

УДК 539.375

Г.П. ТАРИКОВ, д-р техн. наук; А.Т. БЕЛЬСКИЙ, канд. техн. наук;  
В.В. КОМРАКОВ, канд. техн. наук; В.Н. ПАРХОМЕНКО

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Республика Беларусь

**СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

*По результатам математической обработки данных эксперимента, построены эпюры контактных давлений, действующих по малой и большой полуосям эллиптической площадки контакта для рассмотренных случаев изменения температуры контактирующих тел.*

**Ключевые слова:** электрическое моделирование, контактные напряжения, износ, задачи термоупругости

При работе различных машин и механизмов в результате трения происходит повышение температуры контактирующих поверхностей. При этом изменяется их геометрия и распределение контактных напряжений по площадке контакта, что, в свою очередь, влияет на износ контактирующих поверхностей.

Покажем возможность исследования контактных задач термоупругости с помощью электрического моделирования.

Рассмотрим задачу о контакте двух упругих тел (рисунок 1) [1]. Если воспользоваться прямоугольной системой координат  $x_1, x_2, x_3$ , то уравнения их поверхностей можно записать в виде:

$$x_3^{(1)} = f_1(x, 0), \quad x_3^{(2)} = -f_2(x, 0) \quad (x = (x_1, x_2)).$$

Изменение температуры первого и второго тела обозначим соответственно  $T^{(1)}(x, 0)$  и  $T^{(2)}(x, 0)$ .

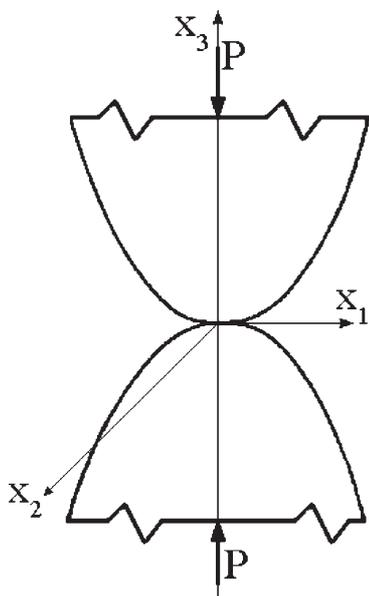


Рисунок 1 — Расчетная схема

Полагаем, что между телами осуществляется идеальный термический контакт. В этом случае температура  $t(x, 0)$  в каждой точке площадки контакта равна большей из двух величин.

Как известно [2], сближение упругих тел при их сжатии выражается следующим образом:

$$\delta = f_1(x, 0) + f_2(x, 0) + U_3^{(1)}(x, 0) - U_3^{(2)}(x, 0),$$

где  $U_3^{(1)}(x, 0)$ ,  $U_3^{(2)}(x, 0)$  — проекции вектора перемещения соответственно для первого и второго тела на ось  $x_3$ .

При учете действительной геометрической формы контактирующих тел, решение поставленной задачи сильно усложняется, т. к. выражение для функций  $U_3^{(1)}$  и  $U_3^{(2)}$  получаются весьма громоздкими.

Поэтому, при определении функций  $U_3^{(1)}$  и  $U_3^{(2)}$  полагаем, что размеры площадки контакта малы по сравнению с общими размерами соприкасающихся тел. Как известно, в этом случае первое и второе упругие тела можно заменить соответственно верхним и нижним полупространством с теми же упругими характеристиками.

Принимаем следующие механические граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^j(x, 0) = \sigma_{23}^j(x, 0) = 0, \quad 0 \leq |x| < \infty \\ U_3^{(1)}(x, 0) - U_3^{(2)}(x, 0) = \delta - f_1(x, 0) - f_2(x, 0), \\ \sigma_{33}^j(x, 0) = 0, \quad x \notin \Omega \\ x = |x_1, x_2|, \quad |x| = |x_1^2 + x_2^2|^{1/2}, \\ (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем температурные граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, 0) = T^{(2)}(x, 0) = t(x), \quad x \in \Omega \\ T^{(1)}(x, 0) = T^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \notin \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Нормальное напряжение в первом теле, действующее на площадке контакта, равно соответ-

ствующему нормальному напряжению, возникающему во втором теле.

С учетом первого и третьего граничных условий (1) и второго граничного условия (2) выражения для определения функций  $U_3^{(1)}$  и  $U_3^{(2)}$  приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 U_3^{(1)}(x,0) &= \frac{1-\nu_1}{2\pi\mu_1} \iint_{\Omega} \frac{p^{(1)}(x')dx'}{|x-x'|} - \\
 &\quad - \frac{(1-\nu_1)\alpha_1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{T^{(1)}(x')dx'}{|x-x'|}, \\
 U_3^{(2)}(x,0) &= -\frac{1-\nu_2}{2\pi\mu_2} \iint_{\Omega} \frac{p^{(2)}(x')dx'}{|x-x'|} - \\
 &\quad - \frac{(1-\nu_2)\alpha_2}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{T^{(2)}(x')dx'}{|x-x'|},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $p(x) = -\sigma_{33}(x, 0)$  — давление на площадке контакта;  $\nu_1, \nu_2$  — коэффициенты Пуассона материала первого и второго тела;  $\mu_1, \mu_2$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  — упругие постоянные Ламе и коэффициенты линейного температурного расширения материала первого и второго тела соответственно.

