благоприятной ориентацией магнитных моментов увеличивается за счёт энергетически “невыгодных” доменов. Пока намагничивающее поле невелико, смещение границ обратимо и точно (пропорционально) следует за изменениями этого поля (рис. 9.18). При дальнейшем увеличении поля смещение границ доменов становится необратимым и зависимость  $J$

от  $H$  переходит в линейную (рис. 9.18.д), участок АВ). В достаточно сильном поле происходит поворот магнитных моментов доменов.

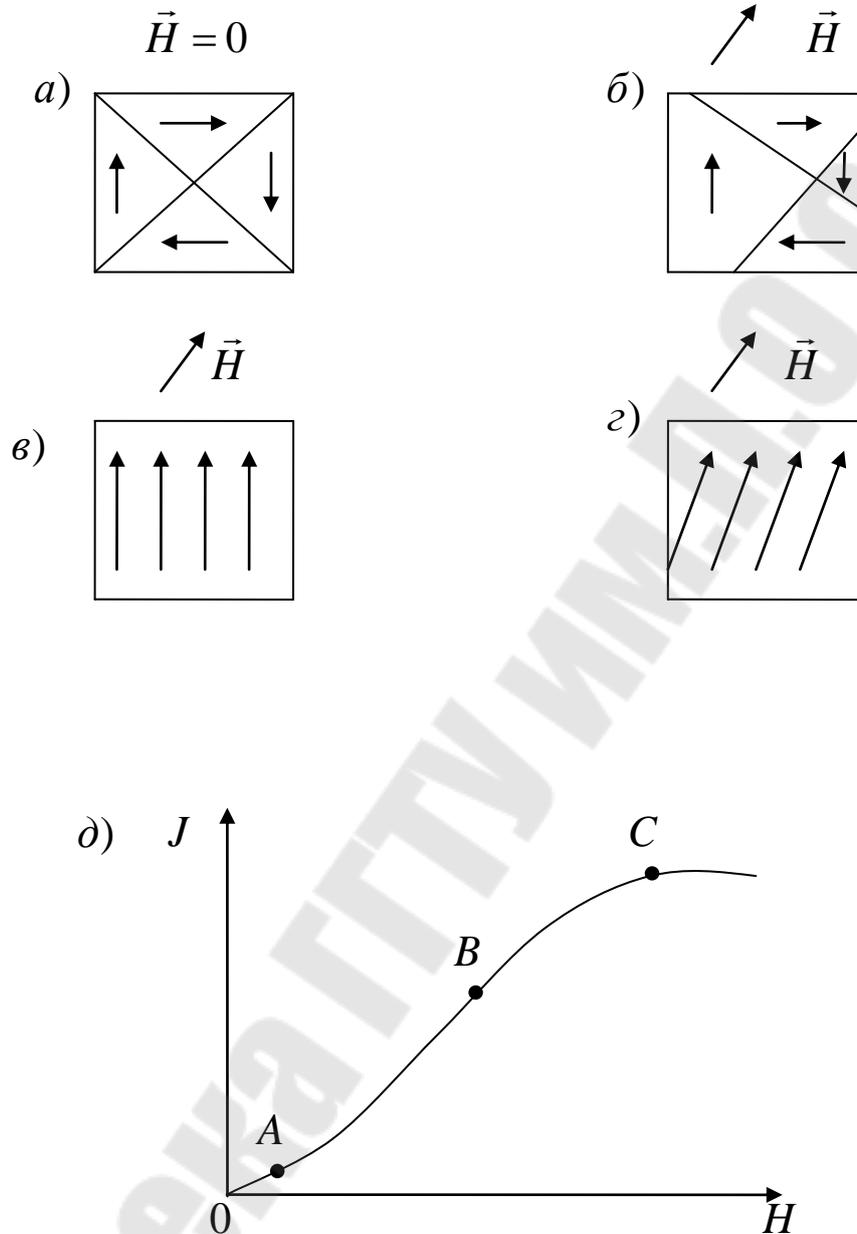


Рис. 9.18

В состоянии насыщения ферромагнетик представляет собой один гигантский домен, магнитный момент которого совпадает с направлением внешнего намагничивающего поля (рис 9.18.г). При уменьшении намагничивающего поля намагниченность не следует первоначальному ходу, а несколько отстаёт из – за необратимости смещения границ между доменами. Превращение ферромагнетика в парамагнетик в точке Кюри объясняется тем, что при этой температуре энергия теплового движения атомов оказывается достаточной для того, чтобы разрушились области спонтанной намагниченности. Фер-

ромагнетики получили весьма широкое практическое применение. Они используются в качестве сердечников, в качестве элементов управления полями, их используют для записи звуковых и видеосигналов.

## Глава 10. Электромагнитная индукция

### 10.1. Явление электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции (открыто М. Фарадеем в 1831г.) состоит в том, что при всяком изменении магнитного потока, сцеплённого с проводящим контуром, в контуре возникает ЭДС индукции. Магнитный поток, сцеплённый с контуром, – это поток, пронизывающий любую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур (рис. 10.1). Опыт показывает, что абсолютное значение ЭДС индукции равно модулю скорости изменения магнитного потока, сцеплённого с контуром:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|. \quad (10.1)$$

Если контур замкнут, то ЭДС индукции вызывает в нём индукционный ток. В незамкнутом контуре ток возникает, если магнитный поток, сцеплённый с контуром, изменяется с переменной скоростью, т. е. когда

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \neq const. \quad (10.2)$$

Изменение магнитного потока, сцеплённого с контуром, может быть обусловлено изменением пронизывающего контура магнитного поля, изменением формы в магнитном поле.

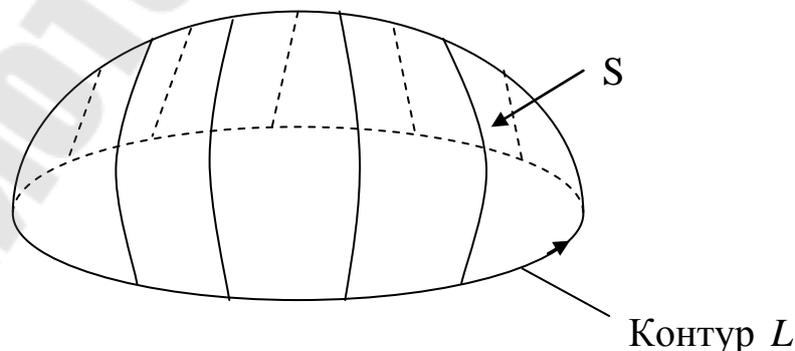


Рис. 10.1

Э.Х. Ленц установил правило, согласно которому индукцион-

ный ток всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток через поверхность, опирающуюся на контур, противодействует изменению того магнитного потока, который вызывает этот индукционный ток. Это означает, что знаки ЭДС индукции и скорости изменения магнитного потока противоположны:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.3)$$

Пусть контур находится в изменяющемся магнитном поле (рис. 10.2)

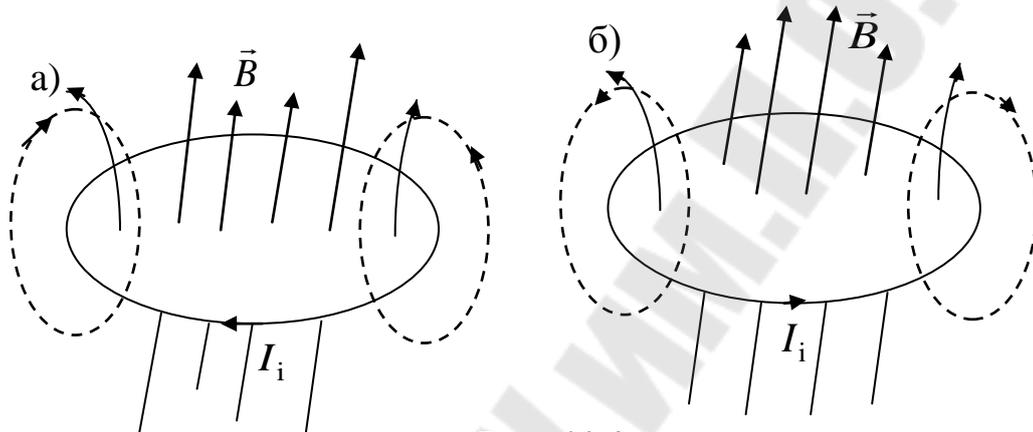


Рис. 10.2

Если  $\vec{B}$  (модуль индукции) возрастает (рис. 10.2,а), то  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  и  $\varepsilon_i < 0$ . ЭДС индукции отрицательна – это означает, что магнитный поток, создаваемый индукционным током и пронизывающий контур, противоположен по знаку внешнему магнитному потоку, сцепленному с контуром (а). Если  $\vec{B}$  уменьшается, то  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$  и  $\varepsilon_i > 0$ . Магнитный поток индукционного тока и внешний магнитный поток совпадают по знаку (б). Из закона Ленца следует, что внешнее магнитное поле всегда тормозит движение проводника, по которому течёт индукционный ток. При сближении цепей возникают силы отталкивания, при удалении – силы притяжения. Тормозящее действие магнитного поля применяется в магнитных успокоителях (демпферах) некоторых измерительных приборов.

## 10.2. Электродвижущая сила индукции

Закон электромагнитной индукции (10.3) – одно из проявлений закона сохранения энергии. Поместим цепь с источником тока ( $\varepsilon$ ) и подвижным участком  $ab$  (рис. 10.3) в магнитное поле (поле направ-

лено за чертёж).

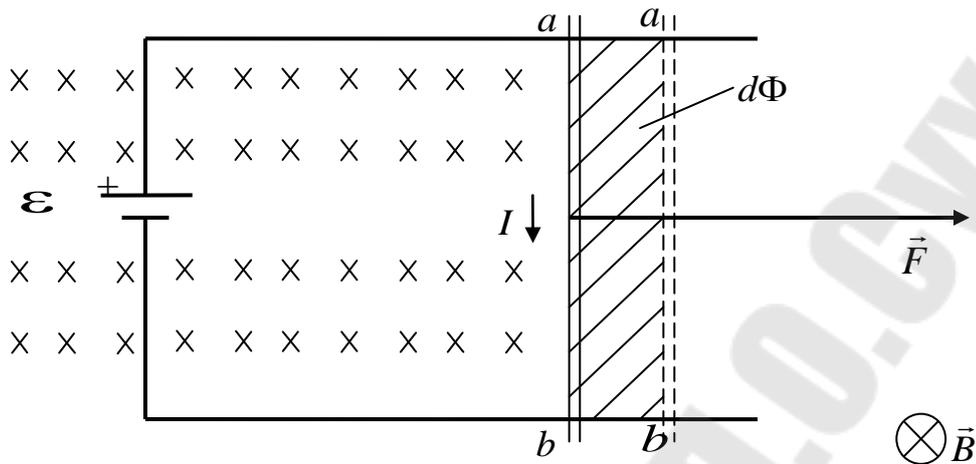


Рис. 10.3

За счёт работы источника тока контуром выделяется лэнц – джоулево тепло и осуществляется перемещение проводника  $ab$ . По закону сохранения энергии, работа источника за время  $dt$  равно количеству выделившегося за это время тепла и работе, затраченной на перемещение проводника  $ab$ :

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + I d\Phi, \quad (10.4)$$

где  $I$  – ток в контуре;

$R$  – сопротивление контура;

$d\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий поверхность, которую описывает проводник  $ab$  при своём движении, иначе – приращение которое получает магнитный поток, сцепленный с контуром.

Из (10.4) получаем:

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (10.5)$$

Таким образом, при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в последнем возникает дополнительная ЭДС, равная

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.6)$$

*Рассмотрим механизм возникновения ЭДС индукции.*

Наличие в контуре ЭДС означает, что на носители заряда в контуре действуют сторонние силы. В проводнике, движущемся в магнитном поле, это сила Лоренца. Пусть прямолинейный проводник движется со скоростью  $\vec{v}$  в направлении, перпендикулярном к проводнику и к вектору  $\vec{B}$ . Сила Лоренца разделяет разноимённые заря-

ды, смещая их к противоположным концам проводника. В проводнике возникает электростатическое поле. Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока сила Лоренца и сила электростатического поля не уравняются (рис 10.4).

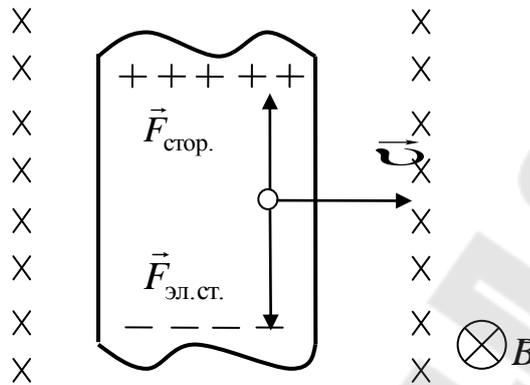


Рис. 10.4

В процессе разделения зарядов сторонние силы совершают работу. На первый взгляд может казаться, что сила Лоренца не может создавать ЭДС, поскольку она работы не совершает. Дело, однако, в том, что сила, создающая ЭДС, - не полная сила Лоренца, а только её составляющая. Действительно, полная скорость каждого носителя заряда  $\vec{v} + \vec{u}$ , где  $\vec{v}$  - скорость проводника, а  $\vec{u}$  - скорость носителей относительно проводника (рис. 10.5).

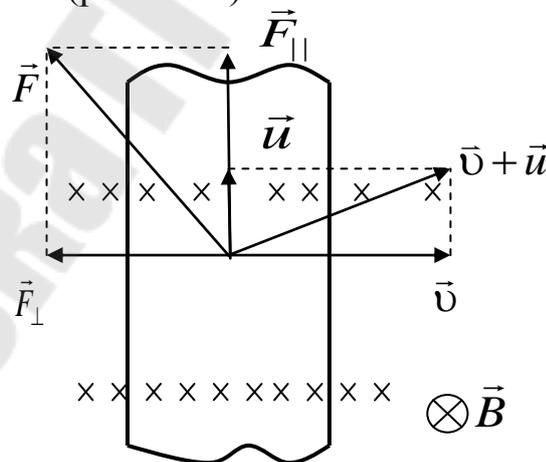


Рис. 10.5

Полная сила Лоренца  $\vec{F}$  перпендикулярна к результирующей скорости  $\vec{v} + \vec{u}$ . Разложим эту силу на две составляющие:  $\vec{F}_{\parallel} = q[\vec{v}\vec{B}]$ , параллельную проводнику и обусловленную скоростью  $\vec{v}$ , и  $\vec{F}_{\perp} = q[\vec{u}\vec{B}]$ , перпендикулярную к проводнику и обусловленную скоростью  $\vec{u}$ . Составляющая  $\vec{F}_{\parallel}$  играет роль сторонней силы, составля-

ющая  $\vec{F}_\perp$  тормозит движение проводника. Модули этих составляющих равны соответственно:

$$F_{\parallel} = |q|vB, \quad F_{\perp} = |q|vB.$$

Работа силы  $\vec{F}_{\parallel}$  за время  $dt$  равна:

$$dA' = F_{\parallel} v dt \cos 0^\circ = |q|vB v dt.$$

Работа силы  $\vec{F}_\perp$  за этот же промежуток:

$$dA'' = F_{\perp} v dt \cos 180^\circ = -|q|vB v dt.$$

Работа полной силы Лоренца равна сумме работ  $dA'$  и  $dA''$ :

$$dA = dA' + dA'' = |q|vB v dt - |q|vB v dt = 0.$$

Источником энергии, которая запасается в проводнике и за его пределами в виде энергии электростатического поля, а также энергии, за счёт которой совершается работа тока, является, в конечном счёте, сила, перемещающая проводник и совершающая работу против тормозящей силы  $\vec{F}_\perp$ . После установления в проводнике равновесия, движение зарядов вдоль проводника прекращается, следовательно,  $\vec{F}_\perp = 0$ , и полная сила Лоренца будет направлена вдоль проводника.

