

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Автоматизированный электропривод»

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**ПОСОБИЕ**

**по одноименному курсу для студентов  
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы  
мобильных и технологических машин»  
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2009

УДК 681.5.01(075.8)  
ББК 32.965я73  
Т33

*Рекомендовано научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 4 от 09.02.2009 г.)*

Составители: *В. И. Луковников, А. В. Козлов, В. А. Савельев*

Рецензент: зав. каф. «Гидропневмоавтоматика» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук,  
доц. *Д. Л. Стасенко*

**Теория** автоматического управления : пособие по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» днев. и заоч. форм обучения / сост.: В. И. Луковников, А. В. Козлов, В. А. Савельев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 137 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены базовые положения теории автоматического управления линейными гидропневмосистемами и основного аппарата теории – операторно-частотного метода. Изложены методы анализа и синтеза линейных и линеаризованных систем управления гидропневмосистемами.

Для студентов специальности специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» дневной и заочной форм обучения

УДК 681.5.01(075.8)  
ББК 32.965я73

© Луковников В. И., Козлов А. В.,  
Савельев В. А., составление, 2009  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2009

## ВВЕДЕНИЕ

Теория управления в настоящее время является одной из важнейших технических наук общего применения. Она дает основную теоретическую базу для исследования и проектирования любых автоматических и автоматизированных систем во всех областях техники и деятельности человека.

Теория автоматического управления и регулирования изучает процессы управления, методы их исследования и основы проектирования автоматических систем и входит в науку под общим названием кибернетика.

Первые автоматы, т.е. машины, работающие без участия человека, были созданы очень давно, еще в Древней Греции и служили они, как правило, для религиозных и развлекательных целей.

Первые автоматические устройства промышленного назначения были разработаны в связи с появлением паровых машин. Изобретение первого в мире промышленного регулятора было осуществлено русским механиком И.И. Ползуновым в 1765 году. Это был регулятор, поддерживающий уровень воды в котле паровой машины. Предложенный им принцип регулирования по отклонению является одним из основных принципов построения современных систем автоматического управления. Также большой вклад в становлении теории автоматического управления внес Д. Уайт, разработавший автоматический регулятор скорости вращения вала паровой машины.

Широкое распространение получил также принцип регулирования по возмущению, названный в честь французского инженера, математика, Ж.В. Понселе. Согласно этому принципу, в системе управления происходит измерение сигнала возмущения и при помощи канала обратной связи происходит компенсация возмущающего воздействия, благодаря чему можно построить систему инвариантную к внешним возмущениям.

В наше время системы автоматического управления нашли широкое применение во всех областях деятельности человека – в промышленности, на транспорте, в связи, в научных исследованиях и т.д.

При их исследовании с научными или инженерными целями в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач. К первому типу можно отнести задачи анализа, когда требуется определить характеристики заранее заданной системы. Во втором случае требуется спроектировать систему, обладающую заданными характе-

ристиками, т.е. решить задачу синтеза. В этом случае современная теория автоматического управления использует два основных подхода к анализу и синтезу систем. Первый подход сводится к составлению структурной схемы системы автоматического управления и определению передаточных функций отдельных элементов и всей системы в целом. Второй подход основан на возможности описания поведения системы некоторым числом дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния с начальными условиями. Методы анализа и синтеза систем автоматического управления, использующие первый подход принято называть операторно-частотными методами. Второй подход описания поведения систем автоматического управления, принято называть методами пространства состояния.

В данном учебном пособии будут изложены базовые основы операторно-частотных методов анализа и синтеза систем автоматического управления, ориентированные на гидравлические системы рабочих машин.

## **В.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Автоматика – это наука о техническом использовании элементов, устройств и систем, выполняющих свои функции без вмешательства человека.

Теория автоматического управления – это наука о принципах построения (синтеза) и расчёта (анализа) систем автоматики.

Системы автоматики, или автоматические системы применяются в различных областях техники и имеют различную физическую природу своих элементов (механика, гидравлика, электротехника, электроника, пневматика, теплотехника и т.д.).

Теория автоматического управления выявляет и использует общие закономерности анализа и синтеза системы автоматического управления независимо от их физической сущности.

Автоматическое управление – изменение некоторой физической величины по требуемому закону при помощи системы автоматического управления, т.е. без вмешательства человека.

Автоматический регулятор – устройство, осуществляющее автоматическое управление.

Объект регулирования – устройство, над которым осуществляется автоматическое управление. В качестве его может служить самолет, станок, электродвигатель, гидropневмосистема рабочей машины.

Система автоматического управления – это агрегат, объединяющий автоматический регулятор и объект регулирования.

Основной задачей автоматического управления является поддержание определённого закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в объекте регулирования, без непосредственного участия человека. Эти величины называются управляемыми величинами.

Если в качестве объекта регулирования рассматривается, например, гидравлический двигатель поршневого типа, то управляемой величиной будет линейное перемещение его поршня, а управляющей величиной – электрический или механический сигнал задания.

Примерами автоматических систем могут служить:

1. Автомат включения освещения, в котором имеется фотоэлемент, реагирующий на силу дневного света и специальное устройство для включения освещения, срабатывающее от определённого сигнала фотоэлемента. Фотоэлемент это такое устройство, которое вырабатывает выходной сигнал в виде электрического напряжения пропорциональный освещённости окружающей среды.

2. Автомат, выбрасывающий какие-либо определённые предметы (билеты, конфеты, игрушки) при опускании в него определённой комбинации монет.

3. Следящая система, на выходе которой с определённой точностью копируются произвольное во времени изменение какой-либо величины поданной на вход, например, система сопровождения, в которой ствол наземного орудия автоматически поворачивается за летящим самолетом.

4. Система автоматического управления скоростью вращения электродвигателя, поддерживающая постоянную угловую скорость электродвигателя независимо от внешней нагрузки.

5. Гидроусилители, которые применяют для соединения маломощных чувствительных элементов или маломощных, преобразующих сигналы управления, элементов с более мощными исполнительными элементами.

6. Хлебопекарная печь, температура в которой должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса.

## В.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### В.2.1. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ПРИНЦИПУ ПОСТРОЕНИЯ

Классификация САУ по принципу построения приведена на рис.1.

Этот принцип построения САУ определяется способом соединения автоматического регулятора и объекта регулирования (рис.2).



Рис.1. Классификация САУ по принципу построения

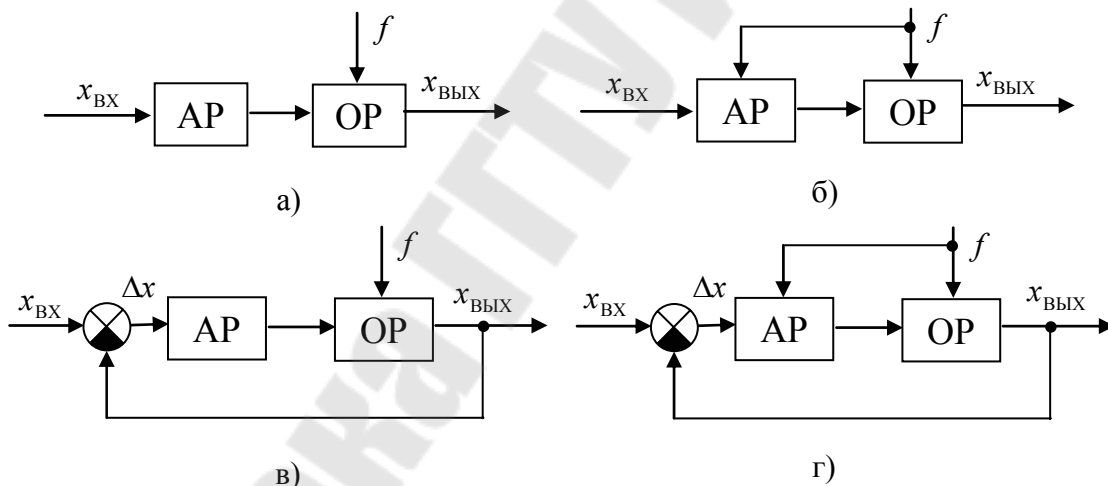


Рис.2. Общие функциональные схемы САУ, иллюстрирующие принципы регулирования по разомкнутой схеме (а) и по замкнутой схеме: по возмущению (б), по отклонению (в), с комбинацией регулирования по отклонению и возмущению (г)

На функциональных схемах САУ (рис.2) обозначено:

$x_{ВХ}$  – управляющий сигнал;  $x_{ВЫХ}$  – регулируемая величина (сигнал);  $\Delta x$  – сигнал ошибки регулирования,  $f$  – внешний сигнал возмущения.

Функциональная схема САУ – это условное графическое изображение САУ в виде квадратов, связанных стрелками друг с другом. Квадрат изображает элемент САУ, выполняющий определённую

функцию, причём эта функция кратко записана внутри квадрата буквами или символами.

Элемент САУ – конструктивно обособленная часть САУ, выполняющая определённую самостоятельную функцию по управлению объектами регулирования. Стрелки на функциональных схемах показывают направления передачи информации с помощью сигналов.

Сигнал – физическая величина (напряжение, ток, перемещение, давление, тепловое или световое излучение и т.д.), несущая информацию о состоянии элементов САУ. Эти сигналы имеют обычно различную физическую природу, поэтому далее, в аналитических преобразованиях они будут в относительных единицах.

В разомкнутых САУ сигналы  $x_{\text{вых}}$  и  $f$  никак не влияют на управляющий сигнал  $x_{\text{вх}}$  или автоматический регулятор (рис.2.а), а в замкнутых САУ влияют (рис.2.б,в,г), так как каналы передачи сигналов образуют замкнутые контуры.

Если в процессе управления учитывается, а затем компенсируется возмущение  $f$ , то такой подход называется принципом Понселе – регулированием по возмущению (рис. 2.б).

Если же в процессе управление  $x_{\text{вых}}$  сравнивается с заданием  $x_{\text{вх}}$ , а затем отклонение  $\Delta x = x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}}$  компенсируется, т.е. устремляется к нулю, то такой подход называется принципом Ползунова–Уатта, или регулированием по отклонению (рис.2.в).

В случае объединения обоих принципов создается комбинированное управление (рис.2.г).

В процессе управления по возмущению (рис.2.б) регулируемая величина не измеряется, а используется информация о внешнем воздействии (возмущении)  $f$ . При этом сначала необходимо выяснить, какое возмущающее воздействие является основным, а затем требуемым образом воздействовать на автоматический регулятор, чтобы значение управляемого сигнала не зависело от возмущения  $f$ .

Достоинством такого способа управления является возможность полной компенсации возмущения, а недостатком – невозможность учета всех возмущающих воздействий, так как в реальных САУ их оказывается очень много. Это, например, такие как колебания напряжения сети электропитания, разогрев обмоток и магнитопровода электрических машин, входящих в САУ, изменение давления и температуры рабочей жидкости гидросистемы и т.д. Чтобы учесть все эти факторы, приходится в САУ большое количество компенси-

рующих связей, что значительно усложняет настройку и понижает надежность работы САУ.

Более высокое качество управления позволяют получить замкнутые САУ, построенные по принципу управления по отклонению, так как применение даже одной обратной связи по управляемой величине позволяет учесть влияние всех возмущений и также их компенсировать, используя астатические САУ. Недостатком принципа управления по отклонению является инерционность системы и обратно-пропорциональная зависимость между точностью и устойчивостью САУ, поэтому часто используют комбинацию двух рассмотренных принципов управления, а именно комбинированное управление.

Комбинированные САУ имеют более высокое качество управления, чем системы, работающие только по отклонению, так как информация о значении возмущающего воздействия  $f$  позволяет автоматическому регулятору работать с «предвидением», т.е. начинать компенсацию внешнего возмущения, нарушающего нормальную работу объекта управления, раньше, чем возникнет достаточно большое отклонение. Одновременно это дает возможность повысить точность и быстродействие системы.

### **В.2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ЧИСЛУ КОНТУРОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ**

Если принять во внимание, что канал – это часть САУ, в котором информация передаётся в одном направлении, а контур регулирования – это замкнутая часть САУ, образованная несколькими каналами для регулирования одной выходной величины (координаты), то можно осуществить следующую классификацию САУ (рис.3).

Одноконтурные САУ имеют один контур регулирования одной величины, образованный каналами передачи сигналов: прямым ( $x_{вх}$ ), обратной связи ( $x_{ос}$ ) и (или) возмущения ( $f$ ).

В многоконтурных САУ таких контуров, а значит и регулируемых величин несколько, причём среди них могут быть главные и второстепенные. В них контуры управления могут быть автономными (рис.4.а), когда каждый управляющий сигнал воздействует только на одну «свою» регулируемую величину, и связанными (рис.4.б.в), т.е. влияющими друг на друга. В связанных САУ изменение хотя бы одной регулируемой или управляемой координаты ведёт к изменению других координат системы.



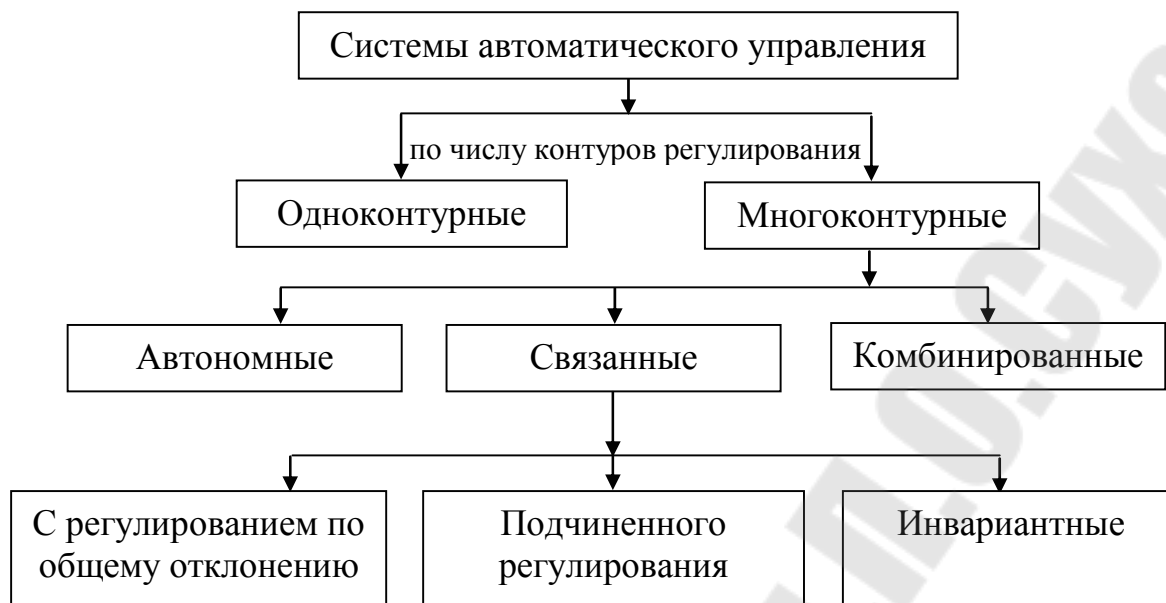


Рис.3. Классификация САУ по числу контуров регулирования

В САУ подчиненного регулирования (рис.4.в) контуры управления располагаются один внутри другого (концентрично), причем быстрое действие контуров «от центра к периферии» уменьшается. Это позволяет взаимосвязь контуров почти исключить за счет разделения процессов регулирования различных величин по времени.

Наличие в САУ не только контуров для управляющих сигналов, но и контуров по возмущающим воздействиям позволяет построить инвариантные САУ, в которых регулируемые величины «не чувствуют» возмущающих воздействий.

### В.2.3. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ХАРАКТЕРУ ПАРАМЕТРОВ

Основными характеристиками элементов и САУ в целом являются статическая характеристика  $x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}})$  в установившемся режиме и переходная характеристика  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ , при  $x_{\text{ВХ}} = 1(t)$  в динамическом.

Основным параметром статической характеристики является крутизна  $\frac{\partial x_{\text{ВЫХ}}}{\partial x_{\text{ВХ}}} = K$  – коэффициент передачи, а переходной – постоянная времени  $T$  и коэффициент затухания  $\xi$ . Характер этих параметров элементов и определяет данную классификацию (рис.5).

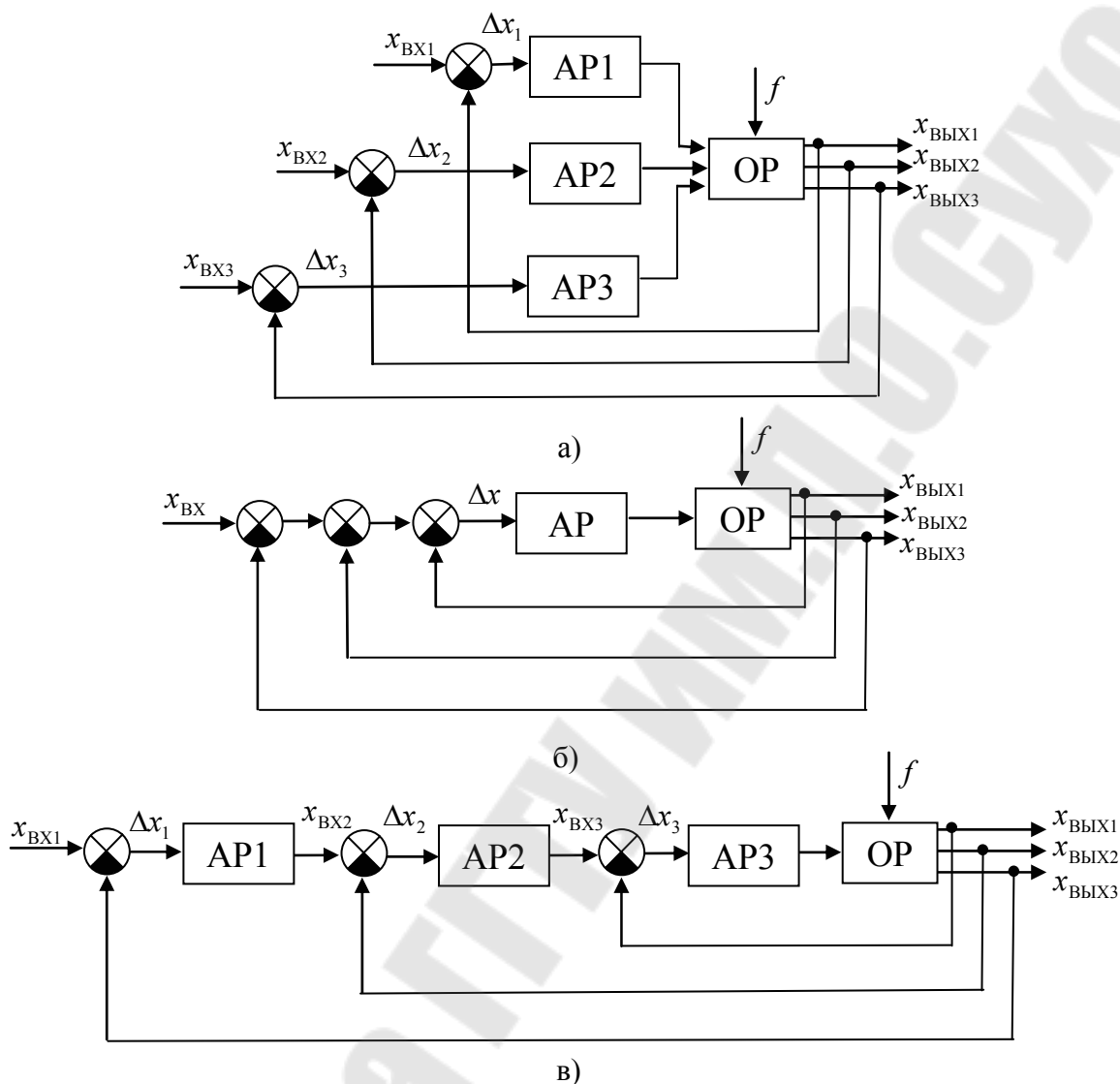


Рис.4. Функциональные схемы трехконтурных САУ автономной (а), с общим отклонением (б), подчиненного регулирования (в)

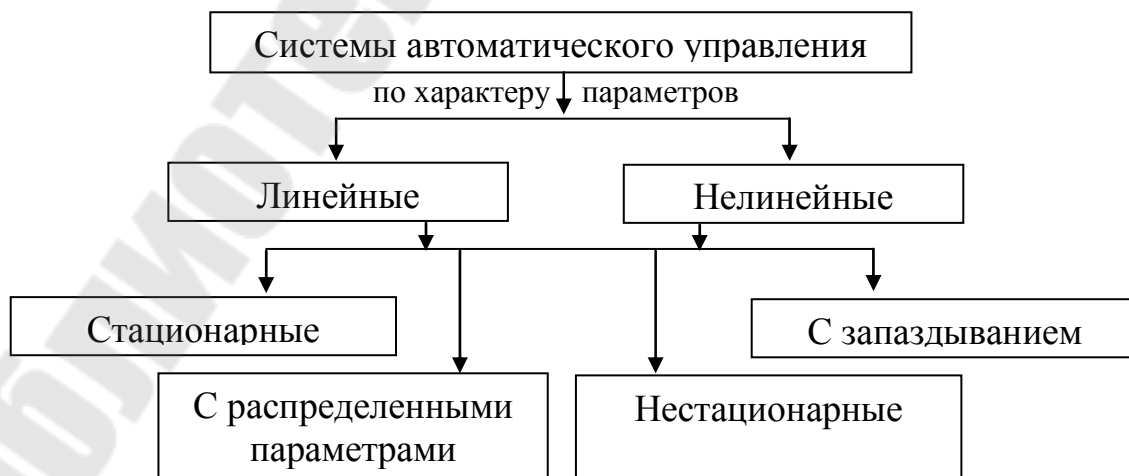


Рис.5. Классификация САУ по характеру параметров

Линейными (нелинейными) называются САУ, состоящие из элементов с линейными (нелинейными) статическими характеристиками (рис.6).

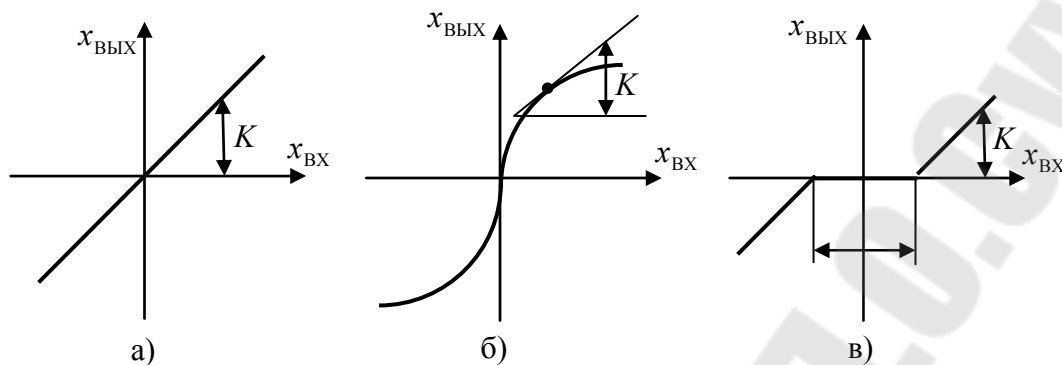


Рис.6 Статические характеристики линейных (а), нелинейных (б) элементов и элементов с зоной нечувствительности (в)

В стационарных САУ параметры элементов не изменяются во времени (коэффициенты в дифференциальных уравнениях, описывающих САУ – величины постоянные), а в нестационарных САУ изменяются.

САУ с запаздыванием имеет в своем составе, хотя бы один элемент, сигнал, на выходе которого, появляется с задержкой во времени относительно момента подачи входного сигнала. Статическая характеристика такого элемента имеет зону нечувствительности (рис.6.в).

В состав САУ с распределенными параметрами входят протяженные элементы, параметры которых распределены в пространстве (многозвенные фильтры, линии передачи высокочастотных сигналов, канаты, транспортеры и т.д.).

**Пример 1.** Рассмотрим пример получения статической характеристики потенциометрического датчика положения.

Датчик – это элемент САУ, преобразующий неэлектрический сигнал в электрический сигнал. Рассмотрим выполненный на основе переменного резистора потенциометрический датчик, преобразующий линейную координату положения его «движка»  $x_{\text{ВХ}}$  (входной сигнал) в электрическое напряжение между «движком» и отрицательным выводом потенциометра  $u_{\text{ВЫХ}}$  (выходной сигнал) Электрические схемы замещения потенциометрического датчика перемещения приведены на рис.7.

Электрическая схема датчика построена при допущениях, что индуктивность  $L$  и емкость  $C$  обмотки, а также сопротивление  $R$  контактов движка пренебрежимо малы. Кроме того, будем считать, что намотка обмотки выполнена равномерной, а нагрузка (входное сопротивление следующего за датчиком электронного блока) чисто активная.

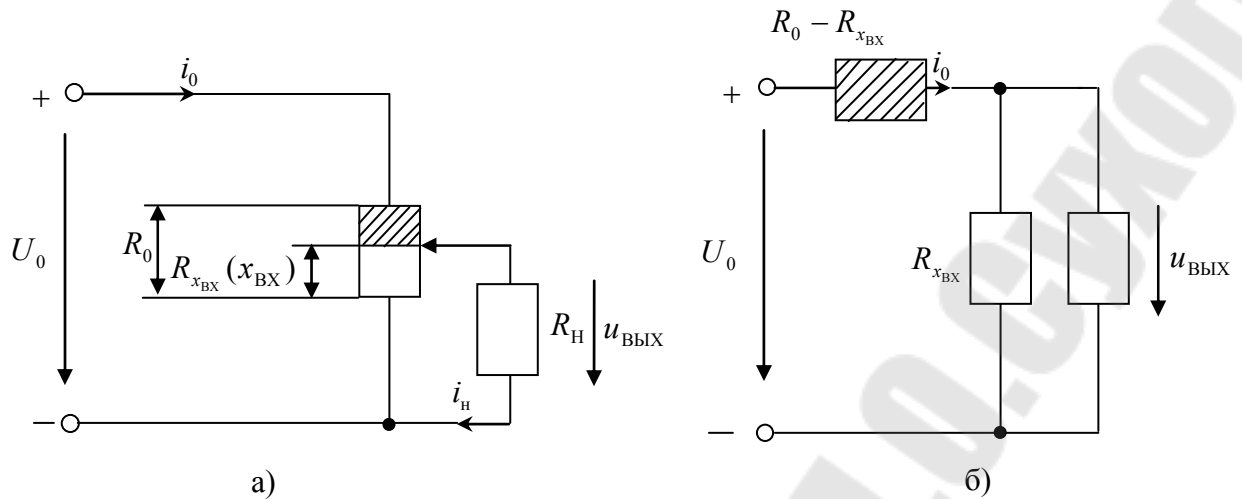


Рис.7 Электрическая схема потенциометрического датчика положения (а) и его последовательно - параллельная схема замещения (б)

В этом случае, согласно законам Ома и Кирхгофа, можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} u_{\text{ВЫХ}} = i_0 \cdot \frac{R_{\text{ХВХ}} \cdot R_{\text{H}}}{R_{\text{ХВХ}} + R_{\text{H}}}; \\ i_0 = \frac{u_0}{R_0 - R_{\text{ХВХ}} + \frac{R_{\text{ХВХ}} \cdot R_{\text{H}}}{R_{\text{ХВХ}} + R_{\text{H}}}}. \end{cases} \quad (1)$$

Исключая промежуточную переменную в (1)  $i_0$ , получим

$$u_{\text{ВЫХ}} = u_0 \cdot \frac{R_{\text{H}} \cdot R_{\text{ХВХ}}}{R_0 \cdot R_{\text{ХВХ}} - R_{\text{ХВХ}}^2 + R_0 \cdot R_{\text{H}}}$$

Учитывая, что  $R_{\text{ХВХ}} = \frac{R_0}{x_{\text{max}}} \cdot x_{\text{ВХ}}$ , и вводя относительные величины

входного  $x_{\text{вх}}^0 = \frac{x_{\text{ВХ}}}{x_{\text{max}}}$  и выходного  $u_{\text{вх}}^0 = \frac{u_{\text{ВЫХ}}}{u_0}$ , а также полного сопро-

тивления датчика  $\rho^0 = \frac{R_0}{R_{\text{H}}}$ , окончательно получим управление стати-

ческой характеристики в виде

$$u_{\text{ВЫХ}}^0 = \frac{x_{\text{ВХ}}^0}{\rho^0 \cdot x_{\text{ВХ}}^0 \cdot (1 - x_{\text{ВХ}}^0) + 1}. \quad (2)$$

Статические характеристики линейного потенциметрического датчика, построенные по (2), представлены на рис.8.

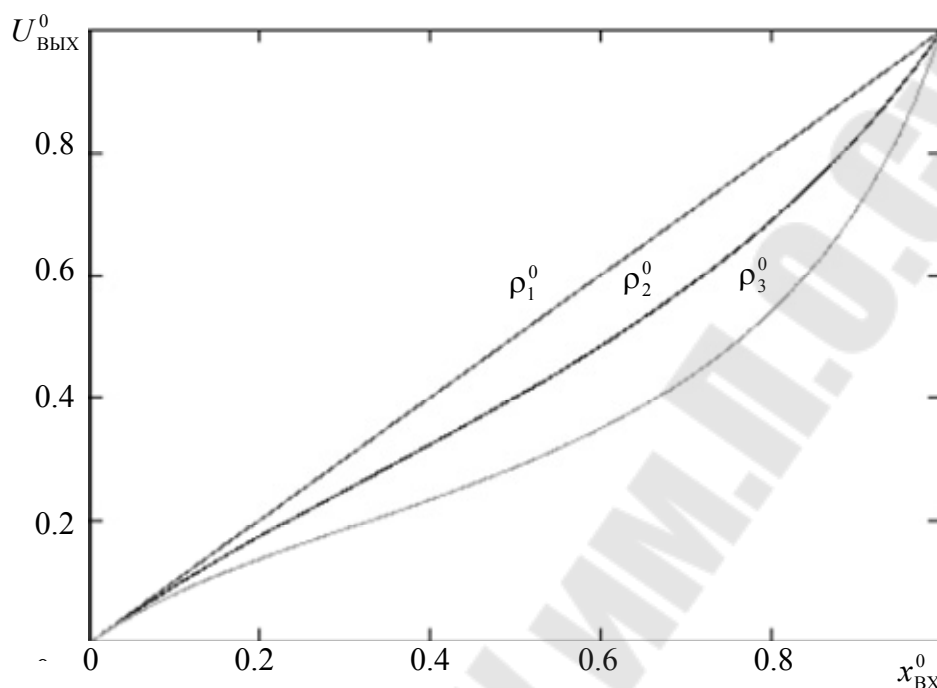


Рис.8. Статические характеристики линейного потенциметрического датчика

Анализ последнего соотношения и вид статических характеристик показывают, что при малых нагрузочных сопротивлениях  $R_n \ll R_0$  датчик является нелинейным элементом, а при сопротивлениях нагрузки  $R_n \gg R_0$  — линейным элементом со статической характеристикой  $u_{\text{ВЫХ}}^0 = x_{\text{ВХ}}^0$ .

В связи с этим, при проектировании САУ рекомендуется такие датчики подключать к электронным блокам, имеющим входные сопротивления значительно большие, чем сопротивление датчика.

#### В.2.4. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ХАРАКТЕРУ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Классификация САУ по характеру управляющего воздействия приведена на рис.9. Кратко дадим характеристику каждой системы.

В аналоговых САУ управляющие сигналы непрерывны во времени и могут быть постоянными, либо медленно меняющимися и переменными, несущими полезную информацию в величине, в знаке, в амплитуде, в частоте или в фазе управляющего сигнала (рис.10).

