

**Г.П. ТАРИКОВ**, д.т.н., проф., зав. каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь;

**В.В. КОМРАКОВ**, к.т.н., доцент каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого;

**А.Т. БЕЛЬСКИЙ**, к.т.н., доцент каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого;

**В.Н. ПАРХОМЕНКО**, ст. преп. каф. "Сельскохозяйственные машины" ГГТУ им. П.О. Сухого

## **ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ**

Рассмотрены сущность электростатической аналогии, существующей между уравнениями электростатики и теории упругости и способ решения задачи о контакте двух упругих тел с помощью электрического моделирования. Дается описание электро моделирующего устройства и предложена методика решения задачи с его использованием. Дана оценка погрешности результатов эксперимента. Показано, что предлагаемый способ позволяет решать пространственные контактные задачи с точностью достаточной для инженерных приложений.

Розглянуто сутність електростатичної аналогії, яка існує між рівняннями електростатики і теорії пружності і спосіб розв'язання задачі про контакт двох пружних тіл за допомогою електричного моделювання. Даний опис електромоделюючого пристрою та запропонована методика виконання завдання з його використанням. Дана оцінка похибки результатів експерименту. Показано, що запропонований спосіб дозволяє вирішувати просторові контактні задачі з точністю достатньою для інженерних додатків.

The principle of electrostatic analogy of equations of electrostatics and theory of elasticity, as well as the method of solution of contact problem of two elastic body interaction based on electric analogy. Description of electro-modeling device is given and technique of problem solution with its usage is proposed. Error of experimental results is estimated. It was demonstrated that proposed technique allow solving 3D conforming contact problems with accuracy enough for engineering applications.

**Сущность электростатической аналогии.** Рассмотрим электростатическую аналогию, существующую между уравнениями контактной задачи теории упругости и задачи электростатики [1, 2].

Как известно [2], задача о вдавлении штампа с плоским основанием, имеющим в плане форму  $\Omega$ , в однородное упругое полупространство под действием центрально приложенной силы  $P$  сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = W(x, y), \quad (1)$$

где  $W(x, y) = \frac{\delta \pi E}{1-\nu^2}$ ;  $\delta$  – перемещение штампа;  $p(x, y)$  – контактное давление под штампом;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости 1-го рода.

При этом должно соблюдаться условие:

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Перейдем теперь к задаче электростатики.

Если взять токопроводящую пластину, которая обладает некоторым электрическим зарядом  $Q$  и имеет форму  $\Omega$  основания штампа в плане, то выражение для электростатического потенциала можно записать в виде [3]:

$$\iint_{\Omega} \frac{q(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \Psi(x, y), \quad (3)$$

где  $\Psi(x, y) = \psi(x, y) 4\pi k_0 \varepsilon$ ;  $\psi$  – электростатический потенциал;  $k_0$  – диэлектрическая постоянная;  $\varepsilon$  – диэлектрический коэффициент среды.

Общее количество электричества на пластине будет:

$$Q = \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Таким образом, две рассматриваемые линейные системы описываются математически подобными интегральными уравнениями (1) и (3).

Электрический потенциал, подаваемый на аналог площадки контакта в виде токопроводящей пластины, моделирует перемещение штампа, а плот-

ность электрического заряда в какой-либо точке поверхности токопроводящего элемента моделирует контактное давление в соответствующей точке площадки контакта.

Как известно [2], задачи о контакте двух упругих тел сводятся к следующему интегральному уравнению:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \frac{u_z^{(1)}(x, y) + u_z^{(2)}(x, y)}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad (5)$$

где  $\Theta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}$ ;  $\Theta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$ ;  $u_z^{(i)}$  – проекции вектора перемещения на ось  $z$  в результате упругих деформаций;  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона;  $E_i$  – модуль Юнга ( $i = 1, 2$ ).

Для решения пространственных контактных задач теории упругости было создано специальное электромоделирующее устройство, блок-схема которого показана на рисунке 1.

Электромоделирующее устройство содержит источник питания 1, выход которого подключен к распределителю 2. Каждый выход распределителя 2 подключен к отдельной токопроводящей дорожке токопроводящего элемента 3, зонд 4, установлен над токопроводящим элементом 3 и соединен с персональным компьютером 5 посредством усилителя электрического сигнала 6 и аналого-цифрового преобразователя 7. Токопроводящий элемент 3 и зонд 4 защищены экраном 8.

Токопроводящий элемент 3, являющийся аналогом площадки контакта, расположен на координатном столике, который обеспечивает его перемещение в горизонтальной плоскости для проведения измерений. Зонд 4, служащий для измерения плотности заряда, моделирующей контактное давление на площадке контакта, имеет вертикальное перемещение.