Роль сторонних сил в случае неподвижного проводника, находящегося в изменяющемся магнитном поле, играют силы вихревого электрического поля. Вихревое электрическое поле возникает в тех областях пространства, где имеется изменяющееся магнитное поле. Вихревое электрическое поле не потенциально и не консервативно, его линии замкнуты (рис. 10.6). Если проводник разомкнут, а вихревое поле с течением времени не изменяется, то силы этого поля уравновешиваются внутри проводника силами электростатического поля, возникающего в результате деления зарядов.

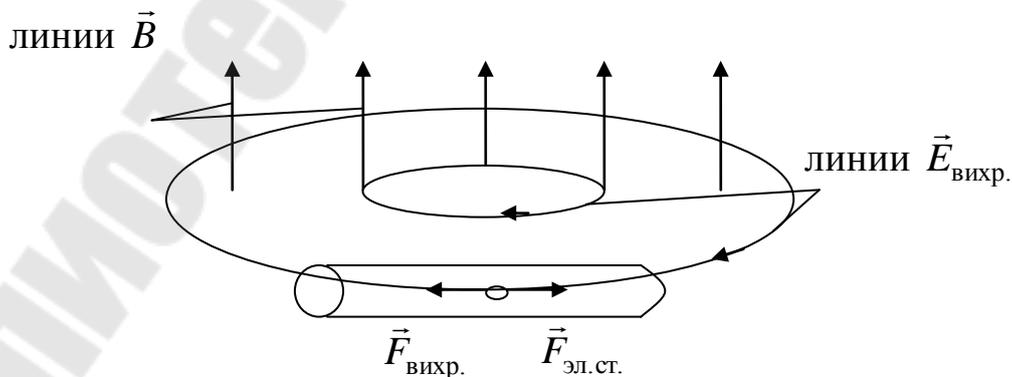


Рис. 10.6

Направление  $\vec{E}_{\text{вихр.}}$ . Соответствует возрастанию  $\vec{B}$ . Если же

проводник образует замкнутый контур, вихревое электрическое поле вызовет в нём ток. Этот ток будет существовать до тех пор, пока существует вихревое поле.

### 10.3. Расчёт ЭДС индукции

Чтобы найти ЭДС индукции, действующую в данной цепи, нужно найти магнитный поток  $\Phi$ , сцеплённый с цепью, и продифференцировать его по времени.

1. ЭДС индукции в прямолинейном проводнике, движущемся в однородном магнитном поле (рис. 10.7).

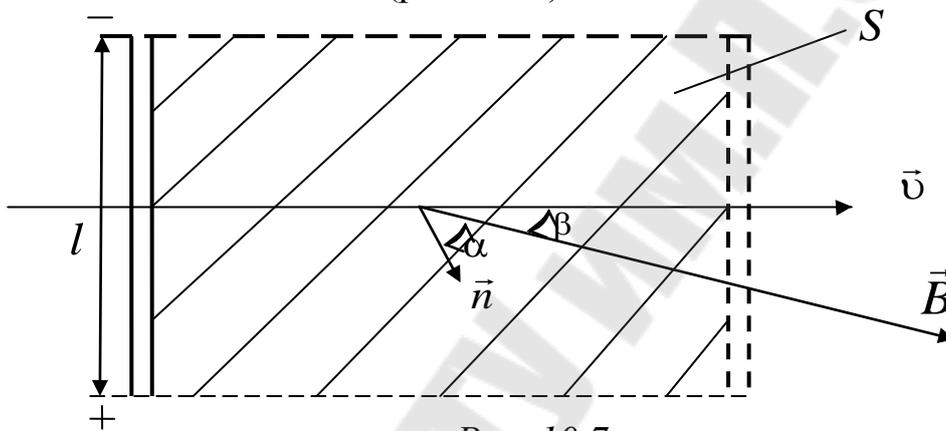


Рис. 10.7

Пусть  $\vec{B}$  – вектор индукции магнитного поля;  
 $\vec{v}$  – скорость движения проводника;  
 $l$  – длина проводника.

Магнитный поток, сцеплённый с движущимся линейным проводником, – это поток, пронизывающий площадь  $S$ , которую описывает проводник при своём движении. Нетрудно видеть, что при прямолинейном поступательном движении проводника:

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \sin \beta,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$ ;

$\beta$  – угол между  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ ;

$$(\alpha + \beta) = \pi/2;$$

$$S = lv t.$$

Следовательно:

$$\Phi = Blvt \sin \beta.$$

ЭДС индукции равна:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \sin \beta. \quad (10.7)$$

2. ЭДС индукции в витке, вращающемся в однородном магнитном поле (рис. 10.8).

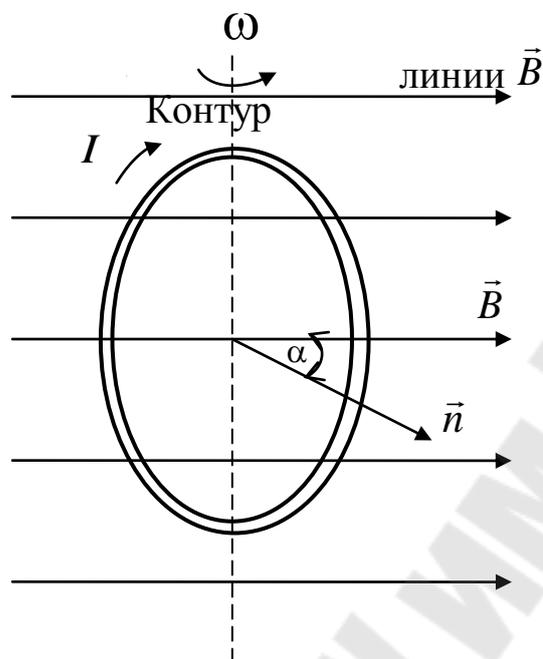


Рис. 10.8

Пусть  $B$  – модуль индукции магнитного поля,  $S$  – площадь витка,  $\omega$  – угловая скорость вращения витка.

Пусть виток вращается вокруг оси, перпендикулярной к  $\vec{B}$  и лежащей в плоскости витка. Мгновенное значение магнитного потока, сцепленного с витком, равно:

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Угол  $\alpha$  между нормалью к витку и направлением  $\vec{B}$  в момент времени  $t$  равен  $\alpha = \omega t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  в начальный момент времени. Следовательно  $\Phi = BS \cos(\omega t + \varphi_0)$  и ЭДС индукции равна:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[BS \cos(\omega t + \varphi_0)] = \varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (10.8)$$

где  $\varepsilon_m = BS\omega$  – амплитуда ЭДС.

Как видно из последнего выражения, ЭДС, возникающая в витке, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле, изменяется со временем по гармоническому закону.

ЭДС в витке не возникает, если виток движется в однородном

магнитном поле поступательно или если он вращается вокруг оси, параллельной  $\vec{B}$ , а также вокруг оси перпендикулярной к плоскости витка; в этих случаях  $\Phi = const$ .

Если в магнитном поле вращается катушка, состоящая из  $N$  витков, то действующая в ней ЭДС равна сумме ЭДС, возникающих в каждом из витков:

$$\varepsilon_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt},$$

или  $\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i$ . (10.9)

Сумма магнитных потоков, сцеплёнными с определёнными витками данной электрической цепи, называется магнитным потокосцеплением, или полным магнитным потоком:

$$\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i.$$

Если все  $N$  витков пронизываются одним и тем же током  $\Phi$ , то  $\psi = N\Phi$ . (10.10)

ЭДС в катушке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле вокруг оси, не параллельной  $\vec{B}$  и осевой линии катушки, равна:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt},$$

или  $\varepsilon_i = N\varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ ,  
 где  $N$  – число витков катушки;  
 $\varepsilon_m$  – амплитуда ЭДС в одном витке.

#### 10.4. Взаимная индукция

Рассмотрим две электрические цепи 1 и 2, расположенные на некотором расстоянии друг от друга (рис. 10.9). При наличии тока цепи в 2 ( $i_2$ ) и при соответствующем взаимном расположении цепей, цепь 1 будет пронизываться некоторым магнитным потоком  $\Phi_{12}$ , называемым потокосцеплением взаимной индукции. Этот поток при прочих равных условиях тем больше, чем больше индукция  $B_2$ , создаваемая током  $i_2$  в том месте, где находится контур 1. В вакууме, а так же в неферромагнитной среде  $B_2 \sim i_2$ .

Следовательно,  $\Phi_{12} = L_{12}i_2$ . (10.11)

Аналогично поток, создаваемый током  $i_1$  и сцепленный с контуром 2, пропорционален  $i_1$ :

$\Phi_{21} = L_{21}i_1$ . (10.12)

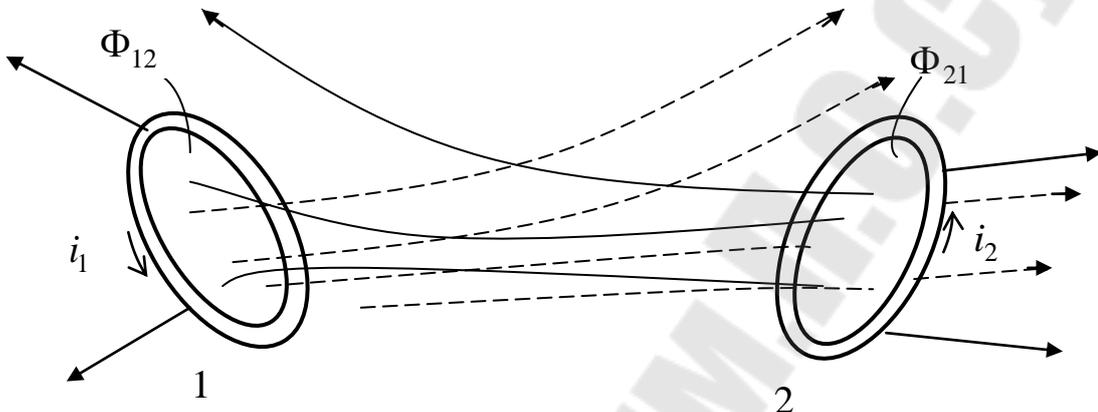


Рис. 10.9

Таким образом, потокосцепление взаимной индукции – это есть потокосцепление одной электрической цепи, обусловленное током в другой цепи. Если потоки  $\Phi_{21}$  и  $\Phi_{12}$  существуют, то говорят, что между цепями существует магнитная связь.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью цепей.

Взаимная индуктивность – это скалярная физическая величина, характеризующая свойство двух (или более) цепей образовывать общие потокосцепления, когда по одной из них течет ток.

Взаимная индуктивность  $L_{21}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с цепью 2 при единичном токе в цепи 1. Взаимная индуктивность  $L_{12}$  численно равна магнитному потоку, сцепленному с цепью 1 при единичном токе в цепи 2. Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и относительного расположения цепей и магнитной проницаемости среды.

Можно показать, что  $L_{12} = L_{21}$ .

Найдём работу, совершаемую магнитными силами при сближении цепей 1 и 2 из бесконечности в рассматриваемое положение. Если считать, что перемещается первая цепь в магнитном поле второй цепи, то совершаемая при этом работа равна:

$$A' = i_1(\Phi_{12} - 0) = i_1 L_{12} i_2.$$

Если считать, что перемещается вторая цепь в магнитном поле первой, то:  $A'' = i_2(\Phi_{21} - 0) = i_2 L_{21} i_1$ . Но  $A' = A''$  (это следует из относительности движения). Следовательно:  $i_1 L_{12} i_2 = i_2 L_{21} i_1$ . Таким образом:  $L_{12} = L_{21}$ .

Явление взаимной индукции заключается в возникновении ЭДС в электрической цепи при изменении потокосцепления взаимной индукции этой цепи. Пусть в цепи 2 (смотрим предыдущий рис. 10.9), течёт ток. При наличии магнитной связи между цепью 1 и 2, с цепью 1 связан магнитный поток взаимной индукции  $\Phi_{12} = L_{12} i_2$ . При всяком изменении этого потока в цепи 1 возникает ЭДС индукции, равная:

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt},$$

$$\text{или } \varepsilon_{i1} = -\frac{d}{dt}(L_{12} i_2). \quad (10.13)$$

Изменение  $\Phi_{12}$  может быть обусловлено изменением  $i_2$  (при  $L_{12} = \text{const}$ ), изменением взаимной индуктивности контуров  $L_{12}$  (при  $i_2 = \text{const}$ ) и, наконец, одновременным изменением  $i_2$  и  $L_{12}$ .

В общем случае ЭДС взаимной индукции в цепи 1 равна:

$$\varepsilon_{i1} = -(L_{12} \frac{\partial i_2}{\partial t} + i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial t}). \quad (10.14)$$

При наличии ферромагнитной среды  $L_{12} = L_{12}(i_2)$  и, следовательно:

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial t} = \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial t}. \quad (10.15)$$

Тогда:

$$\varepsilon_{i1} = -(L_{12} + i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2}) \frac{\partial i_2}{\partial t}.$$

Аналогично при наличии тока в цепи 1 в цепи 2 возникает ЭДС, если этот ток изменяется или изменяется взаимная индуктивность:

$$\varepsilon_{i2} = -(L_{21} \frac{\partial i_1}{\partial t} + i_1 \frac{\partial L_{21}}{\partial t}). \quad (10.16)$$

## 10.5. Самоиндукция

Ток, текущий в цепи создаёт магнитное поле, полный магнитный поток которого через поверхность, опирающуюся на контур це-

пи, в неферромагнитной среде, пропорционален этому току (это следует из закона Био – Савара – Лапласа и из определения магнитного потока):

$$\Psi = Li, \quad (10.17)$$

где  $L$  – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью цепи.

Поток (10.17) называется потокосцеплением самоиндукции.

Потокосцепление самоиндукции – потокосцепление электрической цепи, обусловленное электрическим током в этой цепи.

Индуктивность цепи – скалярная величина, характеризующая свойства цепи создавать потокосцепление самоиндукции и численно равная потокосцеплению самоиндукции, создаваемому единичным током, если

$$|i| = 1, \text{ то } |L| = |\Psi|.$$

Индуктивность зависит от формы размеров цепи, магнитной проницаемости среды и не зависит (в отсутствие ферромагнетиков) от тока в цепи.

Одна из возможных (но не единственных) схем расчёта индуктивности такова. По контуру мысленно пропускают ток  $i$ . Зная форму и размеры контура, вычисляют полный магнитный поток  $\Psi$ , сцепленный с контуром. Сопоставляя  $\Psi$  с (10.18) ( $\Psi = Li$ ) находят  $L$ .

*Рассмотрим пример вычисления индуктивности соленоида.*

При пропускании по соленоиду тока  $i$  в нем создаётся однородное магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 \mu n i$ : Магнитный поток, пронизывающий один виток равен  $\Phi = BS$ , а потокосцепление самоиндукции соленоида равно:

$$\psi = \Phi N = BSnl = \mu_0 \mu n^2 V i, \quad (10.18)$$

где  $l$  – длина соленоида;

$S$  – площадь поперечного сечения;

$n$  – число витков на единицу длины;

$V$  – объём соленоида.

Сопоставляя (10.17) с (10.18) получаем:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (10.19)$$

Явление самоиндукции заключается в возникновении дополнительной ЭДС (ЭДС самоиндукции) и обусловленного ею тока (тока самоиндукции) в цепи при изменении потокосцепления самоиндукции.

ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения потокосцеп-

ления самоиндукции:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\psi}{dt}, \text{ или } \varepsilon_s = -\frac{d}{dt}(Li). \quad (10.20)$$

При  $L = \text{const}$  (контур цепи жёсткий, отсутствуют ферромагнетики) и  $i = i(t)$ :

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (10.21)$$

При  $i = \text{const}$  и  $L = L(t)$ :

$$\varepsilon_s = -i \frac{dL}{dt}. \quad (10.22)$$

Если одновременно изменяются и  $i$  и  $L$ , то ЭДС самоиндукции равна:

$$\varepsilon_s = -\left(L \frac{\partial i}{\partial t} + i \frac{\partial L}{\partial t}\right). \quad (10.23)$$

Знак “-” указывает на то, что при увеличении тока или индуктивности цепи полярности ЭДС самоиндукции и ЭДС источника, создающего ток, противоположны; при уменьшении тока или индуктивности – одинаковы.

Соотношение (10.21) позволяет дать определение индуктивности. Если

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = 1, \text{ то } |L| = |\varepsilon_s|.$$

Индуктивность цепи численно равна абсолютной величине ЭДС самоиндукции, возникающей в цепи при единичной скорости измерения тока.

Приведённое определение справедливо в отсутствие ферромагнетиков, когда  $L$  не зависит от тока.

Самоиндукция в электромагнетизме играет такую же роль, как и инерция в механике. Вследствие самоиндукции установление и исчезновение тока в цепи, а также любое его изменение происходит не мгновенно, а постепенно.

## 10.6. Установление и исчезновение тока в цепи с индуктивностью

На рисунке 10.10 дана схема опыта по наблюдению токов самоиндукции. При замкнутом ключе ток от источника  $\varepsilon$  проходит через катушку и гальванометр в направлениях, указанных на рисунке

сплошными стрелками. После отключения источника в катушке возникает ток самоиндукции  $i_s$ , направленный согласно закону Ленца, в ту же сторону, что и ток от источника  $\varepsilon$ .

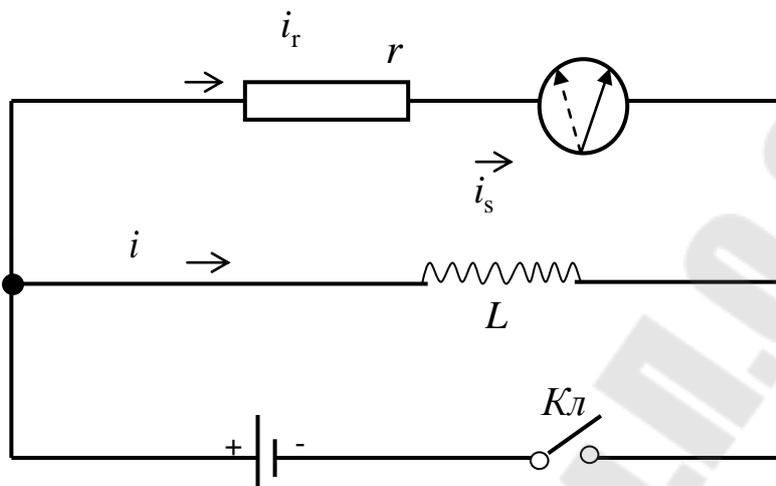


Рис. 10.10

При замкнутом ключе ток от источника  $\varepsilon$  проходит через катушку и гальванометр в направлениях, указанных на рисунке сплошными стрелками. После отключения источника в катушке возникает ток самоиндукции  $i_s$ , направленный согласно закону Ленца, в ту же сторону, что и ток от источника  $\varepsilon$ . Этот ток целиком проходит через гальванометр, где его направление противоположно первоначальному току  $i_r$  (ответвляться в источник ток самоиндукции не может, так как переключатель  $Кл$  разомкнут). В результате стрелка гальванометра отклоняется в противоположную сторону. Ток самоиндукции при замыкании цепи заметен гораздо хуже, так как он делится между источником тока и гальванометром, причем направление его в гальванометре совпадает с направлением тока от источника.

1. Найдём закон исчезновения тока в электрической цепи, обладающей индуктивностью.

Пусть в электрическую цепь включён соленоид  $L$  с активным сопротивлением  $R$ , источник тока  $\varepsilon$  и переключатель  $Кл$  (рис. 10.11). Если переключатель поставить в положение 1, то в цепи установится ток  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ . Перебросим переключатель в положение 2, отключив тем самым источник тока  $\varepsilon$ . Ток в цепи начнёт исчезать. Возникнет ЭДС самоиндукции.

По второму правилу Кирхгофа:

$$iR = \varepsilon_s,$$

где  $i$  – мгновенное значение силы тока;

$\varepsilon_s$  – мгновенное значение ЭДС самоиндукции (полагаем, что  $L = const$ ). Следовательно:

$$iR = -\left(L \frac{di}{dt}\right).$$

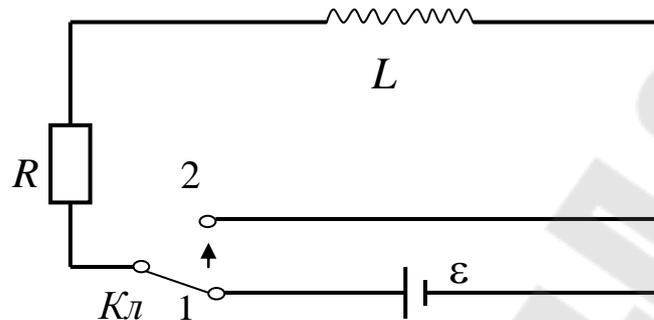


Рис. 10.11

Разделив переменные  $i$  и  $t$ , получим уравнение, которое легко интегрируется:

$$\frac{di}{i} = -\left(\frac{R}{L}\right)dt. \quad (10.24)$$

Проинтегрировав последнее выражение получим:

$$\ln(i) = -\left(\frac{R}{L}\right)t + \ln(c),$$

или после потенцирования:

$$i = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Константу  $c$  определим из начальных условий. При  $t = 0$ ,  $i = I_0$ , следовательно,  $c = I_0$  и

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (10.25)$$

Таким образом, ток в цепи исчезает не мгновенно, а постепенно уменьшаясь со временем по экспоненциальному закону. Быстрота убывания тока определяется величиной:

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (10.26)$$

имеющей размерность времени и называемой постоянной времени. Учитывая (10.26) формуле (10.25) можно придать вид:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (10.27)$$

где  $\tau$  – есть время, в течение которого ток уменьшается в  $e$  раз. Чем больше  $\tau$ , тем медленнее уменьшается ток. График изменения тока изображён на рисунке 10.12,а.

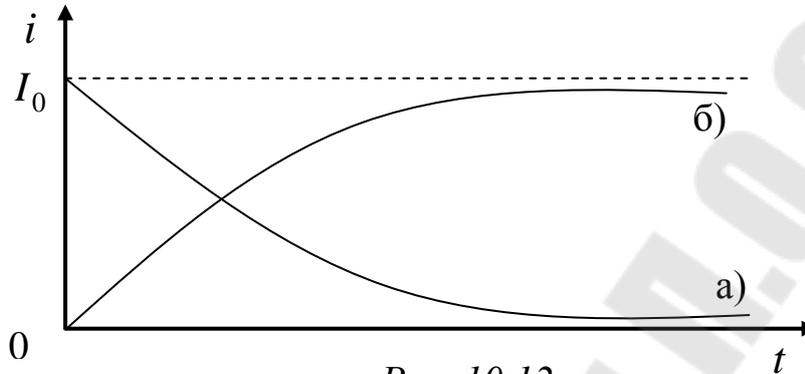


Рис. 10.12

2. Найдём закон установления тока в электрической цепи, обладающей индуктивностью (рис. 10.11). Перебросим переключатель из положения 2 в положение 1. Начнётся процесс установления тока, при котором в цепи, кроме ЭДС источника ( $\varepsilon$ ), будет действовать ЭДС самоиндукции ( $\varepsilon_s$ ). По второму правилу Кирхгофа:

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L \left( \frac{di}{dt} \right).$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$\left( \frac{di}{iR - \varepsilon} \right) = - \frac{dt}{L}. \quad (10.28)$$

Умножим обе части этого выражения на  $R$  и проинтегрируем:

$$\ln(iR - \varepsilon) = - \frac{R}{L} t + \ln(c), \text{ или } iR - \varepsilon = ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Константу  $c$  найдём из начальных условий. В момент времени  $t = 0$ ,  $i = 0$ , и следовательно,  $c = -\varepsilon$ .

Учитывая константу получим:

$$iR - \varepsilon = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Откуда:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \quad (10.29)$$

Таким образом:

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (10.30)$$

где  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – установившееся значение силы тока.

Как видно, нарастание тока в цепи происходит так же, как и исчезновение, постепенно (рис. 10.12,б).

Полученные выводы справедливы при  $L = \text{const}$ . Если  $L \neq \text{const}$ , то ЭДС самоиндукции может оказаться больше ЭДС источника тока, и ток может значительно превзойти установившийся.

### 10.7. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображённую на данном рисунке 10.11.

Установим переключатель в положение 1, в цепи установится ток:  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ . Этот ток создаст в окружающем пространстве магнитное

поле. Если переключатель поставить в положение 2, то ток, а вместе с ним и магнитное поле, начнут исчезать. Найдём работу тока за время исчезновения. Элементарная работа за время  $dt$  равна:

$$dA = \varepsilon_s i dt, \quad (10.31)$$

где  $\varepsilon_s$  и  $i$  – ЭДС самоиндукции и сила тока в произвольный момент времени  $t$ .

Если  $L = \text{const}$ , то  $\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}$ . Следовательно,  $dA = -L i di$ . (10.32)

Проинтегрировав это выражение по  $i$  от  $I_0$  до 0, мы получим полную работу, совершенную током за время, в течение которого исчезает магнитное поле:

$$A = - \int_{I_0}^0 L i di, \text{ или } A = \frac{L(I_0)^2}{2}. \quad (10.33)$$

За счёт работы (10.33) происходит увеличение внутренней энергии проводников, из которых образована цепь. Из законов термодинамики и опытов с электромагнитными волнами следует, что носителем энергии, за счёт которой совершается работа (10.33), является магнитное поле. Таким образом, энергия магнитного поля  $W_B$ , созданного током  $i$ , текущим в цепи индуктивностью  $L$ :

$$W_B = \frac{Li^2}{2}. \quad (10.34)$$

Энергию (10.34) можно выразить через характеристики магнитного поля. Пусть цепь, изображённая на последнем рисунке, содержит длинный соленоид с сердечником из однородного магнетика. Индуктивность цепи примем равной индуктивности соленоида (индуктивность всех других элементов цепи мала по сравнению с индуктивностью соленоида). Индуктивность длинного соленоида равна  $L = \mu_0 \mu n^2 V$ . Магнитное поле соленоида сосредоточено внутри соленоида. Индукция этого поля равна:

$$B = \mu_0 \mu n i, \text{ откуда } i = \frac{B}{\mu_0 \mu n}.$$

Подставив выражение для  $L$  и  $i$  в (10.34), получим:

$$W_B = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V. \quad (10.35)$$

Магнитное поле длинного соленоида однородно. Следовательно, плотность энергии этого поля  $\omega$  (энергия единицы объёма) равна:

$$\omega = \frac{W}{V}, \text{ или } \omega = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (10.36)$$

Формула (10.36) справедлива для любого поля – и однородного, и неоднородного. Если известна зависимость  $\omega$  от координат, то для нахождения энергии магнитного поля, распределённого в объёме  $V$ , нужно вычислить интеграл:

$$W = \int \omega dV, \text{ или } W = \int \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV. \quad (10.37)$$

## ГЛАВА 11. Переменный ток

### 11.1. Переменный ток. Генератор переменного тока

Электрический ток, изменяющийся со временем, называют переменным. Переменный электрический ток – это ток, изменяющийся со временем по гармоническому закону. Для получения переменного тока применяются генераторы переменного тока (индукционные генераторы). В основе принципа действия генератора лежит явление электромагнитной индукции. Простейшим генератором переменного тока является проволочная рамка, вращающаяся равномерно с угло-

вой скоростью  $\omega = \text{const}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис. 11.1).

Поток магнитной индукции, пронизывающий рамку площадью  $S$ , равен

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

При равномерном вращении рамки угол поворота  $\alpha$  изменяется по закону  $\alpha = \omega t = 2\pi \nu t$ , где  $\nu$  - частота вращения. Тогда

$$\Phi = BS \cos \omega t.$$

По закону электромагнитной индукции ЭДС, наводимая в рамке при её вращении,

$$\varepsilon_i = -\Phi' = \omega BS \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (11.1)$$

ЭДС индукции максимальна при  $\sin \omega t = 1$ , т.е.  $\alpha = \omega t = \pi/2$ . Величина  $\varepsilon_m = \omega BS$  называется амплитудным значением вынуждающей ЭДС.

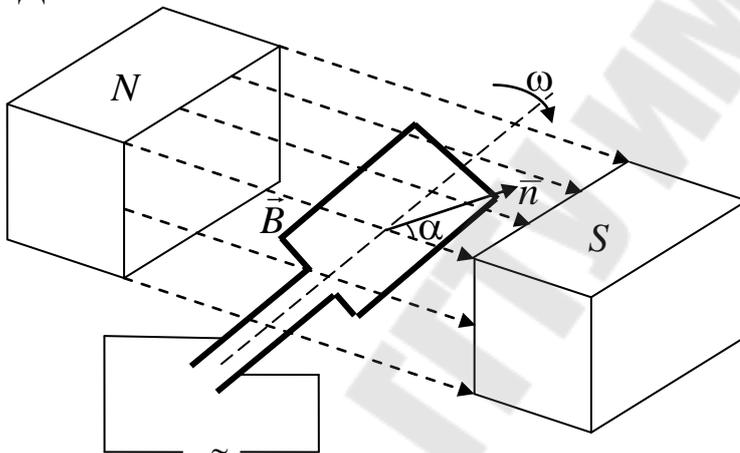


Рис. 11.1

Если такой контур замкнуть на внешнюю цепь, то по цепи пойдёт ток, сила и направление которого изменяются. ЭДС, наводимая в рамке определяет переменное напряжение во внешней цепи ( $\varepsilon_i = U$ ).

Мгновенное значение переменного тока, текущего по активному сопротивлению  $R$  (рис. 11.2,а) определяется по закону Ома:

$$i = \frac{U_R}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = i_m \sin \omega t, \quad (11.2)$$

где  $U_R = Ri = Ri_m \sin \omega t$ ;

$$U_m = Ri_m \text{ и}$$

$i_m$  - амплитудное значение напряжения и силы тока.

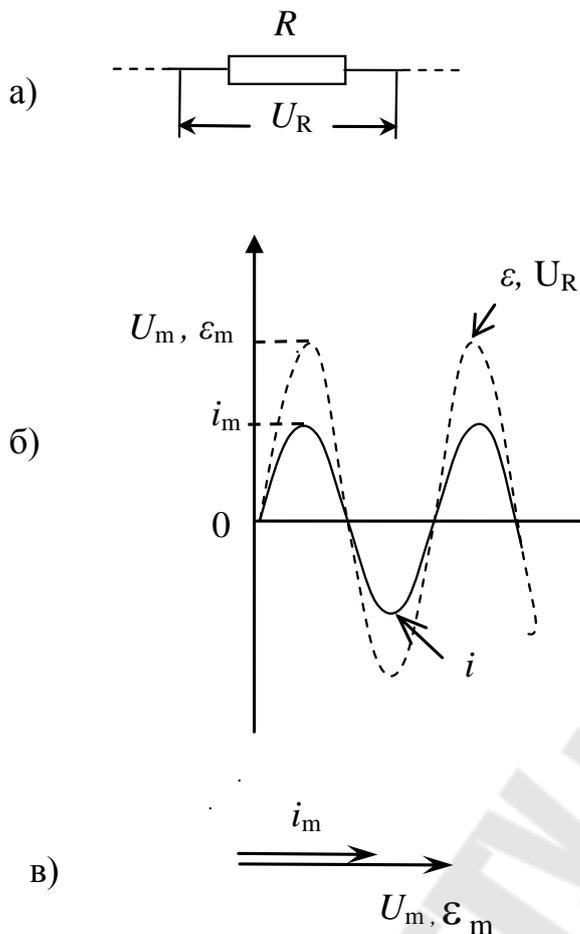


Рис. 11.2

Изменения напряжения и тока, текущего по сопротивлению  $R$  происходят в одной фазе (рис. 11.2,б).