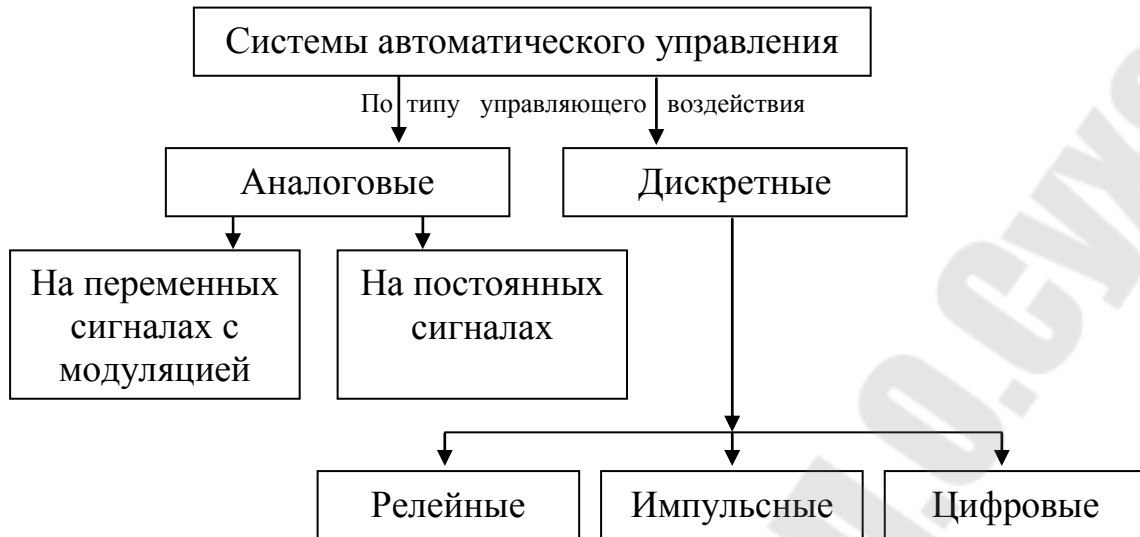


Рис.9. Классификация САУ по типу управляющего воздействия

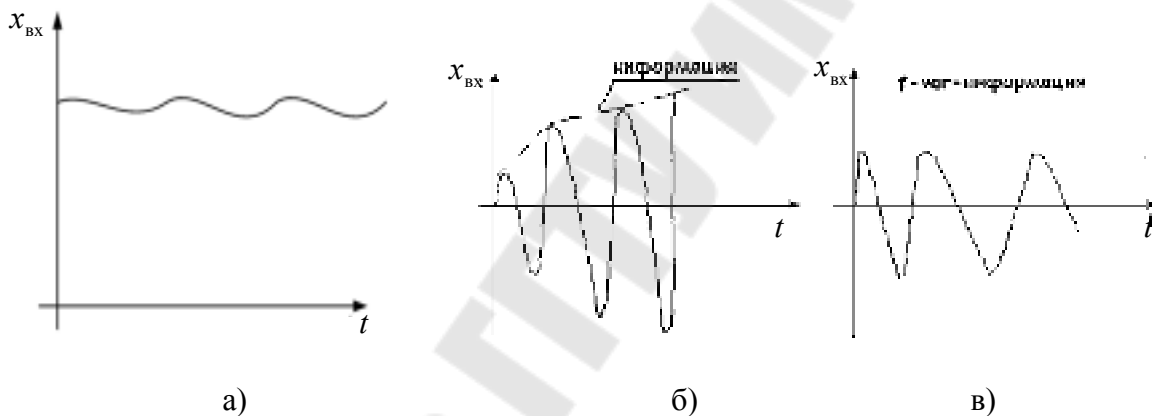


Рис.10. Аналоговые сигналы управления: постоянный а), переменные б) и в).

В дискретных САУ управляющие сигналы прерывисты во времени (рис.11.)

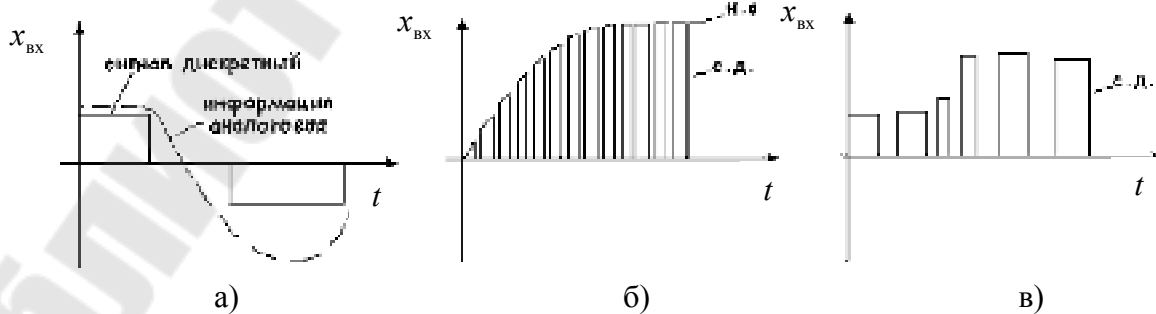


Рис.11. Дискретные сигналы управления: релейный а), импульсный (АИМ) б), цифровой в).

Например, в релейных САУ управляющее воздействие формируется с помощью, так называемых, релейных элементов. Релейный элемент - это переключающее устройство с двумя или более состояниями устойчивого равновесия. Одно состояние релейного элемента скачком сменяется другим состоянием под влиянием внешнего воздействия, например, изменения температуры, давления, электрического напряжения, освещенности, звука и т.д. Таким образом, в этих САУ квантование сигнала (разбиение диапазона его изменения на конечное число интервалов) происходит только по уровню. На рис.12. показано как с помощью релейного элемента происходит преобразование аналогового сигнала управления в дискретный.

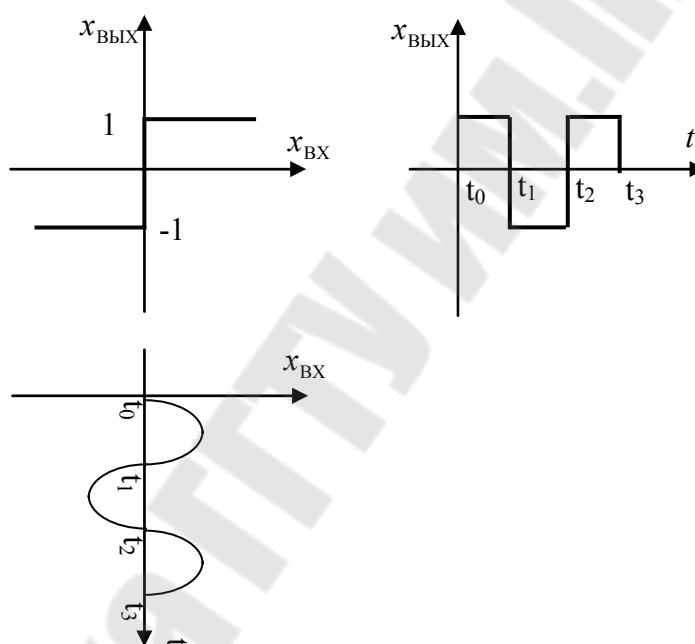


Рис.12. Иллюстрация принципа квантования аналогового синусоидального сигнала релейным элементом

В импульсных САУ управляющее воздействие представляется в виде последовательности импульсов. Последовательность импульсов определяется такими параметрами как длительность импульса ( $t_{и}$ ), период следования импульсов ( $T_{и}$ ) и амплитуда импульсов ( $U_{и}$ ). Таким образом, управляющий сигнал  $x_{вх}$  может быть модулирован по ширине, частоте и амплитуде импульсов. В связи с этим различают:

- широтно-импульсную модуляцию (ШИМ)

$$(t_{и} = \text{var}, T_{и} = \text{const}, U_{и} = \text{const});$$

- частотно-импульсную модуляцию

$$(t_{и} = \text{const}, T_{и} = \text{var}, U_{и} = \text{const});$$

- амплитудно-импульсную модуляцию (рис.11.б.)

$$(t_{и} = const, T_{и} = const, U_{и} = var);$$

В цифровых САУ управляющий сигнал может одновременно квантоваться и по уровню и по времени. Такое управление применяется для прецизионных (высокоточных) систем и для сложных объектов с меняющейся программой работы (рис. 11.в.).

## В.2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ ПО ТИПУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Классификация САУ по типу выходного сигнала приведена на рис.13.

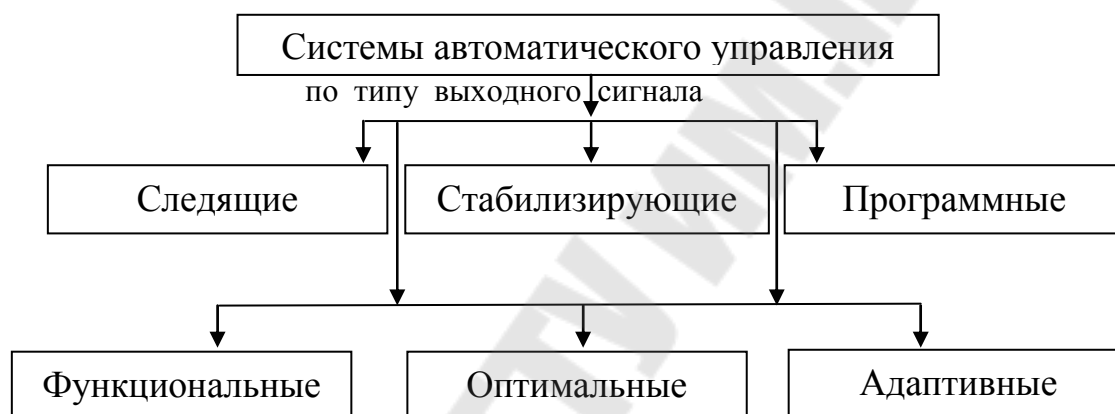


Рис.13. Классификация САУ по типу выходного сигнала (по закону воспроизведения)

Данный подход к классификации основан на разновидностях законов воспроизведения выходным сигналом  $x_{\text{ВЫХ}}$  входного управляющего воздействия  $x_{\text{ВХ}}$ .

Например, в стабилизирующих САУ  $x_{\text{ВЫХ}}(t) \approx x_{\text{ВХ}}(t) = const$ , в следящих САУ  $x_{\text{ВЫХ}}(t) \approx x_{\text{ВХ}}(t) = var$ , причем управляющий сигнал  $x_{\text{ВХ}}$  здесь может меняться произвольным образом, в программных САУ  $x_{\text{ВЫХ}}(t) \approx x_{\text{ВХ}}(t) = var$ , при этом процесс регулирования происходит по жестко заданной программе.

В функциональных САУ сигналы  $x_{\text{ВЫХ}}$  и  $x_{\text{ВХ}}$  во времени также меняются произвольно, но между собой эти сигналы связаны заданной функциональной зависимостью. Например,  $x_{\text{ВЫХ}} = a \cdot x_{\text{ВХ}}^2$ .

В оптимальных (экстремальных) САУ  $x_{\text{ВЫХ}}(t) \approx x_{\text{ВХ}}(t) = var$ , но в процессе регулирования поддерживается оптимум по каким-либо техническим показателям (максимальная точность  $\delta = \min$ , наивыс-



шее быстродействие  $t_{\text{пер}} = \min$ , минимальные потери  $\Delta P = \min$ , перегрев не выше допустимого  $\Delta t_{\text{пер}} \leq [\Delta t_{\text{пер}}]$  и т.д.).

Адаптивные (самонастраивающиеся) САУ выполняют цель регулирования "подстраиваясь" (автоматически) под изменение условий работы или возмущающих воздействий за счет перестройки своих технических характеристик.

Например, реальная электрогидравлическая следящая система марки ПЭГ-350, выпускаемая ОАО «Сейсмотехника» г. Гомель, выполнена по принципу регулирования по отклонению (принцип Ползунова-Уатта), имеет один контур регулирования по отклонению, построена на линейных элементах со стационарными параметрами, использует аналоговые управляющие сигналы постоянного тока. Нагрузкой для данной САУ является гидравлический двигатель, шток которого приводит в движение рабочий орган машины.

## **1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА САУ**

### **1.1. УСЛОВНО - ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САУ**

САУ могут иметь самую различную физическую природу: электрическую, механическую, гидравлическую, оптическую и т.д. С целью обобщения и идеализации (исключение физической сущности), САУ представляют для анализа или синтеза условно графически в виде блок-схем, функциональных схем, принципиальных схем и структурных схем.

Блок-схема, функциональная и структурная схемы графически изображаются в виде квадратов, связанных стрелками.

Стрелки показывают направление передачи информации, а внутри квадратов кратко записывают название элементов САУ для блок-схем, функцию, исполняемую элементом, в функциональных схемах и передаточную функцию в структурных схемах.

Передаточной функцией называют отношение операторных изображений по Лапласу выходной и входной величин, описывающих данный элемент управления.

Блок-схема и функциональная схема САУ дают общее представление о построении и технической реализации системы управления.

**Структурная схема САУ является предметом анализа и синтеза системы автоматического управления методами ТАУ!**

Принципиальная схема САУ - это условно-графическое изображение системы управления в виде электрической (с элементами механики и гидравлики) схемы соединения деталей, узлов и частей элементов, представленных по ЕСКД. Принципиальная схема - это начальный продукт для анализа и конечный продукт в результате синтеза САУ.

Если необходим анализ (расчет) САУ, то по принципиальной схеме составляют структурную схему и далее используют методы анализа по теории автоматического управления. Если же проводится синтез САУ, то по рассчитанной структурной схеме составляют приемлемый для реализации вариант принципиальной схемы.

**Пример 2.** Рассмотрим примеры блок-схемы, структурной и принципиальной схем одноконтурной автоматической следящей системы электрогидравлического усилителя. Такая автоматическая следящая система выполнена по принципу регулирования отклонения (принцип регулирования Ползунова - Уатта). Блок-схема такой САУ приведена на рис.14.

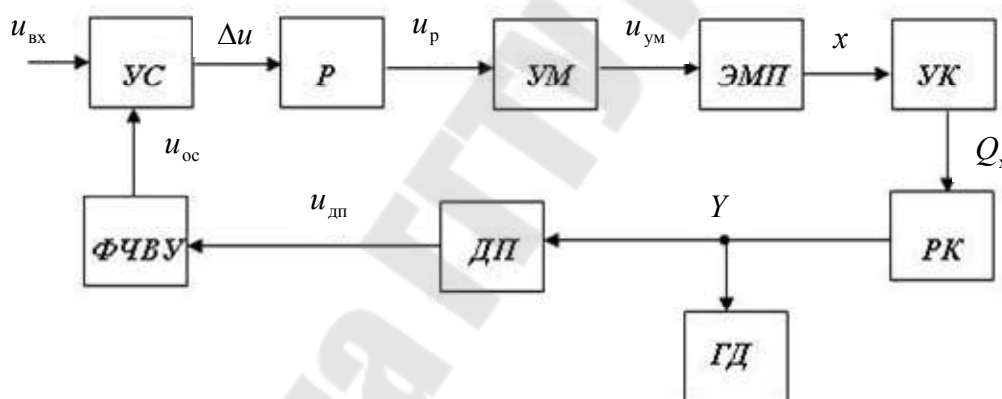


Рис.14. Блок-схема автоматической электрогидравлической следящей системы

На приведенной блок-схеме (рис.14) обозначено:

УС - устройство сравнения (обычно реализуется в виде электронной схемы), вырабатывающее сигнал рассогласования  $\Delta u$ :

$$\Delta u = u_{\text{вх}} - u_{\text{ос}};$$

Р - регулятор, обеспечивающий заданные показатели качества процесса регулирования по точности, быстродействию, динамичности, который вырабатывает сигнал  $u_p$ ;

УМ - усилитель мощности, целью которого является преобразование маломощного сигнала с выхода регулятора  $u_p$  в сигнал требуемой

мощности  $u_{ум}$  для управления электромеханическим преобразователем (ЭМП);

ЭМП – электромеханический преобразователь, выполняющий функции преобразования входного электрического сигнала  $u_{ум}$  в поступательное перемещение входного звена гидравлического усилителя  $x$ ;

УК-РК – двухкаскадный гидравлический усилитель типа «золотник-золотник». Здесь УК – управляющий каскад, а РК – распределительный каскад. Входной величиной РК является перемещение  $x$  золотника управляющего каскада УК, которое определяет расход рабочей жидкости  $Q_x$  в РК, а значит перемещение  $Y$  золотника распределительного каскада;

ГД – гидравлический двигатель, преобразующий энергию потока рабочей жидкости в механическую энергию ведомого звена (поршня), совершающего поступательное движение;

ДП – датчик положения, вырабатывающий электрический выходной сигнал  $u_{дп}$  в зависимости от величины перемещения поршня гидравлического двигателя  $Y$ . Как правило, в качестве таких датчиков положения используются трансформаторные датчики;

ФЧВУ – фазочувствительное выпрямительное устройство. Сигнал с выхода ДП  $u_{дп}$  переменного тока, поэтому его необходимо преобразовать в сигнал постоянного тока, знак которого зависит от фазы сигнала  $u_{дп}$ . Выходной сигнал ФЧВУ является сигналом обратной связи  $u_{ос}$ , который сравнивается с управляющим сигналом  $u_{вх}$  в УС.

По блок-схеме можно составить структурную схему (рис.15), в квадратах которой показываються передаточные функции  $W(p)$  элементов управления, входящих в САУ.

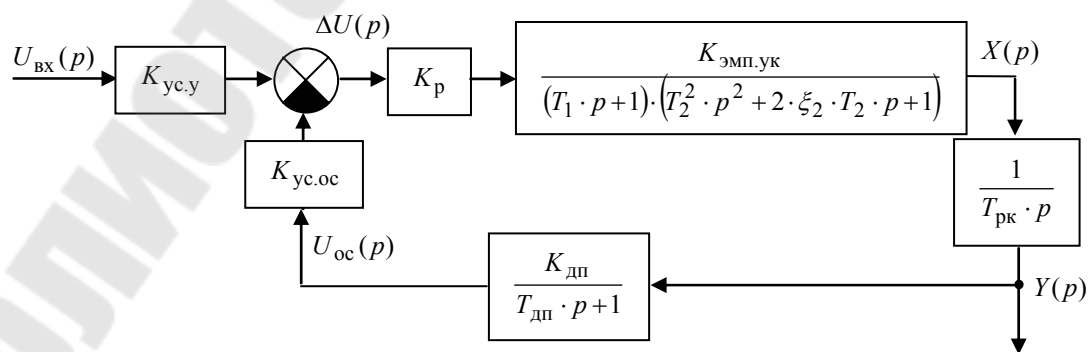


Рис.15. Структурная схема автоматической электрогидравлической следящей системы, составленная по блок-схеме, представленной на рис.14

На приведенной структурной схеме (рис.15) обозначено:

$K_{уc.у}$ ,  $K_{уc.ос}$  – коэффициенты передачи устройства сравнения УС;

$W_p(p)$  – передаточная функция регулятора. Если решается задача синтеза регулятора САУ, то она заранее не известна, если проводится анализ САУ, то  $W_p(p)$  известна и может, например, иметь вид ПИ-регулятора (пропорционально-интегрирующего)

$$W_p(p) = \frac{K_p \cdot (T_p \cdot p + 1)}{T_p \cdot p},$$

где  $K_p$ ,  $T_p$  – коэффициент передачи и постоянная времени ПИ-регулятора САУ соответственно;

$K_{эмп.ук}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\xi_2$  – коэффициент передачи, постоянные времени и коэффициент затухания управляющего каскада (УК) гидравлического усилителя с электромеханическим преобразователем (ЭМП) соответственно;

$T_{рк}$  – постоянная времени распределительно каскада гидравлического усилителя;

$K_{дп}$ ,  $T_{дп}$  – коэффициент передачи и постоянная времени датчика положения (ДП) соответственно.

И наконец, по структурной схеме САУ (рис.15) можно составить принципиальную схему (рис.16). На рисунке показан упрощенный вариант принципиальной схемы. При непосредственном проектировании САУ требуется иметь уточненный вариант такой схемы, где показаны все электронные блоки, с нанесенными параметрами ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) и электрические соединения.

Принцип работы, показанной в примере 2, ЭГСАУ следующий: при подаче входного напряжения  $u_{вх}$  на выходе устройства сравнения (УС) возникает сигнал рассогласования  $\Delta u$ , так как  $u_{вх} \neq u_{ос}$ . Далее электрический сигнал  $\Delta u$  через регулятор (Р) и усилитель мощности (УМ) воздействует на якорь электромеханического преобразователя (ЭМП), заставляя его поворачиваться и перемещать золотник управляющего каскада (УК) на величину  $x$ , а значит и золотник РК на величину  $Y$  до тех пор, пока отклонение  $\Delta U$  не станет нулевым ( $u_{вх} = u_{ос}$ ). В этом положении следящая система переходит в установившийся режим работы, стабилизируя положение золотника РК при возникновении возмущающих воздействий.

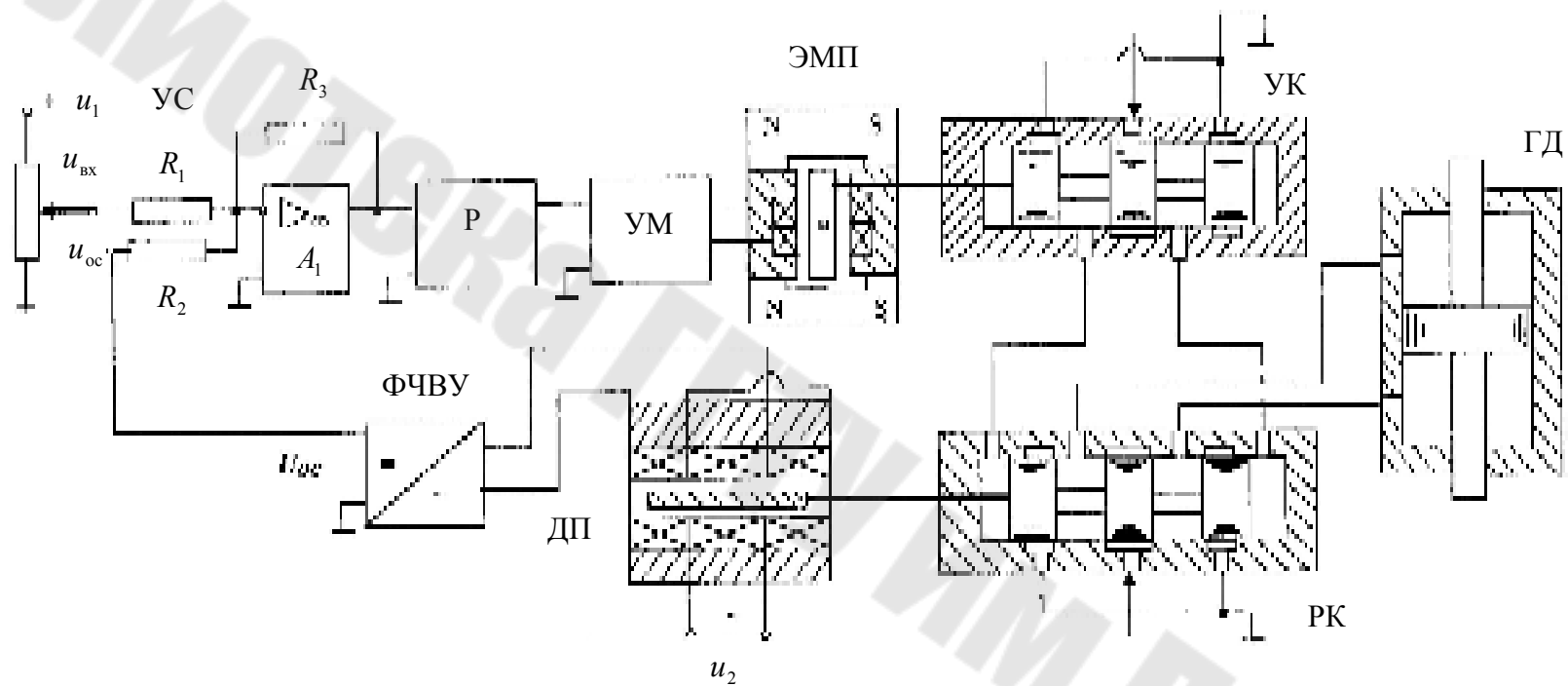


Рис.16. Принципиальная схема электрогидравлического усилителя: УС- устройство сравнения , Р- регулятор , УМ- усилитель мощности , ЭМП- электромеханический преобразователь ,УК- управляющий каскад ,РК- распределительный каскад , ГД- гидро-двигатель , ДП-датчик положения, ФЧВУ – фазочувствительный выпрямитель – усилитель.

## 1.2. ОСНОВЫ ОПЕРАТОРНО-ЧАСТОТНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА И СИНТЕЗА САУ

При исследовании систем автоматического управления в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач. Это задачи анализа и синтеза САУ. Для их решения современная теория автоматического управления использует два различных подхода.

Первый подход основан на возможности описания САУ дифференциальными уравнениями первого порядка относительно, так называемых переменных состояния и дальнейшего использования этих уравнений. Метод, в котором применяется такой подход, носит название метода пространства состояний. Его можно использовать для исследования как линейных так и нелинейных САУ. Преимуществами его являются широкие возможности формализации процедур анализа САУ, которые позволяют сложные аналитические задачи решать при помощи современной компьютерной техники.

Второй подход сводится к составлению структурных схем и определению передаточных функций элементов и систем управления. Этот подход имеет ограничения в использовании при анализе и синтезе нелинейных элементов и систем управления, но очень удобен при исследовании линейных САУ. Метод, использующий этот подход, называется операторно-частотным методом, базирующимся на операторном преобразовании Лапласа.

*В данном учебном пособии будут изложены основы операторно-частотного метода для решения задач анализа и синтеза линейных систем автоматического управления.*

### 1.2.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРАВЛЕНИЯ САУ

Анализ и синтез САУ производят по математическим моделям с помощью различных методов, приемов, критериев и правил.

Наиболее распространёнными способами математического описания, используемыми при анализе и синтезе САУ, являются дифференциальные и матричные уравнения, а также структурные схемы, которые являются интерпретацией дифференциальных уравнений в операторной форме записи.

Любой физический процесс или техническое устройство (тепловой двигатель, электрический или гидравлический двигатель, механическая передача, электрическая цепь и т.д.) в общем случае описыва-

ются нелинейным дифференциальным уравнением или линейным нестационарным дифференциальным уравнением вида (2)

$$\begin{aligned} a_1(t) \cdot \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_2(t) \cdot \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x_{\text{ВЫХ}} = \\ = b_1(t) \cdot \frac{d^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + \dots + b_m(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$  – нестационарные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие основные параметры элемента управления;

$b_1(t), \dots, b_m(t)$  – нестационарные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие входные воздействия на элемент управления.

Анализ и синтез САУ по уравнениям такого вида довольно трудоемок, поэтому, когда это возможно САУ или элементы управления, входящие в состав САУ линеаризуют в пределах рабочей точки (рабочая точка определяется по статической характеристике элемента управления). В результате такой математической операции САУ или элемент САУ становится линейным с постоянными коэффициентами, а дифференциальное уравнение (2) примет вид

$$a_1 \cdot \frac{d^n x_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_2 \cdot \frac{d^{n-1} x_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_1 \cdot \frac{d^m x_{\text{ВХ}}}{dt^m} + \dots + b_m, \quad (3)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – постоянные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие основные параметры элемента управления после линеаризации;

$b_1, \dots, b_m$  – постоянные коэффициенты дифференциального уравнения, определяющие входные воздействия на элемент управления после линеаризации.

Теперь к (3) уже можно применить операторное преобразование Лапласа, после чего (3) примет вид

$$\begin{aligned} A_1 \cdot p^n \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + A_2 \cdot p^{n-1} \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + \dots + A_n \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = \\ = B_1 \cdot p^m X_{\text{ВХ}} + \dots + B_m \end{aligned}$$

или

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{B_1 \cdot p^m + \dots + B_m}{A_1 \cdot p^n + A_2 \cdot p^{n-1} + \dots + A_n}. \quad (4)$$

Полученное выражение (4) представляет собой передаточную функцию элемента САУ.

Таким образом, многие физические процессы и технические устройства можно представить через передаточные функции  $W(p)$ , поэтому для анализа математической модели САУ необходимо четко знать и понимать, что собой представляют передаточные функции элементов системы управления и самой системы целиком.

**Передаточная функция элемента САУ - это отношение операторного изображения выходного сигнала элемента системы к операторному изображению его входного сигнала.**

Далее будем рассматривать только методы анализа и синтеза линейных и линеаризованных систем автоматического управления по структурным схемам.

Рассмотрим ряд примеров получения передаточных функций элементов систем управления.

**Пример 3.** Получим передаточную функцию гидравлического демпфера  $W_{\text{гд}}(p)$  (рис.17), при этом не будем учитывать влияние массы подвижных частей и примем за входную величину внешнюю силу  $F$ , действующую на поршень, а за выходную величину – перемещение поршня  $x$  под действием внешней силы  $F$ .

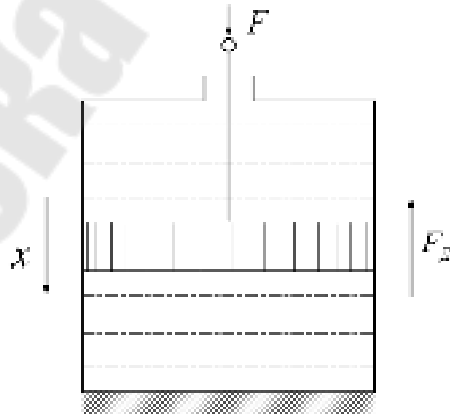


Рис.17. Гидравлический демпфер

Приложенной силе  $F$  будет противостоять демпфирующая сила  $F_d$  и по третьему закону Ньютона можно записать

$$F = F_d. \quad (5)$$



В свою очередь демпфирующая сила будет пропорциональна скорости перемещения поршня

$$F_d = c_1 \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (6)$$

где  $c_1$  – коэффициент демпфирования, пропорциональный вязкости жидкости и площади поршня и обратно пропорционально площади пропускного отверстия.

В операторной форме записи (6) примет вид

$$F_d(p) = c_1 \cdot p \cdot X(p). \quad (7)$$

Приравнявая уравнения (5) и (7) получим передаточную функцию гидравлического демпфера  $W_{гд}(p)$  как отношение операторных изображений выходной  $X(p)$  и входной  $F(p)$  величин в виде

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{c_1 \cdot p},$$

т.е. гидравлический демпфер описывается интегрирующим звеном (далее будут подробно рассмотрены типовые передаточные функции элементов и систем управления).

**Пример 4.** Найти передаточную функцию регулятора САУ, построенного на операционном усилителе по схеме рис.18.

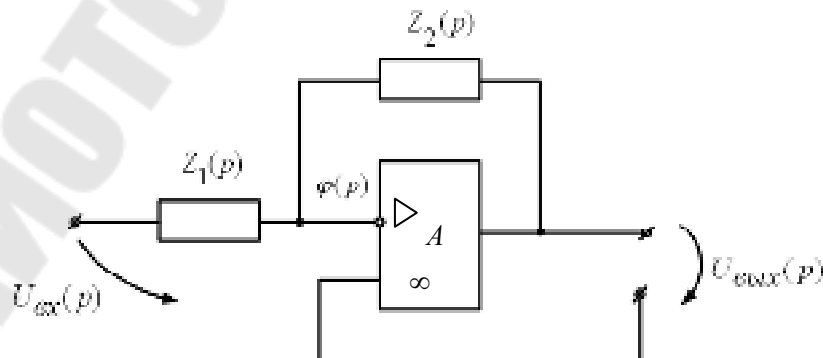


Рис.18. Электрическая схема регулятора САУ для примера 4

Используя метод узловых потенциалов, а также считая, что в идеальном операционном усилителе  $R_{\text{вх}} \rightarrow \infty, R_{\text{вых}} \rightarrow 0, K_{\text{оу}} \rightarrow \infty$  получим систему уравнений в операторной форме, описывающую регулятор САУ (рис.18).

$$\begin{cases} \varphi(p) \cdot \left( \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right) - U_{\text{вых}}(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{U_{\text{вх}}(p)}{Z_1(p)}, \\ U_{\text{вых}}(p) = -K_{\text{оу}} \cdot \varphi(p). \end{cases} \quad (8)$$

где  $Z_1(p), Z_2(p)$  – операторные сопротивления (входное и обратной связи) соответственно.

Выражая из системы уравнений (8) отношение операторных изображений выходного напряжения  $U_{\text{вых}}(p)$  к входному  $U_{\text{вх}}(p)$ , получим передаточную функцию регулятора в виде

$$W(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (9)$$

**Пример 5.** Найти передаточную функцию регулятора САУ, построенного на операционном усилителе по схеме рис.19., где имеются дополнительные операторные сопротивления делителя  $Z_3(p)$  и  $Z_4(p)$ .