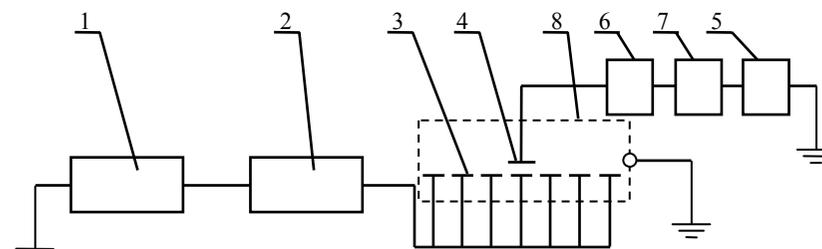


Рисунок 1 – Блок-схема электромоделирующего устройства для решения пространственных контактных задач

При решении задачи, на аналоге площадки контакта необходимо задать электрический потенциал в соответствии с правой частью уравнения (5). Так как задать переменный электрический потенциал на сплошной токопроводящей пластине невозможно, то аналог площадки контакта выполняется в виде набора изолированных друг от друга токопроводящих пластин. Каждая из

этих пластин является аналогом соответствующего участка площадки контакта. От распределителя 2 на пластины токопроводящего элемента подается электрический потенциал, моделирующий правую часть уравнения (5) при заданном сближении упругих тел. Таким образом, непрерывное распределение потенциала заменится ступенчатым.

При решении пространственных контактных задач с помощью электрического моделирования важным является определение формы и размеров площадки контакта для тел различной конфигурации.

Как известно [4], контур площадки контакта можно определить как линию пересечения контактирующих поверхностей, которым сообщено заданное сближение по общей нормали в первоначальной точке контакта. При таком способе определения площадки контакта, проекция ее контура на касательную плоскость в общем случае уже не будет эллипсом. Известно, что при таком способе определения площади контакта ее размеры будут превышать реальные.

Поэтому для определения истинных размеров площади контакта поступаем следующим образом:

1. Задаемся сближением  $\delta$  упругих тел и, выбрав определенный шаг изменения  $\delta_i$  – от 0 до ожидаемого значения, определяем форму и размеры площади контакта как линии пересечения контактирующих поверхностей.

2. Используя полученные результаты, изготавливаем аналог площадки контакта, который представляет собой набор токопроводящих пластин (в случае осесимметричной задачи аналог представляет собой набор концентрично расположенных колец).

3. Разбиваем поверхность аналога на ряд малых площадок  $F$ .

4. С помощью зонда и измерительного комплекса определяем плотность заряда на каждой из площадок, после чего определяем значение полного поверхностного заряда  $Q$ , которое в соответствующем масштабе дает значение силы  $P$ , действующей на упругие тела

$$P = Q \cdot \gamma_p,$$

где  $\gamma_p$  – масштабный коэффициент.

5. Постепенно изменяя количество токопроводящих пластин, и, проводя измерения по п. 4, добиваемся того, чтобы полученная сила  $P$  была равна заданной силе  $P_3$ , т. е. необходимо соблюдение условия

$$Q \cdot \gamma_p = P_3.$$

6. Зная размеры аналога площади контакта, используя его геометрическое подобие площади контакта, определяем действительные размеры последней.

Предполагаемая методика определения формы и размеров площади контакта была проверена при решении контактных задач, аналитическое решение для которых известно, таких, например, как контакт двух сферических тел, контакт двух цилиндров с взаимно перпендикулярными осями и др.

**Методика решения задачи.** Зная ожидаемое сближение  $\delta$  упругих тел, выбираем определенный шаг изменения  $\delta$  от нуля до ожидаемого значения.

Производим автоматическое построение контуров площадок контакта

для каждого значения  $\delta$ . Зная силы, действующие на зубья, по вышеприведенной методике определяем формы и размеры площадок контакта. На основе полученных результатов изготавливаем аналоги площадок контакта. На рисунке 2 показаны такие аналоги для точек контакта на входе и выходе из зацепления зубьев.

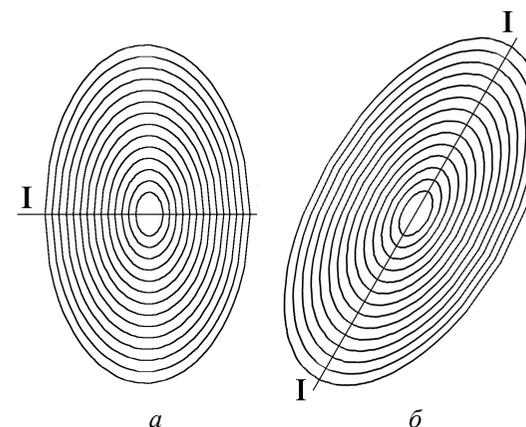


Рисунок 2 – Аналоги площадок контакта: а – для точки входа зубьев в зацепление; б – для точки выхода из зацепления. I-I – линия сечения

ответствующих точках площадки контакта.