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями можно воспользоваться методом векторных диаграмм, изучаемых в курсе механики. В нашем случае колебания внешней ЭДС, силы тока и напряжения изобразятся вектор – амплитудами длины  $\varepsilon_m, i_m$  и  $U_m$ , имеющими одинаковое направление  $\varphi = 0$  (рис.11.2,в).

### 11.2. Ёмкость в цепи переменного тока

Пусть в цепи переменного тока включён конденсатор ёмкостью  $C$ . Напряжение и заряд на обкладках конденсатора изменяются по закону

$$U = U_m \sin \omega t, \quad Q = CU = CU_m \sin \omega t, \quad (11.3)$$

а сила тока в цепи:

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\omega U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = i_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (11.4)$$

где  $i_m = C\omega U_m$ .

Из сравнения выражений (11.3) и (11.4) следует: переменный ток в цепи с ёмкостью опережает напряжение по фазе на  $\pi/2$  (рис. 11.3).

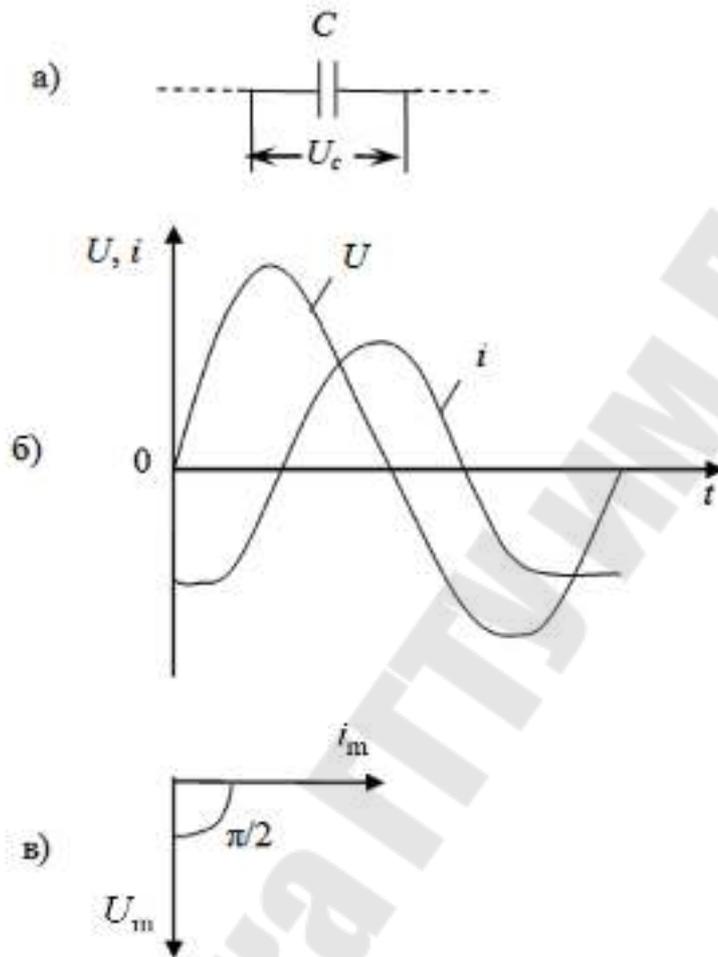


Рис. 11.3

Это происходит потому, что при периодической зарядке конденсатора в цепи течёт переменный ток, достигающий максимального значения в те моменты времени, когда напряжение равно нулю. Для такой цепи выполняется закон Ома не для мгновенных, а для амплитудных значений. Если цепь, в которую включён конденсатор, обладает сопротивлением  $X_C$ , называемым ёмкостным, то закон Ома имеет вид

$$i = \frac{U_C}{X_C} = \frac{U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}{X_C}. \quad (11.5)$$

Из сравнения формул (11.4) и (11.5) следует: ёмкостное сопротивление обратно пропорционально ёмкости и круговой частоте переменного тока:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (11.6)$$

### 11.3. Индуктивность в цепи переменного тока

Пусть по цепи, содержащей только индуктивность  $L$ , течёт переменный ток. Этот ток возбуждает в катушке ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (11.7)$$

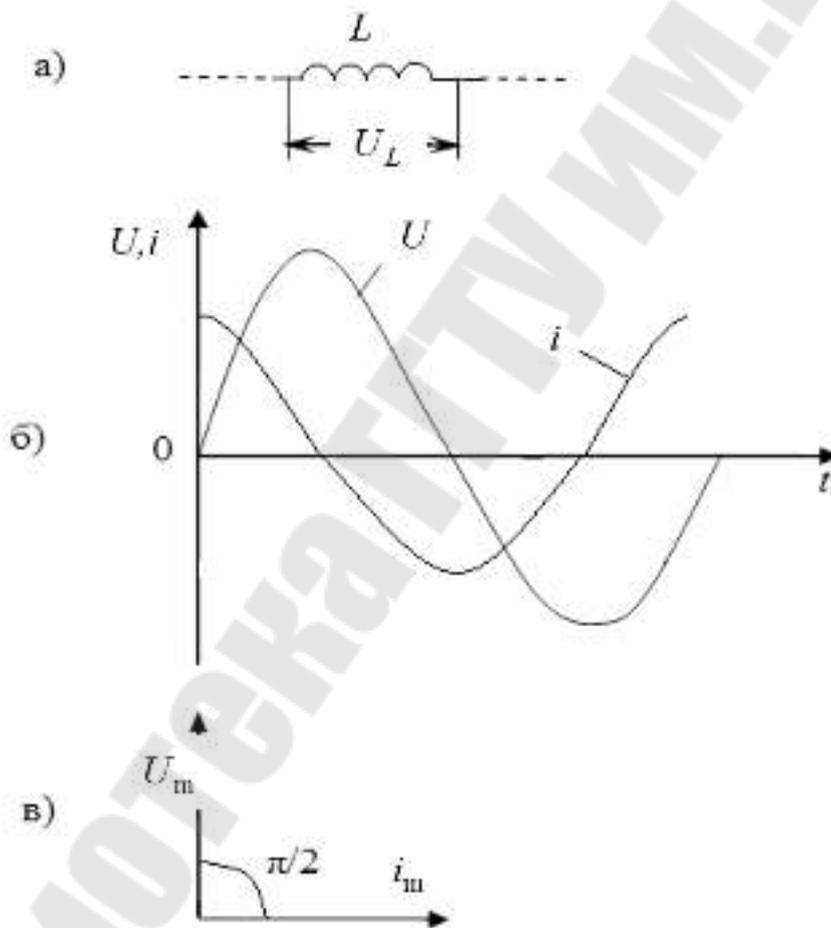


Рис. 11.4

На основании ранее полученных соотношений запишем:

$$\frac{di}{dt} = \omega i_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставим это выражение в (11.7), обозначив  $U_m = \omega Li_m$  :

$$\varepsilon = -\omega Li_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (11.8)$$

Напряжение на индуктивности уравнивается ЭДС самоиндукции, т.е.  $U_L = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ .

Следовательно, переменный ток в цепи с индуктивностью отстаёт по фазе от напряжения на  $\pi/2$ . Это показано на векторной диаграмме (рис. 11.4,в).

Это происходит потому, что при увеличении силы тока ЭДС самоиндукции вызывает индукционный ток, препятствующий увеличению основного тока, вследствие этого сила тока достигает максимального значения позже, чем напряжение.

Записывая закон Ома для амплитудных значений в виде

$$i_m = \frac{U_m}{X_L}, \quad (11.9)$$

где  $X_L$  – индуктивное сопротивление, и сравнивая формулы (11.8) и (11.9), можно сделать вывод: индуктивное сопротивление пропорционально индуктивности и циклической частоте:

$$X_L = \omega L. \quad (11.10)$$

Индуктивное  $X_L$  и ёмкостное  $X_C$  сопротивления в отличие от активного сопротивления  $R$  называют реактивными.

#### 11.4. Цепь переменного тока, содержащая ёмкость, индуктивность и активное сопротивление

Если электрическая цепь состоит из последовательного соединения активного сопротивления  $R$ , ёмкости  $C$  и индуктивности  $L$  (рис. 11.5,а), то полное напряжение в этой цепи можно определить из векторной диаграммы. Складывая векторы амплитуд напряжений, получаем амплитуду результирующего колебания. Расположим ось токов горизонтально (рис. 11.5,б). Так как ток и напряжение на активном сопротивлении  $R$  совпадают по фазе, то на диаграмме вектор  $U_R$  (амплитудное значение напряжения на активном сопротивлении) расположен горизонтально. Напряжение на ёмкости отстаёт от силы тока на  $\pi/2$ , поэтому вектор  $U_C$  повернут относительно тока на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ ,

поэтому вектор  $U_L$  повернут относительно тока на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Как видно из рис. 11.5 векторы  $U_L$  и  $U_C$  направлены в противоположные стороны, поэтому при их сложении получаем вектор, модуль которого равен  $|U_L - U_C|$  и направленный в сторону большего вектора. Падения напряжений  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению  $U$ . Поэтому, сложив векторы, изображающие  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$ , мы получим вектор, изображающий  $U$  (его длина равна  $U_m$ ). Этот вектор образует с осью токов угол  $\varphi$ , тангенс которого, как видно из рисунка 11.5, равен:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (11.11)$$

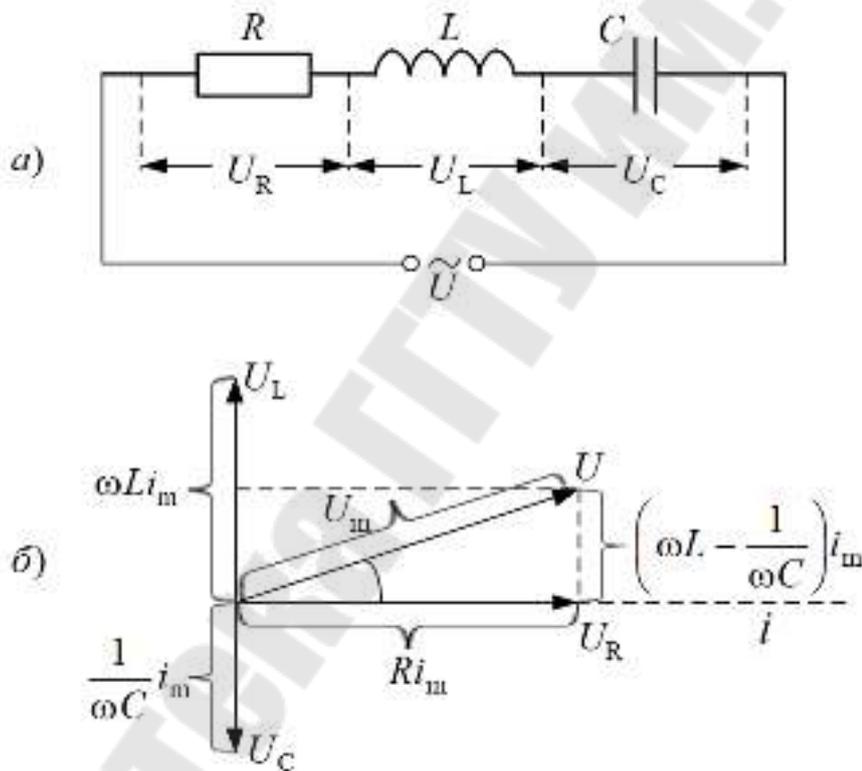


Рис. 11.5

Угол  $\varphi$  дает разность фаз между напряжением  $U$  и силой тока  $i$ . Из прямоугольного треугольника, гипотенуза которого  $U_m$ , следует, что:

$$(Ri_m)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) i_m \right]^2 = U_m^2,$$

откуда:  $i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot (11.12)$

Итак, если напряжение на зажимах цепи изменяется по закону  $U = U_m \cos \omega t$ , то в цепи течёт ток  $i = i_m \cos(\omega t - \varphi)$ . (11.13)

Величина  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  (11.14)

называется полным сопротивлением цепи. Величина

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (11.15)$$

называется реактивным сопротивлением. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot (11.16)$$

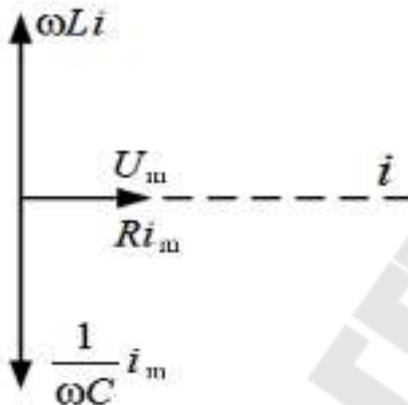


Рис. 11.6

Ток отстаёт от напряжения ( $\varphi > 0$ ) или опережает его ( $\varphi < 0$ ) в зависимости от соотношения между  $X_L$  и  $X_C$ . При  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  ток от-

стаёт от напряжения, при  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  ток опережает напряжение. Если

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$  изменения тока и напряжения происходят синфазно ( $\varphi = 0$ ).

При удовлетворяющей этому условию частоте  $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (11.17)

полное сопротивление цепи  $Z$  имеет наименьшее, возможное при данных  $R$ ,  $L$  и  $C$ , значение, равное  $R$ . Соответственно сила тока достигает наибольшего (возможного при данном  $U_m$ ) значения. При

этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи. Падения напряжения на ёмкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется резонансом напряжений, а частота (11.17) – резонансной частотой. Векторная диаграмма для случая резонанса напряжений показана на рисунке 11.6. Подставив в выражения для амплитуды напряжения на индуктивности

( $U_L = \omega LI_m$ ) и ёмкости  $U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$  значение резонансной частоты

$$(11.17), \text{ получим: } U_{L\text{пре}} = U_{C\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m.$$

Если  $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$ , напряжение на индуктивности и на ёмкости превышает напряжение, приложенное к цепи.

Явление резонанса напряжений характерно тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным (ток и напряжение изменяются синфазно) и имеет наименьшую возможную при данных параметрах цепи величину. Если ёмкость в цепи отсутствует, приложенное напряжение равно сумме падений напряжения на сопротивлении и индуктивности:  $U = U_R + U_L$ . Соответствующая векторная диаграмма изображена на рисунке 11.7. В этом случае, как видно из рисунка,

$$\text{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad i_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

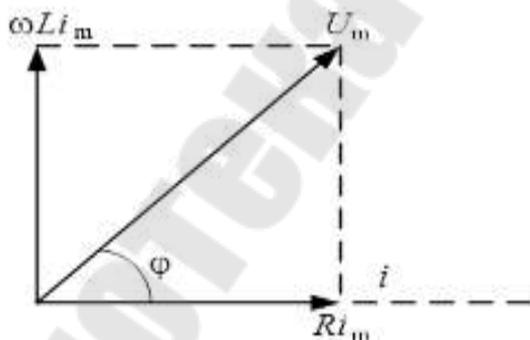


Рис. 11.7

Формулы (11.11) и (11.12) совпадают с полученными нами выражениями, если положить в них  $\frac{1}{\omega C} = 0$ , т. е.  $C = \infty$ . Таким образом, отсутствие ёмкости в цепи означает  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ , как казалось бы, на первый взгляд. Это можно пояснить следующим образом. По-

степенный переход от цепи, содержащей ёмкость, к цепи без ёмкости можно осуществить, сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения. При этом зазор между обкладками  $d$  стремится к нулю, а величина ёмкости стремится к бесконечности.