Аналогично предыдущему примеру, в соответствии с методом узловых потенциалов составим систему операторных уравнений, описывающих регулятор (рис.19)

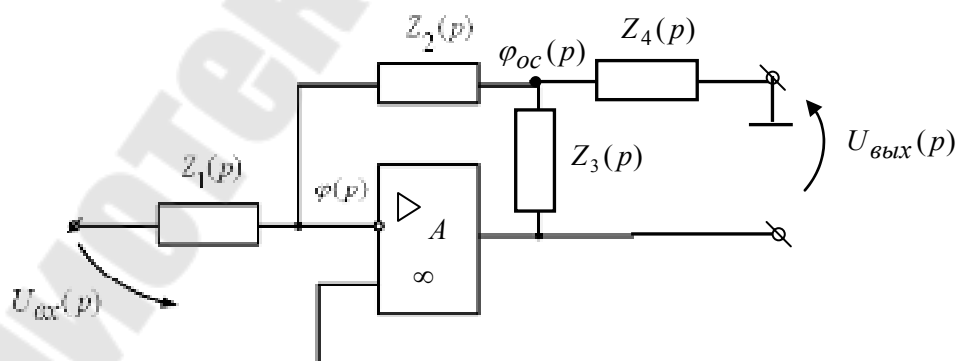


Рис.19. Электрическая схема регулятора САУ для примера 5

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(p) \cdot \left( \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)} \right) - \varphi_{oc}(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} - \\ - U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{R_{ex}} = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{Z_1(p)}; \\ \varphi_{oc}(p) \cdot \left( \frac{1}{Z_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p)} + \frac{1}{Z_4(p)} \right) - \\ - \varphi(p) \cdot \frac{1}{Z_2(p)} - U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{Z_3(p)} = 0; \\ U_{\text{ВЫХ}}(p) = -K_{oy} \cdot \varphi(p), \end{array} \right. \quad (10)$$

где  $Z_1(p)$ ,  $Z_2(p)$  – операторные сопротивления входное и обратной связи соответственно;

$Z_3(p)$ ,  $Z_4(p)$  – операторные сопротивления делителя.

Из третьего уравнения системы (10) следует, что  $\varphi(p) \rightarrow 0$  при  $K_{oy} \rightarrow \infty$ , тогда согласно первому уравнению системы (10) имеем

$$\varphi_{oc}(p) = -U_{\text{ВХ}}(p) \cdot \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (11)$$

Подставим (11) во второе уравнение (10) и получим

$$-U_{\text{ВХ}}(p) \cdot \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left( \frac{1}{Z_2(p)} + \frac{1}{Z_3(p)} + \frac{1}{Z_4(p)} \right) = U_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot \frac{1}{Z_3(p)}. \quad (12)$$

По (12) получим искомую передаточную функцию регулятора

$$W(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left[ 1 + \frac{Z_3(p) \cdot (Z_2(p) + Z_4(p))}{Z_2(p) \cdot Z_4(p)} \right]. \quad (13)$$

В операционных усилителях обычно  $|Z_2(p)| \gg |Z_3(p) + Z_4(p)|$ , поэтому в расчетах можно использовать приближенное соотношение для передаточной функции в виде (14)

$$W(p) \approx -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} \cdot \left[ 1 + \frac{Z_3(p)}{Z_4(p)} \right]. \quad (14)$$

**Пример 6.** Используя полученную в примере формулу (9), найти передаточную функцию пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора по схеме (рис. 20).

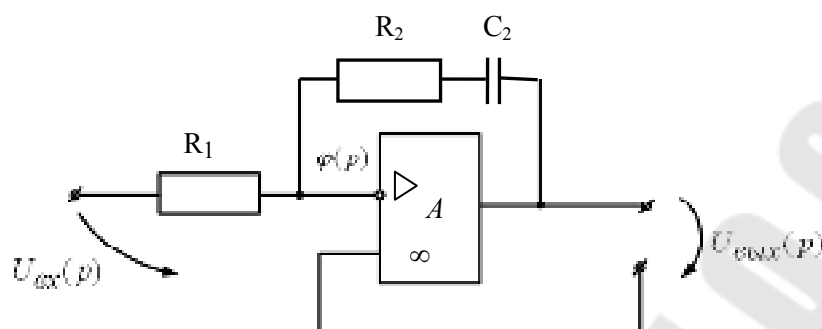


Рис.20. Электрическая схема ПИ-регулятора САУ для примера 6

Из рис.20 видно, что  $Z_1(p) = R_1$ , а  $Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}$ , тогда по (9) имеем

$$W(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}}{R_1} = -\frac{R_2 \cdot C_2 \cdot p + 1}{R_1 \cdot C_2 \cdot p}. \quad (15)$$

Обозначим через  $K = \frac{R_2}{R_1}$ , а через  $T = R_2 \cdot C_2$ , тогда передаточная функция (15) примет вид

$$W(p) = \frac{K \cdot (T \cdot p + 1)}{T \cdot p},$$

где  $K, T$  – коэффициент передачи и постоянная времени регулятора.

Знак минус, в выражении (15) появляется из-за подачи входного сигнала  $U_{вх}(p)$  на инверсный вход операционного усилителя и при расчетах его можно не учитывать.

### 1.2.2. ОПЕРАТОРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Один из вариантов электрогидравлического преобразователя (ЭГП) представлен на рис.21. Он является частью двухкаскадного электрогидравлического усилителя (ЭГУ) и состоит из связанной сис-

темы «электромеханический преобразователь с усилителем мощности – управляющий гидрокаскад» (ЭМП-УК). Подобные ЭГУ серийно выпускаются в научно-производственном объединении «Сейсмотехника» (Республика Беларусь, г. Гомель) под маркой ПЭГ-350.

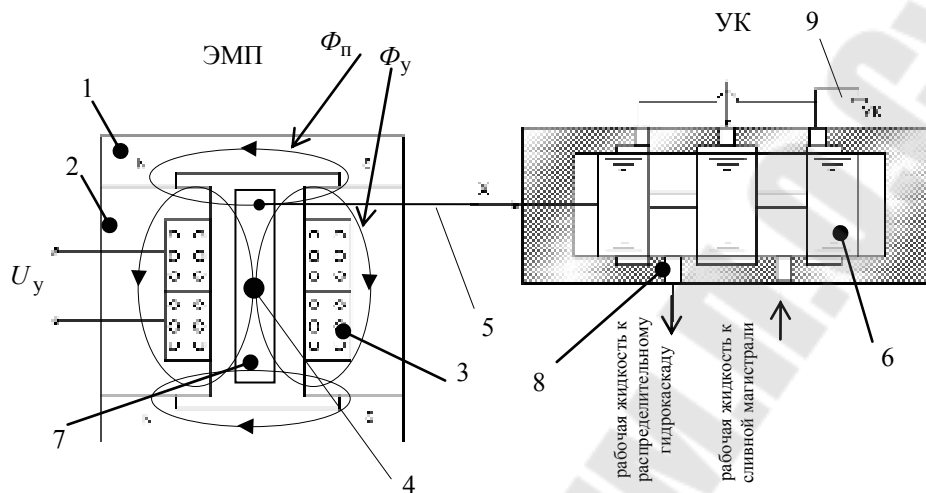


Рис.21. Конструкция электромеханического преобразователя (ЭМП) с управляющим гидрокаскадом (УК): 1- постоянные магниты; 2- магнитопровод ЭМП; 3- обмотка управления ЭМП; 4- торсион; 5-тяга; 6- поршень золотника УК; 7- якорь; 8- дросселирующая щель; 9- сливная магистраль.

Принцип работы ЭГП заключается в следующем. При отсутствии тока в обмотке управления 3 якорь ЭМП 7 находится в нейтральном положении. При подаче напряжения  $u_y$  в обмотке управления 3 появляется ток  $i_y$ , который создает магнитный поток  $\Phi_y$ . Складываясь в одних частях воздушного зазора, а в других вычитаясь из магнитного потока постоянного магнита  $\Phi_{\text{п}}$  он по закону Максвелла создаст различные электромагнитные силы притяжения  $F_{\text{эм}}$  в этих частях зазора, что заставит якорь 7 повернуться вдоль силовых линий магнитного поля (на рис.21. по часовой стрелке) на некоторый угол, который определяется жесткостью торсиона 4. Перемещение якоря ЭМП 7 передается через тягу 5 золотнику управляющего каскада 6, смещая его относительно нейтрального положения, в результате чего открывается дросселирующая щель 8, через которую рабочая жидкость из напорной магистрали поступает в одну из торцевых полостей золотника распределительного гидрокаскада (рис.16), а другая его торцевая полость соединяется со сливной магистралью 9. Под действием образо-

вавшегося перепада давлений на торцах, золотник распределительно-го гидрокаскада начнет смещаться, соединяя одну из полостей исполнительного гидродвигателя с напорной магистралью, а другую полость со сливной магистралью (рис.16).

Таким образом, входному сигналу  $U_y(p)$  (задание) будет по передаточной функции соответствовать выходной сигнал (регулирование)  $X(p)$ .

Для получения операторной математической модели ЭГП (рис.21) составим систему дифференциальных уравнений, описывающих по законам Кирхгофа и Ньютона электрическую и механическую схемы замещения ЭМП (рис.22).

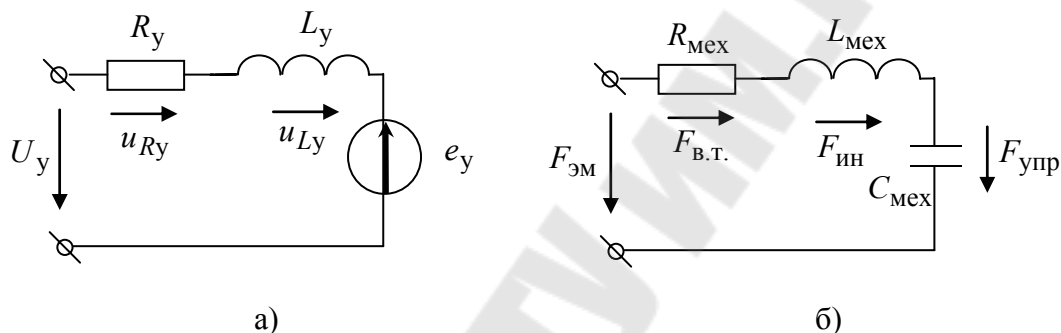


Рис.22. Схемы замещения электрической (а) и механической (б) частей ЭГП

По схемам замещения, (рис.22) составим общую систему уравнений, описывающих ЭГП

$$\begin{cases} u_y = u_{Ry} + u_{Ly} + e_y, \\ F_{эм} = F_{в.т.} + F_{ин} + F_{упр}, \end{cases} \quad (16)$$

где  $u_y = K_{ум} \cdot u_p$  – напряжение управления, подаваемое с регулятора САУ через усилитель мощности, В;

$K_{ум}$  – коэффициент передачи усилителя мощности (УМ) по напряжению, о.е.;

$u_p$  – электрическое напряжение на выходе регулятора САУ, В;

$u_{Ry} = R_y \cdot i_y$  – падение напряжения на активном сопротивлении обмотки управления (ОУ), В;

$u_{Ly} = L_y \cdot \frac{di_y}{dt}$  – падение напряжения на индуктивном сопротивлении обмотки управления (ОУ), В;

$R_y, L_y, i_y$  – активное сопротивление, индуктивность и электрический ток обмотки управления (ОУ) соответственно, Ом, Гн, А;

$e_y = N \cdot \frac{dx}{dt}$  – скоростная электродвижущая сила (ЭДС) ЭМП, В;

$x$  – перемещение золотника УК, м;

$F_{эм} = A \cdot i_y$  – суммарная электромеханическая сила, действующая на ЭГП, Н;

$A$  – коэффициент электромеханической связи,  $\frac{Вб}{м}$ ;

$F_{ин} = m_{зy} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$  – сила инерции, действующая на ЭГП, Н;

$m_{зy}$  – приведенная к оси золотника масса якоря, тяги и золотника управляющего гидрокаскада, кг;

$F_{в.т.} = f \cdot \frac{dx}{dt}$  – сила вязкого трения, действующая на ЭГП, Н;

$f$  – коэффициент вязкого трения,  $\frac{Н \cdot с}{м}$ ;

$F_{упр} = (C_{тор} + C_{гд} - B) \cdot x$  – сила упругости, действующая на электрогидравлический преобразователь, Н;

$C_{тор}, C_{гд}, B$  – жесткость торсиона, гидродинамическая жесткость и магнитная жесткость соответственно в ЭГП,  $\frac{Н}{м}$ ;

После подстановки и преобразований система уравнений (16) примет вид

$$\begin{cases} K_{ym} \cdot u_P = R_y \cdot i_y + L_y \cdot \frac{di_y}{dt} + N \cdot \frac{dx}{dt}, \\ m_{зy} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = A \cdot i_y - f \cdot \frac{dx}{dt} - (C_{ТОР} + C_{ГД} - B) \cdot x. \end{cases} \quad (17)$$

С целью получения структурной схемы и передаточных функций УК с ЭМП и УМ, запишем систему уравнений (17) в операторном виде

$$\begin{cases} K_{ум} \cdot U_p(p) = R_y \cdot I_y(p) + L_y \cdot p \cdot I_y(p) + N \cdot p \cdot X(p), \\ m_{зy} \cdot p^2 \cdot X(p) = A \cdot I_y(p) - f \cdot p \cdot X(p) - (C_{ТОР} + C_{ГД} - B) \cdot X(p). \end{cases} \quad (18)$$

Система уравнений (18) представляет собой операторную математическую модель электрогидравлического преобразователя.

### 1.2.3. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Преобразуем (18) к виду удобному для построения структурной схемы и получим

$$\begin{cases} I_y(p) = \frac{1}{R_y + L_y \cdot p} [K_{ум} \cdot U_p(p) - N \cdot p \cdot X(p)] \\ X(p) = \frac{A}{m_{зy} \cdot p^2 + f \cdot p + (C_{ТОР} + C_{ГД} - B)} \cdot I_y(p). \end{cases} \quad (19)$$

По (19) составим структурную схему электрогидравлического преобразователя (рис.23).

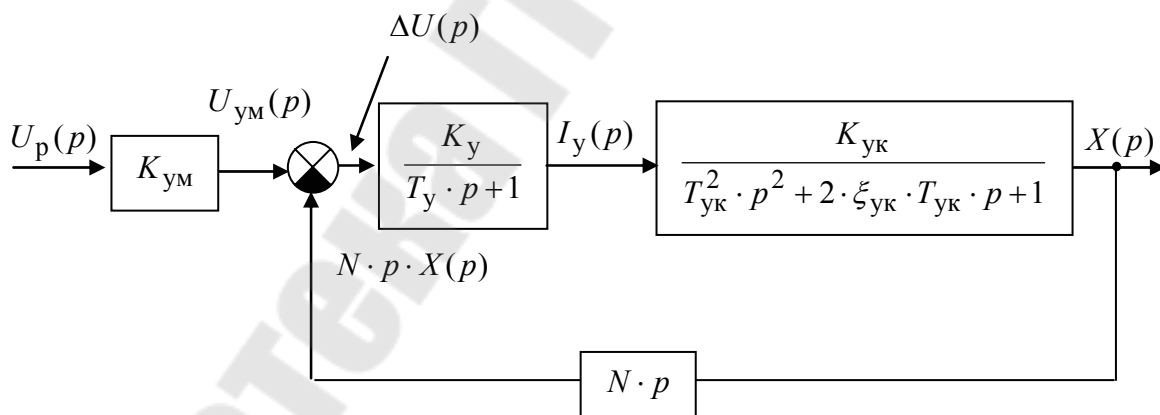


Рис.23. Структурная схема управляющего каскада гидроусилителя вместе с электро-механическим преобразователем и его усилителем мощности

На структурной схеме (рис.23) введены следующие обозначения:

$$K_y = \frac{1}{R_y} - \text{коэффициент передачи ОУ ЭМП, Ом}^{-1};$$



$$T_y = \frac{L_y}{R_y} - \text{постоянная времени ОУ ЭМП, с;}$$

$$K_{\text{ук}} = \frac{A}{C_{\text{тор}} + C_{\text{гд}} - B} - \text{коэффициент передачи по току УК гидро-}$$

усилителя,  $\text{м} \cdot \text{А}^{-1}$ ;

$$T_{\text{ук}} = \sqrt{\frac{m_{\text{зу}}}{C_{\text{тор}} + C_{\text{гд}} - B}} - \text{постоянная времени УК, с;}$$

$$\xi = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{m_{\text{зу}} \cdot (C_{\text{тор}} + C_{\text{гд}} - B)}} - \text{коэффициент затухания УК, о.е.}$$

Таким образом, по структурной схеме ЭГП (рис.23) видно, что он представляет собой систему с внутренней обратной связью по скоростной ЭДС.

### 1.3. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ САУ

Каждый элемент управления, входящий в состав САУ (например, усилитель мощности, регулятор, датчик скорости, гидродвигатель и т.д.) представляется определенным типом динамического звена или их определенного соединения (параллельного, последовательного и т.д.), поэтому САУ в целом можно рассматривать как комбинацию типовых динамических звеньев.

***Изображение системы управления в виде совокупности типовых и нетиповых динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы системы. Звено в этом случае выступает как элементарная структурная единица, преобразователь информации.***

Структурный анализ САУ позволяет изучить влияние звеньев и их соединений на свойства всей САУ в целом, путем определения и исследования ее передаточной функции.

Структурная схема обычно составляется на основе анализа блок-схемы или функциональной схемы САУ по следующему алгоритму (см. раздел 1.2.2):

1. По блок-схеме или функциональной схеме САУ составляют уравнения связи отдельных элементов САУ;

2. Переходят от полученных уравнений связи к уравнениям связи в форме преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях;

3. Решают каждое уравнение относительно изображения выходной величины и строят по ним структурные схемы отдельных элементов;

4. Соединяют построенные схемы между собой в соответствии с прохождением сигналов и окончательно получают искомую структурную схему системы.

Динамические звенья на схеме обозначаются в виде прямоугольника с указанием входной и выходной величин в операторной форме. Внутри прямоугольника записывается передаточная функция. Точки, от которых сигналы начинают проходить по двум или нескольким направлениям, называются точками съема. Суммирование сигнала обозначается сумматором. Связи между звеньями, а также между звеньями и сумматорами изображаются сплошными линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий.

Рассмотрим основные типы соединений динамических звеньев.

### ***Последовательное соединение звеньев.***

Такое соединение изображено на рис.24. Оно характеризуется тем, что выход предыдущего звена подается на вход последующего без точки съема.

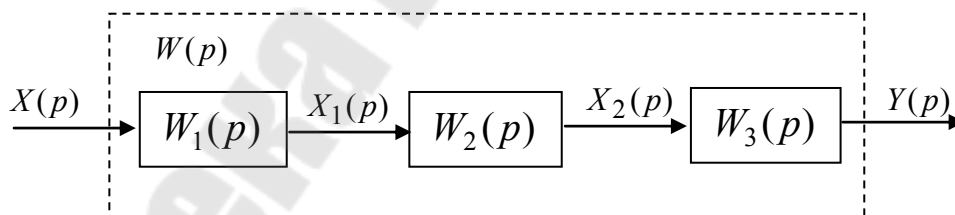


Рис.24. Последовательное соединение динамических звеньев

По рис.24 можно записать следующее соотношение, основываясь на понятии «передаточная функция»

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{X_1(p)}{X(p)} \cdot \frac{X_2(p)}{X_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{X_2(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p). \quad (20)$$

Таким образом, передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев.

ев, входящих в это соединение. Это правило преобразований справедливо для соединения любого числа динамических звеньев.

### ***Параллельное соединение звеньев.***

Это соединение изображено на рис.25. При таком соединении на вход всех звеньев подается одновременно один и тот же входной сигнал, а выходные сигналы этих звеньев алгебраически суммируются, образуя общую выходную величину.

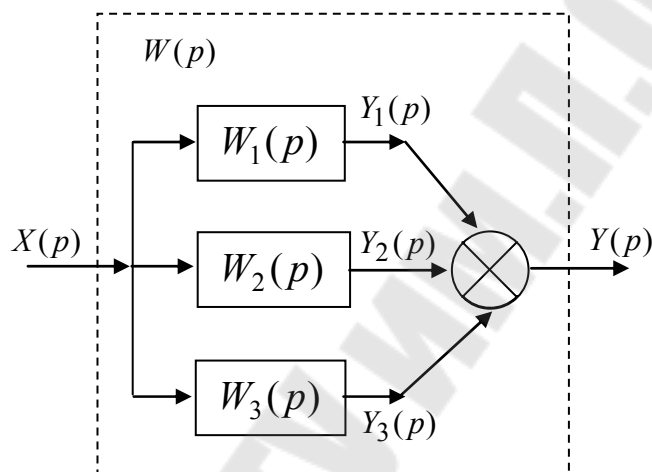


Рис.25. Параллельное соединение динамических звеньев

По рис.24 можно записать следующее соотношение

$$W(p) = \frac{Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p)}{X(p)} + \frac{Y_2(p)}{X(p)} + \frac{Y_3(p)}{X(p)} = \quad (21)$$

$$= W_1(p) + W_2(p) + W_3(p).$$

Таким образом, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций звеньев, входящих в это соединение. Это правило преобразований справедливо для соединения любого числа динамических звеньев.

### ***Звено с обратной связью.***

Звено с обратной связью изображено на рис.26. Здесь выход звена соединяется с его входом через звено с передаточной функцией  $W_{oc}(p)$ , в результате чего образуется замкнутый контур передачи воздействий. Обратная связь может быть положительной, если сигнал

$Y_1(p)$ , снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом  $X(p)$  на входе, и отрицательной (ООС), если  $Y_1(p)$  вычитается.

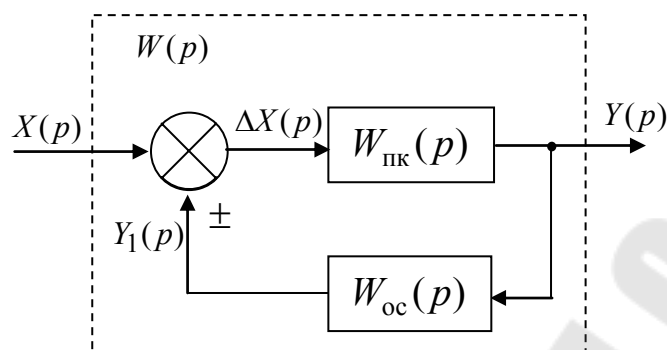


Рис.26. Динамическое звено с обратной связью

По рис.26. можно составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta X(p) = X(p) \pm Y_1(p), \\ Y_1(p) = Y(p) \cdot W_{\text{ос}}(p), \\ Y(p) = \Delta X(p) \cdot W_{\text{пк}}(p). \end{cases} \quad (22)$$

Решая (22) относительно сигналов  $X(p)$  и  $Y(p)$  получим передаточную функцию для звена с обратной связью

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_{\text{пк}}(p)}{1 \pm W_{\text{пк}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}. \quad (23)$$

Знак «минус» в (23) соответствует положительной обратной связи, а знак «плюс» отрицательной.

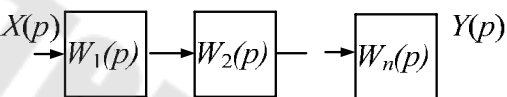
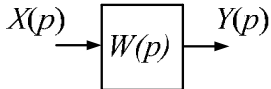
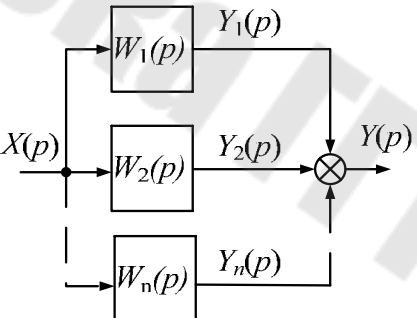
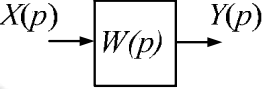
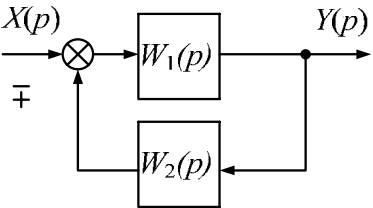
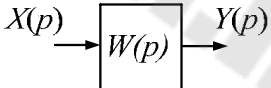
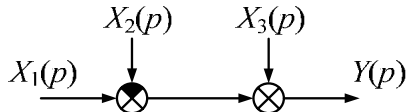
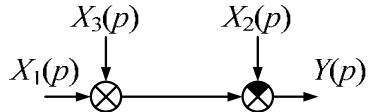
В общем случае, сложная цепь динамических звеньев, образующих САУ, включает в себя комбинации всех трех рассмотренных случаев, т.е. представляет собой смешанное соединение звеньев.

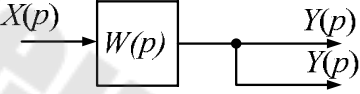
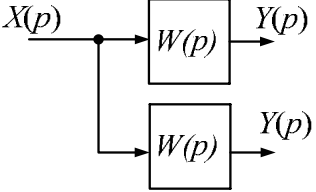
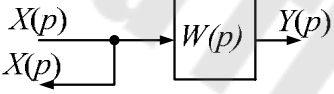
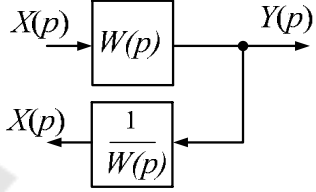
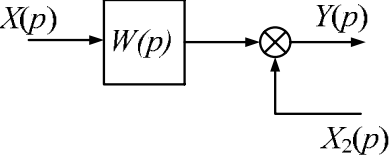
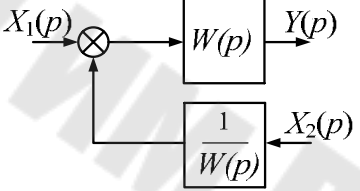
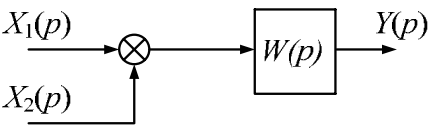
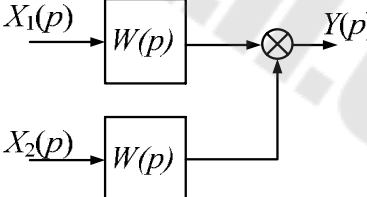
В тех случаях, когда структурная схема системы оказывается сложной и содержит перекрестные связи, ее упрощают и сводят к простейшему эквивалентному виду, пользуясь правилами преобразования структурных схем.

Основные правила структурных преобразования, включая и рассмотренные выше сведены в таблицу 1.

Таблица 1

## Правила структурных преобразований

№ п/п	Название операции	Исходная схема	Преобразованная схема	Уравнение
1	Объединение последовательно соединенных звеньев			$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$
2	Объединение параллельно соединенных звеньев			$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$
3	Объединение замкнутого контура			$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_2(p)}$
4	Перестановка сумматоров			$Y(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$

№ п/п	Название операции	Исходная схема	Преобразованная схема	Уравнение
5	Перенос точки съема через звено на его вход			$Y(p) = X(p) \cdot W(p)$
6	Перенос точки съема через звено на его выход			$X(p) = Y(p) \cdot \frac{1}{W(p)}$
7	Перенос сумматора через звено на его вход			$Y(p) = X_1(p) \cdot W(p) + X_2(p)$
8	Перенос сумматора через звено на его выход			$Y(p) = [X_1(p) + X_2(p)] \cdot W(p)$

**Пример 7.** Рассмотрим пример применения правил структурных преобразований для определения передаточной функции электрогидравлического преобразователя, рассмотренного ранее в разделах 1.2.2.-1.2.3.

Используя полученную структурную схему ЭГП (рис.23), а также правило структурных преобразований для последовательного соединения звеньев (20), найдем передаточную функцию прямого канала

$$W_{\text{пк}}(p) = \frac{\Delta U(p)}{X(p)} = \frac{K_y}{T_y \cdot p + 1} \cdot \frac{K_{\text{ук}}}{T_{\text{ук}}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot p + 1} =$$

$$= \frac{K_y \cdot K_{\text{ук}}}{(T_y \cdot p + 1) \cdot (T_{\text{ук}}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot p + 1)}$$

Теперь, после преобразования структурную схему можно представить в более компактном виде рис.27.

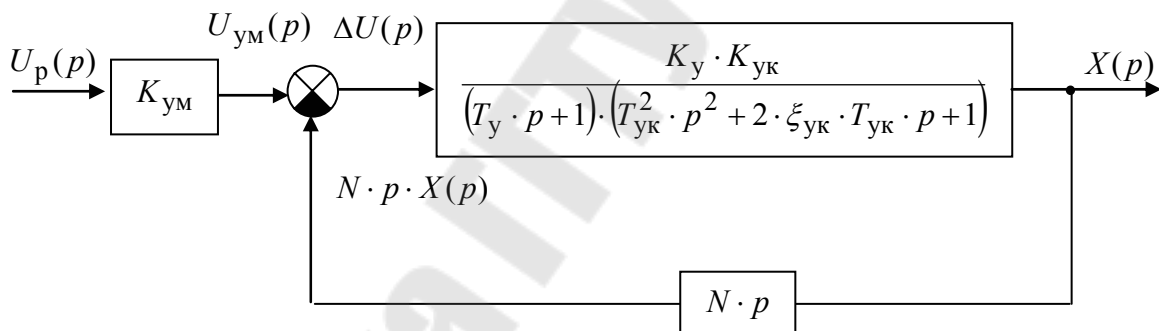


Рис.27. Преобразованная структурная схема ЭГП по рис.23.

Далее, используем правило для замкнутого контура с отрицательной обратной связью (23), а затем последовательного соединения звеньев и получим искомую передаточную функцию

$$W_{\text{эгп}}(p) = \frac{X(p)}{U_p(p)} = \frac{K_{\text{ум}} \cdot \frac{K_y \cdot K_{\text{ук}}}{(T_y \cdot p + 1) \cdot (T_{\text{ук}}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot p + 1)}}{1 + \frac{K_y \cdot K_{\text{ук}}}{(T_y \cdot p + 1) \cdot (T_{\text{ук}}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot p + 1)} \cdot N \cdot p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K_{\text{ум}} \cdot K_{\text{у}} \cdot K_{\text{ук}}}{(T_{\text{у}} \cdot p + 1) \cdot (T_{\text{ук}}^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot p + 1) + N \cdot K_{\text{у}} \cdot K_{\text{ук}} \cdot p} = \\
&= \frac{K_{\text{ум}} \cdot K_{\text{у}} \cdot K_{\text{ук}}}{T_{\text{ук}}^2 \cdot T_{\text{у}} \cdot p^3 + (T_{\text{ук}}^2 + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} \cdot T_{\text{у}}) \cdot p^2 +} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{1}{(T_{\text{у}} + 2 \cdot \xi_{\text{ук}} \cdot T_{\text{ук}} + N \cdot K_{\text{у}} \cdot K_{\text{ук}}) \cdot p + 1}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Используя разложение знаменателя в (24) на простые сомножители представим полученную передаточную функцию как

$$W_{\text{эп}}(p) = \frac{K_{\text{эп}}}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi_2 \cdot T_2 \cdot p + 1)}, \quad (25)$$

где  $K_{\text{эп}} = K_{\text{ум}} \cdot K_{\text{у}} \cdot K_{\text{ук}}$  – общий коэффициент передачи ЭП;

$T_2, \xi_2$  – постоянные времени и коэффициент затухания, полученные в результате преобразования знаменателя (24).

## 1.4. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

*Динамическим звеном называются элементы или части элементов САУ любой физической природы и конструкции, описываемые дифференциальным уравнением одного конкретного вида, то есть имеющие одну и ту же передаточную функцию.*

Обзор реальных элементов показывает, что большинство из них описывается однотипными передаточными функциями, например:

$$W_1(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{K}{T_1 \cdot T_2 \cdot p^2 + T_2 \cdot p + 1}; \quad W_3(p) = T \cdot p + 1$$

и т. д.