Из приведенных на рисунке 3 эпюр контактных давлений по сечениям I-I рассматриваемых площадок контакта, построенных по результатам эксперимента (1) и по Герцу (2), следует, что в общем случае распределение контактных давлений по площади контакта отличается от герцевского. Максимальное значение контактного давления смещается относительно геометрического центра эллиптической площадки контакта.

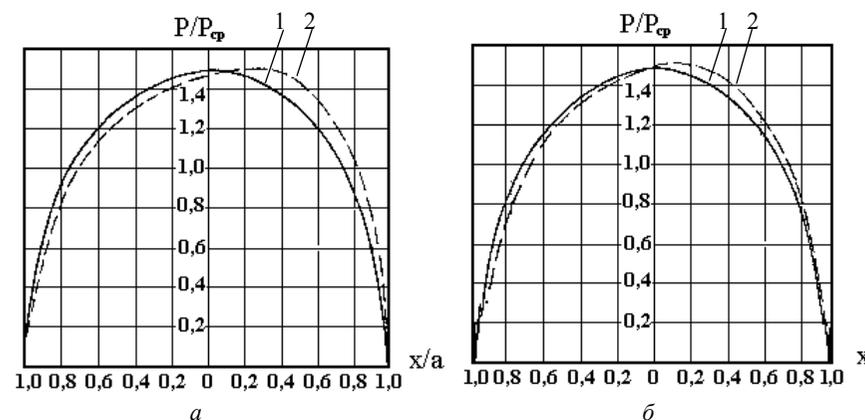


Рисунок 3 – Эпюры контактных давлений по сечению I-I: а – для точки входа зубьев в зацепление; б – для точки выхода из зацепления; 1 – эксперимент; 2 – расчет по Герцу

Таким образом, предлагаемый метод решения контактных задач позволяет установить действительный закон распределения контактных давлений, что представляет известный интерес при расчете на изнашивание элементов высших кинематических пар.

Для оценки погрешности метода предварительно был решен ряд задач, аналитическое решение которых известно. В частности, были решены задачи о контакте двух сферических тел, шара и сферической впадины, двух цилиндров с перпендикулярными осями как с одинаковыми, так и различными радиусами (рисунок 4). Как известно, в последнем случае площадка контакта будет эллиптической.

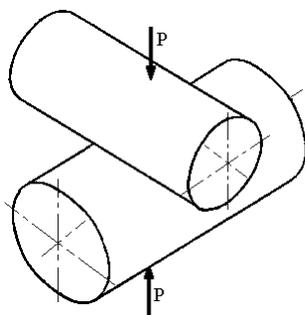


Рисунок 4 – Расчетная схема

В таблице 1 и 2 приведены результаты данных теории и эксперимента при решении задач о контакте сферических тел и цилиндров различных радиусов с перпендикулярными осями соответственно.

В таблице 1  $a$  – радиус площадки контакта, а в таблице 2  $a$  – длина большей полуоси эллиптической площадки контакта.

Как видно из таблиц, погрешность результатов эксперимента, в основном, не превышает 5 %.

**Вывод.** Таким образом, предлагаемый способ электрического моделирования пространственных контактных задач и созданное на его основе электромоделирующее устройство позволяют решать задачи о контакте двух упругих тел как с одинаковыми, так и различными упругими характеристиками с произвольной формой области контакта с точностью достаточной для инженерных приложений.

Таблица 1 – Результаты теоретических и экспериментальных решений для круговой площадки контакта

$r/a$	Значения $p/p_{cp}$	
	теоретические данные	экспериментальные данные
0,1	1,492	1,510
0,3	1,430	1,420
0,5	1,299	1,270
0,7	1,071	0,995
0,9	0,654	0,638

Таблица 2 – Результаты теоретических и экспериментальных решений для эллиптической площадки контакта

$x/a$	Значения $p/p_{cp}$	
	теоретические данные	экспериментальные данные
0,1	1,493	1,512
0,3	1,431	1,422
0,5	1,300	1,273
0,7	1,071	0,991
0,9	0,654	0,634

**Список литературы. 1.** Тариков Г.П. Электрическое моделирование пространственных контактных задач. – Гомель: ГГТУ, 2001. – 100с. **2.** Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 534с. **3.** Парселл, Э. Электричество и магнетизм / Э. Парселл. – М.: Наука, 1971. – 447с. **4.** Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с.

Поступила в редколлегию 02.05.12