### 11.5. Работа и мощность переменного тока

Мощность постоянного электрического тока определяется формулой:

$$P = IU = I^2 R, \quad (11.18)$$

где  $U$  – напряжение между концами участка цепи,

$I$  – сила тока на этом участке,

$R$  – активное сопротивление.

В случае переменного тока дело обстоит сложнее, так как сила переменного тока зависит не только от активного сопротивления цепи, но и от индуктивного и ёмкостного сопротивлений.

Если в цепи имеется конденсатор, то процесс прохождения через него тока представляет многократную перезарядку конденсатора. В этом случае, если пренебречь очень малыми потерями на нагревание диэлектрика в конденсаторе, прохождение тока через него не связано с выделением в нём энергии. В течение той четверти периода, когда происходит зарядка конденсатора, энергия запасается в нём, а когда конденсатор разряжается, он отдаёт в цепь запасённую энергию.

Аналогично дело обстоит и при наличии в цепи катушки индуктивности. Когда сила тока нарастает, в катушке создаётся магнитное поле, которое обладает запасом энергии. При уменьшении силы тока магнитное поле исчезает и запасённая в нём энергия возвращается к источнику тока. Следовательно, при наличии в цепи индуктивного и ёмкостного сопротивлений происходит обмен энергией между конденсатором или катушкой индуктивности и источником тока, в цепи расходуется мощность,  $P = iUk$ , где  $k = \cos \varphi$  – коэффициент мощности цепи, а  $\varphi$  – сдвиг фазы между силой тока в цепи и напряжением между концами рассматриваемого участка. Таким образом,

$$P = iU \cos \varphi. \quad (11.19)$$

Наличие дополнительного множителя  $\cos \varphi$  показывает, что выделяемая в цепи переменного тока мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между напряжением и силой тока.

Если  $\varphi = 90^\circ$ , то  $\cos \varphi = 0$  и мощность равна нулю, как бы небыли велики напряжение и сила тока. В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от источника в цепь, равна энергии, передаваемой из цепи в источник в течение следующей четверти периода, т. е. вся энергия, колеблется между источником и цепью.

В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно больше. При малом  $\cos \varphi$  для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы. При этом возрастают потери в подводящих проводах, и приходится увеличивать их сечение.

Среднюю мощность переменного тока определим следующим образом. Так как в течение малого промежутка времени переменный ток можно рассматривать как постоянный, то в цепи с активным сопротивлением мгновенная мощность переменного тока  $P_t = iU = i_m U_m \sin^2 \omega t$ , где  $i$  и  $U$  – мгновенные, а  $i_m$  и  $U_m$  – амплитудные значения силы тока и напряжения.

Учитывая, что  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ , имеем

$P_t = \frac{1}{2} i_m U_m (1 - \cos 2\omega t)$ . Работа  $dA = P_t dt$  за малый промежуток времени, а за время полного периода  $T$  колебаний

$$A = \frac{1}{2} i_m U_m \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt.$$

Учитывая, что  $\omega = 2\pi / T$ , имеем:

$$A = \frac{1}{2} i_m U_m \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right) dt = \frac{i_m U_m T}{2}.$$

Обозначим:  $A_T = (1/2) i_m U_m T$ , тогда средняя мощность переменного тока

$$P_{\text{ср}} = \frac{A_T}{T} = \frac{i_m U_m}{2}. \quad (11.20)$$

Рассмотрим понятие действующего значения силы тока, напряжения и ЭДС. Назовём действующей (эффективной) силой тока  $I_{\text{эф}}$  и действующим (эффективным) напряжением  $U_{\text{эф}}$  такие силу и напряжение постоянного тока, при прохождении которого по той же цепи за то же время выделяется такое же количество теплоты, что и при данном переменном токе. При этом мощность определится, как

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} = RI_{\text{эф}}^2 = \frac{U_{\text{эф}}^2}{R}. \quad (11.21)$$

Сравнив эту формулу с выражениями для мощности переменного тока, получим

$$I_{\text{эф}} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}; \quad U_{\text{эф}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (11.22)$$

Аналогично, действующее значение ЭДС переменного тока в цепи меньше его амплитудного значения:

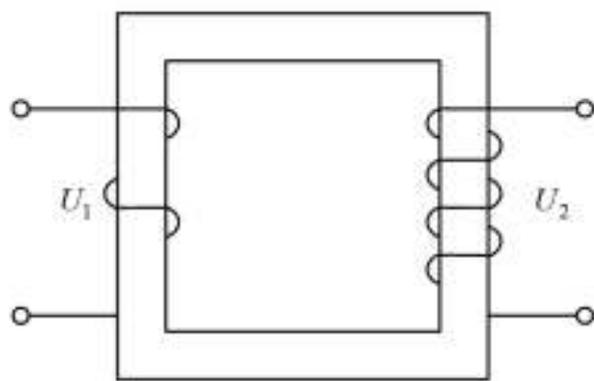
$$\varepsilon_{\text{эф}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}}. \quad (11.23)$$

Зная эффективные значения, среднюю мощность переменного тока, можно вычислить по тем же формулам, что и мощность постоянного тока. Все вольтметры, предназначенные для переменного тока, показывают эффективные значения ЭДС и напряжения.

## 11.6. Трансформаторы переменного тока

Трансформатор представляет собой выполненный из мягкого ферромагнетика сердечник замкнутой формы, на котором находятся две обмотки: первичная и вторичная (на рис. 11.8, а обмотки имеют различное число витков). Концы первичной обмотки, называемые входом трансформатора, подключаются к сети питающего переменного тока. Концы вторичной обмотки, называемые выходом трансформатора, подключаются к потребителю. На рис. 11.8,б дано условное обозначение трансформаторов на радиосхемах.

В основе работы трансформатора лежит явление электромагнитной индукции. Рассмотрим принцип действия трансформатора. Пусть на вход трансформатора подается переменное напряжение  $U_1$ . В сердечнике трансформатора возникает магнитный



a)



б)

Рис. 11.8

поток, который пронизывает как первичную, так и вторичную обмотки трансформатора. В первичной и вторичной обмотках соответственно возникают ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad \varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – числа витков первичной и вторичной обмоток.

Используя второе правило Кирхгофа, находим напряжения на входе и выходе трансформатора:

$$U_1 = I_1 R_1 - \varepsilon_1 = I_1 R_1 + N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (11.24)$$

$$U_2 = I_2 R_2 - \varepsilon_2 = I_2 R_2 + N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (11.25)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  соответственно сопротивления первичной и вторичной обмоток трансформатора,  $I_1$  и  $I_2$  – силы токов, протекающих по первичной и вторичной обмоткам.

Рассмотрим случай, когда вторичная обмотка разомкнута, т.е.  $I_2 = 0$  (холостой ход). Технические трансформаторы конструируются таким образом, чтобы выполнялось условие  $I_1 R_1 \ll \varepsilon_1$ , т.е. обмотки трансформатора обладают небольшим активным сопротивлением, но большой индуктивностью.

Разделив почленно уравнение (11.24) на уравнение (11.25), получим:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (11.26)$$

Напряжение на концах первичной обмотки трансформатора так относится к напряжению на концах его вторичной обмотки, как число

витков первичной обмотки относится к числу витков вторичной обмотки.

Отношение  $k = N_1/N_2$  называют коэффициентом трансформации. Если на вторичной обмотке витков больше, трансформатор называют повышающим ( $N_2 > N_1$ ), если меньше – понижающим ( $N_2 < N_1$ ).

Если трансформатор нагружен, то падением напряжения во вторичной обмотке, по сравнению с ЭДС индукции пренебрегать нельзя, поэтому выражение имеет более сложный характер.

Наряду с рассмотренным типом трансформатора существует и множество других. Трансформаторы, у которых часть первичной обмотки является вторичной или наоборот (рис. 11.9), называют автотрансформаторами. Если один из контактов автотрансформатора сделать подвижным, то можно плавно менять выходное напряжение. Один из типов таких трансформаторов, используемый при лабораторных исследованиях, имеет название ЛАТР. Во время работы трансформаторы нагреваются, поэтому их необходимо охлаждать. Маломощные трансформаторы охлаждают воздухом, мощные – минеральным трансформаторным маслом. Для этой цели сердечник с обмотками погружают в масло, а снаружи корпуса делают масляные радиаторы, через которые пропускают либо холодный воздух, либо воду.

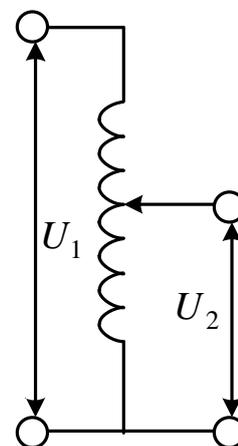


Рис. 11.9.

## Глава 12. Электромагнитные колебания

### 12.1. Собственные незатухающие электромагнитные колебания

Периодические колебания электрических зарядов и токов, электрических и магнитных полей называются электромагнитными колебаниями.

Различают колебания зарядов, токов и полей, неразрывно связанных друг с другом, и колебания полей, существующих в отрыве от зарядов и токов. Первые имеют место в электрических цепях, вторые – в электромагнитных волнах. Электрическая цепь, в которой могут происходить электромагнитные колебания, называется колебательным контуром.

Колебательным контуром может служить любая цепь, даже простой отрезок провода, необходимо только определённое соотношение между ёмкостью, индуктивностью и сопротивлением цепи ( $R, L, C$  – параметры, присущие любой).

Если электрическое и магнитное поля в колебательном контуре пространственно разобщены и локализованы в сравнительно небольших областях, контур называется закрытым (контур с сосредоточенными параметрами). В противном случае контур называется открытым (контур с распределёнными параметрами).

Простейший закрытый колебательный контур – это соединённые между собой конденсатор и катушка индуктивности. Хотя катушка обладает некоторой ёмкостью, а конденсатор – индуктивностью, будем полагать, что ёмкость сосредоточена только в конденсаторе, индуктивность – только в катушке и, кроме того, омическое сопротивление контура равно нулю (такой закрытый контур называется идеальным).

Чтобы в контуре возникли электромагнитные колебания, контур необходимо вывести из состояния равновесия. Для этого достаточно зарядить конденсатор или возбудить ток в контуре. Присоединим конденсатор к источнику постоянного напряжения (рис. 12.1).

В процессе зарядки обкладки конденсатора приобретут разноимённые заряды  $\pm q$ , в результате чего конденсатор будет обладать энергией:  $W_E = \frac{q_0^2}{2C}$ , где  $C$  – ёмкость конденсатора.

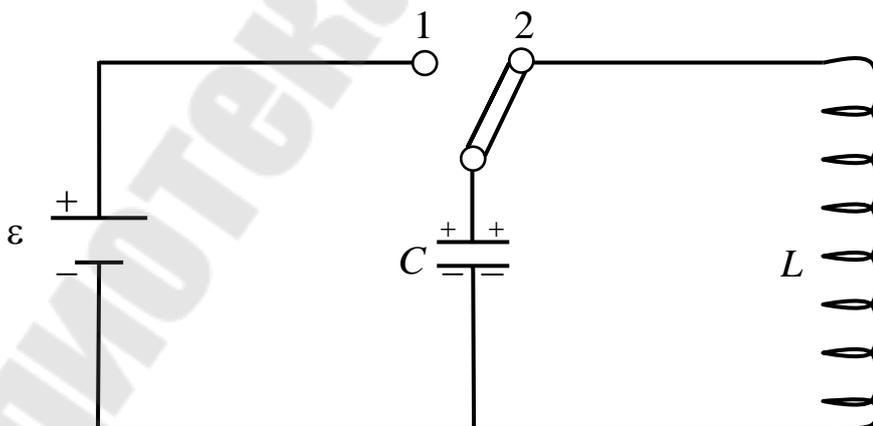


Рис. 12.1

Переключим конденсатор на катушку. Концы катушки приобретут потенциалы обкладок, внутри провода катушки возникнет электро-

статическое поле (первая стадия). Это поле приведёт в движение свободные заряды катушки. Начнётся нейтрализация зарядов на обкладках конденсатора – разрядка конденсатора. Разрядный ток будет нарастать постепенно вследствие самоиндукции. ЭДС самоиндукции препятствует мгновенному нарастанию тока. Разность потенциалов, приложенная к катушке, ускоряет носители заряда, ЭДС самоиндукции, напротив, тормозит их. Благодаря совместному действию разности потенциалов и ЭДС самоиндукции ток постепенно нарастает и в момент, когда конденсатор полностью разрядится, достигает максимального значения. Этим мгновением завершается первая стадия колебательного процесса.

В процессе разрядки конденсатора разность потенциалов на обкладках, заряд обкладок, напряжённость электрического поля уменьшаются, а соответствующие характеристики магнитного поля возрастают. Энергия электрического поля конденсатора постепенно превращается в энергию магнитного поля контура.

В момент завершения разрядки конденсатора энергия контура достигает максимума  $W_B = L(I_0)^2/2$ , где  $L$  – индуктивность контура.

Если бы контур не был разорван обкладками конденсатора, то ток  $I_0$  существовал бы в нём сколь угодно долго, не нуждаясь ни в разности потенциалов, ни в ЭДС: ведь сопротивление контура равно нулю (в момент, когда ток в контуре достигает максимума  $I$ , разность потенциалов и ЭДС самоиндукции равны нулю). Наличие в контуре конденсатора приводит к тому, что ток на его обкладках обрывается, заряды здесь тормозятся и накапливаются. На той обкладке, по направлению к которой течёт ток, накапливаются положительные заряды, на другой обкладке – отрицательные. В конденсаторе и катушке вновь возникает электростатическое поле, но уже противоположного направления. Это поле тормозит движение зарядов катушки. Ток, и следовательно, и его магнитное поле начинают убывать. Уменьшение магнитного поля сопровождается возникновением ЭДС самоиндукции и препятствует уменьшению тока и поддерживает его первоначальное направление. Благодаря совместному действию вновь возникшей разности потенциалов и ЭДС самоиндукции ток постепенно уменьшается до нуля. Энергия магнитного поля снова превращается в энергию электрического поля. Этим завершается вторая стадия. На третьей и четвёртой стадиях повторяются те же процессы, что и на первой, и на второй стадиях, но в обратном направлении. Пройдя все эти четыре стадии, контур вернётся в исходное состояние. Последу-

ющие циклы будут в точности повторяться. Таким образом, в колебательном контуре периодически изменяются (колеблются) следующие физические величины:

$q$  – заряд на обкладках конденсатора;

$U$  – разность потенциалов на конденсаторе и, следовательно, на концах катушки;

$i$  – ток в катушке;

$\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – напряжённость электрического и индукция магнитного поля;

$W_E$  и  $W_B$  энергия электрического и магнитного полей.

Сопоставляя электромагнитные колебания с механическими, например, с колебаниями пружинного маятника, нетрудно подметить, что каждой величине, характеризующей механические колебания, соответствует электрическая или магнитная величина, играющая в электромагнитных колебаниях аналогичную роль. Так, координате  $x$  соответствует заряд  $q$ , величине скорости  $\dot{v}$  – ток  $i$  и т. д. (таблица 12.1).