***Это и есть динамические звенья!!!***

**Метод динамических звеньев заключается в том,** что расчет или синтез САУ по любой структурной схеме сводится к анализу или синтезу ее операторно-частотных характеристик через подобные характеристики динамических звеньев.



## 1.4.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ САУ

### *Статические характеристики*

Статические характеристики – это зависимости выходной величины  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  от входной  $x_{\text{ВХ}}(t)$  в установившемся режиме.

В качестве типовых воздействий используют постоянные

$$x_{\text{ВХ}}(t) = X_0 \cdot 1(t),$$

или гармонические

$$x_{\text{ВХ}}(t) = X_m \sin(\omega \cdot t + \psi) \text{ входные сигналы.}$$

В первом случае статическая характеристика определяется как

$$x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}}) = x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}}(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty},$$

а во втором случае статическую характеристику называют частотной и различают следующие ее разновидности:

1. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) — это зависимость отношения комплексного изображения выходной величины  $x_{\text{ВЫХ}}(j\omega)$  к комплексному изображению входной  $x_{\text{ВХ}}(j\omega)$  от изменения частоты входного сигнала  $\omega$ ;

2. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – это зависимость отношения амплитуды выходного сигнала  $x_{\text{ВЫХ}.m}(\omega)$  к амплитуде входного  $x_{\text{ВХ}.m}(\omega)$  от изменения его частоты  $\omega$ ;

3. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – это зависимость сдвига фазы выходного сигнала  $\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)$  по отношению к входному  $\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)$  от изменения его частоты  $\omega$ ;

4. Вещественно-частотная характеристика (ВЧХ) – это вещественная часть А.Ф.Ч.Х.;

5. Мнимо-частотная характеристика (МЧХ) – это мнимая часть А.Ф.Ч.Х.

Частотные характеристики получили свое название в зависимости от математических операций с АФЧХ.

Если, например, комплексные изображения входного и выходного сигналов соответственно равны

$$x_{\text{ВХ}}(j\omega) = x_{\text{ВХ.}m}(\omega) \cdot e^{j\varphi_{\text{ВХ}}(\omega)}$$

и

$$x_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = x_{\text{ВЫХ.}m}(\omega) \cdot e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega)},$$

то АФЧХ будет определяться как

$$W(j\omega) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{x_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{x_{\text{ВЫХ.}m}(\omega)}{x_{\text{ВХ.}m}(\omega)} e^{j(\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega))}. \quad (26)$$

Значит АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ равны соответственно

$$A(\omega) = \text{mod}[W(j\omega)] = \frac{x_{\text{ВЫХ.}m}(\omega)}{x_{\text{ВХ.}m}(\omega)}; \quad (27)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arg}[W(j\omega)] = \varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega); \quad (28)$$

$$P(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)] = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega); \quad (29)$$

$$Q(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)] = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega). \quad (30)$$

АЧХ и ФЧХ связаны с ВЧХ и МЧХ следующими соотношениями

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (31)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (32)$$

АФЧХ, соответствующая выражению (26), носит название частотной передаточной функции. Частотную передаточную функцию  $W(j\omega)$  нетрудно получить из передаточной функции по Лапласу  $W(p)$ , если использовать мнемоническое правило

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}, \quad (33)$$

т.е. в передаточной функции по Лапласу  $W(p)$  переменную  $p$  нужно заменить на мнимо-частотную переменную  $j\omega$ .

**Пример 8.** Найти все частотные характеристики динамического звена, представленного передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2}{4 \cdot p + 1};$$

Используя (33) частотную передаточную функцию можно записать в виде

$$W(j\omega) = \frac{2}{4 \cdot j\omega + 1}. \quad (34)$$

Умножим числитель и знаменатель (34) на сопряженное знаменателю комплексное выражение « $1 - j4 \cdot \omega$ »

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{2 \cdot (1 - j4 \cdot \omega)}{(1 + j4 \cdot \omega) \cdot (1 - j4 \cdot \omega)} = \frac{2 - j8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2} = \\ &= \frac{2}{1 + 16 \cdot \omega^2} - j \frac{8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как  $W(j\omega) = P(\omega) + j\psi(\omega)$ , то из (35) следует

$$P(\omega) = \frac{2}{1 + 16 \cdot \omega^2} \text{ — вещественно-частотная характеристика,}$$

$$Q(\omega) = \frac{8 \cdot \omega}{1 + 16 \cdot \omega^2} \text{ — мнимо-частотная характеристика.}$$

Для определения недостающих АЧХ и ФЧХ воспользуемся соотношениями (31) (32)

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{4 + 64 \cdot \omega^2}{(1 + 16 \cdot \omega^2)^2}} = 2 \sqrt{\frac{(1 + 16 \cdot \omega^2)}{(1 + 16 \cdot \omega^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 16 \cdot \omega^2}} \text{ — амплитудно-частотная характеристика;}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{8 \cdot \omega}{\frac{1+16 \cdot \omega^2}{2}} = -\arctg(4 \cdot \omega) - \text{ фазо-частотная характеристика.}$$

ристика.

**Пример 9.** Определить сигнал на выходе САУ по известному входному сигналу

$$x_{\text{ВХ}}(t) = 2 \cdot \sin(10 \cdot t),$$

и передаточной функции системы

$$W(p) = \frac{2}{4 \cdot p + 1} \text{ (рис.28).}$$

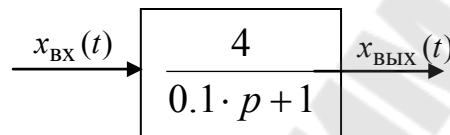


Рис.28. Структурная схема к примеру 9

При воздействии гармонического входного сигнала  $x_{\text{ВХ}}(t)$  на САУ выходной сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  по истечении времени переходного процесса (в установившемся режиме) также будет гармоническим, но отличающимся от входного амплитудой и фазой

$$\begin{aligned} x_{\text{ВЫХ}}(t) &= x_{\text{ВЫХ}m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{\text{ВЫХ}}) = \\ &= A(\omega) \cdot x_{\text{ВХ}m} \cdot \sin(\omega \cdot t + (\varphi_{\text{ВХ}} + \varphi(\omega))). \end{aligned} \quad (36)$$

Следовательно, для определения  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  необходимо найти  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

По передаточной функции  $W(p)$  найдем

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{(0.1 \cdot \omega)^2 + 1}} \text{ и } \varphi(\omega) = -\arctg(0.1 \cdot \omega).$$

На частоте  $\omega = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$  АЧХ и ФЧХ соответственно равны

$$A(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad \varphi(\omega) = -45^\circ.$$

Таким образом, согласно (36)

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{8}{\sqrt{2}} \sin(10 \cdot t - 45^\circ).$$

Как видно из рассмотренных примеров, частотные характеристики представляют собой довольно сложные нелинейные выражения, которые построить без применения вычислительной техники затруднительно, поэтому для практических целей (при решении задач анализа и синтеза САУ) наиболее часто используется представление  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  на логарифмической плоскости.

**Главным достоинством логарифмических частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы.**

Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) находится величина

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg|W(j\omega)| = 20 \cdot \lg[A(\omega)]. \quad (37)$$

Эта величина выражается в децибелах. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности между «входом» и «выходом»

$$1 \text{ Бел} = \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right),$$

где  $P_1, P_2$  – входная и выходная мощность соответственно.

Эта логарифмическая величина названа по имени изобретателя телефона американца шотландского происхождения А.Г. Белла. Например, один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, а 2 бела - уже в 100 раз и т.д.

Но для выражения отношения амплитуд двух физических величин, не связанных с мощностью (входных и выходных перемещений, скоростей, напряжений, токов и т.д.) Бел определяется уже по формуле

$$1 \text{ Бел} = 2 \cdot \lg \left( \frac{x_{\text{ВЫХ.}m}(\omega)}{x_{\text{ВХ.}m}(\omega)} \right),$$

Децибел равен одной десятой части бела, поэтому в правой части (37) стоит множитель 20. Один децибел соответствует изменению амплитуды в  $\sqrt[20]{10}$ , то есть представляет собой сравнительно малую величину.

### ***Динамические (временные) характеристики.***

Динамические характеристики - это зависимости выходной величины от времени в переходном режиме при действии внешнего входного воздействия.

В качестве типовых входных воздействий используют скачок постоянного входного сигнала (рис.29.а), который задается через единичную функцию  $1(t)$  и сигнал в виде импульса (рис.29.б), который задается через дельта-функцию  $\delta(t)$ .

В первом случае динамическая характеристика называется переходной  $h(t)$ , а во втором – весовой функцией  $w(t)$ .

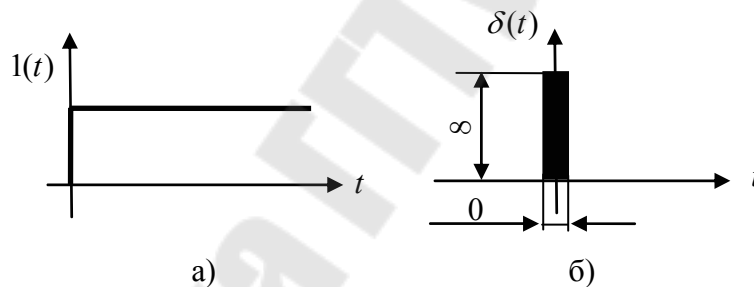


Рис.29. Графическое представление единичной функции (а) и дельта функции (б)

Единичная функция  $1(t)$  и дельта функция  $\delta(t)$  связаны между собой соотношением

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(1(t)).$$

Единичная функция  $1(t)$  представляет собой распространенный вид входного воздействия в САУ. К такому виду сводится, например, типовое изменение нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот входного вала следящей системы и т.д.

Основное свойство импульсной функции  $\delta(t)$  заключается в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

т.е. она представляет собой импульс с бесконечно большой амплитудой и бесконечно малой шириной, но занимает единичную площадь (рис.29.б).

Импульсная функция  $\delta(t)$ , также представляет собой часто встречающийся вид входного воздействия в САУ. К такому виду можно свести, некоторые аварийные режимы, такие как, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания, отключаемый плавкими вставками предохранителей.

В действительности реальные импульсные воздействия всегда конечны по величине и продолжительности, но их продолжительность всегда незначительна по сравнению со временем переходного процесса, а величина бросков значительно выше номинальных значений. Поэтому с большой степенью точности реальный импульс может быть заменен своей идеализированной математической моделью - дельта-функцией  $\delta(t)$ .

Между статическими и динамическими характеристиками имеются взаимосвязи, определяемые через передаточную функцию  $W(p)$ . Приведем их в виде соотношений:

1. Передаточная функция  $W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}$  следует из дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях формальной заменой  $\frac{d}{dt} \rightarrow p$ ;
2. АФЧХ получается из передаточной функции  $W(p)$  путем замены комплексной переменной  $p$  на мнимо-частотную переменную  $j\omega$ ;
3. Статическая характеристика  $X_{\text{вых}}(X_{\text{вх}})$  получается из передаточной функции  $W(p)$  заменой  $p \rightarrow 0$  (только для позиционных динамических звеньев);

4. Переходная характеристика  $h(t)$  при сигнале на входе  $X_{\text{вх}}(t) = X_0 \cdot 1(t)$  получается с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{X_0}{p} \cdot W(p) \right\};$$

5. Весовая характеристика  $w(t)$  при сигнале на входе  $X_{\text{вх}}(t) = X_0 \cdot \delta(t)$  получается с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле

$$w(t) = L^{-1} \{ X_0 \cdot W(p) \};$$

6. Связь между переходной и весовой характеристиками определяется по формуле

$$w(t) = \frac{d h(t)}{dt};$$

7. Связь между передаточной функцией  $W(p)$  и весовой характеристикой  $w(t)$  определяется с помощью прямого и обратного преобразования по Лапласу по следующим соотношениям

$$W(p) = L[w(t)]$$

или

$$w(t) = L^{-1}[W(p)].$$

#### 1.4.2. ТИПОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ.

Типовые динамические звенья классифицируются в соответствии с видом статических характеристик следующим образом:

1. Позиционные звенья со статической характеристикой (рис.30.а)

$$x_{\text{вых}} = k_1 \cdot x_{\text{вх}};$$

2. Интегрирующие звенья, со статической характеристикой (рис.30.б)



$$\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = (x_{\text{ВЫХ}})' = k_2 \cdot x_{\text{ВХ}};$$

3. Дифференцирующие звенья, со статической характеристикой (рис.30.в)

$$x_{\text{ВЫХ}} = k_3 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} = k_3 \cdot (x_{\text{ВХ}})'$$

Статические характеристики трех представленных на рис.30 типов динамических звеньев линейны, но явная зависимость между входным  $x_{\text{ВХ}}$  и выходным  $x_{\text{ВЫХ}}$  сигналами присуща только позиционным звеньям. У интегрирующих динамических звеньев производная выходного сигнала  $\frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt}$  пропорциональна входному сигналу  $x_{\text{ВХ}}$ , а у дифференцирующих звеньев наоборот – выходной сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}$  пропорционален производной входного сигнала  $\frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt}$ .

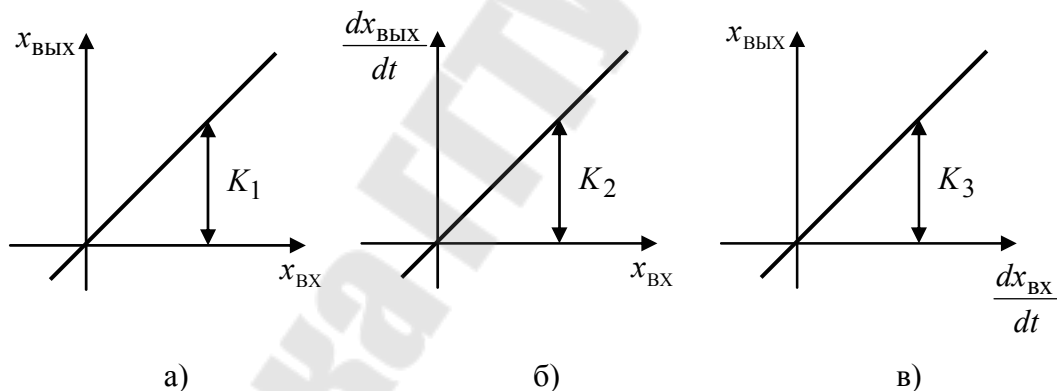


Рис.30 Статические характеристики типовых динамических звеньев: позиционных (а), интегрирующих (б), дифференцирующих (в)

На рис.30 обозначено:

$K_1, K_2, K_3$  – коэффициенты пропорциональности между «выходом» и «входом».

#### 1.4.2.1. ПОЗИЦИОННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: безинерционное звено и апериодические звенья первого и второго порядков. Рассмотрим примеры и основные характеристики позиционных звеньев.

### Безинерционное звено

Это звено описывается как в статическом, так и в динамическом режиме обыкновенным алгебраическим уравнением вида

$$a_0 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_0 \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad (38)$$

где  $a_0, b_0$  – постоянные коэффициенты.

Примером такого звена являются механический редуктор, делитель напряжения, различного рода датчики сигналов (потенциметрические, индукционные и т.д.), жесткие механические передачи и т.д.

В действительности безинерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев. Так, например, механический редуктор можно отнести к безинерционному звену, только если не учитывать явлений скручивания и люфта, а статические характеристики большинства датчиков (в частности потенциметрического датчика положения (рис.7-рис.8)) нелинейны.

Таким образом, реальные звенья лишь в первом приближении можно описывать безинерционным звеном, но для решения большинства инженерных задач этого оказывается достаточно.

В операторном виде уравнение звена (38) будет выглядеть

$$a_0 \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = b_0 \cdot X_{\text{ВХ}}(p),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_0}{a_0} = K, \quad (39)$$

где  $K = \frac{b_0}{a_0}$  – коэффициент передачи безинерционного звена.

На рис.31 изображена схема пропорционального регулятора (Прегулятора), который описывается передаточной функцией (39) безинерционного звена.

В соответствии с ранее полученным результатом (см. пример 4) имеем

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2}{R_1} = -K.$$

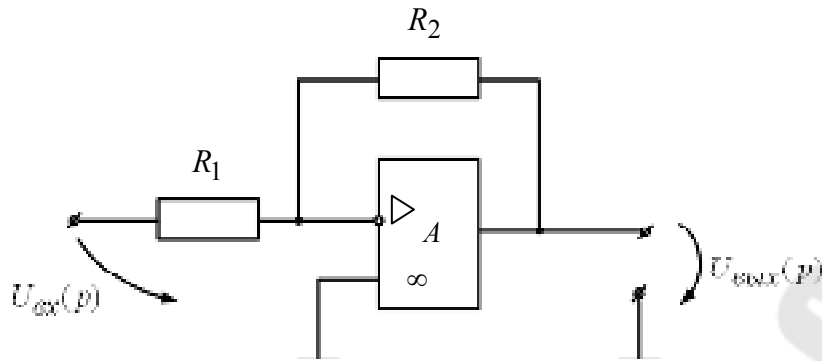


Рис.31. Принципиальная электрическая схема П-регулятора

Знак «-» возникает из-за инвертирования входного сигнала.

Характеристики безинерционного звена определим через передаточную функцию  $W(p)$  с помощью вышеизложенных взаимосвязей (см. раздел 1.4.1).

1. Дифференциальное уравнение  $x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}$ ;

2. Передаточная функция  $W(p) = \frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = K$ ;

3. Статическая характеристика  $x_{\text{ВЫХ}} = W(p)|_{p=0} \cdot x_{\text{вх}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}$ ;

4. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = K;$$

Графически АФЧХ вырождается в точку, расположенную на комплексной плоскости на вещественной оси на расстоянии  $K$  от начала координат (рис.32.б).

5. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A(\omega) = \text{mod}[W(j\omega)] = K;$$

6. Фазочастотная характеристика (ФЧХ)  $\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)] = 0$ ;

7. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg[A(\omega)] = 20 \lg K ;$$

8. Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\lg \omega) = 0 ;$$

9. Переходная характеристика  $h(t) = k \cdot 1(t)$ ;

10. Весовая характеристика  $w(t) = \frac{d[h(t)]}{dt} = L^{-1}[W(p)] = k \cdot \delta(t)$ .

Весовая характеристика представляет собой импульсную функцию, площадь которой равна  $K$

Перечисленные выше характеристики обычно изображают графически (рис.32.ж).

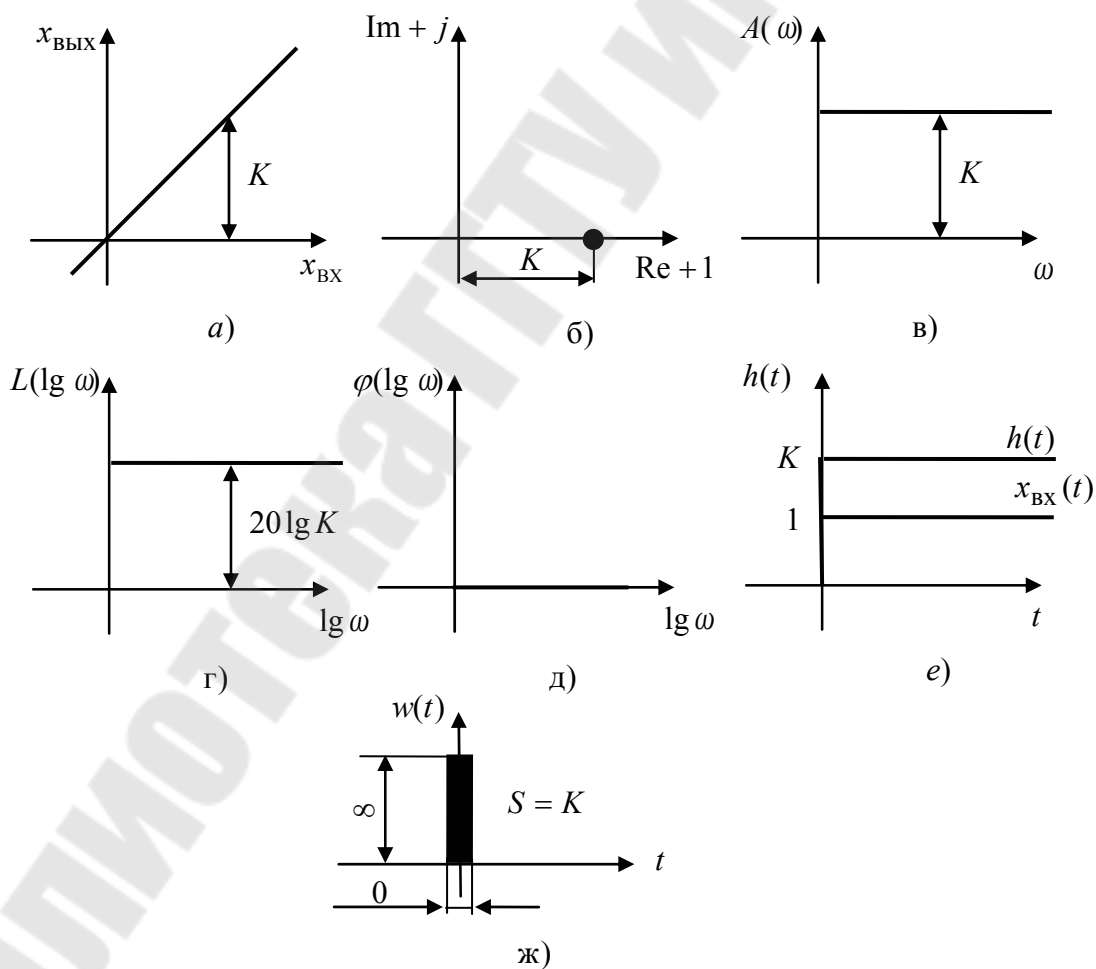


Рис.32. Характеристики безинерционного звена: статическая (а), АФЧХ (б), АЧХ (в), ЛАЧХ (г), ЛФЧХ (д), переходная (е), весовая (ж)

По графическим изображениям характеристик (рис.32) видно, что реакция безинерционного звена на входное воздействие любого вида сводится лишь к изменению величины этого воздействия в  $K$  раз, при этом временные и частотные параметры воздействия остаются без изменения.

### ***Апериодическое звено первого порядка***

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$a_0 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_1 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_0 \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad (40)$$

где  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$  – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим некоторые примеры реализации апериодических звеньев первого порядка:

1. Двигатель любого типа в первом приближении (электрический, гидравлический и т.д.). Входной величиной  $x_{\text{ВХ}}$  здесь является управляющее воздействие в двигателе, например, расход жидкости в гидравлическом двигателе, электрическое напряжение в электрическом двигателе, а выходной  $x_{\text{ВЫХ}}$  - скорость вращения  $\omega$  (рис.33.а);

2. Резервуар с газом, где входная величина – давление  $P_1$  перед впускным отверстием, а выходная величина - давление газа  $P_2$  в резервуаре (рис.33.б);

3. Нагревательная печь, где входной величиной является – количество тепла в единицу времени (тепловая мощность)  $Q$ , выходной – температура в печи  $t^\circ$  (рис.33.в);

4. Пассивные  $RL$  и  $RC$  электрические цепи и  $RC$  (рис.33.г).

В операторном виде уравнение звена (40) записывается

$$a_0 \cdot p \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) + a_1 \cdot X_{\text{ВЫХ}}(p) = b_0 \cdot X_{\text{ВХ}}(p),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_0}{a_0 \cdot p + a_1} = \frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (41)$$

где  $K = \frac{b_0}{a_1}$  – коэффициент передачи звена;

$T = \frac{a_0}{a_1}$  – постоянная времени звена.

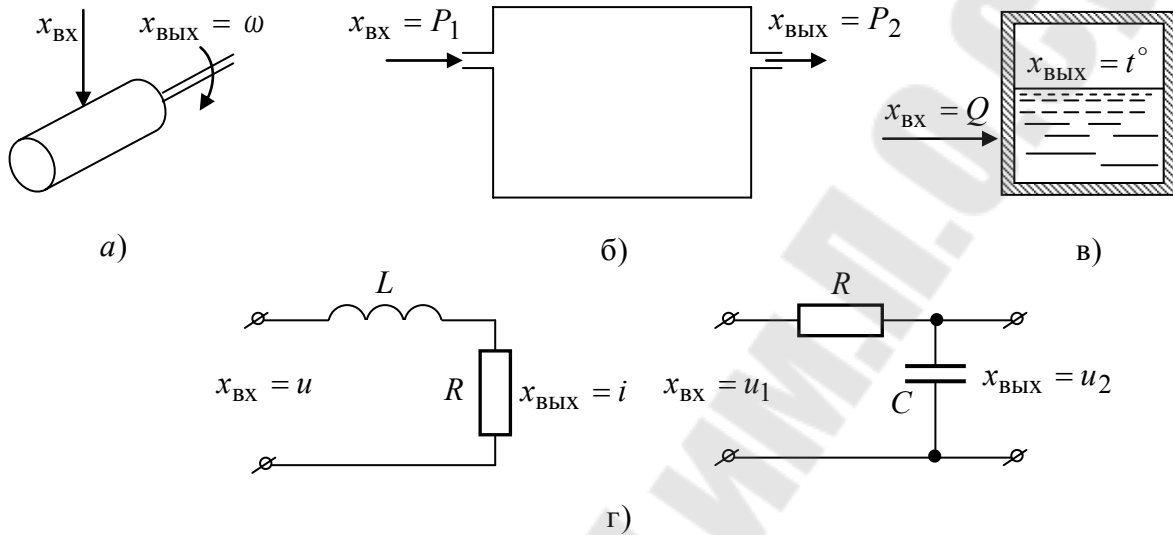


Рис.33. Примеры реальных аperiodических звеньев первого порядка: двигатель (а), резервуар с газом (б), нагревательная печь (в), электрические цепи (г).

На рис. 34 изображена схема аperiodического регулятора имеющего передаточную функцию (41).

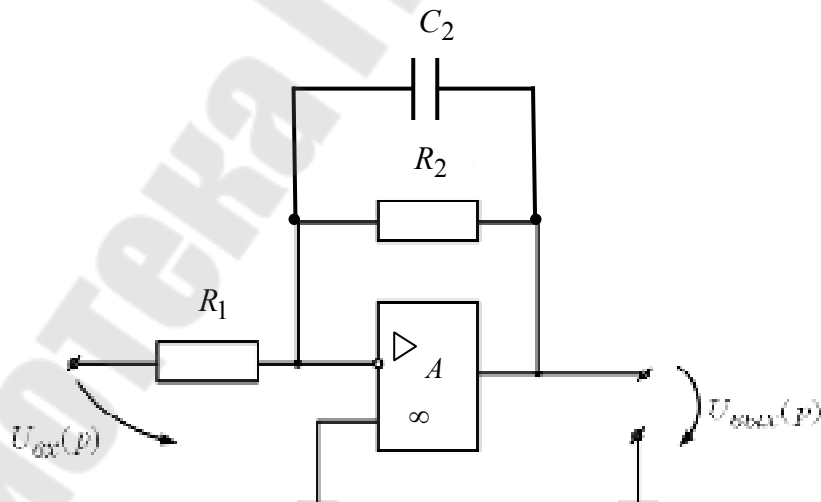


Рис.34. Принципиальная электрическая схема аperiodического регулятора

Согласно (9) имеем

$$\begin{aligned}
 W(p) &= -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_2 \cdot \frac{1}{C_2 \cdot p}}{R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}} = -\frac{\frac{R_2}{C_2 \cdot p}}{R_2 \cdot C_2 p + 1} = \\
 &= \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 \cdot C_2 \cdot p + 1)} = -\frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

где  $K = \frac{R_2}{R_1}$ ,  $T = R_2 \cdot C_2$  – коэффициент передачи и постоянная времени звена соответственно.

Знак «-» в (42) возникает из-за инвертирования входного сигнала.

Структурно такой регулятор можно представить как последовательное соединение двух динамических звеньев: безинерционного и апериодического первого порядка (рис.35)



Рис.35. Структурная схема апериодического регулятора

Характеристики апериодического звена первого порядка будут таковы:

1. Дифференциальное уравнение и передаточная функция

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad W(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)},$$

2. Статическая характеристика (рис 36.а)

$$x_{\text{ВЫХ}} = W(p) \Big|_{p=0} \cdot x_{\text{ВХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}};$$

3. Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{1}{T \cdot j\omega + 1}.$$

Графически АФЧХ для положительных частот имеет вид полуокружности с диаметром, равным коэффициенту передачи  $K$ . Длина радиус-вектора соответствует АЧХ, а угол, который образуют вещественная ось и радиус вектор соответствует ФЧХ (рис.36.б);

#### 4. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) (рис.36.в)

$$A(\omega) = \text{mod} \left[ \frac{K}{T \cdot j\omega + 1} \right] = \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}}.$$

Из анализа амплитудной характеристики следует, что колебания малых частот  $\omega < \frac{1}{T}$  пропускаются данным звеном с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к статическому коэффициенту передачи  $K$ , колебания же больших частот  $\omega > \frac{1}{T}$  проходят с сильным ослаблением амплитуды, т.е. плохо пропускаются или совсем не пропускаются данным звеном. Чем меньше постоянная времени  $T$ , тем более вытянута амплитудная характеристика  $A(\omega)$  вдоль оси частот, т.е. полоса пропускания шире

$$\Delta \omega_{\text{п}} = \frac{1}{T} - \left( -\frac{1}{T} \right) = \frac{2}{T};$$

#### 5. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) (рис.36.г)

$$\varphi(\omega) = \text{arg} \left[ \frac{1}{T \cdot j\omega + 1} \right] = -\text{arctg}(T \cdot \omega).$$

На малых частотах фазовый сдвиг между входным и выходным сигналом стремится к нулю  $\varphi \rightarrow 0$ , а на больших  $-\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ;

#### 6. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) (рис.37.а)

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} = \\ &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}. \end{aligned} \quad (43)$$



Рассмотрим выражение (43) более подробно. При  $T^2 \cdot \omega^2 \gg 1$ , т.е.  $\omega \gg \sqrt{\frac{1}{T^2}}$  (на больших частотах) (43) будет иметь вид

$$L(\omega) \approx 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg(T \cdot \omega). \quad (44)$$

Первое слагаемое (44) представляет собой прямую, параллельную оси частот, а второе – наклонную. Сопряжение этих прямых будет происходить при частоте  $\omega = \frac{1}{T}$  – частоте излома звена.

При  $T^2 \cdot \omega^2 \ll 1$ , т.е.  $\omega \ll \sqrt{\frac{1}{T^2}}$  (на низких частотах) выражение (43) будет

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg 1 = 20 \cdot \lg K,$$

т.е. на низких частотах ЛАЧХ апериодического звена представляет собой только прямую параллельную оси частот  $\lg \omega$ .

Таким образом, ЛАЧХ может быть представлена в виде двух прямых, сопрягаемых в точке  $\omega = \frac{1}{T}$  (частота излома звена).

Такая ЛАЧХ носит название асимптотической (приближенной) вследствие того, что эти прямые являются асимптотами, к которым стремятся ветви графика характеристики  $L(\omega)$ . При этом максимальная погрешность построения будет на частоте излома звена, и не будет превышать 3 дБ

$$\begin{aligned} L(\omega) \Big|_{\omega^2 \cdot T^2 = 1} &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} \Big|_{\omega^2 \cdot T^2 = 1} = \\ &= 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg 2 = 20 \cdot \lg K - 3 \text{ дБ}; \end{aligned}$$

Единица приращения частоты соответствует одной декаде, т.е. удесятерению частоты, Например, 1 дек соответствует частоте равной  $10 \text{ с}^{-1}$ , а две декады – уже частоте  $100 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, под декадой понимается интервал на оси абсцисс, соответствующий десятикратному изменению частоты.

Наклон ЛАЧХ  $L(\omega)$  после частоты излома  $\omega_{\text{изл}}$  для апериодического звена остается все время постоянным и всегда составляет  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ ;

6. Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ) (рис.37.б)

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T \cdot \omega) = -\arctg(T \cdot 10^{\lg \omega})$$

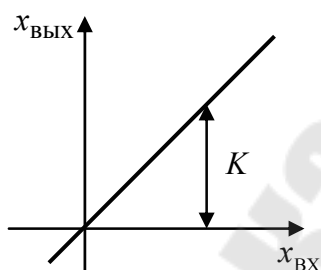
где  $\lg \omega$ -десятичный логарифм изменения частоты.