Удовлетворяя второму граничному условию (1), первому граничному условию (2) и, используя (3), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{1-\nu_1}{2\pi\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{2\pi\mu_2} \right) \iint_{\Omega} \frac{p(x')dx'}{|x-x'|} = \\
 &\quad = \delta - f_1(x,0) - f_2(x,0) + \\
 &\quad + \left( \frac{(1+\nu_1)\alpha_1}{2\pi} + \frac{(1+\nu_2)\alpha_2}{2\pi} \right) \iint_{\Omega} \frac{t(x')dx'}{|x-x'|},
 \end{aligned}$$

или

$$\left( \frac{1-\nu_1}{2\pi\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{2\pi\mu_2} \right) \iint_{\Omega} \frac{p(x')dx'}{|x-x'|} = f(x) + F(x), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \delta - f_1(x,0) - f_2(x,0), \\
 F(x) &= \left( \frac{(1+\nu_1)\alpha_1}{2\pi} + \frac{(1+\nu_2)\alpha_2}{2\pi} \right) \iint_{\Omega} \frac{t(x')dx'}{|x-x'|}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

При этом должно выполняться условие

$$P = \iint_{\Omega} p(x)dx. \tag{6}$$

Запишем уравнение (4) в виде:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(x')dx'}{|x-x'|} = W(x), \tag{7}$$

где

$$W(x) = \frac{f(x) + F(x)}{\frac{1-\nu_1}{2\pi\mu_1} + \frac{1-\nu_2}{2\pi\mu_2}}.$$

Для экспериментального решения уравнения (7) можно воспользоваться электростатической аналогией.

Как известно [2, 3], задача о распределении электрического заряда на поверхности токопроводящей пластины сводится к следующему интегральному уравнению

$$\iint_{\Omega} \frac{q(x')dx'}{|x-x'|} = \Psi(x), \tag{8}$$

где  $q$  — плотность заряда на поверхности токопроводящей пластины;

$$\Psi(x) = \psi(x')4\pi k_0 \epsilon,$$

$\psi$  — электростатический потенциал;  $k_0$  — диэлектрическая постоянная;  $\epsilon$  — диэлектрический коэффициент среды.

При этом, общее количество электричества на пластине будет:

$$Q = \iint_{\Omega} q(x,y)dx dy. \tag{9}$$

Аналогия уравнений (7) и (8) позволяет решать поставленную задачу с помощью электрического моделирования.

Рассмотрим методику решения задачи с помощью электро моделирующего комплекса [4, 5, 6] для случая эллиптической площадки контакта на примере контакта двух цилиндров разных радиусов с взаимно перпендикулярными осями (рисунок 2).

Для простоты полагаем, что упругие и температурные характеристики их материалов одинаковы и  $t(x) = t = \text{const}$  ( $x \in \Omega$ ).

В этом случае формула (1) принимает вид:

$$F(x) = \frac{(1+\nu)\alpha}{\pi} t \iint_{\Sigma} \frac{dx'}{|x-x'|}.$$

Функция  $F(x)$  определялась с применением численных методов и ЭВМ.

При решении поставленной задачи, токопроводящий элемент был выполнен в виде набора изолированных друг от друга эллиптических колец.

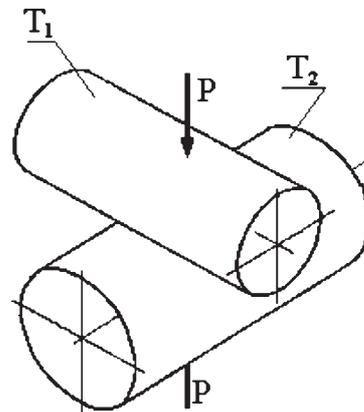


Рисунок 2 — Расчетная схема

Решение задачи осуществлялось следующим образом. Вначале решалась задача в предположении, что  $t(x) = 0$ . При этом:

1. Определялось сближение  $\delta$  упругих тел и размеры площадки контакта (большая  $a$  и малая  $b$  полуоси) при заданном значении силы  $P$ .
2. Принимая определенный шаг изменения  $\delta$  от нуля до известного значения, находились размеры площадок контакта для каждого значения  $\delta_r$ .
3. Используя данные, полученные при выполнении п. 2, вычислялись характерные размеры эллиптических колец токопроводящего элемента.
4. На каждое из колец подавалось электрическое напряжение в соответствии с правой частью уравнения (7) полагая, что  $t(x) = 0$ .
5. С помощью зонда и измерительного комплекса определялась плотность заряда в рассматриваемых точках поверхности токопроводящего элемента.
6. Определялись значения контактного давления в соответствующих точках площадки контакта.
7. Из выражения (9) определялся полный заряд  $Q_{t=0}$  на поверхности токопроводящего элемента, который моделировал силу  $P$ .