Таблица 12.1

Механические колебания	Электромагнитные колебания
Масса $m$	Индуктивность $L$
Коэффициент упругости $k$	Величина обратная ёмкости $1/C$
Координата $x$	Заряд конденсатора $q$
Величина скорости $\dot{v}$	Сила тока $i$
Величина ускорения $d\dot{v}/dt$	Скорость изменения силы тока $di/dt$
Потенциальная энергия $kx^2/2$	Энергия электрического поля $q^2/2C$
Кинетическая энергия $m\dot{v}^2/2$	Энергия магнитного поля $Li^2/2$
Коэффициент трения $r$	Омическое сопротивление $R$
Внешняя сила $\vec{F}$	Электродвижущая сила $\epsilon$ , разность потенциалов $U$

Найдём вид зависимости от времени изменяющихся физических величин. Будем полагать, что процессы в контуре происходят достаточно медленно: мгновенные значения тока одинаковы во всех сече-

ниях контура и, следовательно, к контуру применимы законы постоянного тока. Чтобы найти закон изменения данной переменной величины, нужно составить для неё дифференциальное уравнение и найти решение этого уравнения. Составим уравнение для заряда конденсатора. Так как контур не излучает электромагнитных волн и не выделяет тепла, его энергия, складывается из энергии контура  $Li^2/2$  и энергии конденсатора  $q^2/2C$  и остаётся постоянной.

Следовательно, производная энергии контура по времени равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0, \quad (12.1)$$

где  $i$  и  $q$  – мгновенные значения тока и заряда.

Дифференцируем выражение (12.1). Обозначим производные точкой над дифференцируемыми величинами

$$Lii + \frac{q}{C} \dot{q} = 0,$$

(полагаем, что среда, в которой находится контур, является неферромагнитной, т.е.  $L \neq L(i)$ . И, следовательно,  $L \neq L(t)$ ). Учтём, что  $i = \dot{q}$ , а  $\dot{i} = \ddot{q}$ :

$$L\dot{q}\ddot{q} + \frac{q}{C} \dot{q} = 0. \quad (12.2)$$

Разделив (12.2) на  $L\dot{q}$  и обозначив  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , (12.3)

получим искомое дифференциальное уравнение для заряда:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (12.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.5)$$

где  $q_m$  – амплитудное значение заряда;

$\varphi_0$  – начальная фаза;

$\omega_0$  – угловая частота колебаний.

Как видно из (12.5), заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону. Колебания (12.5) называются собственными незатухающими. Частота  $\omega_0$  – называется собственной частотой. Период собственных колебаний контура:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Подставив в эту формулу выражение для  $\omega_0$  согласно (12.3), получим формулу Томсона:  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ . (12.6)

Частота собственных колебаний:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (12.7)$$

Разделив (12.5) на  $C$ , найдём закон изменения разности потенциалов между обкладками конденсатора:

$$U_C = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.8)$$

где  $U_m = q_m/C$  – амплитуда разности потенциалов.

Закон изменения тока:

$$i = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (12.9)$$

где  $I_m = \omega_0 q_m$  – амплитуда тока.

Закон изменения ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_s = -L\dot{i} = L\omega_0^2 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\varepsilon_{sm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \pi), \quad (12.10)$$

где  $\varepsilon_{sm} = L\omega_0^2 q_m$  – амплитуда ЭДС – самоиндукции.

Закон изменения энергии электрического поля:

$$W_E = \frac{q^2}{2C} = \left( \frac{q_m^2}{2C} \right) \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Em} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.11)$$

где  $W_{Em} = q_m^2/2C$  – амплитуда энергии электрического поля.

Закон изменения энергии магнитного поля:

$$W_B = \frac{Li^2}{2} = \left( \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} \right) \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = W_{Bm} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.12)$$

где  $W_{Bm} = L\omega_0^2 q_m^2/2$  – амплитуда энергии магнитного поля. В выражения для амплитуд всех изменяющихся величин входит амплитуда заряда  $q_m$ . Эта величина, а также начальная фаза колебаний  $\varphi_0$ , определяются начальными условиями – зарядом конденсатора и током в контуре в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $q = q_0$  и  $i = 0$ . Подставив эти значения в (12.5) и (12.9) получим  $q_0 = q_m \cos \varphi_0$  и  $0 = \omega_0 q_m \sin \varphi_0$ . Из второго уравнения получаем  $\varphi_0 = 0$ . Подставив  $\varphi_0 = 0$  в первое уравнение, найдём, что  $q_m = q_0$  т.е. амплитуда заряда равна первоначальному заряду конденсатора. Если время отсчитывать

от другого мгновения, то связь между  $q_m$  и  $q_0$ , будет иной и  $\varphi_0 \neq 0$ .

Сопоставляя (12.5), (12.8) – (12.12), заключаем, что колебания заряда и разности потенциалов совершаются в одинаковых фазах. Ток отстаёт по фазе от разности потенциалов на  $\pi/2$ . Колебания разности потенциалов и ЭДС самоиндукции происходят в противоположных фазах (сдвинуты на  $\pi$ ). Частота энергии электрического и магнитного полей в два раза больше частоты колебаний всех других величин. На рисунках, которые приведены выше, изображены графики изменения всех величин при  $\varphi_0 = 0$ .

## 12.2. Собственные затухающие колебания

Любой реальный закрытый контур обладает омическим сопротивлением, поэтому в таком контуре электромагнитная энергия, запасённая в начале колебаний, постепенно превращается во внутреннюю энергию контура. Колебания вследствие этого затухают.

Составим дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний. Из закона сохранения полной энергии следует, что убыль энергии электрического и магнитного полей контура за единицу времени равна количеству выделенного контуром тепла (тепловой мощности тока).

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = Ri^2, \quad (12.13)$$

где  $R$  – сопротивление контура.

Произведём в (12.13) дифференцирование (от времени зависят  $i$  и  $q$ ) и введём обозначения:  $i = \dot{q}$  и  $\dot{i} = \ddot{q}$ .

Получим:

$$-L\dot{q}\ddot{q} - \frac{q\dot{q}}{C} = Ri^2.$$

Перенесём  $Ri^2$  в левую часть, умножаем обе части уравнения на  $(-1)$  и разделим все слагаемые на  $L\dot{q}$ :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Введя обозначения  $R/L = 2\beta$  и  $1/LC = \omega_0^2$ , получим искомое дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = 0. \quad (12.14)$$

Решение этого уравнения при  $\beta < \omega_0$  имеет вид:

$$q = q_{m_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (12.15)$$

где  $q_{m_0}$  – начальная амплитуда заряда;

$\omega$  – угловая частота колебаний.

Как видно из (12.15), собственные затухающие колебания не являются гармоническими. Амплитуда таких колебаний с течением времени уменьшается по закону:

$$A = q_{m_0} e^{-\beta t}. \quad (12.16)$$

Показатель  $\beta$  называется коэффициентом затухания.

График собственных затухающих колебаний заряда изображается рисунком 12.2.

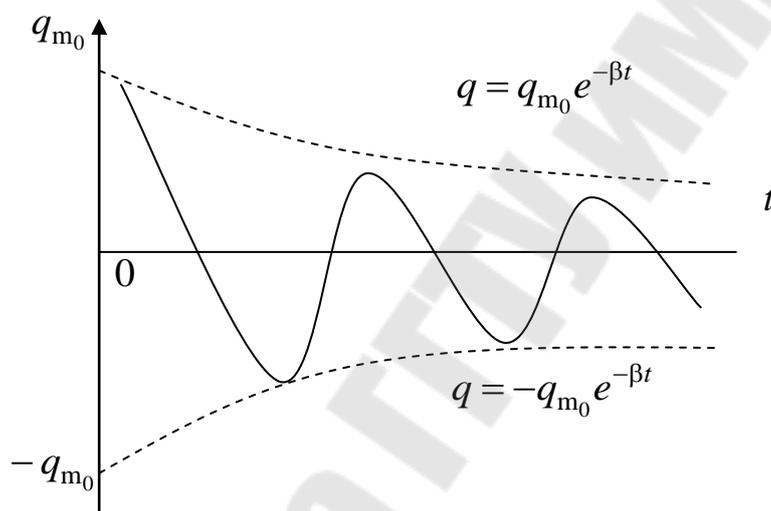


Рис. 12.2

Разделив (12.15) на  $C$ , найдём закон изменения разности потенциалов между обкладками конденсатора:

$$U_C = U_{m_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (12.17)$$

Аналогично можно найти законы изменения силы тока, ЭДС самоиндукции и т.д.

Угловая частота затухающих колебаний связана с собственной частотой контура соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (12.18)$$

Условный период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (12.19)$$

Логарифм отношений двух последующих амплитуд отличающихся на период называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{q_{m_0} e^{-\beta t}}{q_{m_0} e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (12.20)$$

Время релаксации затухающих колебаний  $\tau$  – время в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Из условия:

$$\frac{q_{m_0} e^{-\beta t}}{q_{m_0} e^{-\beta(t+T)}} = e, \text{ находим, что } \tau = \frac{1}{\beta}, \quad (12.21)$$

$$\text{и } \beta = \frac{1}{\tau}. \quad (12.22)$$

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Подставим выражение для  $\beta$  в (12.20):

$$\lambda = \frac{T}{\tau}. \text{ Но } T/\tau = N \text{ – число колебаний, совершаемых за время}$$

релаксации. Следовательно  $\lambda = \frac{1}{N}$ . (12.23)

Таким образом, логарифмический декремент затухания – это величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации.

Для характеристики затухания колебаний вводят также добротность  $Q$ , связанную с логарифмическим декрементом соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (12.24)$$

$$\text{Так как } \lambda = 1/N, \text{ то } Q = \pi N. \quad (12.25)$$

Добротность контура есть умноженное на  $\pi$  число полных колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Если параметры контура таковы, что  $\beta^2 > \omega_0^2$ , то период  $T$ ,

определяемый формулой (12.19), будет мнимым, разряд конденсатора становится апериодическим. Сопротивление  $R_k$ , при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим. Из условия  $\beta^2 = \omega_0^2$ , т.е.  $R_k^2/4L^2 = 1/LC$ , находим  $R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . (12.26)

При  $R \geq R_k$  колебания в контуре невозможны. Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  называется волновым сопротивлением контура.

### 12.3. Вынужденные колебания

Вынужденные электромагнитные колебания – колебания, происходящие в колебательном контуре под действием внешней периодической ЭДС или внешнего напряжения.

Внешнее ЭДС (напряжение) можно приложить к контуру различными способами. Можно, например, включить источник непосредственно в контур (рис. 12.3. а, б)

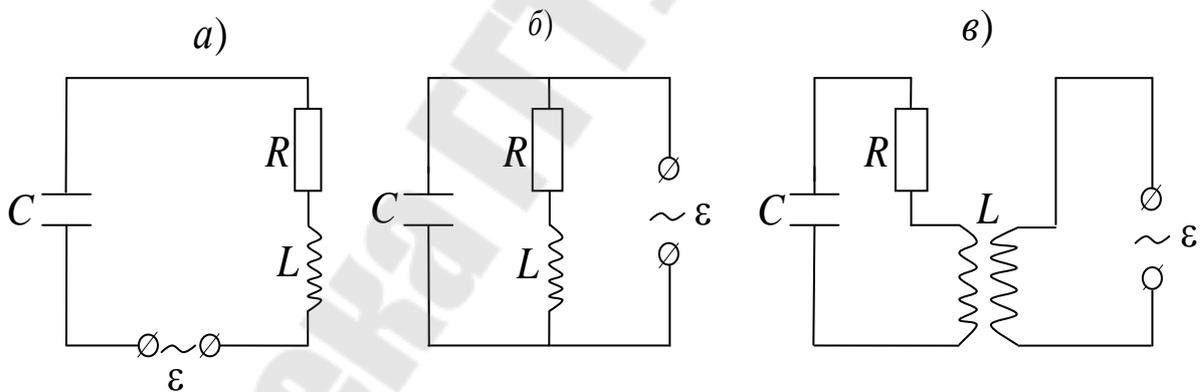


Рис. 12.3

Можно связать цепь, содержащую переменную ЭДС, с колебательным контуром индуктивно (рис.12.3. в). Можно воздействовать на контур электромагнитными волнами.

Рассмотрим случай соответствующий рисунку (12.3. а), где  $R, L, C$  – параметры контура. Пусть переменная ЭДС изменяется по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (12.27)$$

где  $\varepsilon_m$  – амплитуда ЭДС;

$\Omega$  – угловая частота колебаний ЭДС.

Составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Из закона сохранения полной энергии следует, что тепло контуром выделяется не только за счёт убыли энергии магнитного и электрического полей контура, но и за счёт работы источника внешней ЭДС:

$$i^2 R = -\frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} + \varepsilon i \right), \quad (12.28)$$

где  $\varepsilon$  и  $i$  – мгновенное значение ЭДС источника и силы тока.

Перенесём слагаемое  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} + \varepsilon i \right)$  в левую часть уравнения, произведём дифференцирование, выразим  $i$  и  $\dot{i}$  через заряд и разделим все слагаемые на  $L\dot{q}$ . Воспользуемся обозначениями, введенными в предыдущем параграфе и после замены получим:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}, \quad (12.29)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \left( \frac{\varepsilon_m}{L} \right) \cos \Omega t. \quad (12.30)$$

Общее решение этого неоднородного линейного уравнения складывается из двух слагаемых: из общего решения однородного уравнения  $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ , определяющего собственные затухающие колебания, и частного решения уравнения (12.29).

Колебания в рассматриваемом контуре представляют собой суперпозицию собственных и вынужденных колебаний. Первые постепенно затухают, вторые происходят с неизменной амплитудой по истечению некоторого промежутка времени в контуре останутся практически только вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания описываются уравнениями:

$$q = q_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (12.31)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \left( \frac{q_m}{C} \right) \cos(\Omega t + \alpha_0) = U_m \cos(\Omega t + \alpha_0); \quad (12.32)$$

$$i = \dot{q} = -\Omega q_m \sin(\Omega t + \alpha_0) = -i_m \cos\left( \Omega t + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (12.33)$$

В последних выражениях амплитуда заряда, разности потенциалов и тока определяются соотношениями:

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (12.34)$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (12.35)$$

$$i_m = \frac{\Omega\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (12.36)$$

Начальная фаза  $\alpha_0$  в уравнениях(12.31 – 33) определяется из выражения:

$$\operatorname{tg}(\alpha_0) = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (12.37)$$

Подставив  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $\beta^2 = R^2/4L^2$ , преобразуем формулы (12.34 – 37) к виду:

$$q_m = \frac{\varepsilon_m}{\Omega\sqrt{\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)^2 + R^2}}; \quad (12.38)$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_m}{C\Omega\sqrt{\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)^2 + R^2}}; \quad (12.39)$$

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)^2 + R^2}}; \quad (12.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{R}{\frac{1}{C\Omega} - L\Omega}. \quad (12.41)$$

Таким образом, если внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону, вынужденные колебания являются также гармоническими. Их частота совпадает с частотой ЭДС. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде внешней ЭДС и зависит от её частоты. При некоторой определённой для самого контура частоте  $\Omega_{рез}$ . Амплитуда колебаний достигает максимума. Это явление называется резонансом. Чтобы найти резонансную частоту для заряда (для разности потенциалов она будет точно такой же), достаточно найти минимум выражения, стоящего под корнем в (12.34). Получим:

$$\Omega_{\text{рез, q}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \text{ Как видно из этой формулы,}$$

резонансная частота для заряда несколько меньше частоты собственных незатухающих колебаний контура. Из (12.34) следует, что при  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $q_m \rightarrow \varepsilon_m / L\omega_0^2 = \varepsilon_m / C$ . Такой заряд конденсатор получает при подключении его к источнику с постоянной ЭДС ( $\varepsilon_m$ ). При  $\Omega \rightarrow \infty$  амплитуда заряда  $q_m \rightarrow 0$ . Высота резонансного пика и его <острота> тем больше, чем меньше  $\beta$ , т.е. чем меньше омическое сопротивление и больше индуктивность контура. Резонансные кривые для  $q_m$ , соответствующие разным  $\beta$ , приведены на рисунке 12.4. а. Резонансную частоту для тока легко найти из (12.36): амплитуда тока максимальна