7. Переходная характеристика (рис.38.а)

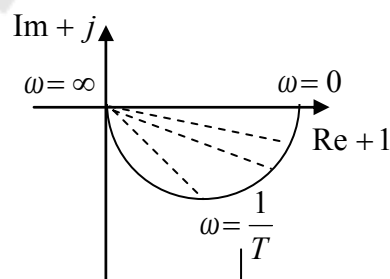
$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot W(p) \right\} = K \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right);$$

8. Весовая характеристика (рис.38.б)

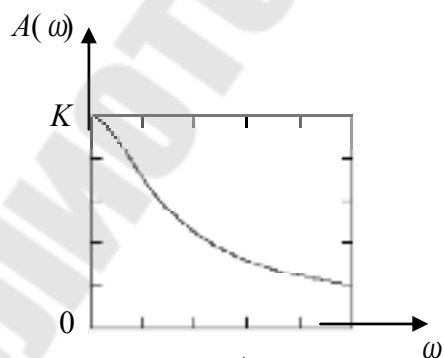
$$w(t) = \frac{d[h(t)]}{dt} = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$



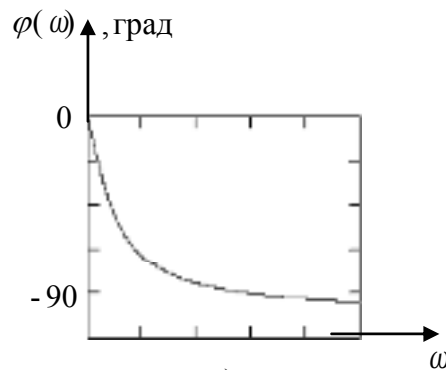
а)



б)

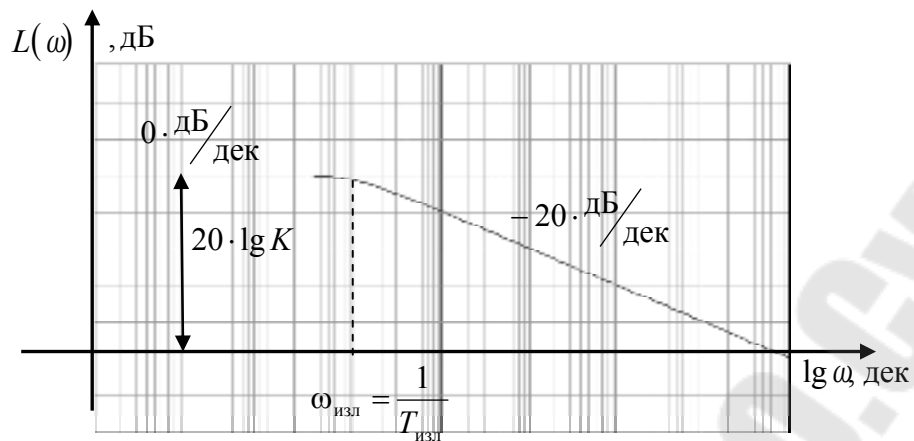


в)

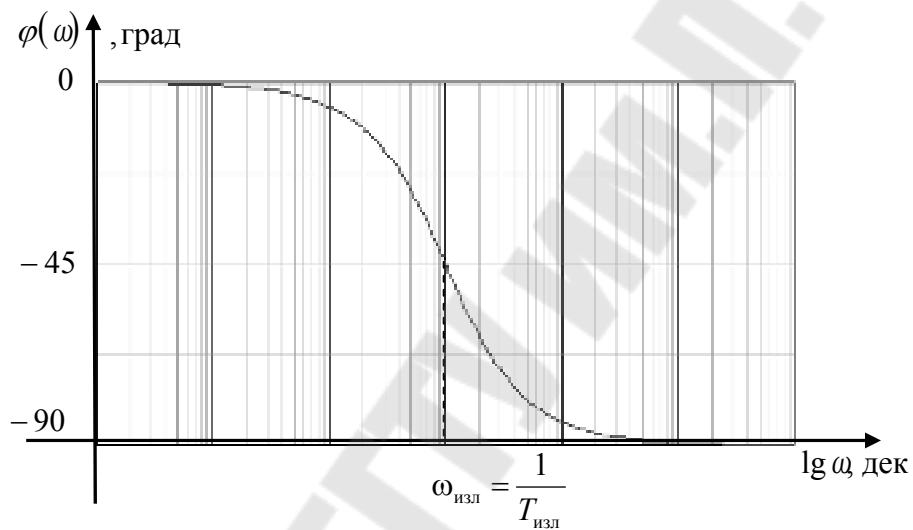


г)

Рис.36. Статическая (а) и АФЧХ (б), АЧХ (в), ФЧХ (г) характеристики апериодического звена первого порядка

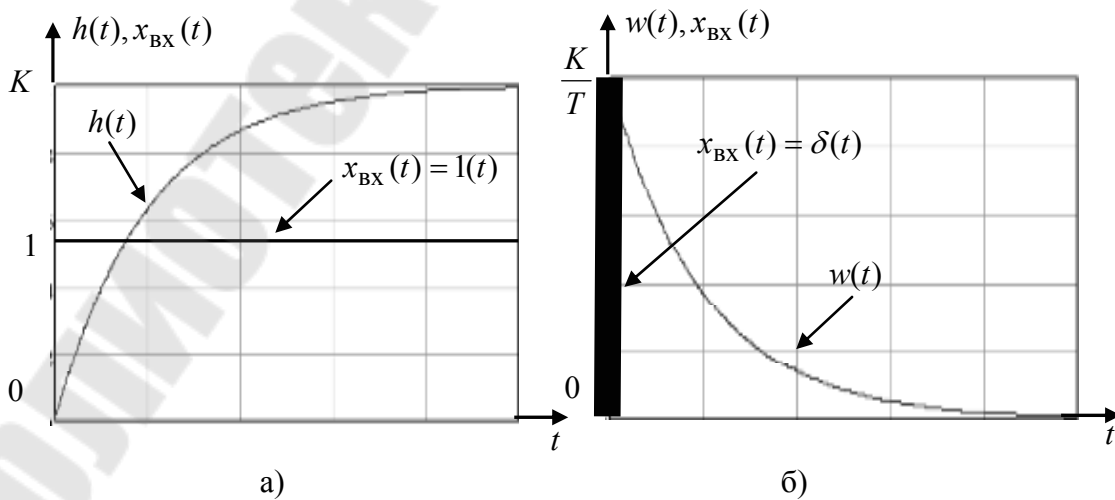


а)



б)

Рис.37. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена первого порядка: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б)



а)

б)

Рис.38. Временные характеристики аperiodического звена первого порядка: переходная (а), весовая (б)

По характеристикам видно, что реакция апериодического звена первого порядка на входное воздействие  $x_{\text{ВХ}}$  замедленна. С ростом частоты входного сигнала амплитуда выходного резко падает, вследствие чего апериодическое звено можно назвать фильтром, который не пропускает на выход высокочастотные сигналы.

Далее для остальных типовых динамических звеньев будем рассматривать только дифференциальные уравнения, передаточные функции, ЛАЧХ, ЛФЧХ и временные характеристики (только для позиционных звеньев), так как на основе их будет строиться анализ и синтез САУ. При необходимости остальные характеристики можно получить так, как было показано выше.

### ***Апериодическое звено второго порядка***

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$a_0 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = b_1 x_{\text{ВХ}}, \quad (45)$$

где  $a_0, a_1$  – постоянные коэффициенты.

В (45) введем следующие обозначения

$$a_0 = T^2; a_1 = 2 \cdot \xi \cdot T, b_1 = K$$

откуда  $T = \sqrt{a_0}$  – постоянная времени звена;  $\xi = \frac{a_1}{2T} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$  – коэффициент затухания звена;  $K$  – коэффициент передачи звена

После подстановки новых обозначений уравнение (45) запишется в следующем виде:

$$T^2 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}} \quad (46)$$

Если в (46)  $\xi > 1$ , то звено называется апериодическим второго порядка, и его передаточная функция может быть представлена, как функция двух последовательно соединенных апериодических звеньев первого порядка

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1} = \frac{K}{T_1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}, \quad (47)$$

где  $T_1 = \xi \cdot T + \sqrt{\xi^2 \cdot T^2 - T^2} = T \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ ,  
 $T_2 = \xi \cdot T + \sqrt{\xi^2 \cdot T^2 - T^2} = T \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$  – постоянные времени звена, полученные в результате разложения знаменателя передаточной функции (47).

При  $\xi = 1$  получим  $T_1 = T_2 = T$  и передаточная функция звена  $W(p)$  будет иметь следующий вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{(T \cdot p + 1)^2}.$$

При  $\xi < 1$  звено носит название колебательного и его свойства и характеристики будут рассмотрены далее.

Ниже приведены примеры апериодических звеньев второго порядка:

1. Управляющий каскад гидравлического усилителя (рис.23);
2. Двойной резервуар с газом (рис.39.а);
3. Электродвигатель постоянного тока при определенном соотношении постоянных времени  $T_M > 4 \cdot T_J$  (рис.39.б);
4. Пружина с успокоительным устройством (рис.39.в);
5. Электрическая цепь в виде последовательного колебательного контура (рис.39.г).

ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена второго порядка найдем найдем как суммы характеристик апериодических звеньев первого порядка, при этом для простоты примем коэффициент передачи звена  $K = 1$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= L_1(\omega) + L_2(\omega) = \\ &= 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}} + 20 \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{T_2^2 \cdot \omega^2 + 1}} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -\arctg[T_1 \cdot \omega] - \arctg[T_2 \cdot \omega]. \quad (49)$$

Из (48) и (49) следует, что результирующие ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена второго порядка находятся графическим построением и последующим суммированием ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодических звеньев первого порядка (рис.40).

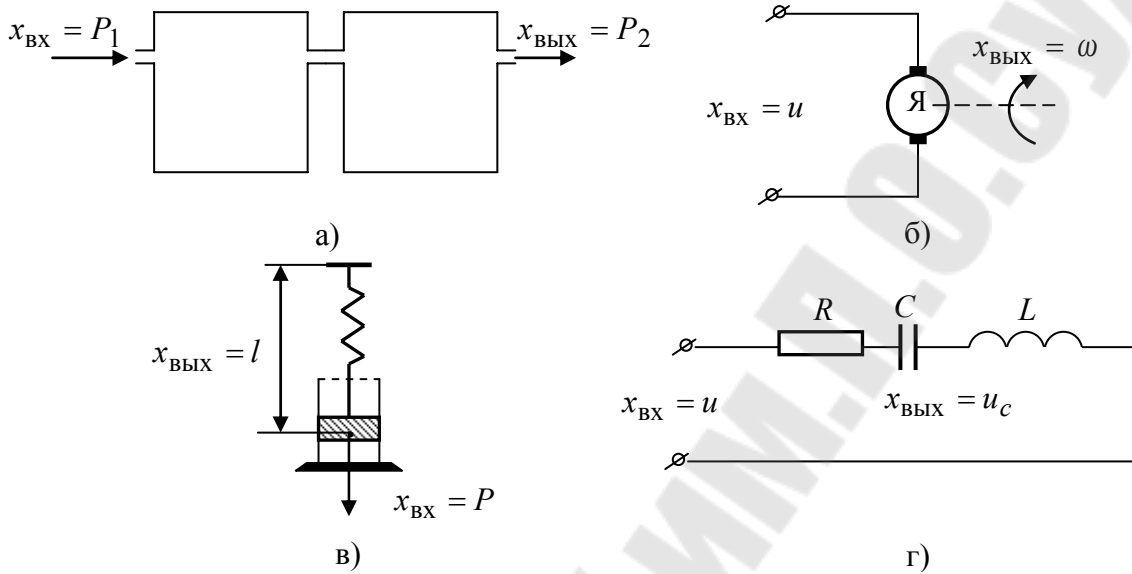


Рис.39. Примеры реальных апериодических звеньев второго порядка: двойной резервуар с газом (а), электрический двигатель постоянного тока (б), пружина с успокоительным устройством (в), электрическая RLC-цепь (г)

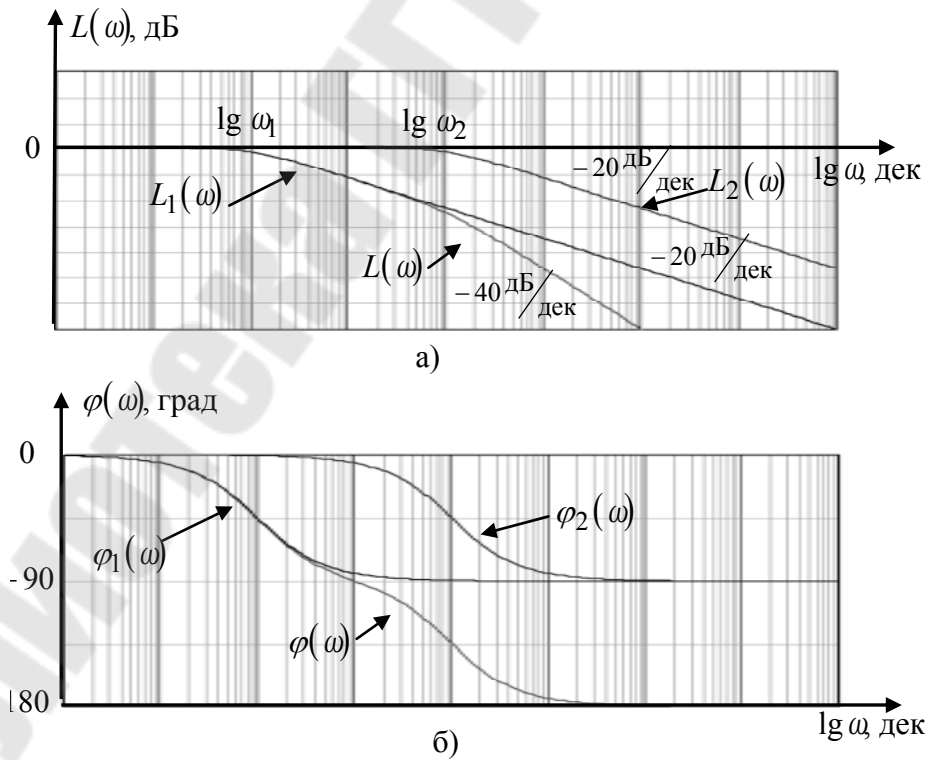


Рис.40. ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) апериодического звена второго порядка для случая  $T_1 \gg T_2$

Наличие коэффициента передачи  $K$  у апериодического звена второго порядка сместит параллельно самой себе ЛАЧХ  $L(\omega)$  вверх на величину равную  $20 \cdot \lg K$ . ЛФЧХ при этом не изменится, т.к. коэффициент передачи представляет собой безинерционное звено, а его ЛФЧХ  $\varphi = 0$  (рис. 32.д).

Временные характеристики у рассматриваемого звена определяются следующим образом

$$h(t) = K \cdot \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right),$$

$$w(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \cdot \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

Они представлены на рис.41.

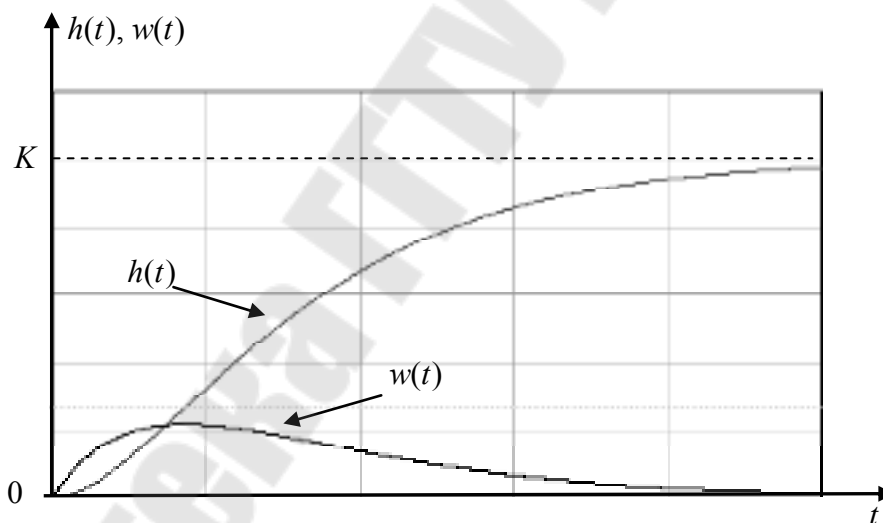


Рис. 41. Временные характеристики апериодического звена второго порядка.

### **Колебательное звено**

Если в дифференциальном уравнении (46)  $\xi < 1$ , то это колебательное звено. Передаточная функция для него будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1}.$$

Примерами колебательных звеньев являются, например: RLC - цепи при определенных параметрах R, L, C (рис. 39.г); электродвигатель постоянного тока при определенном соотношении постоянных времени  $T_M < 4 \cdot T_J$  (маломощные, малоинерционные электрические двигатели) (рис.39.б); упругие механические передачи.

Основные характеристики колебательного звена:

1. АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega + 1} = \frac{K}{(1 - T^2 \cdot \omega^2) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot j\omega};$$

2. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot T^2 \cdot \omega^2}};$$

3. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2 \cdot \xi \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2};$$

4. Переходная  $h(t)$  и весовая  $w(t)$  функции

$$h(t) = K \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\zeta \cdot t}{T}} \cdot \left( \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} \cdot t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} \cdot t\right) \right) \right),$$

$$w(t) = \frac{K \cdot \zeta}{T \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\frac{\zeta \cdot t}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} \cdot t\right).$$

ЛАЧХ колебательного звена на частоте  $\omega = \frac{1}{T}$  имеет резонансный пик, и чем меньше коэффициент затухания  $\zeta$ , тем большую амплитуду он имеет. На рис.42 представлены ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена для различных  $\zeta$ , построенные для случая  $K = 1$ .



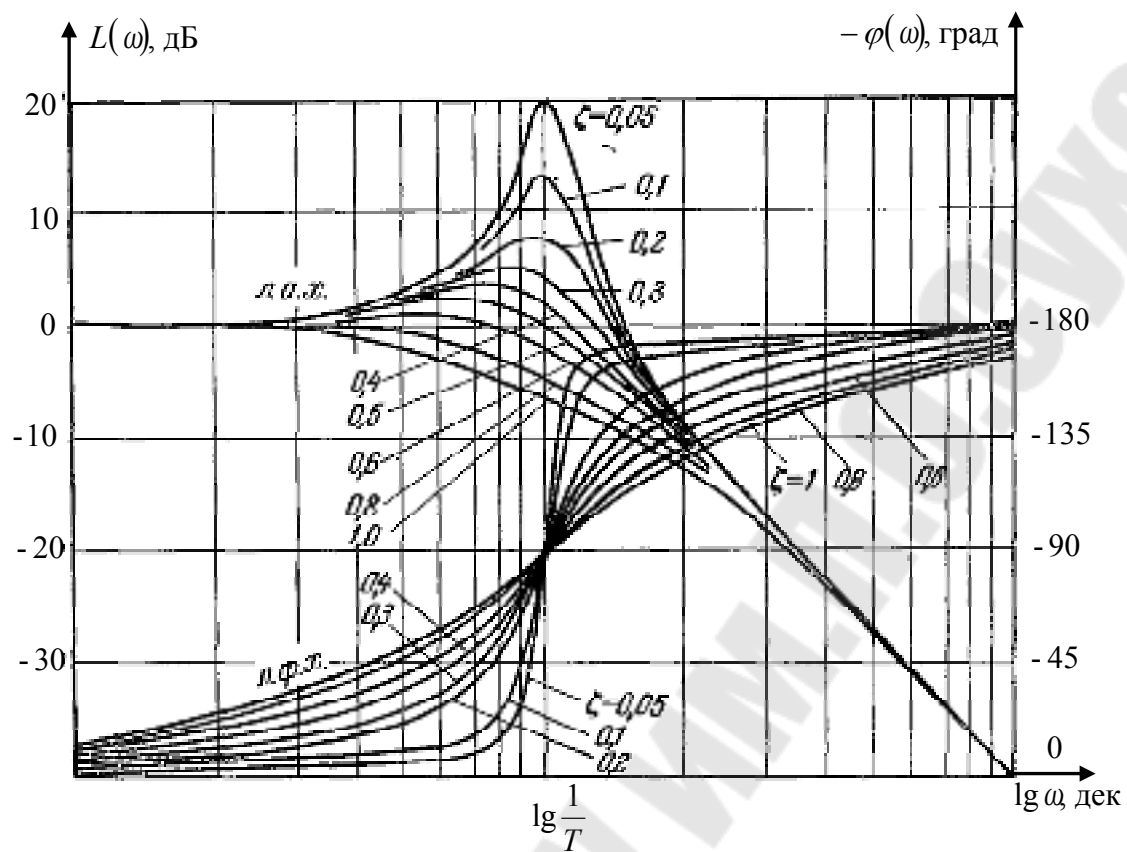


Рис. 42. ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена.

Временные характеристики колебательного звена приведены на рис.43.

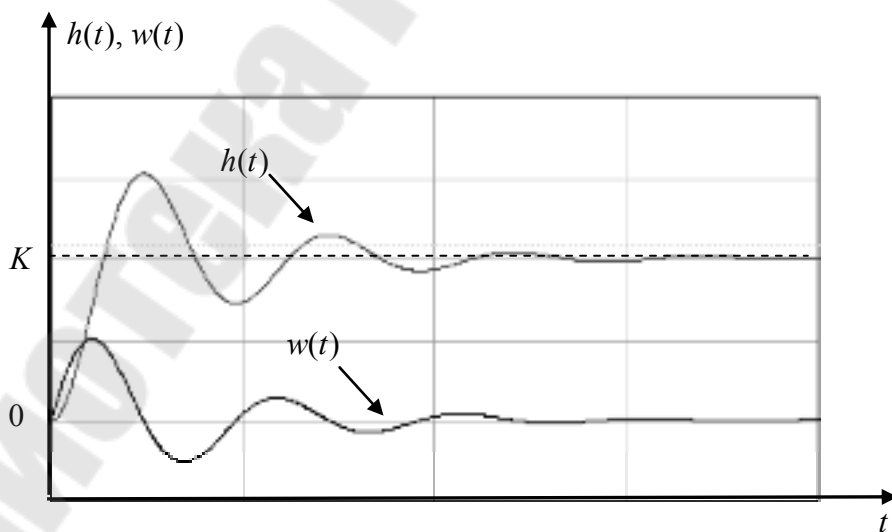


Рис. 43. Временные характеристики колебательного звена.

### Консервативное (резонансное) звено

Если в дифференциальном уравнении (46)  $\xi = 1$ , то это консервативное звено. Передаточная функция для него будет иметь вид

$$W(p) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 1}.$$

Примерами консервативных динамических звеньев могут служить те же элементы управления, что и в случае апериодического звена второго порядка и колебательного звена, но обладающие особыми параметрами.

Основные характеристики консервативного звена:

#### 1. АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2 \cdot \omega^2 + 1};$$

#### 2. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)}};$$

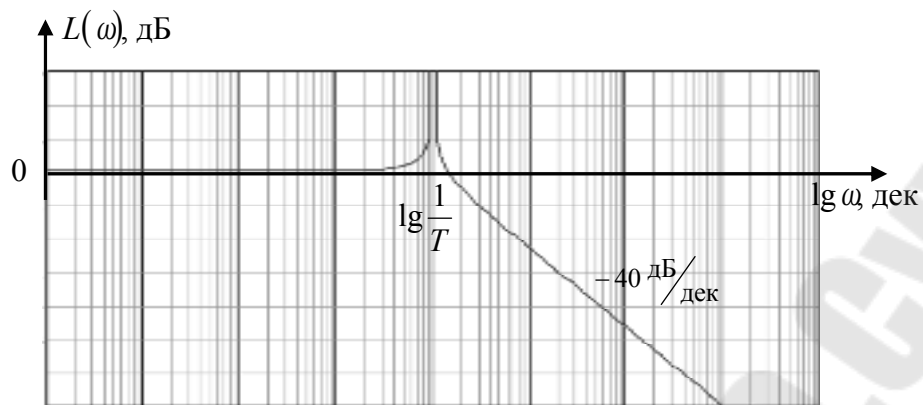
#### 3. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{0}{1 - T^2 \cdot \omega^2} \Rightarrow \begin{cases} 0^\circ & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ -180^\circ & \text{при } \omega > \frac{1}{T}; \end{cases}$$

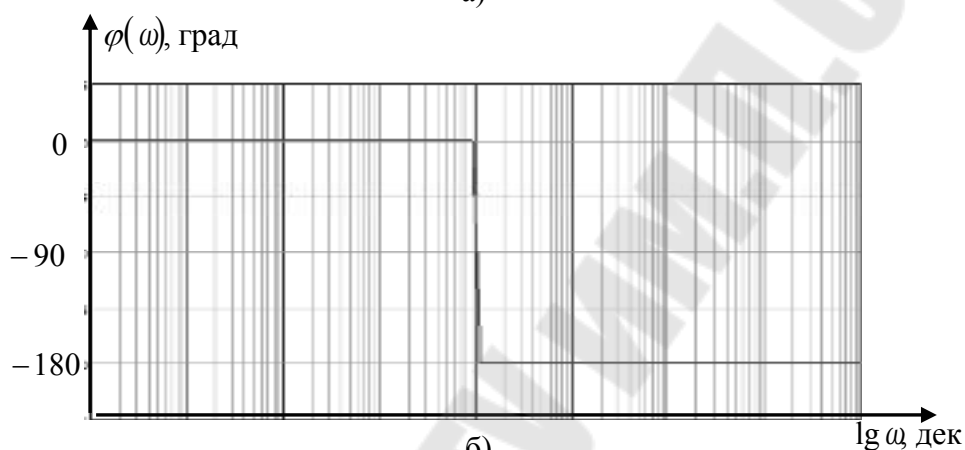
#### 4. Переходная $h(t)$ и весовая $w(t)$ функции

$$h(t) = K \cdot \left( 1 - \cos \frac{t}{T} \right),$$
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{T} \cdot \sin \frac{t}{T}.$$

Частотные (при  $K = 1$ ) и временные характеристики консервативного звена представлены на рис.44 – рис.45 соответственно.



а)



б)

Рис. 44. ЛАЧХ (а) и ЛФЧХ (б) консервативного звена

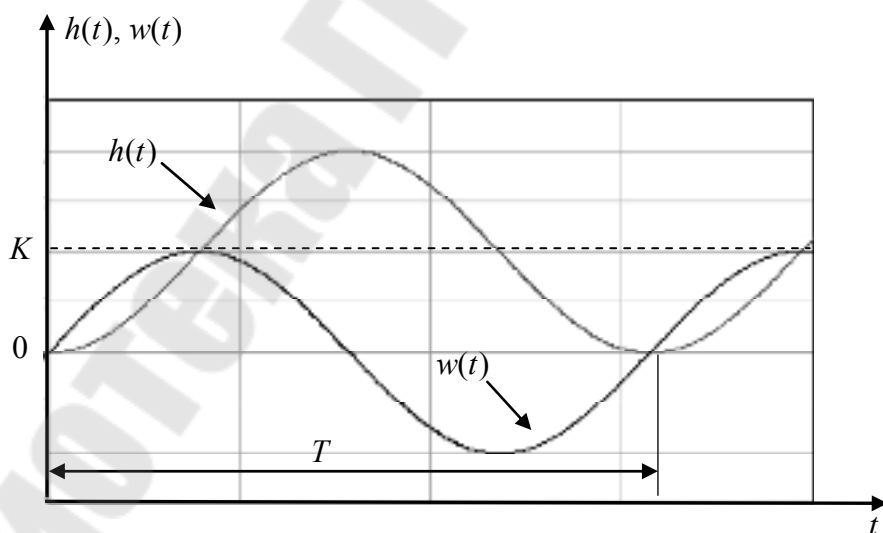


Рис. 45. Временные характеристики колебательного звена.

ЛАЧХ консервативного звена не существует в точке соответствующей частоте  $\omega_p = \frac{1}{T}$ , а ЛФЧХ делает скачок от 0 град до -180 град.

По временным характеристикам видно, что на выходе консервативного звена имеются незатухающие колебания с периодом соответствующим постоянной времени  $T$  звена.

#### 1.4.2.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: идеальное дифференцирующее звено, форсирующие звенья первого и второго порядков, дифференцирующие звенья с замедлением и с форсированием. Рассмотрим примеры и основные характеристики этих звеньев.

##### *Идеальное дифференцирующее звено*

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$a_1 \cdot x_{\text{ВЫХ}} = b_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt}, \quad (50)$$

где  $a_1, b_1$  – постоянные коэффициенты.

В (50) введем обозначение постоянной времени звена  $T = \frac{b_1}{a_1}$ .

Передаточная функция идеального дифференцирующего звена в этом случае будет иметь вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = T \cdot p.$$

Примеры идеальных дифференцирующих звеньев изображены на рис.46. Наиболее точно описывается дифференциальным уравнением (50) тахогенератор постоянного тока. Это устройство, относится к датчикам, используемым в САУ, в котором происходит преобразования скорости вращения якоря тахогенератора  $\omega$  (или углового перемещения  $\alpha$ ) в пропорциональное ей электрическое напряжение  $u$  вырабатываемое тахогенератором. Если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его якоря  $x_{\text{ВХ}} = \alpha$ , а в качестве выходной -  $x_{\text{ВЫХ}} = u$ , то дифференциальное уравнение для тахогенератора запишется в виде

$$u = K \cdot \frac{d\alpha}{dt} = T \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Для этого звена коэффициент передачи  $K$  и постоянная времени  $T$  являются синонимичными параметрами, т.е. при расчетах можно использовать оба обозначения.

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться электрическая схема (рис.46.б), где операционный усилитель работает в режиме дифференцирования.

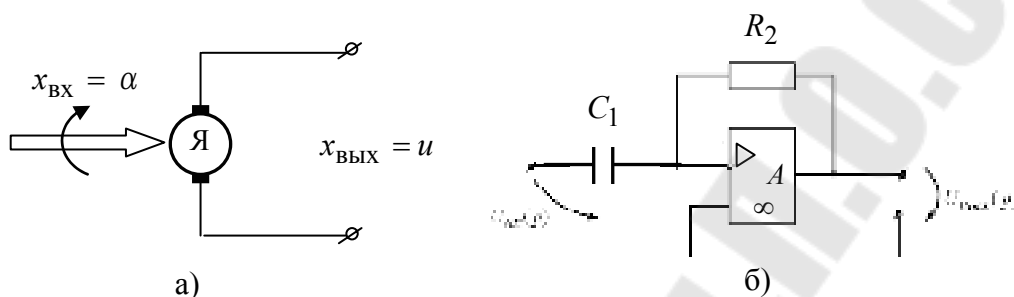


Рис.46. Примеры идеальных дифференцирующих звеньев: тахогенератор постоянно-го тока (а), операционный усилитель в режиме дифференцирования (б).

Основные характеристики идеального дифференцирующего звена (рис.47):

1. ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg(T \cdot \omega)$ ;
2. ЛФЧХ  $\varphi(\omega) = 90^\circ$ ;
3. Переходная характеристика  $h(t) = \delta(t)$ ;
4. Весовая характеристика  $w(t) = \frac{d}{dt}(\delta(t))$ .