В результате нагрева цилиндров до определенной температуры, на площадке контакта устанавливалась температура  $t = \text{const}$ . При этом размеры области контакта и значение  $\delta$  уменьшались, что моделировалось уменьшением количества колец токопроводящего элемента и изменением величины подаваемых на них электрических потенциалов в соответствии с правой частью уравнения (7).

Постепенно уменьшая количество колец, решалось уравнение (7) до выполнения условия

$$Q_{t=\text{const}} = Q_{t=0}.$$

Зная размеры аналога, определялись размеры площадки контакта и значения, возникающих на ней контактных давлений. Величина сближения  $\delta$  контактирующих тел, моделировалась максимальным значением электрического потенциала, подаваемым на токопроводящий элемент.

Рассмотрим результаты решения поставленной задачи по приведенной выше методике.

Исходные данные были приняты следующими:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 = 0,3, \quad \mu_1 = \mu_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ \alpha = 0,125 \cdot 10^{-4}, \quad P = 10 \text{ кН}, \\ R_1 = 2 \text{ см}, \quad R_2 = 4 \text{ см}. \end{aligned}$$

Задача решалась при увеличении температуры от  $0^\circ$  до  $600^\circ$  с интервалом, равным  $150^\circ$ .

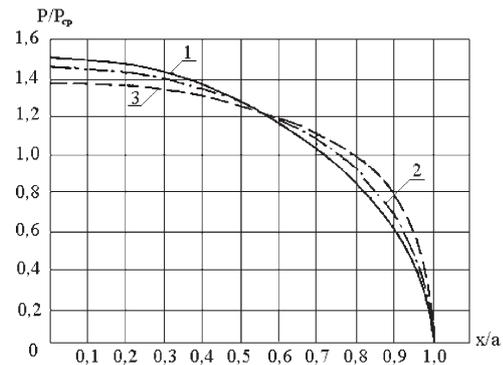


Рисунок 3 — Эпюры контактных давлений

По результатам математической обработки данных эксперимента, построены эпюры контактных давлений, действующих по малой и большой полуосям эллиптической площадки контакта для рассмотренных случаев изменения температуры контактирующих тел. В качестве примера на рисунке 3 показаны такие эпюры при  $t = 0^\circ$  — 1,  $150^\circ$  — 2,  $450^\circ$  — 3, построенные по большей полуоси.

Из рисунков видно, что увеличение температуры контактирующих тел, приводит к заметному перераспределению контактного давления на площадке контакта и изменению значений сближения упругих тел и размеров площадки контакта.

#### Список литературы

1. Бородачев, Н.М. К решению контактной задачи термоупругости с помощью электрического моделирования / Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков // АН СССР. Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1992. — № 1. — С. 110—114.
2. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. — М.: Наука, 1980. — 303 с.
3. Способ решения пространственной задачи о контакте двух упругих тел с учетом износа с помощью электрического моделирования / Г.П. Тариков [и др.] // Механика: 2011: сб. науч. докл. V Белорус. конгресса по теоретич. и прикладной механике, Минск, 26—28 окт. 2011 г. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; — редкол.: М.С. Высоцкий [и др.] — Минск, 2011, С. 295—300.
4. Электромоделирующий комплекс для решения пространственных контактных задач / Тариков Г.П. [и др.] // Механика: 2011: сб. науч. докл. V Белорус. конгресса по теоретич. и прикладной механике, Минск, 26—28 окт. 2011 г. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; — редкол.: М.С. Высоцкий [и др.] — Минск, 2011. — С. 339—344.
5. Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач: пат. №3295 / Г.П. Тариков, В.В. Комраков, Н.В. Акулов, В.А. Барабанцев // Афіцыйны бюл. Нац. Цэнтр інтэлектуал. уласнасці. — опубл. 28.02.07. — № 1(54). — С. 202.
6. Электромоделирующее устройство для решения пространственных контактных задач: пат. №7456 / Г.П. Тариков, В.В. Комраков, П.Ф. Станкевич // Афіцыйны бюл. Нац. Цэнтр інтэлектуал. уласнасці. — опубл. 30.08.11. — № 4. — С. 220.

Tarikov G.P., Belsky A.T., Komrakov V.V., Parkhomenko V.N.

#### Method of solution the space problem on the contact of two elastic bodies with account of temperature and using electrical model analysis

According to the results of mathematical processing of the experimental data contact pressure diagrams were constructed. They act upon the minor and major semi-axes of the elliptic contact area for the examined cases of the contacting bodies temperature change.

Поступил в редакцию 14.09.2012.