при  $\frac{1}{C\Omega_{\text{рез}}} - L\Omega_{\text{рез}} = 0$ , откуда  $\Omega_{\text{рез, i}} = \sqrt{\frac{1}{C\Omega}} = \omega_0$ . (12.42)

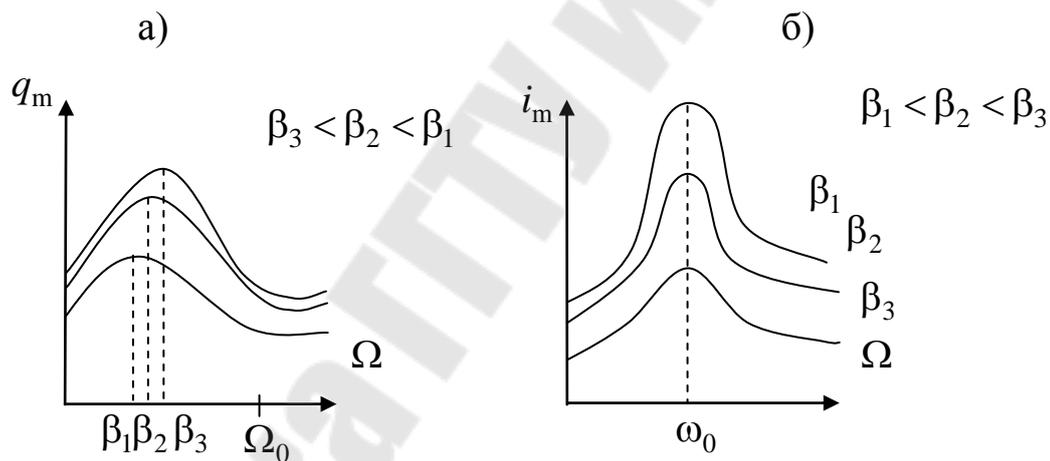


Рис. 12.4

Резонансная частота для тока совпадает с собственной частотой незатухающих колебаний контура. При  $\Omega \rightarrow 0$   $i \rightarrow 0$ ; при  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow 0$ . Первое означает, что при постоянной ЭДС, установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может. Резонансные кривые для амплитуды тока приведены на рисунке 12.4. б. Из формул (12.27), (12.31–33) видно, что колебания заряда разности потенциалов и тока сдвинуты по фазе относительно ЭДС. Этот сдвиг тем больше, чем больше  $R$  и чем меньше разность  $L\Omega - \frac{1}{C\Omega}$ . Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной состав-

ляющей.

## Глава 13. Основы теории электромагнитного поля

### 13.1. Вихревое электрическое поле

В конце XIX в. английский ученый Дж. Максвелл обобщил экспериментально установленные законы электрического и магнитного полей и создал законченную единую теорию электромагнитного поля, которая позволила решить основную задачу электродинамики: найти характеристики электромагнитного поля заданной системы электрических зарядов и токов. В отличие от прежних теорий, согласно которым распространение электрических и магнитных волн происходит мгновенно, в теории Дж. Максвелла электрическое и магнитное поля распространяются с конечной скоростью в виде электромагнитных волн. Скорость распространения этих волн в вакууме равна электродинамической постоянной  $c$ , представляющей собой отношение абсолютной электромагнитной единицы электрического заряда к абсолютной электростатической единице электрического заряда. Это отношение имеющее размерность скорости и удивительным образом совпало со значением скорости распространения электромагнитных волн в вакууме.

Опираясь на воззрения Фарадея, Максвелл выдвинул гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле  $\vec{E}_v$ , циркуляция которого и является причиной возникновения ЭДС электромагнитной индукции в контуре и появлению индукционного тока в проводниках, находящихся в этом магнитном поле.

Многочисленные опыты показали, что ЭДС индукции совершенно не зависит от проводника, его свойств (однородности, сопротивления). Возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле.

Однако ЭДС индукции в любой цепи обусловлена действием на носители тока сторонних сил неэлектрического происхождения. Поэтому, прежде всего, возникает вопрос о природе сторонних сил в данном случае.

Опыт показывает, что в случае электромагнитной индукции сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процес-

сами в контуре. Их возникновение также нельзя объяснить силой Лоренца, так как она не действует на неподвижные заряды. Согласно гипотезе Максвелла, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле  $\vec{E}_B$ , циркуляция которого является причиной возникновения ЭДС электромагнитной индукции в контуре.

Таким образом, электродвижущая сила индукции равна циркуляции вектора по данному контуру:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{B1} dl. \quad (13.1)$$

Подстановка в формулу  $\varepsilon_i = -d\Phi / dt$  выражения (13.1) для  $\varepsilon_i$  и выражения  $\int_s \vec{B} d\vec{S}$  для  $\Phi$  приводит к соотношению:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{S},$$

где интеграл в правой части равенства берётся по произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ . Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (13.2)$$

В связи с тем, что вектор  $\vec{B}$  зависит, вообще говоря, как от времени, так и от координат, то под знаком интеграла написан символ частной производной по времени (интеграл  $\int_s \vec{B} d\vec{S}$  является функцией зависящей только от времени). Преобразуем левую часть равенства (13.2) по теореме Стокса. В результате получим

$$\int_s \text{rot } \vec{E}_B d\vec{S} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство:

$$\text{rot } \vec{E}_B = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (13.3)$$

Ротор поля  $\vec{E}_B$  в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора  $\vec{B}$ .

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнит-

ное поле обуславливает появление в пространстве поля  $\vec{E}_B$ , независимо от присутствия в этом пространстве проволочного контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить, по возникновению в нем индукционного тока, существование в соответствующих точках пространства магнитного поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле  $\vec{E}_B$  существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля  $\vec{E}_q$ . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Ротор вектора  $\vec{E}_q$  в любой точке равен нулю:

$$\text{rot } \vec{E}_q = 0. \quad (13.4)$$

Согласно (13.3) ротор вектора  $\vec{E}_B$  отличен от нуля. Следовательно, поле  $\vec{E}_B$ , как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности поля  $\vec{E}_B$  замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным ( $\vec{E}_q$ ), так и вихревым ( $\vec{E}_B$ ). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля  $\vec{E}_q$ , создаваемого зарядами, и поля  $\vec{E}_B$ , обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив вместе соотношения (13.3) и (13.4), получим для ротора напряженности суммарного поля  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$  следующее уравнение:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Это уравнение является одним из основных в электромагнитной теории Максвелла.

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями (выражаемой, в частности, уравнением (13.5)) служит причиной того, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электрическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, порождают не только электрическое, но и магнитное поле. Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако отно-

сительно других инерциальных систем этот провод находится в движении. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой точке с данными координатами  $x, y, z$  будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей, образующих единое электромагнитное поле.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим и возникающим магнитным полями Максвелл ввёл в рассмотрение понятие тока смещения.

Механизм возникновения тока смещения в диэлектрике можно понять, рассмотрев опыты А.А. Эйхенвальда. На основании опытов с вращающимися дисками Эйхенвальд установил, что токи смещения создают вокруг себя магнитное поле.

Токи смещения наблюдаются и в конденсаторе, включённом в цепь переменного тока.

Для цепи постоянного тока конденсатор является бесконечно большим сопротивлением, если только его диэлектрик не обладает утечкой. В такой цепи лишь в момент её замыкания протекает импульс зарядного тока, соответствующий максимальному смещению электронов проводимости.

Если цепь с конденсатором питать переменным током, то в ней за каждый период протекают токи заряда и разряда конденсатора, сопротивление которого теперь не бесконечно большое, а зависит от ёмкости конденсатора и частоты тока.

Согласно воззрениям Фарадея и Максвелла, конденсатор нужно рассматривать не как разрыв цепи, а как участок с другим механизмом проводимости. Если между обкладками конденсатора находится полярный или поляризующийся в электрическом поле диэлектрик, то при наличии разности потенциалов между обкладками конденсатора электрические заряды смещаются вдоль линий напряжённости поля. Это смещение ионов образует ток смещения в диэлектрике. Ток смещения существует не только в диэлектрике, но и в вакууме, где он представляет собой изменение напряжённости электрического поля во времени.

Рассматривая процессы, протекающие в цепи переменного тока, содержащей конденсатор Максвелл установил, что зарядный ток, который протекает через конденсатор в виде тока смещения, (принимая

$\sigma = D$ ) равен:

$$I = I_{\text{см}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int \sigma dS = \int \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int \frac{\partial D}{\partial t} d\vec{S}, \quad (13.6)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора;  $\vec{D}$  – электрическое смещение в конденсаторе.

С другой стороны силу тока сквозь произвольную поверхность  $S$  можно определить как поток вектора плотности тока:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Тогда:

$$I = I_{\text{см}} = \int \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}.$$

Сравнивая это выражение с (13.6), получим:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (13.7)$$

В свою очередь электрическое смещение  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , где  $\vec{P}$  – вектор поляризации. Следовательно, плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (13.8)$$

где  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  – плотность тока поляризации, обусловленного движением электрических зарядов в диэлектрике. Этот ток возбуждает свою составляющую магнитного поля, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости;  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  – плотность тока смещения в вакууме, не связанного с перемещением зарядов диэлектрика, а обусловленная только изменением электрического поля во времени. Эта составляющая тока смещения также возбуждает магнитное поле.

Таким образом, ток смещения, как это следует из теории Максвелла и опытов Эйхенвальда, создаёт такое же магнитное поле, как и ток проводимости. Введение тока смещения позволяет рассматривать электрическую цепь с включёнными диэлектрическими или вакуумными участками как замкнутую цепь. Проводимость этих участков зависит от скорости изменения поля, т.е. от частоты.

В своей теории Максвелл ввёл понятие полного тока, равного сумме токов проводимости и смещения. Следовательно, плотность полного тока:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

По Максвеллу полный ток в цепи всегда замкнут, т.е. на концах проводников обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Введя понятие полного тока, Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$  (или  $\vec{B}$ ):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}. \quad (13.9)$$

Уравнение (13.9) называется первым уравнением Максвелла в интегральной форме. Оно представляет собой обобщённый закон полного тока и выражает основное положение электромагнитной теории: токи смещения создают такие же магнитные поля, как и токи проводимости.

### 13.2. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (13.5) и (7.13):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (13.10)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (13.11)$$

Первое из этих уравнений связывает значения  $\vec{E}$  с изменениями вектора  $\vec{B}$  во времени и является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Второе уравнение указывает на отсут-

ствии источников магнитного поля, т. е. магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (13.9) и (2.28):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (13.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (13.13)$$

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что источниками вектора  $\vec{D}$  служат сторонние заряды ( $\rho$  плотность сторонних зарядов).

Уравнения (13.10) – (13.13) представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Отметим, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля:  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Во второй же паре фигурируют только вспомогательные величины  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ .

Уравнения Максвелла можно записать в скалярной форме, причём каждое из векторных уравнений (13.10) и (13.12) эквивалентно трём скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \end{aligned} \right\} (13.14)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad (13.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}; \end{aligned} \right\} (13.16)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (13.17)$$

Всего получилось 8 уравнений, в которые входят 12 функций (по три компоненты векторов  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ ). Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных функций, уравнений (13.14) – (13.17) недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов. Чтобы осуществить расчёт полей нужно дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими  $\vec{D}$  и  $\vec{j}$  с  $\vec{E}$ , а также  $\vec{H}$  с  $\vec{B}$ . Эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad (13.18)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad (13.19)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (13.20)$$

Совокупность уравнений (13.10) – (13.13) и (13.18) – (13.20) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Уравнения:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (13.21)$$

$$\text{и } \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (13.22)$$

(первая пара);

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (13.23)$$

$$\text{и } \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (13.24)$$

(вторая пара), представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме.

Уравнение (13.21) получается путём интегрирования соотношения (13.10) по произвольной поверхности  $S$  с последующим преобразованием левой части по теореме Стокса в интеграл по контуру  $L$ , ограничивающему поверхность  $S$ . Уравнение (13.23) получается таким же способом из соотношения (13.12). Уравнения (13.22) и (13.24) получаются из соотношений (13.11) и (13.13) путём интегрирования по произвольному объёму  $V$  с последующим преобразованием левой части по теореме Остроградского – Гаусса в интеграл по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объём  $V$ .

### 13.3. Волновое уравнение для электромагнитного поля

Как следует, из волновой теории Максвелла переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, также оказывается переменным. Это переменное магнитное поле порождает электрическое и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. В случае однородной нейтральной ( $\rho = 0$ ) и непроводящей ( $\vec{j} = 0$ ) среды с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ , уравнения (13.10) – (13.13) можно написать следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (13.25)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad (13.26)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (13.27)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (13.28)$$

Возьмём ротор от обеих частей уравнения (13.25):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu\mu_0 \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right). \quad (13.29)$$

Символ  $\operatorname{rot}$  означает дифференцирование по координатам. Изменяя последовательность дифференцирования в правой части последнего выражения по координатам и времени, запишем:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}). \quad (13.30)$$

Подставим в (13.30) вместо  $\operatorname{rot} \vec{H}$  левую часть (13.27):

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Полученное значение  $\operatorname{rot}(\partial \vec{H} / \partial t)$  подставим в выражение (13.29):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (13.31)$$

Так как  $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$ , то с учётом (13.28) можно переписать (13.31):

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad (13.32)$$

$$\text{или } \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (13.33)$$

Произведя такие же вычисления с (13.27) и подставив в получившееся уравнение значение (13.25) для ротора  $\vec{E}$ , получим

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \quad (13.34)$$

$$\text{Так как } \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \text{grad}\text{div}\vec{H} - \Delta\vec{H}, \quad (13.35)$$

то в силу (13.26) первый член этого выражения равен нулю. Поэтому левая часть формулы (13.35) представляет собой  $-\Delta\vec{H}$ . Далее, опустив слева и справа знак минус, приходим к уравнению

$$\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \quad (13.36)$$

или, раскрыв оператор Лапласа ( $\Delta\vec{H}$ ),

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \quad (13.37)$$

Уравнения (13.32,33) и (13.36,37) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (13.25) и (13.27), каждое из которых содержит и  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Уравнения (13.32,33) и (13.36,37) представляют собой типичные волновые уравнения. Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны. Следовательно, уравнения (13.32,33) и (13.36,37) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (13.38)$$

где  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$  – скорость электромагнитных волн в вакууме.

В вакууме (т.е. при  $\varepsilon = \mu = 1$ ) скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в вакууме.

### 13.4. Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$  ( $\rho = 0, j = 0, \epsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$ ). Направим ось  $x$  перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ . Поэтому уравнения (13.14) – (13.17) с (13.18) и (13.19) учётом упрощаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} (13.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{aligned} \right\} (13.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} (13.41)$$

Уравнение (13.41) и первое из уравнений (13.40) показывают, что  $E_x$  не может зависеть ни от  $x$ , ни от  $t$ . Уравнение (13.41) и первое из уравнений (13.39) дают такой же результат для  $H_x$ . Следовательно, отличные от нуля  $E_x$  и  $H_x$  могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладываемыми на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси  $x$  ( $E_x = H_x = 0$ ). Отсюда вытекает, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны к направлению распространения волны, т. е. что электромагнитные волны поперечны. Два последних уравнения (13.39) и два последних уравнения (13.40)

можно объединить в две независимые группы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \end{aligned} \right\} (13.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} (13.43)$$

Первая группа уравнений связывает компоненты  $E_y$  и  $H_z$ , вторая компоненты  $E_z$  и  $H_y$ . Допустим, что первоначально было создано переменное электрическое поле  $E_y$ , направленное вдоль оси  $y$ . Согласно второму из уравнений (13.42) это поле создаст магнитное поле  $H_z$ , направленное вдоль оси  $z$ . В соответствии с первым уравнением (13.42) поле  $H_z$  создаст электрическое поле  $E_y$ , и т. д. Ни поле  $E_z$ , ни поле  $H_y$  при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле  $E_z$ , то согласно уравнениям (13.43) появится поле  $H_y$ , которое возбудит поле  $E_z$  и т. д. В этом случае не возникают поля  $E_y$  и  $H_z$ . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (13.42) или (13.43), положив компоненты, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (13.42), положив  $E_z = H_y = 0$ . Продифференцируем первое уравнение по  $x$  и произведем замену:  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$ . Подставив затем  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  из второго уравнения, получим волновое уравнение для  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (13.44)$$

(мы заменили  $\mu_0\varepsilon_0$  через  $1/c^2$ ). Продифференцировав по  $x$  второе из уравнений (13.42), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (13.45)$$

Полученные уравнения представляют собой частный случай уравнений (13.32) и (13.36).