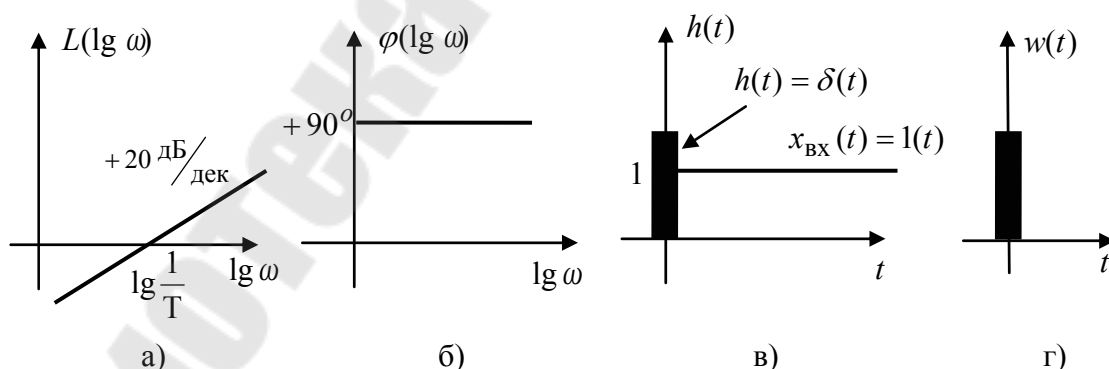


Рис.47. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики идеального дифференцирующего звена

### Форсирующее звено первого порядка

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left( T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x \right), \quad (51)$$

В операторном виде уравнение звена (51) записывается

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = K \cdot (T \cdot p \cdot X_{\text{ВХ}}(p) + X_{\text{ВХ}}(p)),$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot (T \cdot p + 1), \quad (52)$$

где  $K, T$  – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Приближенно в качестве форсирующего звена первого порядка может рассматриваться электрическая схема, изображенная на рис.48

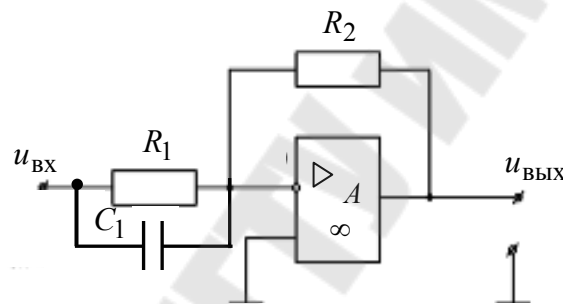


Рис.48. Принципиальная электрическая схема форсирующего звена первого порядка

Основные характеристики форсирующего звена первого порядка (рис.49):

1. ЛАЧХ

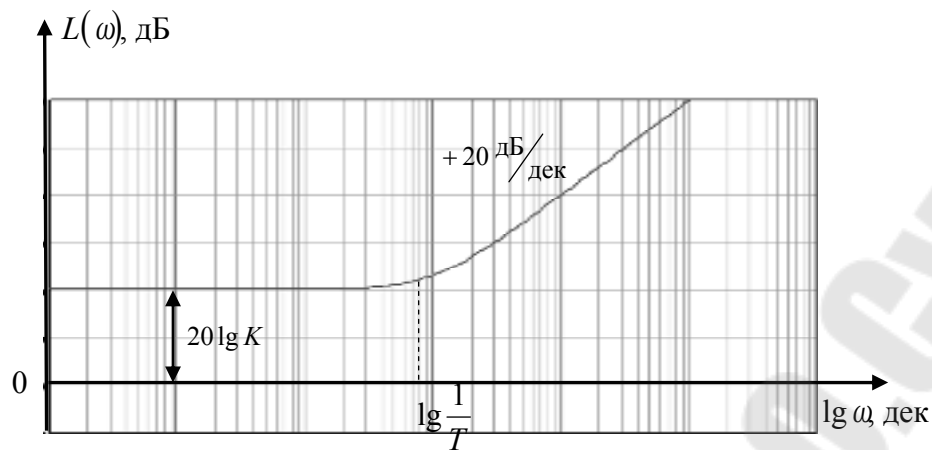
$$L(\omega) = 20 \lg K \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1} = 20 \lg K + 20 \lg \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1};$$

2. ЛФЧХ

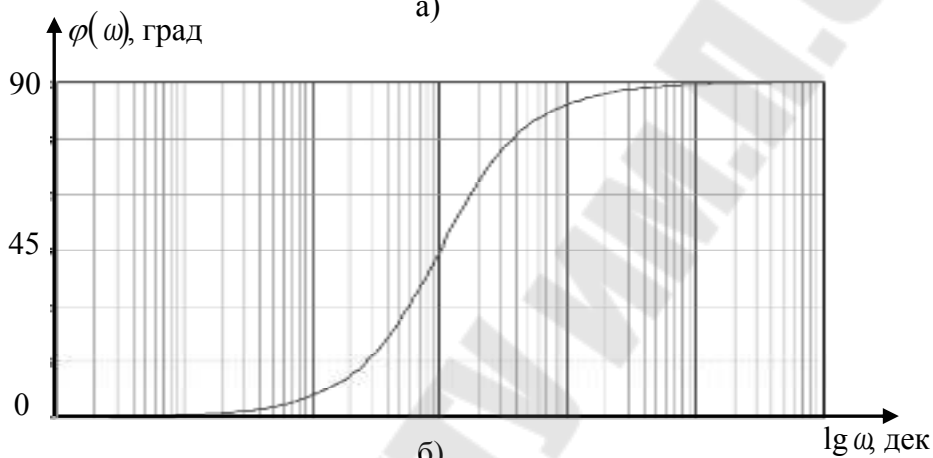
$$\varphi(\omega) = \arctg(T \cdot \omega) = \arctg(T \cdot 10^{\lg \omega});$$

3. Переходная характеристика  $h(t) = T \cdot \delta(t) + 1(t)$ ;

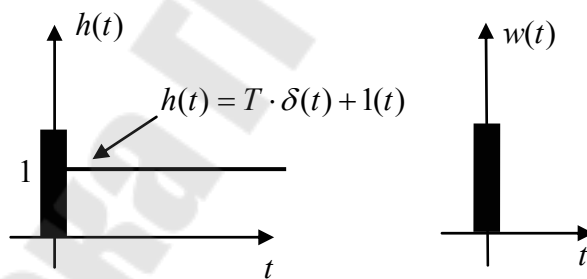
4. Весовая характеристика  $w(t) = T \cdot \frac{d}{dt}(\delta(t)) + \delta(t)$ .



а)



б)



в)

г)

Рис.49. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики форсирующего звена первого порядка

Из характеристик видно, что форсирующее звено реагирует на входное воздействие «быстро и энергично». Это звено хорошо пропускает сигналы в области высоких частот, т.е. оно работает как усилитель. Но для реальных САУ высокочастотная область ограничена из-за невозможности бесконечно наращивать амплитуду.

Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена первого порядка (рис.49.а,б) обладают зеркальной симметрией

по отношению к логарифмическим частотным характеристикам апериодического звена первого порядка (рис.37 а, б).

### ***Форсирующее звено второго порядка***

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, имеющим вид:

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left( T^2 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x_{\text{ВХ}} \right), \quad (53)$$

где  $K, \zeta, T$  – коэффициент передачи, коэффициент затухания и постоянная времени звена.

Передаточная функция звена, соответствующая (53) примет вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot (T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot T \cdot p + 1).$$

Это тип звеньев в САУ реализуется с помощью электрических схем на активных (операционные усилители) и пассивных ( $R, L, C$ ) элементах.

Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена второго порядка получают зеркальным отражением соответствующих характеристик апериодического звена второго порядка (рис.40). Например, при  $\zeta > 1$  это звено будет составным, и состоять из последовательного соединения двух форсирующих звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_1, T_2$ , определяемые по (47).

Временные характеристики звена аналогичны временным характеристикам форсирующего звена первого порядка (рис.49 в, г).

На рис.50 представлены ЛАЧХ и ЛФЧХ форсирующего звена второго порядка для случая  $K = 1$  и  $\zeta > 1$ .

### ***Дифференцирующее звено с замедлением***

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} \quad (54)$$

где  $K, T$  – коэффициент передачи и постоянная времени звена.



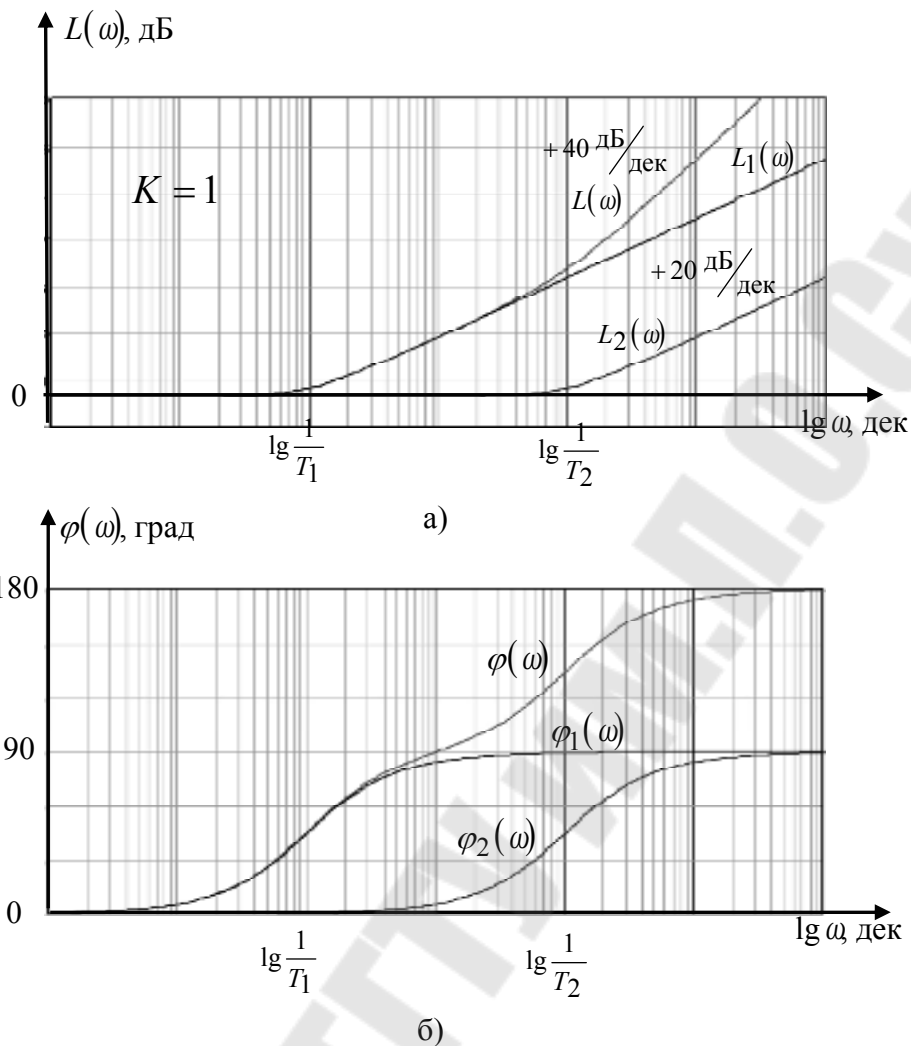


Рис.50. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики форсирующего звена второго порядка

Уравнению (54) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K \cdot p}{T \cdot p + 1}.$$

Наиболее часто в качестве дифференцирующих звеньев с замедлением используются электрические цепи (рис.51.а, б, в). В некоторых случаях используются устройства, состоящие из гидравлического демпфера и пружины, только входной величиной будет перемещение точки *b* под действием силы *F* (рис.51 г).

Так как

$$\frac{K \cdot p}{T \cdot p + 1} = p \cdot \frac{K}{T \cdot p + 1},$$

то дифференцирующее звено с замедлением, согласно правилам структурных преобразований, можно рассматривать как последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев. Учитывая этот факт, изобразим логарифмические частотные характеристики звена (рис.52).

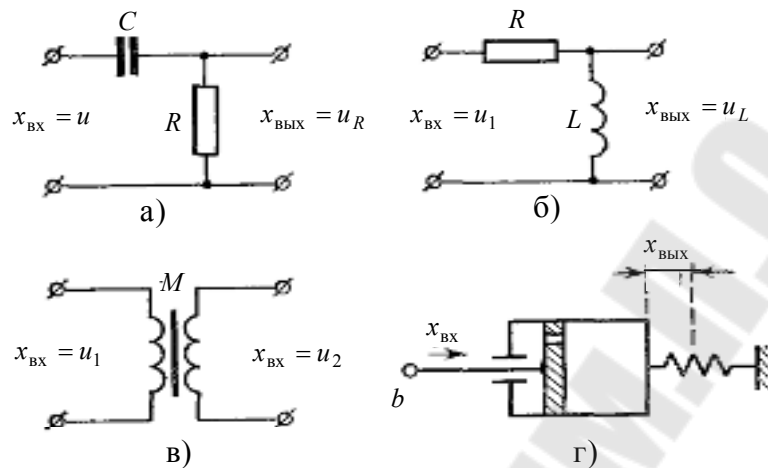


Рис.51. Примеры дифференцирующих звеньев с замедлением: RC-цепь (а), RL-цепь (б), трансформатор (в), демпфер с пружиной (г)

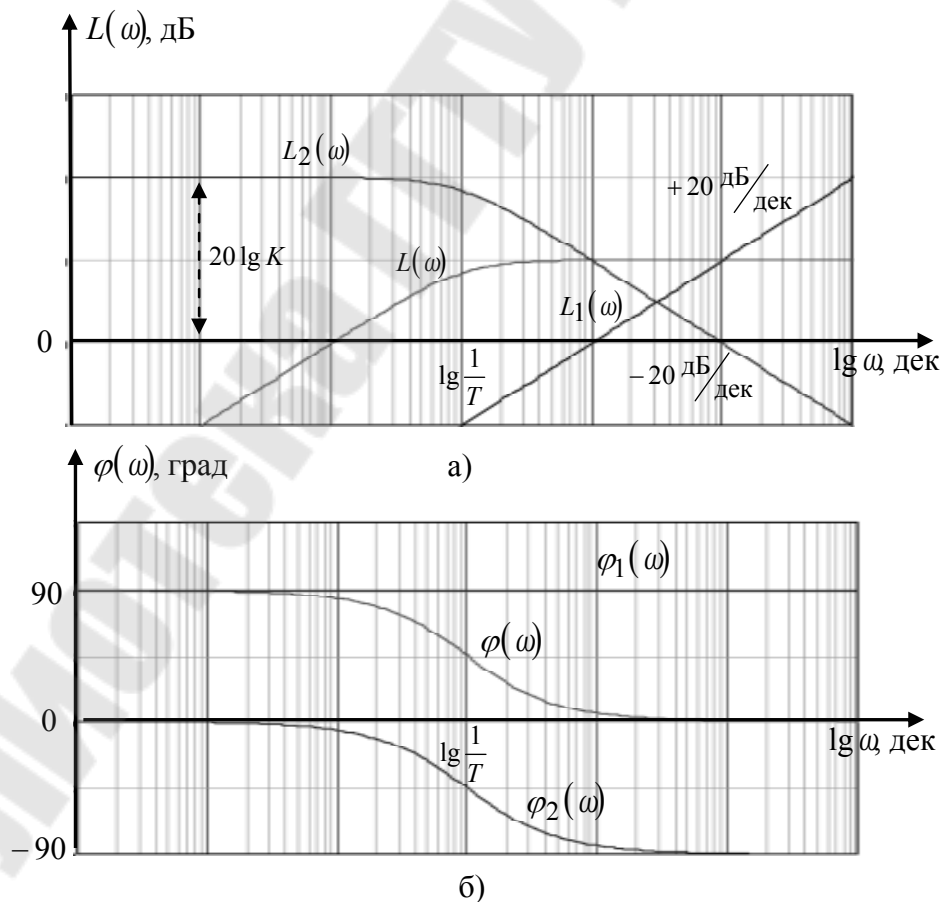


Рис.52. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики дифференцирующего звена с замедлением

Из характеристик (рис.52) видно, что ЛАЧХ имеет другой вид, чем у идеального дифференцирующего звена. Характеристики совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже, чем идеальное звено. Фазовые сдвиги, вносимые звеном, являются наибольшими на низких частотах. На высоких частотах сдвиг постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

Временные характеристики (рис.53) определяются следующими соотношениями

$$h(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}};$$

$$w(t) = T \cdot \delta(t) - \frac{K}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

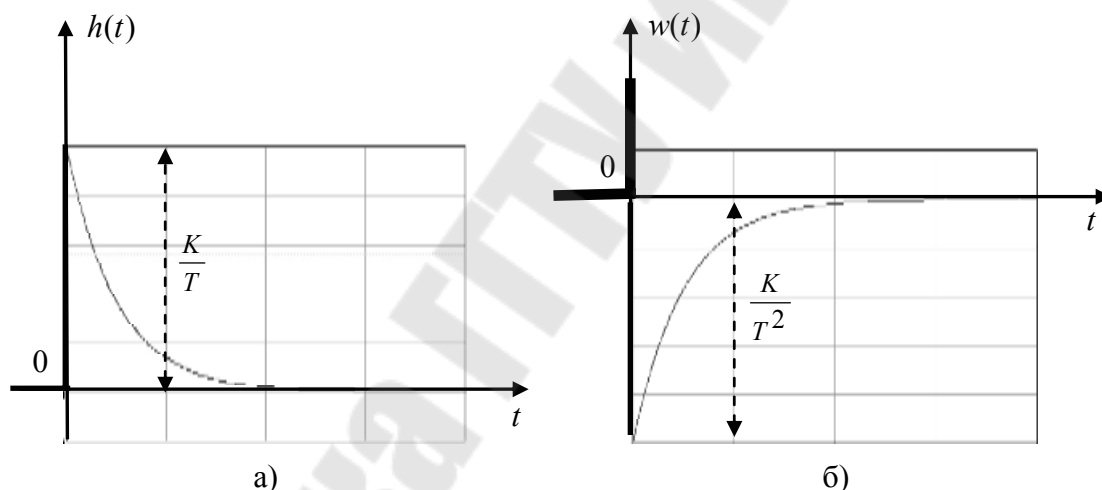


Рис.53. Временные характеристики: переходная (а), весовая (б) дифференцирующего звена с замедлением

### ***Дифференцирующее звено с форсированием***

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot \left( T \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВХ}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} \right) \quad (55)$$

где  $K, T$  – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Уравнению (54) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = K \cdot p \cdot (T \cdot p + 1).$$

Примерами такого рода звеньев являются пассивные и активные цепи на  $LRC$  – элементах. Один из вариантов реализации такой схемы представлен на рис.54.

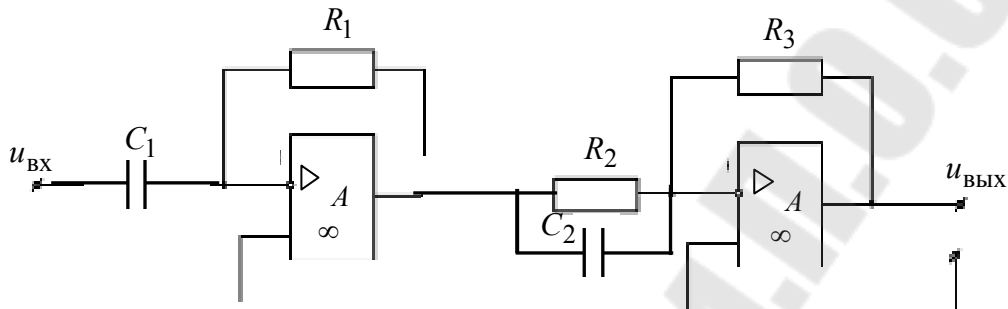


Рис.54. Реализация дифференцирующего звена с форсированием на операционных усилителях

Это звено также является составным и представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и форсирующего звена первого порядка. В соответствии с этим логарифмические частотные характеристики будут иметь вид, представленный на рис.55. Временные характеристики этого звена сходны с характеристиками идеального дифференцирующего звена (рис.47).

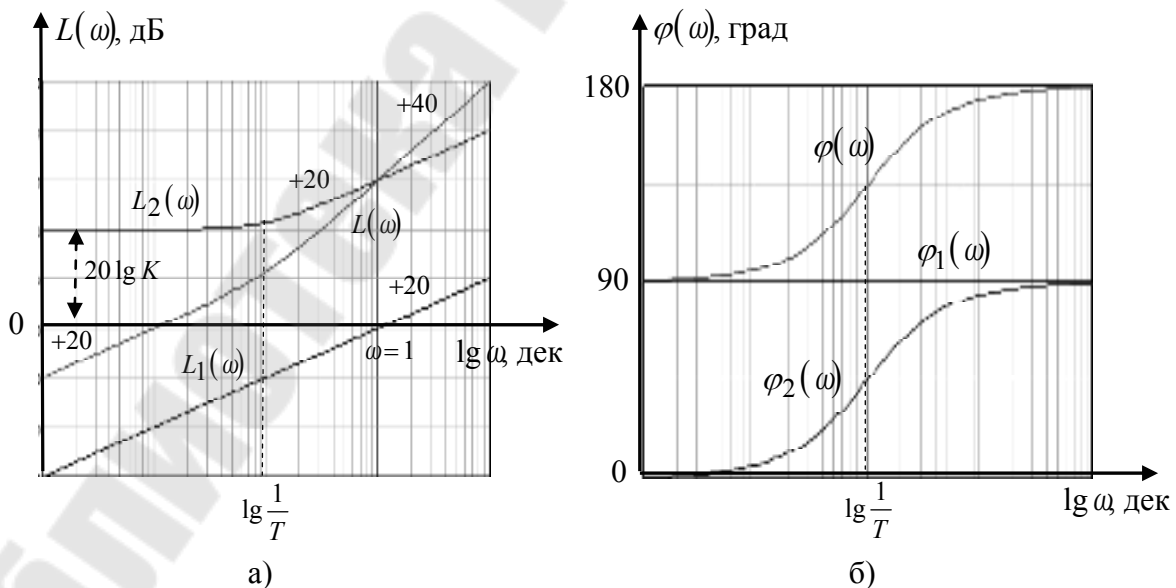


Рис.55. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики дифференцирующего звена с форсированием

В отличие от дифференцирующего звена с замедлением у этого звена в области высоких частот сигнал проходит заметно лучше. В реальных системах область высоких частот ограничена, из-за невозможности постоянно наращивать мощность сигнала, не имея источника неисчерпаемой энергии.

### 1.4.2.3. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

К ним относятся: идеальное интегрирующее звено, интегрирующие звенья с замедлением и с форсированием. Рассмотрим примеры и основные характеристики этих звеньев.

#### *Идеальное интегрирующее звено*

Это звено описывается линейным дифференциальным уравнением вида

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} = x_{\text{ВХ}},$$

где  $T$  – постоянная времени звена.

Передаточная функция идеального интегрирующего звена тогда будет иметь вид

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{T \cdot p}.$$

Чаще всего, в качестве такого звена используется операционный усилитель в режиме интегрирования (рис.56)

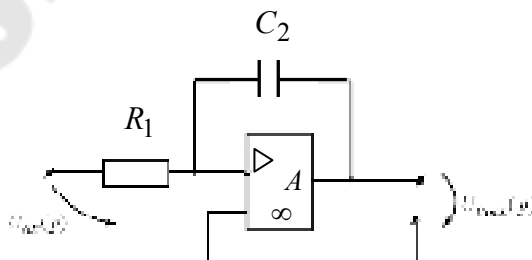


Рис.56. Операционный усилитель в режиме интегрирования входного сигнала

Также, интегрирующим звеном является обычный гидравлический демпфер (рис.17) или распределительный каскад гидроусилителя (рис.16).

Основные характеристики идеального дифференцирующего звена (рис.57):

1. ЛАЧХ  $L(\omega) = -20 \lg(T \cdot \omega)$ ;

2. ЛФЧХ  $\varphi(\omega) = -90^\circ$ ;

3. Переходная характеристика  $h(t) = \frac{1}{T} \cdot t$ ;

4. Весовая характеристика  $w(t) = \frac{d}{dt}(h(t)) = \frac{1}{T} \cdot 1(t)$ .

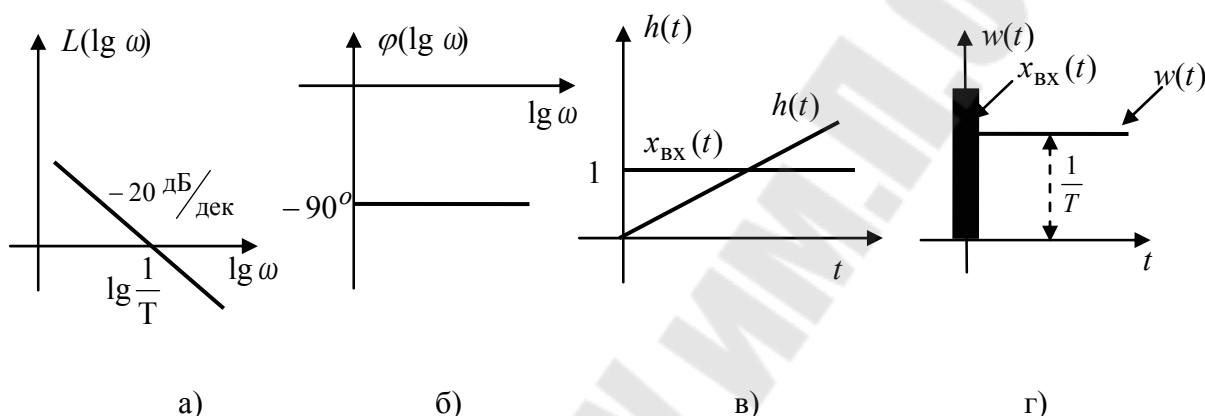


Рис.57. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики идеального интегрирующего звена

### Интегрирующее звено с замедлением

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \cdot \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K \cdot x_{\text{ВХ}}, \quad (56)$$

где  $K, T$  – коэффициент передачи и постоянная времени звена.

Уравнению (56) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K}{p \cdot (T \cdot p + 1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{(T \cdot p + 1)}. \quad (57)$$

Это звено также составное, и наличие в нем апериодической составляющей (57) определяет название этого звена (в области высоких частот происходит ослабление входного сигнала).

Примером интегрирующего звена с замедлением является электрический двигатель (рис.39 б), но если только в качестве выходной величины рассматривать не угловую скорость вращения якоря  $\omega$ , а

угол поворота якоря  $\alpha$ , являющийся интегралом от угловой скорости  $\omega$ . К такому, же типу звена сводится гидравлический демпфер (рис.17), если более точно рассматривать его дифференциальное уравнение.

Основные характеристики звена (рис.58 – рис.59):

1. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{K}{\omega \cdot \sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}} = L_1(\omega) + L_2(\omega) =$$

$$= -20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T^2 \cdot \omega^2 + 1}};$$

2. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -90 - \arctg(T \cdot \omega);$$

3. Переходная характеристика  $h(t) = K \cdot \left( t - T \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right);$

4. Весовая характеристика  $w(t) = K \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$

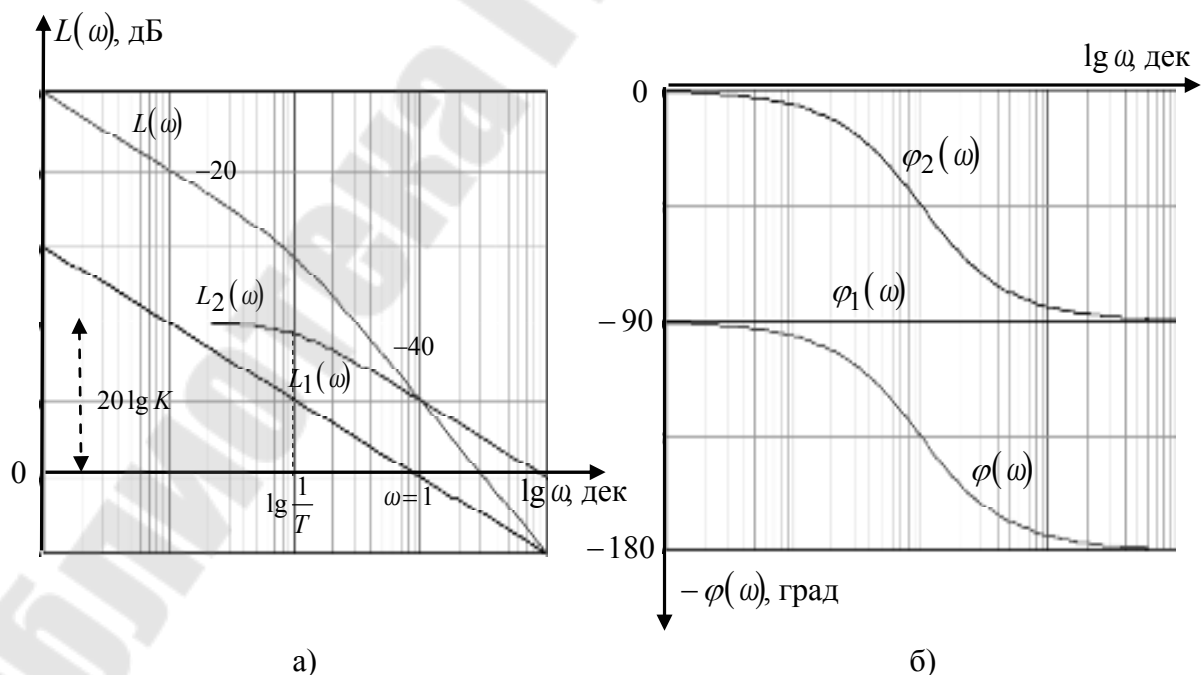


Рис.58. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики интегрирующего звена с замедлением

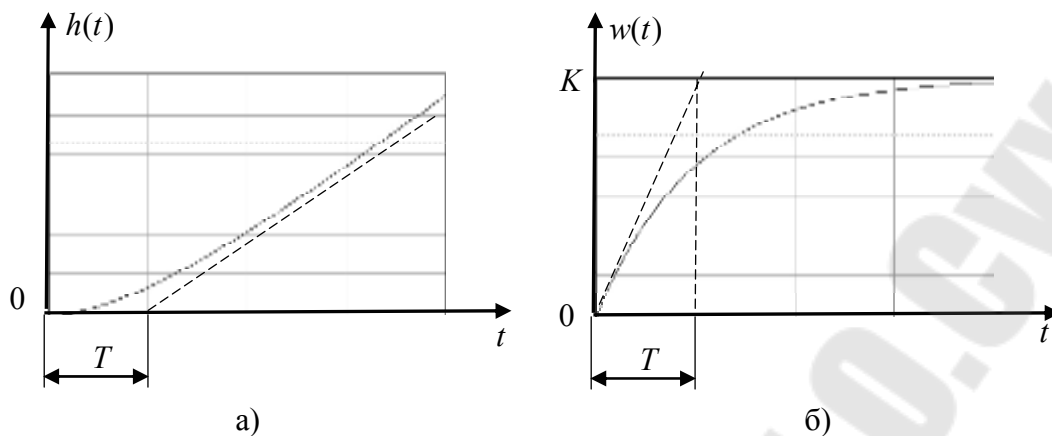


Рис.59. Временные характеристики: переходная (а), весовая (б) интегрирующего звена с замедлением

### **Интегрирующее звено с форсированием**

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T_2 \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} = K \cdot \left( T_1 \cdot \frac{dx_{\text{ВХ}}}{dt} + x_{\text{ВХ}} \right), \quad (58)$$

где  $T_1, T_2$  – постоянные времени звена.

Уравнению (58) соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{K \cdot (T_1 \cdot p + 1)}{T_2 \cdot p} = K \cdot \frac{T_1}{T_2} + \frac{K}{T_2 \cdot p}. \quad (59)$$

В литературе интегрирующее звено с форсированием часто встречается под таким названием как пропорционально-интегрирующее звено. Его название как раз соответствует передаточной функции (59).

Примером такого звена может быть комбинация пружины с демпфером (рис.51.г), если в качестве входной величины использовать внешнюю силу  $F$ , прикладываемую к точке  $b$ , а выходной - перемещение точки  $b$ . Также в САУ, в качестве регулятора часто используется электрическая схема на операционном усилителе (рис.18), если

$$Z_1(p) = R_1, Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot p}.$$



Это звено также является составным и поэтому его основные характеристики можно представить следующим образом (рис.60 – рис.61):

1. ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg \frac{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}}{\omega \cdot T_2} = L_1(\omega) + L_2(\omega) =$$

$$= 20 \cdot \lg \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \cdot \omega^2 + 1}} - 20 \cdot \lg T_2 \cdot \omega;$$

2. ЛФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = \arctg(T_1 \cdot \omega) - 90^\circ;$$

3. Переходная характеристика  $h(t) = t + K \cdot \frac{T_1}{T_2}$ ;

4. Весовая характеристика  $w(t) = 1(t) + K \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \delta(t)$ .

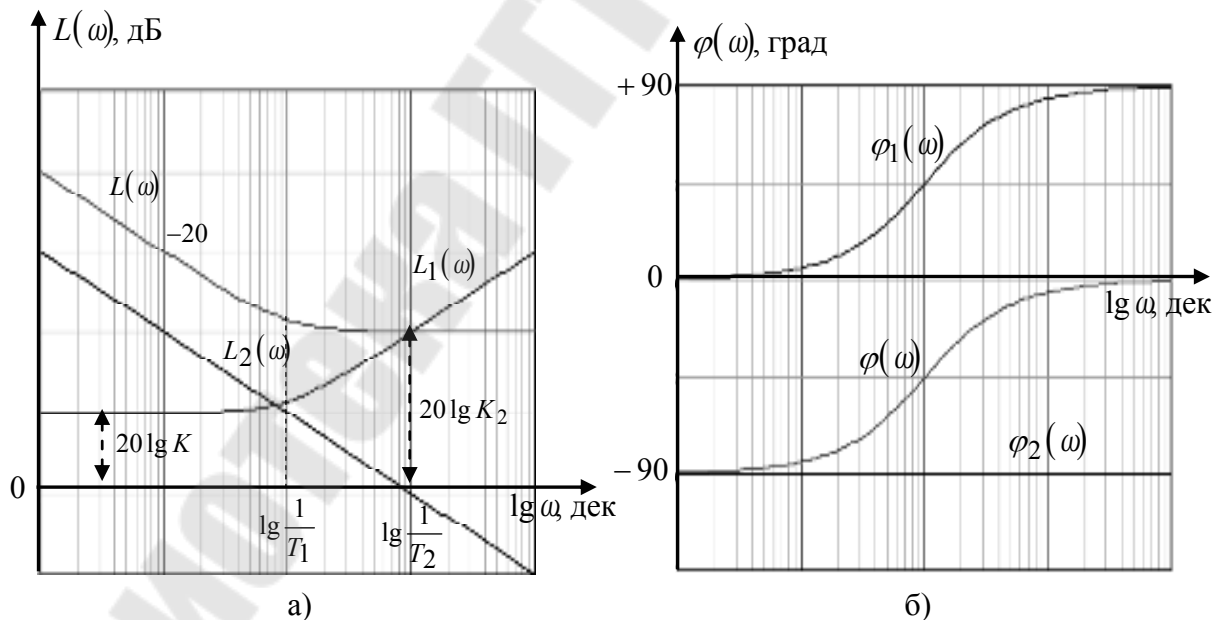


Рис.60. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) характеристики интегрирующего звена с форсированием

По ЛАЧХ и ЛФЧХ интегрирующего звена с форсированием видно, что в области малых частот звено ведет себя как идеальное ин-

тегрирующее. В области больших частот звено ведет себя как безинерционное с постоянным коэффициентом передачи  $K_2$  (рис.60 а).

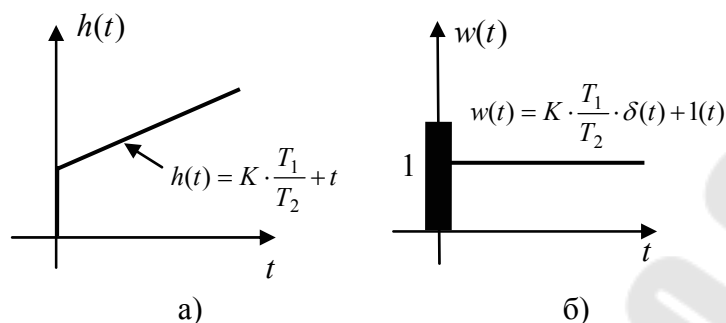


Рис.61. Временные: переходная (а), весовая (б) характеристики интегрирующего звена с форсированием

Свойства звена вводить интегрирующее действие в области малых частот используется для улучшения качественных показателей в САУ.

#### 1.4.2.4. ОСОБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

##### *Звено с запаздыванием*

Звено с запаздыванием описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{ВЫХ}} = 1 \cdot (t - \tau) \cdot K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

где  $\tau$  – время задержки выходного сигнала  $x_{\text{ВЫХ}}$  по отношению к входному  $x_{\text{ВХ}}$ .

Таковыми звеньями обладают САУ с запаздыванием. Они имеют ту же структуру, что и обыкновенные САУ, но отличаются от последних тем, что в одном или нескольких звеньях имеется запаздывание во времени начала изменения выходной величины  $\tau$ .

Например, если обыкновенное апериодическое звено описывается уравнением

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

то уравнение соответствующего звена с запаздыванием будет иметь вид:

$$T \cdot \frac{dx_{\text{ВЫХ}}}{dt} + x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}}(t - \tau).$$

Примером звена запаздывания является транспортер (рис.62).

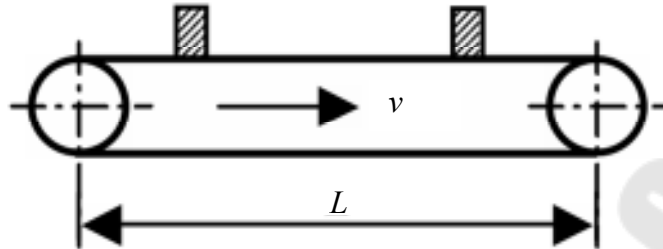


Рис.62. Транспортер.  $L$  – длина транспортера,  $v$  – скорость движения транспортера

Если за входную величину принять расход материала в начале транспортера, а за выходную – расход в конце транспортера, то выходной сигнал  $x_{\text{ВЫХ}}$  будет полностью повторять входной  $x_{\text{ВХ}}$ , но с запаздыванием  $\tau$ , равным времени движения материала от места погрузки до места выгрузки материала. При этом величина запаздывания будет определяться уравнением

$$\tau = \frac{L}{v}.$$

Акустическая линия связи ( $\tau$  – время прохождения звука), или пробка, возникшая на дороге ( $\tau$  – разница во времени между началом движения первого и последнего автомобиля в очереди) также являются примерами звена с запаздыванием.

Рассмотрим основные характеристики этого звена (рис.63):

1. Передаточная функция  $W(p) = K \cdot e^{-p\tau}$ ;
2. АФЧХ  $W(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega\tau}$ ;
3. ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg K$ , дБ;
4. ЛФЧХ  $\varphi(\omega) = -\frac{\omega \cdot \tau}{2\pi} \cdot 360$ , град;
5. Переходная характеристика  $h(t) = K \cdot 1(t - \tau)$ ;
6. Весовая характеристика  $h(t) = K \cdot \delta(t - \tau)$ .

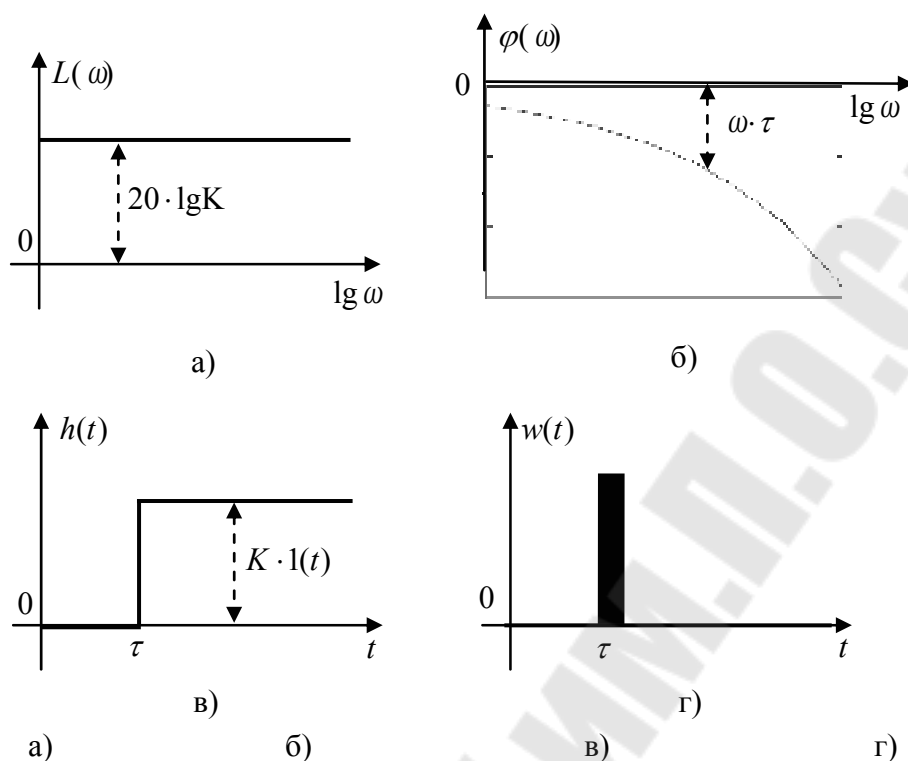


Рис.63. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б) и временные: переходная (в), весовая (г) характеристики звена с запаздыванием

### **Неминимально-фазовые динамические звенья**

Звенья позиционного типа (безинерционные, апериодические первого и второго порядков) относятся к устойчивым звеньям или, по-другому, звеньям с самовыравниванием. Под самовыравниванием понимается способность звена самопроизвольно приходить к новому установившемуся значению при ограниченном изменении входной величины или возмущения (скачок входного сигнала  $x_{вх} = 1(t)$ ).

Например, у звеньев интегрирующего типа ограниченное изменение сигнала на входе не вызывает прихода звена к установившемуся режиму, а сигнал на выходе такого звена имеет неограниченное возрастание во времени.

Но существуют звенья, у которых этот процесс выражен еще больше. Это объясняется наличием положительных вещественных корней или комплексных корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении (характеристическое уравнение получается, если знаменатель передаточной функции приравнять к нулю).

Таким образом, эти звенья будут относиться к категории неустойчивых динамических звеньев. Для понимания этого рассмотрим

пример передаточной функции неустойчивого апериодического звена. Пусть передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{T \cdot p - 1}, \quad (60)$$

тогда характеристическое уравнение звена (60)  $T \cdot p - 1 = 0$  имеет один положительный вещественный корень  $p = \frac{1}{T}$ .

Рассмотрим частотные характеристики этого звена:

### 1. АФЧХ

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K}{T \cdot j\omega - 1} \cdot \frac{-1 - T \cdot j\omega}{-1 - T \cdot j\omega} = \frac{-K - T \cdot j\omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2} = \\ &= -\frac{K}{1 + T^2 \cdot \omega^2} - j \cdot \frac{K \cdot T \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}; \end{aligned}$$

### 2. АЧХ

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}}; \quad (61)$$

### 3. ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-T \cdot \omega}{-1} = \operatorname{arctg}(T \cdot \omega) - 180^\circ. \quad (62)$$

Таким образом, по (61) видно, АЧХ неустойчивого апериодического звена полностью соответствует АЧХ устойчивого апериодического звена, но ФЧХ (62) отличается. Фазовая характеристика неустойчивого звена  $\varphi(\omega)$  лежит в третьей декаде на комплексной плоскости и изменяется от  $-180^\circ$  до  $-90^\circ$ . Для устойчивого апериодического звена

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(T \cdot \omega) \text{ и } 0 \leq \varphi \leq -90^\circ.$$

*Т.е. разница между устойчивым и неустойчивым звеньями состоит в диапазоне изменения фазовой характеристики  $\varphi(\omega)$ , при этом амплитудные характеристики у них совпадают.*

Наглядно, неустойчивость звена проявляется в виде переходной  $h(t)$  и весовой характеристик  $w(t)$ . Для рассматриваемого неустойчивого апериодического звена они определяются следующими соотношениями

$$h(t) = K \cdot \left( e^{\frac{t}{T}} - 1 \right), \quad w(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{t}{T}}.$$

На рис.64 и рис.65 соответственно приведены логарифмические частотные и временные характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) апериодического звена первого порядка.

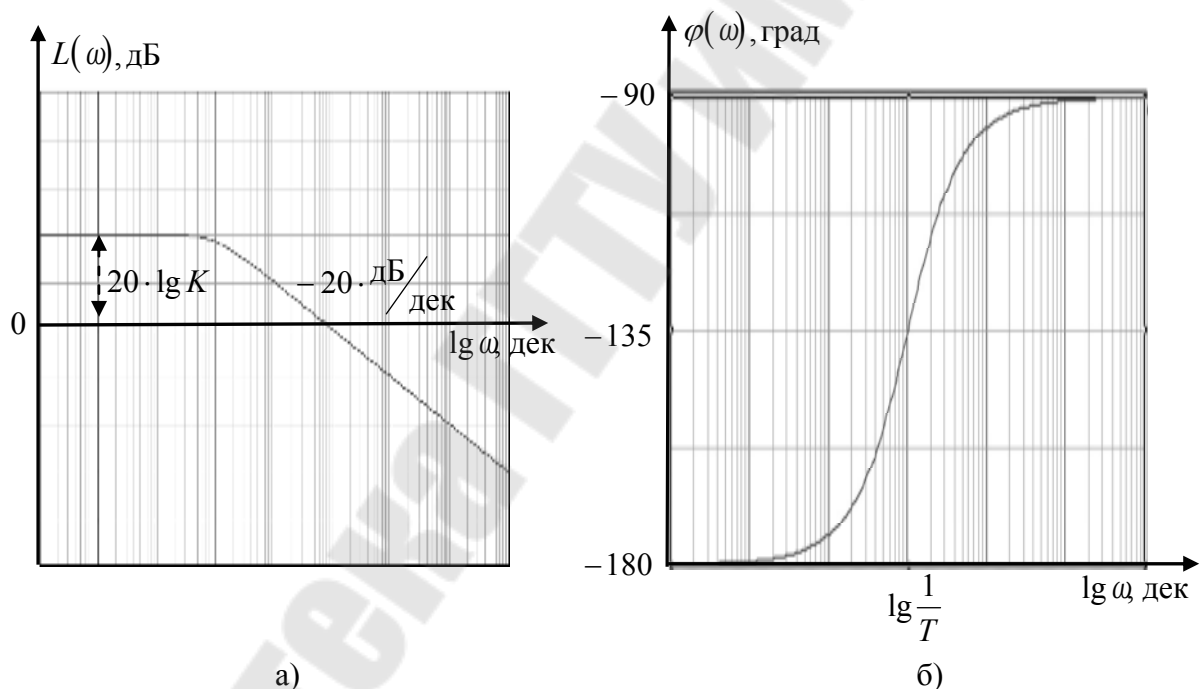


Рис.64. Логарифмические частотные: ЛАЧХ (а), ЛФЧХ (б)) характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) апериодического звена

Название «неминимально-фазовое звено» обусловлено тем, что фазовый сдвиг выходного сигнала такого звена по отношению к входному сигналу значительно больше, чем у обычных (минимально-фазовых звеньев).

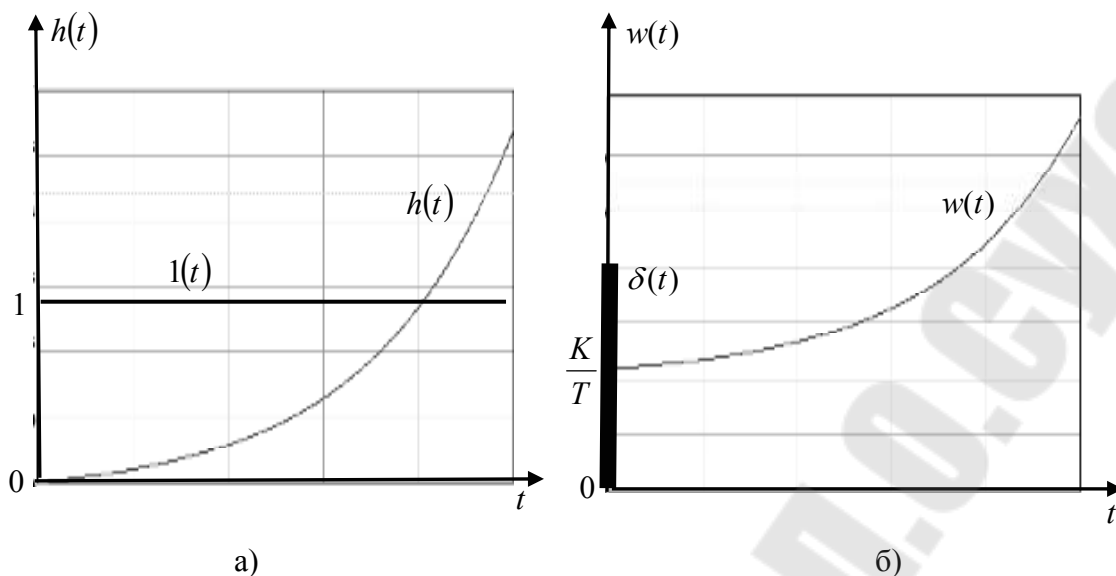


Рис.65. Временные: переходная (а), весовая (б) характеристики неминимально-фазового (неустойчивого) аperiodического звена

Последние дают фазовые сдвиги не более  $\pm 90^0$  (звенья первого порядка), не более  $\pm 180^0$  (звенья второго порядка), а неминимально-фазовые – значительно большие

Таким звеном может быть, например, двигатель любого типа, если его механическая характеристика (зависимость момента от частоты вращения)  $M = f(\omega)$  имеет положительный наклон.

Или, например, если охватить устойчивое аperiodическое звено первого порядка положительной обратной связью с коэффициентом обратной связи  $K_{oc} > 1$ , то также можно получить неминимально фазовое звено с передаточной функцией (60).

### 1.4.3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛАЧХ И ШАБЛОНОВ ДЛЯ ЛФЧХ

Вышеприведенные логарифмические характеристики, рассмотренных динамических звеньев, показывают их однотипность, а также возможность построения ЛАЧХ ломаной линией, а ЛФЧХ по шаблонам.

Действительно ЛАЧХ для аperiodического звена с коэффициентом передачи  $K = 1$  можно приближенно представить так

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

Если  $\omega < \frac{1}{T}$ , то  $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$ ;

Если  $\omega = \frac{1}{T}$ , то  $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{2} = -3 \text{ дБ} \approx 0$ ;

Если  $\omega > \frac{1}{T}$ , то  $L(\omega) = -20 \lg(T \cdot \omega)$ ;

Поэтому получаем, что  $L(\omega)$  до частоты излома  $\omega = \frac{1}{T}$  — прямая, идущая по оси частот, а за частотой излома  $L(\omega)$  представляет собой прямую, идущую с наклоном  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$  (рис.37а). Эти приближенные ЛАЧХ называют асимптотическими, поскольку они являются асимптотами реальных (точных) ЛАЧХ, погрешность при этом не превышает  $-3 \text{ дБ}$ .

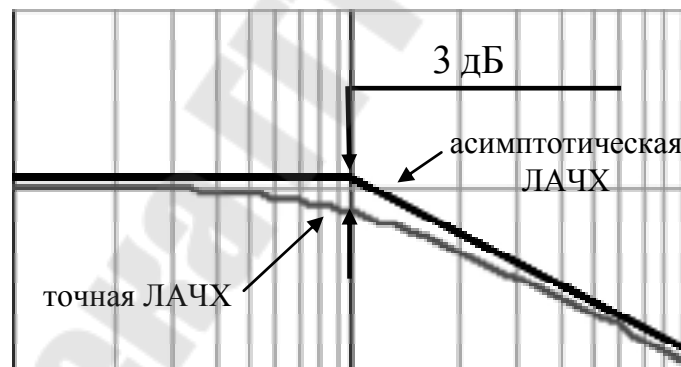


Рис.66. Фрагмент ЛАЧХ на частоте излома  $\omega = \frac{1}{T}$

Логарифмические фазовые характеристики удобно строить по шаблонам, имея в виду, что на логарифмической плоскости функция  $\pm \arctg(T \cdot \omega)$  симметрична относительно точки с координатами  $\left(\frac{1}{T}, \pm 45^\circ\right)$  и ее среднечастотная часть простирается приблизительно на 4 декады по оси частот и  $0$  до  $\pm 90$  по оси фаз.



**Пример 10.** Построить шаблонную ЛФЧХ для апериодического звена первого порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} = \frac{1}{0.01 \cdot p + 1}. \quad (63)$$

Для построения шаблонной ЛФЧХ достаточно лишь вычислить при какой частоте  $\omega$  в декадах характеристика  $\varphi(\omega)$  будет иметь перегиб

$$\lg \frac{1}{T} = \lg \frac{1}{0.01} = 2 \text{ дек.}$$

Шаблонная ЛФЧХ, соответствующая (63) приведена на рис.67.

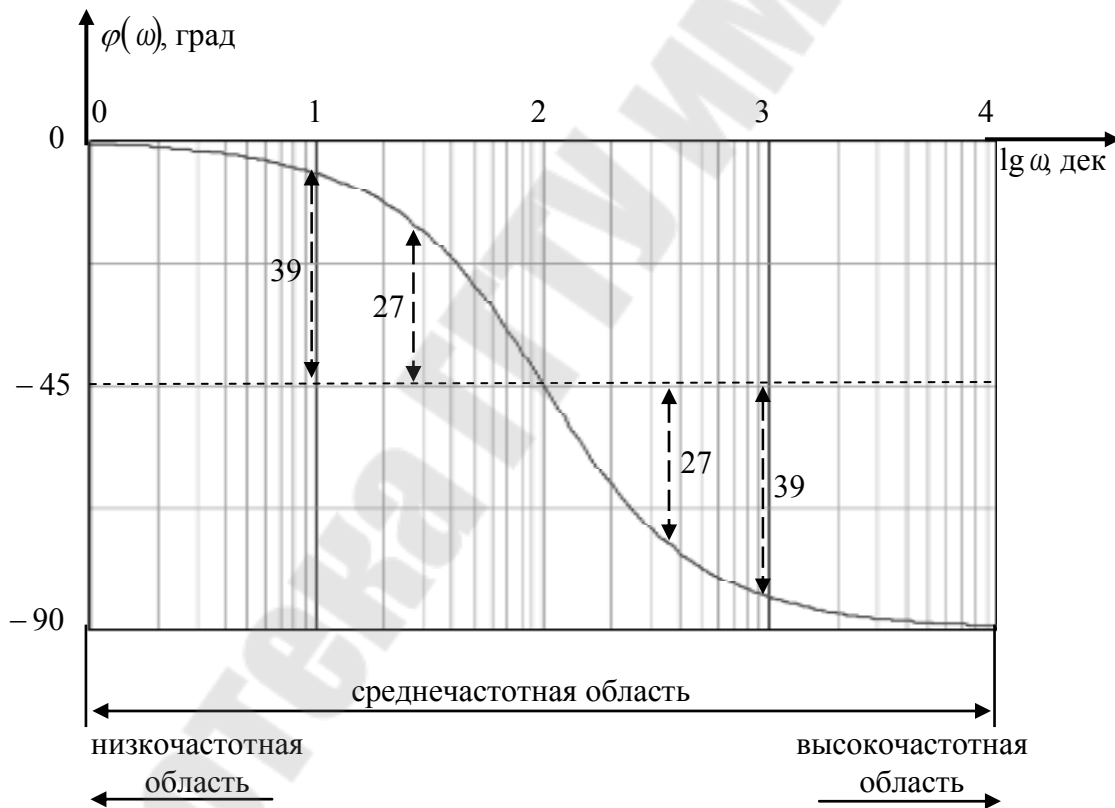


Рис.67. Пример построения шаблонной ЛФЧХ для апериодического звена первого порядка

Если требуется построить ЛАЧХ и ЛФЧХ по составной передаточной функции, то в этом случае ее разбивают на отдельные типовые передаточные функции, далее строят на общей координатной плоскости их ЛАЧХ и ЛФЧХ, после чего производят графическое суммирование

вание элементарных характеристик и получают результирующие логарифмические характеристики составного динамического звена.

## 1.5. ВИДЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ САУ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

С помощью рассмотренных выше характеристик описываются не только типовые динамические звенья, но и реальные элементы, узлы, блоки и САУ в целом.

Рассмотрим классификацию типовых характеристик элементов и САУ (рис.68).

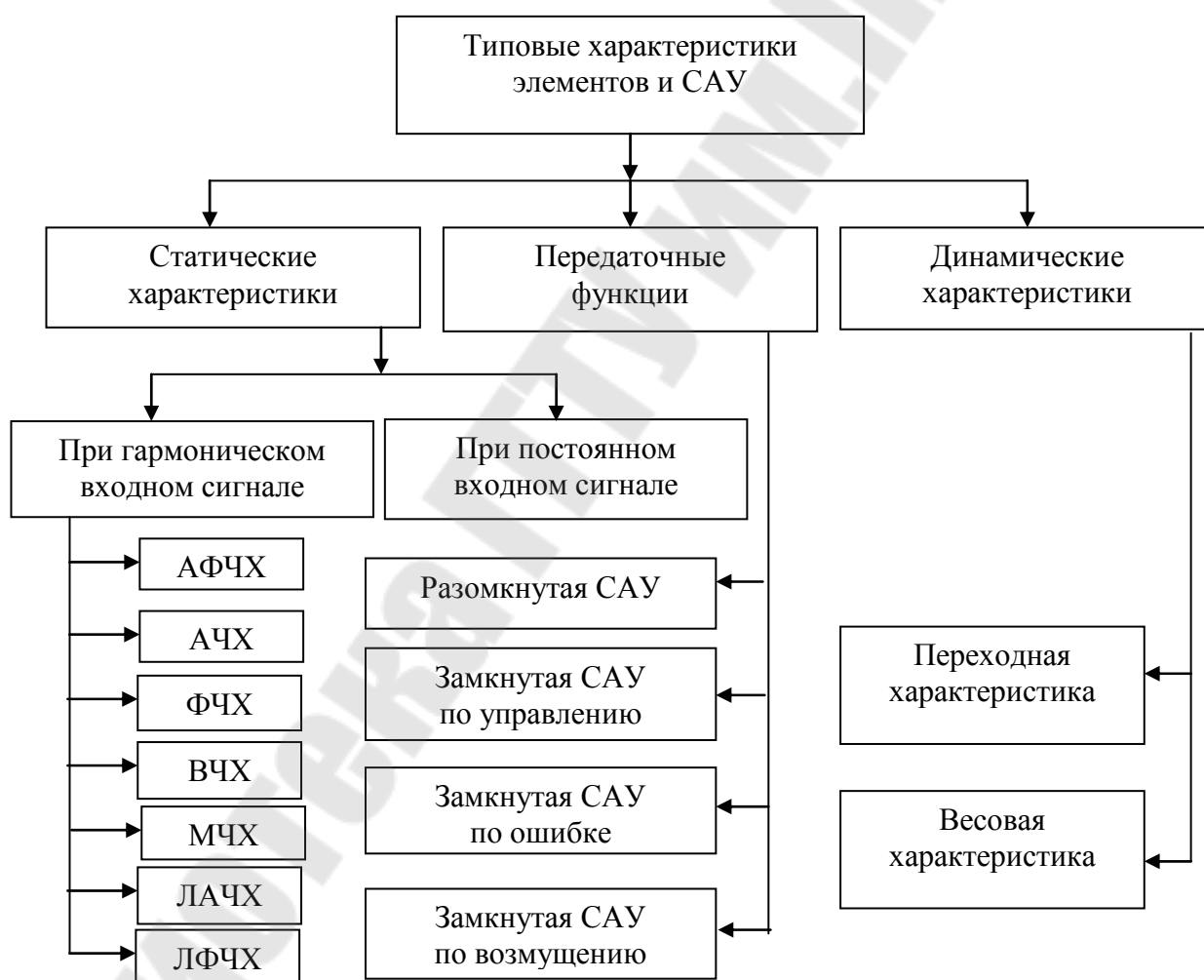


Рис.68. Классификация типовых характеристик элементов и САУ

Из классификации видно, что САУ описываются рядом специфических передаточных функций. Рассмотрим их более подробно.

С помощью правил структурных преобразований одноконтурную САУ с регулированием по отклонению можно представить в нормированном виде, изображенном на рис.69.

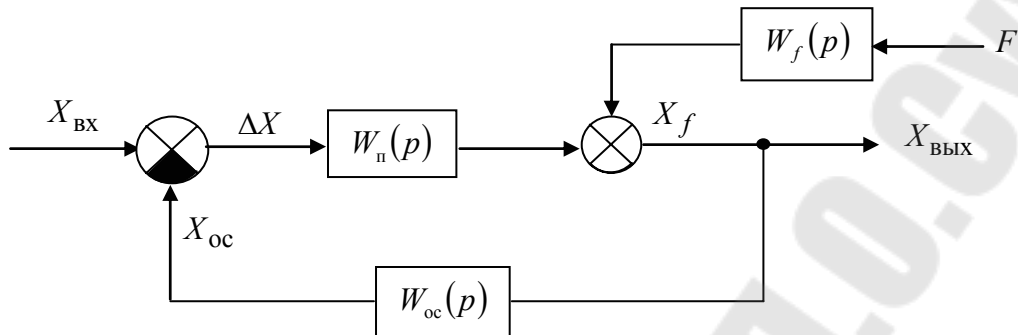


Рис.69. Структурная схема одноконтурной САУ в нормированном виде

Согласно правила Мейсона (правило суперпозиции), по структурной схеме (рис.69) можно определить типовые передаточные функции по управляющему воздействию при условии  $[X_{\text{ВХ}}(p) \neq 0; F(p) = 0]$  и по возмущающему воздействию при условии  $[X_{\text{ВХ}}(p) = 0; F(p) \neq 0]$ .

**Передаточная функция разомкнутой САУ по управлению.**

В исходной структурной схеме примем  $F(p) = 0$  и разорвем обратную связь (рис.70).

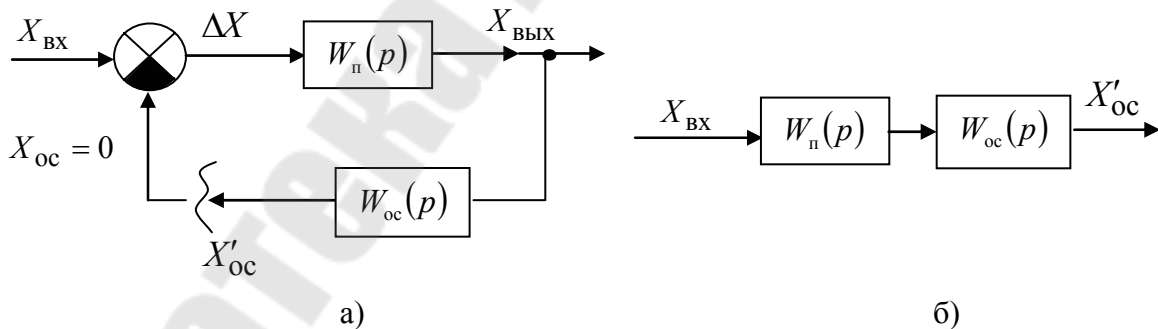


Рис.70. Структурные схемы разомкнутой САУ по управлению: исходная (а) и преобразованная (б).

По рис.70 видно, что передаточная функция разомкнутой САУ по управлению будет

$$W(p) = \frac{X'_{\text{ос}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p).$$

**Передаточная функция замкнутой САУ по управлению.**

Если в исходной структурной схеме замкнуть обратную связь, оставив нулевым сигнал возмущения  $F(p) = 0$ , то получим

$$\Phi_x(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)} = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W(p)}. \quad (64)$$

При единичной обратной связи (64) примет вид

$$\Phi_x(p) = \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W_{\text{п}}(p)}.$$

**Передаточная функция замкнутой САУ по отклонению (ошибке).**

Оставим сигнал возмущения нулевым  $F(p) = 0$  и обратную связь замкнутой. Используя правила структурных преобразований, по рис.71 найдем искомую передаточную функцию  $\Phi_{\Delta x}(p)$ .

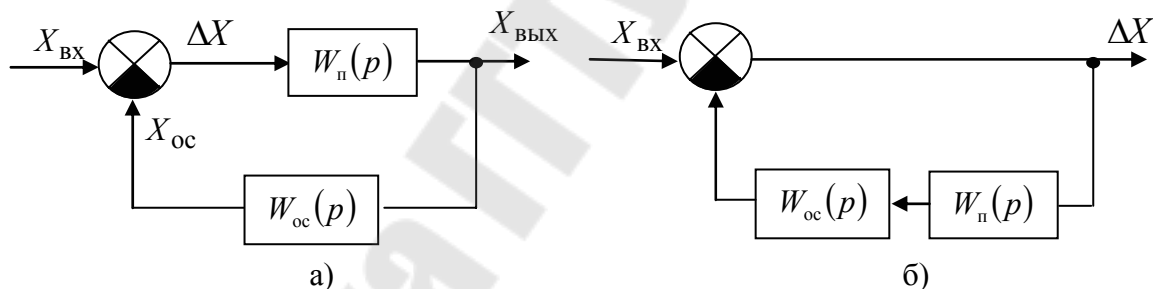


Рис.71. Структурные схемы замкнутой САУ по отклонению: исходная (а) и преобразованная (б).