Так как,  $E_x = E_z = 0$  и  $H_x = H_y = 0$ , то  $E_y = E$  и  $H_z = H$ . В уравнениях (13.44) и (13.45) сохранены индексы  $y$  и  $z$  при  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Простейшим решением уравнения (13.44) является функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (13.46)$$

Решение уравнения (13.45) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (13.47)$$

В этих формулах

$\omega$  – циклическая частота волны,

$k$  – волновое число, равное  $\omega/v$ ,

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальные фазы колебаний в точках с координатой  $x = 0$ .

Подставим уравнения (13.46) и (13.47) в (13.42):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0 H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Кроме того, должны выполняться соотношения  $kE_m = \mu\mu_0 \omega H_m$  и  $\varepsilon\varepsilon_0 \omega E_m = kH_m$ . Перемножив эти два равенства, найдём, что  $\mu\mu_0 H_m^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2$ . (13.48)

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}. \quad (13.49)$$

Для волны, распространяющейся в вакууме,

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (13.50)$$

В гауссовой системе формула (13.49) имеет вид:

$$E_m \sqrt{\varepsilon} = H_m \sqrt{\mu}.$$

Следовательно, в вакууме  $E_m$  и  $H_m$  ( $E_m$  измеряется в СГСЭ – единицах,  $H_m$  – в СГСМ – единицах).

Умножив уравнение (13.46) на орт оси  $y$  ( $E_y \vec{e}_y = \vec{E}$ ), а уравнение (13.47) на орт оси  $z$  ( $H_z \vec{e}_z = \vec{H}$ ), получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx); \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx) \quad (13.51)$$

(мы положили  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ).

На рисунке 13.1 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Из рисунка видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через  $1/4$  периода достигают наибольшего значения, причём, если  $\vec{E}$  направлен вверх, то  $\vec{H}$  направлен вправо (смотрим вдоль направления, по которому распространяется волна). Ещё через  $1/4$  периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения, но на этот раз  $\vec{E}$  направлен вниз, а  $\vec{H}$  влево. И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси  $x$ .

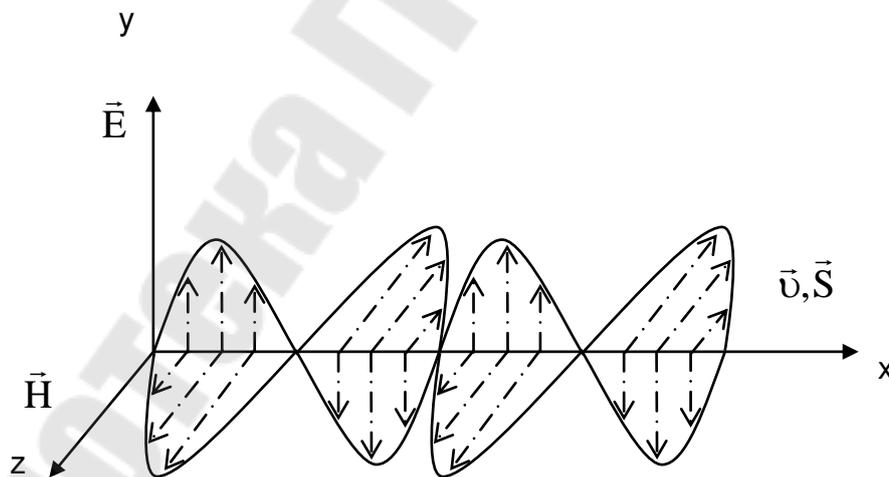


Рис. 13.1

### 13.5. Энергия и импульс электромагнитных волн

Электромагнитные волны переносят энергию. Плотность энергии  $\omega$  электромагнитной волны распространяющейся в вакууме со скоростью  $c$  складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (13.52)$$

Так как в вакууме векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одинаковой фазе, то соотношение (13.49) между амплитудными значениями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  справедливо и для их мгновенных значений. Положив в (13.49)  $\epsilon = \mu = 1$ , придём к соотношению  $E_m \sqrt{\epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu_0}$ . (13.53)

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы:  $\omega_E = \omega_H$ . С учётом (13.53) выражению (13.52) можно придать вид

$$\omega = \frac{1}{2} (E \sqrt{\epsilon_0}) (E \sqrt{\epsilon_0}) + \frac{1}{2} (H \sqrt{\mu_0}) (H \sqrt{\mu_0}) = \frac{1}{c} EH.$$

Умножив найденное выражение для  $\omega$  на скорость волны  $c$ , получим модуль плотности потока энергии:

$$S = \omega c = EH. \quad (13.54)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора  $[\vec{E}\vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ . Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (13.55)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется вектором Пойнтинга. Можно показать, что формула (13.55) оказывается справедливой и в случае, когда электромагнитная волна распространяется в диэлектрической или проводящей среде.

По аналогии с формулой (7.11) поток  $\Phi$  электромагнитной энергии через некоторую поверхность  $F$  можно найти с помощью ин-

$$\text{тегрирования: } \Phi = \int_F \vec{S} d\vec{F}. \quad (13.56)$$

В формуле (7.11) буква  $S$  обозначала поверхность; поскольку буквой  $S$  принято обозначать вектор Пойнтинга, нам пришлось обозначить поверхность буквой  $F$ ).

Поглощаясь в каком – либо теле, электромагнитная волна сообщает этому телу некоторый импульс, т. е. оказывает на него давление. Электрическое поле падающей волны возбуждает в теле ток плотностью  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величина которой в расчёте на единицу объёма тела определится формулой:

$$\vec{F}_{\Delta V} = [\vec{j}\vec{B}] = \mu_0[\vec{j}\vec{H}]. \quad (13.57)$$

Направление этой силы совпадает с направлением распространения волны. Поверхностному слою с площадью, равной единице, и толщиной  $dl$  сообщается в единицу времени импульс:

$$dK = F_{\Delta V} dl = \mu_0 H j dl. \quad (13.58)$$

(векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны). В этом же слое в единицу времени поглощается энергия:

$$dW = jEdl, \quad (13.59)$$

выделяющаяся в виде тепла.

Импульс (13.58) и энергия (13.59) сообщаются волной слою вещества. Возьмём отношение импульса (13.58) к энергии (13.59), опустив за ненадобностью символ  $d$ :

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Приняв во внимание, что  $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$  получим  $\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$ .

Отсюда вытекает, что электромагнитная волна, несущая энергию  $W$ , обладает импульсом  $K = \frac{1}{c} W$ . (13.60)

Из (13.54) следует, что плотность импульса (т. е. импульс единицы объёма) электромагнитного поля равна  $K_{\Delta V} = \frac{1}{c} \omega$ . (13.61)

Плотность энергии связана с модулем вектора Пойнтинга соотношением  $S = \omega c$ . Заменяя в (13.61)  $\omega$  через  $S/c$  и учитывая, что направления векторов  $\vec{K}$  и  $\vec{S}$  совпадают, можно написать:

$$\vec{K}_{\Delta V} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} [\vec{E}\vec{H}]. \quad (13.62)$$

Отметим, что при переносе энергии любого вида плотность па-

тока энергии равна плотности импульса, умноженной на  $c^2$ .

Пусть падающая нормально на некоторое тело электромагнитная волна полностью поглощается. Тогда единице поверхности тела сообщается в единицу времени импульс, заключённый в цилиндре с площадью основания, равной единице, и высотой  $c$ . Согласно (13.61) этот импульс равен  $\left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot c = \omega$ . Вместе с тем импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, равен давлению  $p$  на поверхность. Следовательно, в случае поглощающей поверхности  $p = \omega$ . Эта величина пульсирует с очень большой частотой. Поэтому давление практически может быть измерено как среднее по времени значение. Таким образом,

$$p = \langle \omega \rangle. \quad (13.63)$$

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше. Величина давления, вычисленная по формуле (13.63), оказывается очень малой.

Измерить световое давление удалось в 1900 г. П.Н. Лебедеву. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

## Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1977 – 1979. – Т.1. – 1977. – 350 с.; Т.2. – 1978. – 480 с.; Т.3. – 1979. – 304 с.
2. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1989. – 608 с.
3. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1985. – 630 с.
4. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.
5. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1973. – 464 с.
6. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Высшая школа, 1988. – 572 с.
7. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
8. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1983. – 386 с.
9. Воробьев, А.А. Физика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / А.А. Воробьев, В.П. Иванов, В.Г. Кондакова, А.Г. Чертов. – М.: Высшая школа, 1987. – 208 с.

## Оглавление

	Стр.
Предисловие	3
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	
Глава 1. Электрическое поле в вакууме.....	4
1.1. Электромагнитное поле. Электрические заряды. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.....	4
1.2. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции полей.....	8
1.3. Расчёт электрических полей на основе принципа суперпозиций полей.....	11
1.4. Линии вектора напряжённости.....	17
1.5. Поток вектора напряжённости.....	19
1.6. Теорема Гаусса.....	21
1.7. Применение теоремы Гаусса к расчёту электрических полей.....	22
1.8. Работа сил электростатического поля. Циркуляции вектора напряжённости электростатического поля.....	29
1.9. Потенциал электростатического поля.....	31
1.10. Связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля.....	34
1.11. Расчёт потенциала и разности потенциалов в электрическом поле.....	37
Глава 2. Электрическое поле в диэлектриках.....	43
2.1. Проводники, диэлектрики, полупроводники.....	43
2.2. неполярные и полярные молекулы.....	44
2.3. Поляризация диэлектриков.....	47
2.4. Электрическое поле в диэлектрике.....	50
2.5. Индукция электрического поля.....	53
2.6. Расчёт электростатического поля при наличии диэлектриков.....	56
2.7. Поляризация деформационная и ориентационная.....	58
2.8. сегнетоэлектрики.....	61
2.9. Пьезоэлектрический эффект. Электрострикция.....	64
Глава 3. Проводники в электростатическом поле.....	66
3.1. Распределение зарядов на проводнике.....	66

3.2.	Явление электростатической индукции.....	70
3.3.	Електроёмкость проводников.....	74
3.4.	Взаимная електроёмкость. Конденсатор.....	75
3.5.	Соединение конденсаторов.....	79
3.6.	Энергия системы неподвижных точечных зарядов.....	81
3.7.	Собственная энергия заряжённого проводника и конденсатора.....	82
3.8.	Энергия электрического поля.....	83
Глава 4.	Законы постоянного тока.....	85
4.1.	Понятие об электрическом токе.....	85
4.2.	Закон Ома для однородного участка цепи.....	87
4.3.	Закон Джоуля – Ленца.....	90
4.4.	Последовательное и параллельное соединение проводников.....	92
4.5.	Электродвижущая сила источника тока, разность потенциалов, напряжение.....	93
4.6.	Следствия из закона Ома.....	97
4.7.	Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа.....	99
Глава 5.	Классическая электронная теория металлов.....	101
5.1.	Природа носителей заряда в металлах.....	101
5.2.	Классическая теория электропроводности металлов....	103
5.3.	Вывод закона Ома из классических электронных представлений.....	105
5.4.	Вывод закона Джоуля – Ленца из электронных представлений.....	107
5.5.	Закон Видемана – Франца и его объяснение электронной теорией.....	108
5.6.	Затруднения классической теории металлов.....	109
5.7.	Основные положения квантовой теории металлов.....	111
5.8.	Квантование энергии свободных электронов в металлах.....	112
5.9.	Работа выхода.....	117
5.10.	Термоэлектронная эмиссия.....	118
5.11.	Контактная разность потенциалов.....	121
5.12.	Термоэлектрические явления (явления Зеебека, Пельтье)...	125
5.13.	Полупроводники. Собственная и примесная проводимость.....	128
Глава 6.	Магнитное поле в вакууме.....	135
6.1.	Магнитное поле. Магнитное взаимодействие элементов	

тока.....	135
6.2. Индукция магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа.....	138
6.3. Применение закона Био – Савара – Лапласа к расчёту магнитных полей.....	140
6.4. Циркуляция вектора $\vec{B}$ .....	144
Глава 7. Проводники с током в магнитном поле.....	149
7.1. Закон Ампера.....	149
7.2. Магнитный поток.....	155
7.3. Работа сил магнитного поля.....	156
Глава 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.....	159
8.1. Движение заряженных частиц в электрическом поле....	159
8.2. Движение заряженных частиц в магнитном поле.....	162
8.3. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном поле.....	165
8.4. Фокусирующее действие магнитного поля.....	166
8.5. Эффект Холла.....	167
8.6. Методы определения удельного заряда электрона.....	170
8.7. Принцип действия МГД генератора.....	172
Глава 9. Магнитное поле в веществе.....	173
9.1. Намагничивание вещества, намагниченность.....	173
9.2. Напряжённость магнитного поля в веществе.....	177
9.3. Граничные условия для $\vec{H}$ и $\vec{B}$ .....	182
9.4. Расчёт магнитного поля в веществе.....	183
9.5. Магнитные моменты атомов и молекул.....	185
9.6. Диамагнетизм.....	190
9.7. Парамагнетизм.....	194
9.8. Ферромагнетизм. Свойства ферромагнетиков.....	196
Глава 10. Электромагнитная индукция.....	202
10.1. Явление электромагнитной индукции.....	202
10.2. Электродвижущая сила индукции.....	203
10.3. Расчёт ЭДС индукции.....	207
10.4. Взаимная индукция.....	209
10.5. Самоиндукция.....	211
10.6. Установление и исчезновение тока в цепи с индуктивностью	213
10.7. Энергия магнитного поля.....	217
Глава 11. Переменный ток.....	218
11.1. Переменный ток. Генератор переменного тока.....	218

11.2. Ёмкость в цепи переменного тока.....	220
11.3. Индуктивность в цепи переменного тока.....	222
11.4. Цепь переменного тока, содержащая ёмкость, индуктивность и активное сопротивление.....	223
11.5. Работа и мощность переменного тока.....	227
11.6. Трансформаторы переменного тока.....	229
Глава 12. Электромагнитные колебания.....	231
12.1. Собственные незатухающие электромагнитные колебания	231
12.2. Собственные затухающие колебания.....	237
12.3. Вынужденные колебания.....	240
Глава 13. Основы теории электромагнитного поля.....	244
13.1. Вихревое электрическое поле.....	244
13.2. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля.....	249
13.3. Волновое уравнение для электромагнитного поля.....	252
13.4. Плоская электромагнитная волна.....	254
13.5. Энергия и импульс электромагнитных волн.....	258
Литература.....	261
Оглавление.....	262

# **ФИЗИКА: ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

**Пособие  
для студентов технических специальностей  
дневной формы обучения**

Составители: **Хило Петр Анатольевич**  
**Кравченко Александр Ильич**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 25.02.19.

Рег. № 28Е.  
<http://www.gstu.by>