Она будет определяться следующим выражением

$$\Phi_{\Delta x}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{1 + W_{\text{ос}}(p) \cdot W_{\text{п}}(p)} = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

**Передаточная функция замкнутой САУ по возмущению.**

Теперь, согласно правила Мейсона, положим сигнал управления равным нулю  $X_{\text{вх}}(p) = 0$ . Структурная схема для этого случая представлена на рис.72.

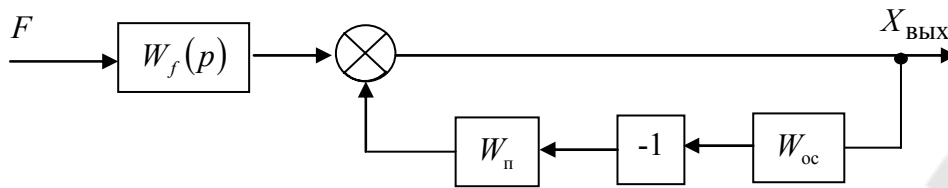


Рис.72. Структурная схема замкнутой САУ по возмущению

По структурной схеме (рис.72) определим искомую передаточную функцию

$$\Phi_f(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{oc}}(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}$$

Видно, что все полученные передаточные функции связаны между собой через передаточную функцию разомкнутой САУ по управлению  $W(p)$ . Это обстоятельство часто используется в частотных методах анализа и синтеза САУ.

Если управляющее и возмущающее воздействия действуют одновременно (рис.69), то изображение выходного сигнала  $X_{\text{ВЫХ}}(p)$  САУ можно найти через введенные передаточные функции методом суперпозиции в виде

$$\begin{aligned} X_{\text{ВЫХ}}(p) &= \Phi_x(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) + \Phi_f(p) \cdot F(p) = \\ &= \frac{W_f(p)}{1 + W(p)} \cdot F(p) + \frac{W_{\text{п}}(p)}{1 + W(p)} \cdot X_{\text{ВХ}}(p). \end{aligned} \quad (65)$$

## 1.6. СТАТИЧЕСКОЕ И АСТАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ САУ

Кроме рассмотренной классификации типовых динамических звеньев существует еще одна классификация, согласно которой их можно разбить на два типа: статические и астатические звенья.

Динамические звенья, для которых можно задать статическую характеристику в виде жесткой функциональной зависимости выходной величины от входной, называются статическими. Если такая связь отсутствует и каждому значению входной величины соответствует множество значений выходной величины, то такое звено называ-

ется астатическим. Выходная величина астатического звена даже в установившемся режиме является функцией времени (рис.30 б.в.).

Например, апериодическое звено первого порядка, имеющее передаточную функцию (42) является статическим динамическим звеном, т.к. его статическая характеристика, изображенная на рис.30., определяется по (42) при условии  $p = 0$

$$x_{\text{ВЫХ}} = K \cdot x_{\text{ВХ}},$$

где  $K$  – коэффициент передачи звена.

Уже для идеального интегрирующего звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T \cdot p}$$

замену  $p = 0$  сделать невозможно. При этом если на вход такого звена подать единичный сигнал  $x_{\text{ВХ}} = 1(t)$  в виде скачка, то на выходе будем иметь:

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{t}{T} \cdot 1(t),$$

т.е. при установившемся сигнале на входе звена равно, например,  $x_{\text{ВХ}} = 1$  на выходе будет наблюдаться постоянное линейное нарастание сигнала в соответствии с выражением

$$x_{\text{ВЫХ}} = \frac{t}{T}.$$

Таким образом, все позиционные динамические звенья относятся к классу статических звеньев, а интегрирующие, дифференцирующие, а также неминимально-фазовые (неустойчивые) к классу астатических.

Если на объект регулирования действует сигнал возмущения  $F(p)$  (рис.69), то важное значение имеет статическая характеристика САУ в виде  $x_{\text{ВЫХ}}(f)$  при постоянном управляющем сигнале на входе САУ  $x_{\text{ВХ}} = const$ . В соответствии с тем, какая из двух характеристик (рис.73) свойственна для данной САУ различают статическое и астатическое регулирование.

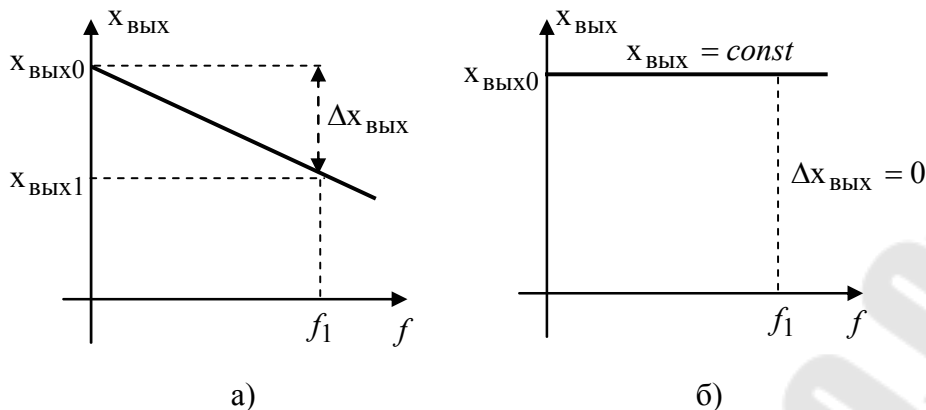


Рис.73. Статические характеристики САУ при статическом (а) и астатическом (б) регулировании

**Пример 11.** Рассмотрим систему автоматического регулирования уровня воды в баке (рис.74). При этом в качестве выходного сигнала примем уровень воды в баке  $x_{\text{ВЫХ}} = y$ , а в качестве возмущающего воздействия возьмем поток воды из бака  $f = Q$ .

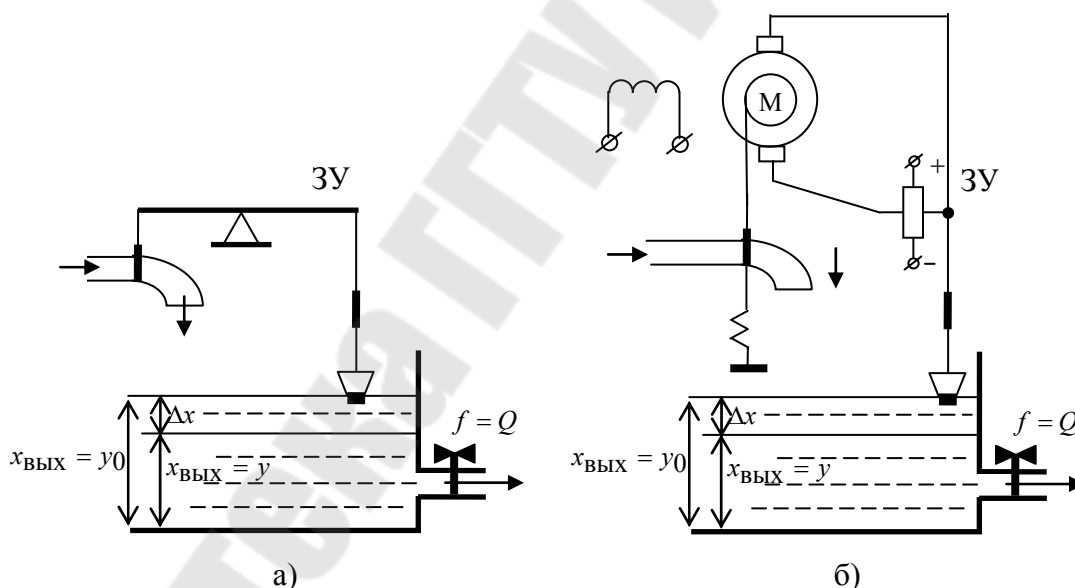


Рис.74. САУ уровнем воды в баке: (а) статическая и (б) астатическая

Сначала рассмотрим статическую САУ (рис.74.а). Пусть при  $Q = 0$  имеем  $x_{\text{ВЫХ}} = y_0$ , при этом отклонение (ошибка управления) также нулевая  $\Delta x = 0$ . Задающее устройство САУ (ЗУ) при этом настраивается так, чтобы вода в бак не поступала. При  $Q \neq 0$ , уровень воды в баке понижается, появляется некоторая ошибка при управлении  $\Delta x \neq 0$ , поплавков опускается и открывает заслонку, в бак от ЗУ начинает поступать вода. Новое состояние равновесия достигается

при равенстве входящего и выходящего потоков воды (но в любом случае при  $Q \neq 0$  заслонка должна быть обязательно открыта, что возможно только при  $\Delta x \neq 0$ ). Причем, чем больше  $Q$ , тем при больших значениях  $\Delta x$ , устанавливается новое состояние равновесия, т.е. в САУ увеличивается статическая ошибка по возмущению. Статическая характеристика САУ имеет характерный наклон (рис.73.а). Для получения в САУ статического регулирования, все ее звенья должны быть статическими (позиционными).

Часто, для обеспечения требуемого качества САУ статическая ошибка недопустима, тогда переходят к астатическому регулированию, при котором регулируемая величина в установившемся режиме принимает точно требуемое значение независимо от величины возмущающего фактора (рис.74.б). Статическая характеристика астатической САУ не имеет наклона (рис.73.б)). Для того чтобы получить астатическое регулирование, необходимо в САУ включить астатическое звено, например исполнительный электродвигатель  $M$  (рис.74.б). Если уровень воды понизится, то поплавков переместит движок потенциометра на некоторую величину, за счет этого появится разность потенциалов на обмотке управления электродвигателя  $M$  и он начнет поднимать заслонку до тех пор, пока напряжение на обмотке управления вновь не станет равно нулю, а это возможно только при  $x_{\text{вых}} = y_0$ . При поднятии уровня воды разность потенциалов сменит знак, и двигатель будет вращаться в противоположную сторону, опуская заслонку.

Достоинства и недостатки статического и астатического регулирования следующие: статические регуляторы обладают статической ошибкой; астатические регуляторы статической ошибки не имеют, но они более инерционны, сложны конструктивно и более дороги. Обеспечение требуемой статической точности регулирования является первой основной задачей при расчете элементов САУ.

## 2. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ САУ

Качество процесса регулирования системы автоматического управления определяется следующими показателями: устойчивость, точность, быстродействие и динамичность. При проектировании САУ необходимо обеспечить каждый из этих показателей, поэтому рассмотрим их подробно.



## 2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

Понятие устойчивости любой системы в общем случае связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния.

Рассмотрим несколько примеров. На рис.75.а изображен шар, лежащий в некотором углублении. При всяком отклонении его от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему. Такое положение шара будет устойчивым. На рис.75.б изображен другой случай, когда положение шара будет неустойчивым. Шар, изображенный на рис.75.б находится в так называемом безразличном положении равновесия.

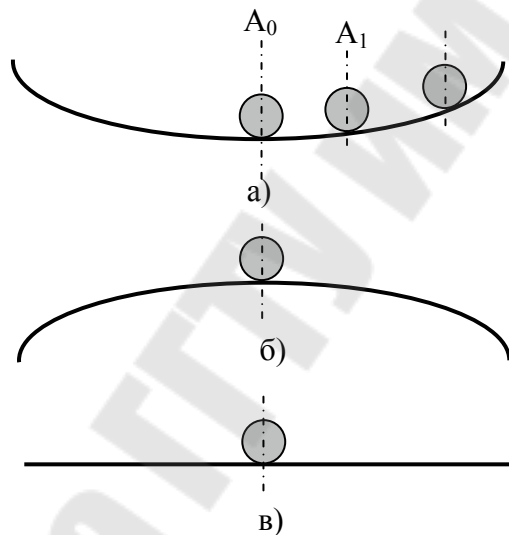


Рис.75. К определению понятия устойчивости системы: система устойчива (а), (в), система неустойчива (б)

Если перейти к системам управления, то устойчивость можно определить следующим образом: если после импульсного воздействия на замкнутую САУ управляющим или возмущающим сигналом в виде дельта-функции  $\delta(t)$ , она приходит в новое или возвращается в старое положение равновесия, то такая САУ устойчива.

**Неустойчивая САУ неработоспособна!**

Можно дать и другое определение устойчивости: САУ считается устойчивой, если она занимает требуемое состояние и остается в нем сколь угодно долго. В противном случае САУ будет неустойчивой.

На рис.76 показаны весовые  $w(t)$  и переходные  $h(t)$  характеристики устойчивых и неустойчивых САУ.

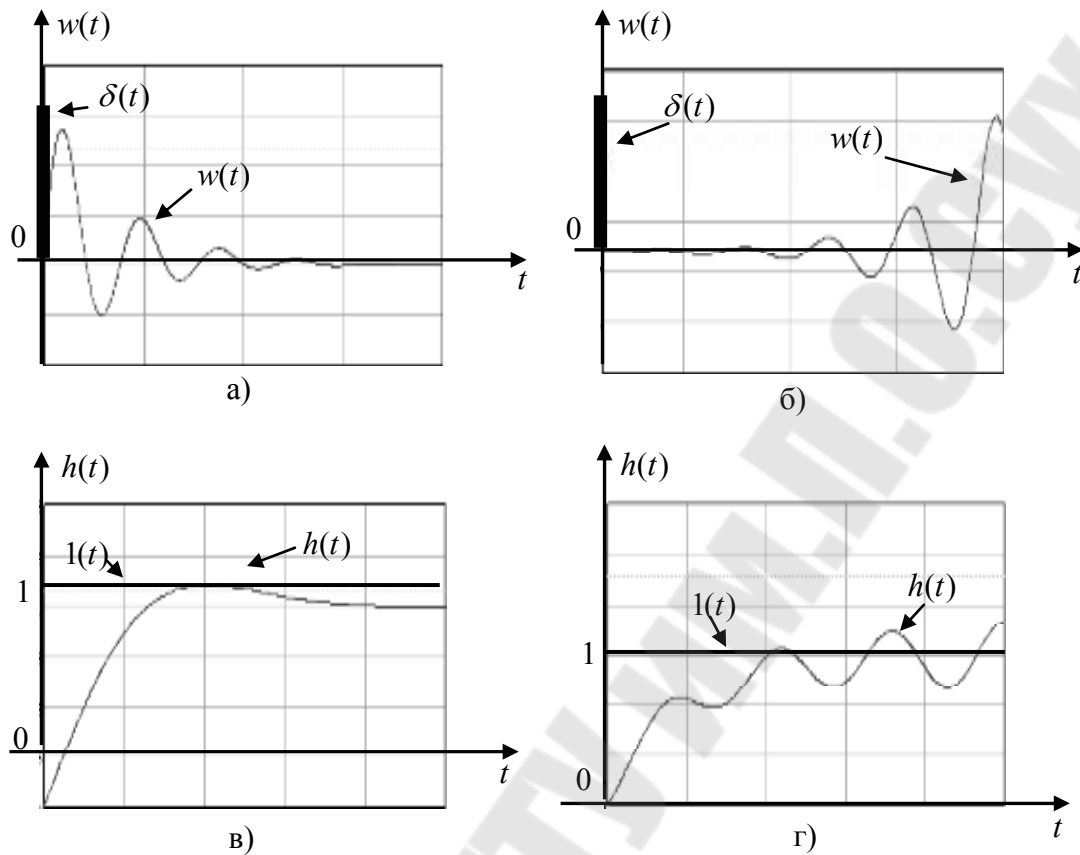


Рис. 76. Временные характеристики устойчивой (а), (в) и неустойчивой (б), (г) САУ

Наиболее распространенными методами анализа устойчивости САУ являются следующие: алгебраический, корневой и частотный методы.

Сущность алгебраического и корневого методов состоит в определении корней и коэффициентов характеристического уравнения САУ, которое можно получить из передаточной функции САУ, если приравнять ее числитель к нулю. Пусть, передаточная функция САУ имеет вид

$$W(p) = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot p + b_m}{a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n},$$

тогда соответствующее ей характеристическое уравнение будет иметь вид

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0. \quad (66)$$

Корневой метод заключается в следующем: для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были любыми левыми, то есть имели отрицательные вещественные части (рис.77)

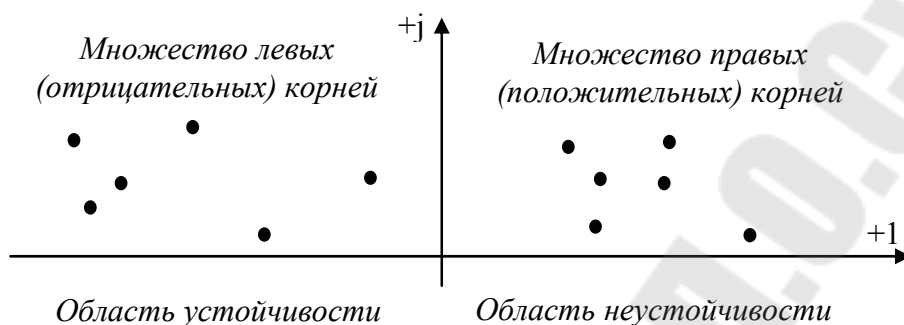


Рис.77. Иллюстрация корневого метода анализа устойчивости

Алгебраический метод определения устойчивости оперирует с коэффициентами характеристического уравнения (66). Далее из коэффициентов характеристического уравнения составляется матрица Гурвица в виде:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Формируется она следующим образом: в диагональ сверху вниз записываются последовательно коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Затем от левого члена диагонали вдоль строки вправо записываются коэффициенты с возрастанием на каждом шаге их номера на две единицы. Если коэффициент с таким номером отсутствует, то вместо него записывают нуль. Далее находится определитель Гурвица  $\Delta_n$  и его диагональные миноры  $\Delta_i$ , где  $i = 1, \dots, n - 1$

$$\Delta_1 = |a_1|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}.$$

Алгебраический метод устойчивости звучит так: если, при  $a_n > 0$  положительны все  $n$  определителей  $\Delta_i$ , то САУ устойчива. Если хотя бы один определитель отрицателен, то САУ неустойчива.

**Пример 12.**

Пусть характеристическое уравнение САУ имеет вид

$$p^2 + 5p + 6 = 0.$$

Его корни  $p_1 = -2$ ;  $p_2 = -3$  отрицательны, следовательно, согласно корневого критерия устойчивости, САУ устойчива.

По алгебраическому критерию устойчивости имеем:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \Delta_1 = |a_1| = 5 > 0; \Delta_n = a_2 \cdot \Delta_1 = 6 \cdot 5 = 30 > 0$$

Так как все определители положительны, то САУ устойчива.

Эти методы могут быть оперативно использованы, если порядок характеристического уравнения не высок. У сложных САУ порядок уравнения может достигать 10 и более, поэтому более широкое употребление получил частотный метод анализа устойчивости. Он основан на использовании частотного критерия Найквиста и Михайлова, согласно которому устойчивость САУ определяется по ЛАЧХ и ЛФЧХ, построенным для разомкнутой САУ.

Согласно этого критерия система будет устойчивой, если ее ЛФЧХ (для разомкнутого состояния) будет пересекать уровень  $-180^\circ$  в зоне положительной ЛАЧХ четное число раз (рис.78).

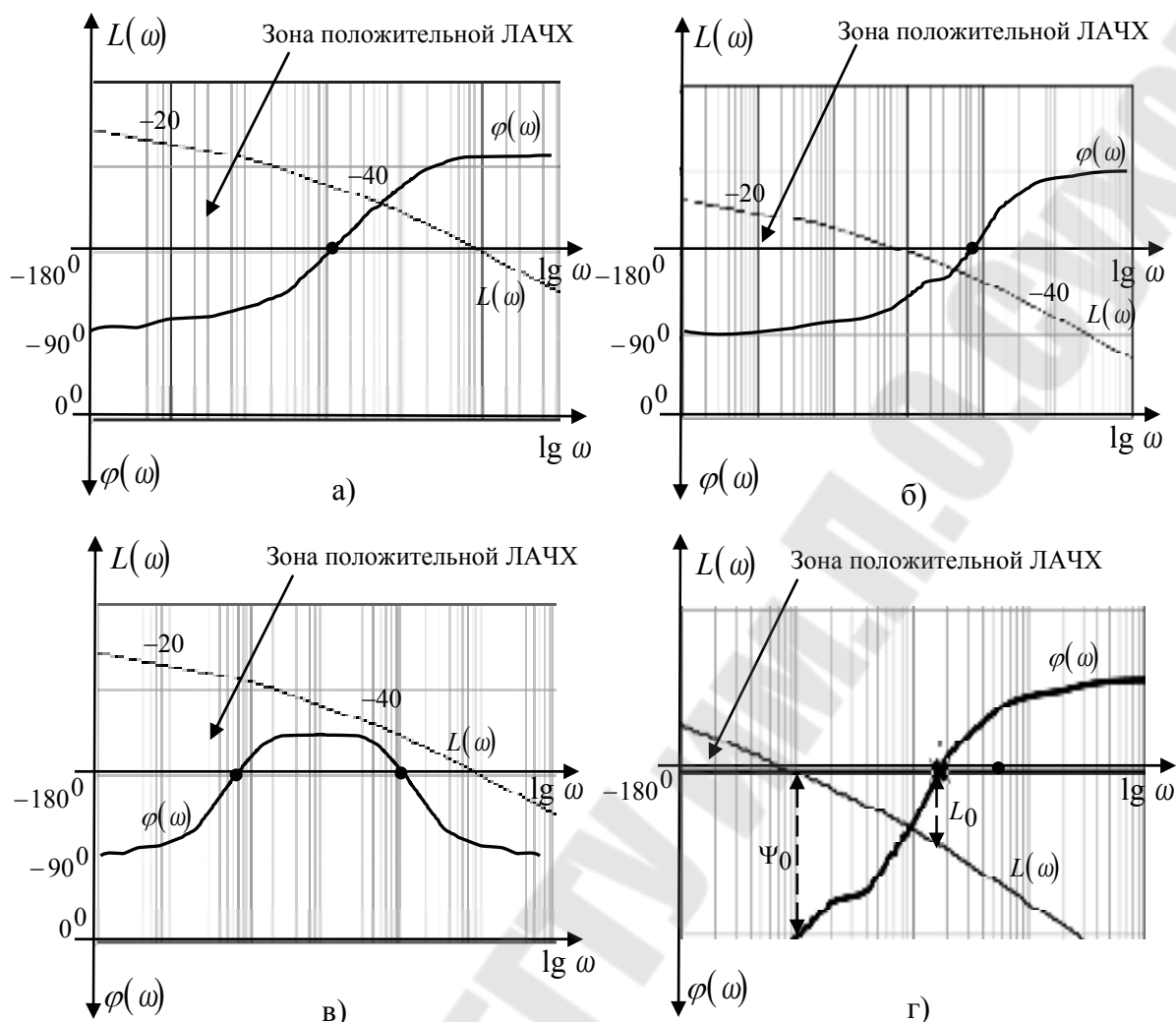


Рис.78. Примеры ЛЧХ устойчивых (б), (в) и неустойчивой (а) и определение запасов устойчивости (г)

Устойчивая САУ работоспособна. Степень ее устойчивости определяется запасами устойчивости по фазе ( $\Psi_0$ ) и амплитуде ( $L_0$ ). На рис.78.г. показано определение запасов устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

Запас устойчивости САУ по амплитуде ( $L_0$ ) – это величина (ЛЧХ) в децибелах (дБ), которая показывает, на сколько нужно изменить коэффициент передачи системы  $K$  при неизменных фазовых соотношениях  $\varphi(\omega) = const$ , чтобы привести ее к границе устойчивости.

Запас устойчивости САУ по фазе ( $\Psi_0$ ) – величина угла разности фаз в градусах, которая показывает, на сколько должен возрасти отрицательный сдвиг по фазе (запаздывание по фазе) в системе на частоте среза (частота, на которой  $L(\omega) = 0$ ) при неизменном значении коэффициента передачи  $K$ , чтобы система оказалась на границе об-

ласти устойчивости (выходной  $x_{\text{вых}}$  и входной  $x_{\text{вх}}$  сигналы находились бы в противофазе).

Обеспечение запаса устойчивости необходимо по следующим причинам:

1. При составлении уравнений отдельных элементов допускается некоторая идеализация протекающих в них физических процессов (учитываются только главные факторы и отбрасываются второстепенные);

2. Линеаризация нелинейных уравнений приводит к их еще большей приближенности;

3. Конструктивные параметры элементов, входящие в коэффициенты уравнений, определяются с некоторой погрешностью;

4. При эксплуатации систем возможны изменения параметров элементов вследствие температурных колебаний, старения, неустойчивости и т.д.

Наличие определенного запаса устойчивости гарантирует сохранение устойчивости системы при изменении ее параметров в определенных пределах. Чем больше запас устойчивости, тем меньше вероятность того, что система в процессе эксплуатации станет неустойчивой. Запас устойчивости необходим еще и потому, что он определяет характер переходных процессов в системах. Наличие определенного запаса устойчивости обеспечивает работу реальной системы в области устойчивости с требуемым качеством переходного процесса.

**Пример 13.** Определить устойчивость электрогидравлической САУ, изображенной на структурной схеме рис.79.

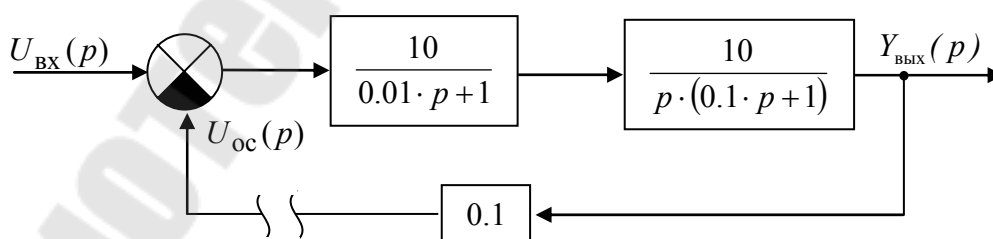


Рис.79. Структурная схема ЭГСАУ к примеру 13

По рис.79. передаточная функция разомкнутой ЭГСАУ будет иметь вид

$$W(p) = \frac{U_{\text{ос}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{10}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.01 \cdot p + 1)}. \quad (67)$$

Рассчитаем:

$$20 \cdot \lg K = 20 \text{ дБ}, \lg \omega_1 = \lg \frac{1}{0.01} = 2, \lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0.1} = 1.$$

Совмещенные ЛАЧХ и ЛФЧХ ЭГСАУ, построенные по (67) представлены на рис.80.

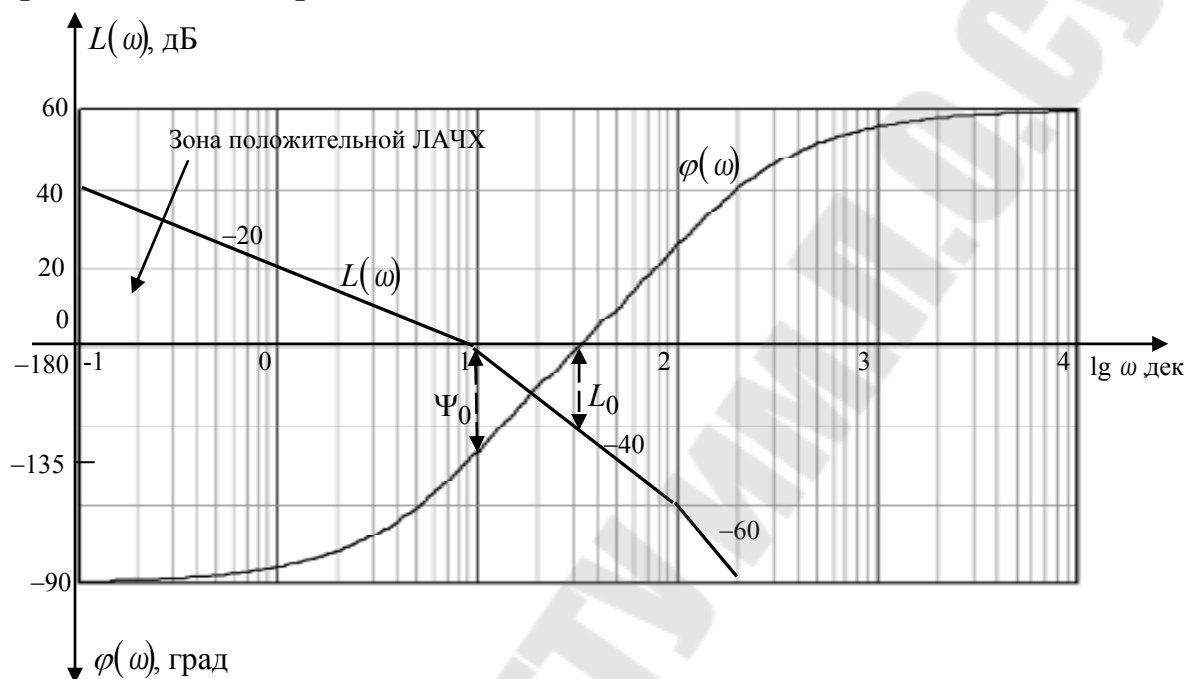


Рис.80. ЛАЧХ и ЛФЧХ ЭГСАУ к примеру 13

По ЛЧХ определяем  $L_0 = 20 \text{ дБ}$ ,  $\Psi_0 = 42^\circ$ .

Из этого заключаем, что рассматриваемая ЭГСАУ (рис.79) устойчива.

## 2.2. ТОЧНОСТЬ САУ

САУ считается точной, если ее ошибка  $\delta_x$  в установившемся режиме не превышает заданного (допустимого значения)  $[\delta_x]$ , т.е. если выполняется неравенство

$$\delta_x \leq [\delta_x].$$

В общем случае ошибка управления представляет собой разность между задаваемым (идеальным) и реальным значениями выходного сигнала

$$\delta_x = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ВЫХ}}^{\text{реал}}.$$

В случае отсутствия ошибки в САУ сигнал рассогласования  $\Delta x$  будет нулевым

$$\Delta x = x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ОС}}^{\text{зад}} = x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}} - K_{\text{ОС}} \cdot x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}},$$

где  $K_{\text{ОС}}$  – коэффициент передачи обратной связи.

Значит между сигналом задания  $x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}$  и идеальным значением выходного сигнала  $x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}}$  имеется связь

$$x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} = \frac{1}{K_{\text{ОС}}} \cdot x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}.$$

Поэтому ошибку можно определять по следующей формуле

$$\delta_x = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{зад}} - x_{\text{ВЫХ}}^{\text{реал}} = \frac{x_{\text{ВХ}}^{\text{зад}}}{K_{\text{ОС}}} - \frac{x_{\text{ОС}}^{\text{реал}}}{K_{\text{ОС}}} = \frac{\Delta x}{K_{\text{ОС}}}.$$

Из последнего выражения видно, что понятия «ошибка управления» и «сигнал рассогласования» тождественны только при  $K_{\text{ОС}} = 1$ .

Точность САУ определяют экспериментально или рассчитывают в установившемся режиме при типовых управляющих  $x_{\text{ВХ}}(t)$  или возмущающих  $f(t)$  сигналах, подбирая их в зависимости от назначения САУ.

На рис.81. показано как в САУ с единичной обратной связью  $K_{\text{ОС}} = 1$  при скачке входного сигнала  $x_{\text{ВХ}}(t) = 1(t)$  определяется **статическая ошибка**  $\delta_{\text{СТ}}$ , при входном сигнале, нарастающим с постоянной скоростью  $x_{\text{ВХ}}(t) = t$ , - **кинетическая ошибка**  $\delta_{\text{К}}$ , при входном сигнале, нарастающим с постоянным ускорением  $x_{\text{ВХ}}(t) = t^2$ , - **динамическая ошибка**  $\delta_{\text{ДИН}}$ , при гармоническом входном сигнале  $x_{\text{ВХ}}(t) = \sin \omega \cdot t$ , - амплитуда **синусной ошибки**  $\delta_{\text{СИН}}$ . Причем все эти ошибки определяются как по управлению, так и по возмущению.



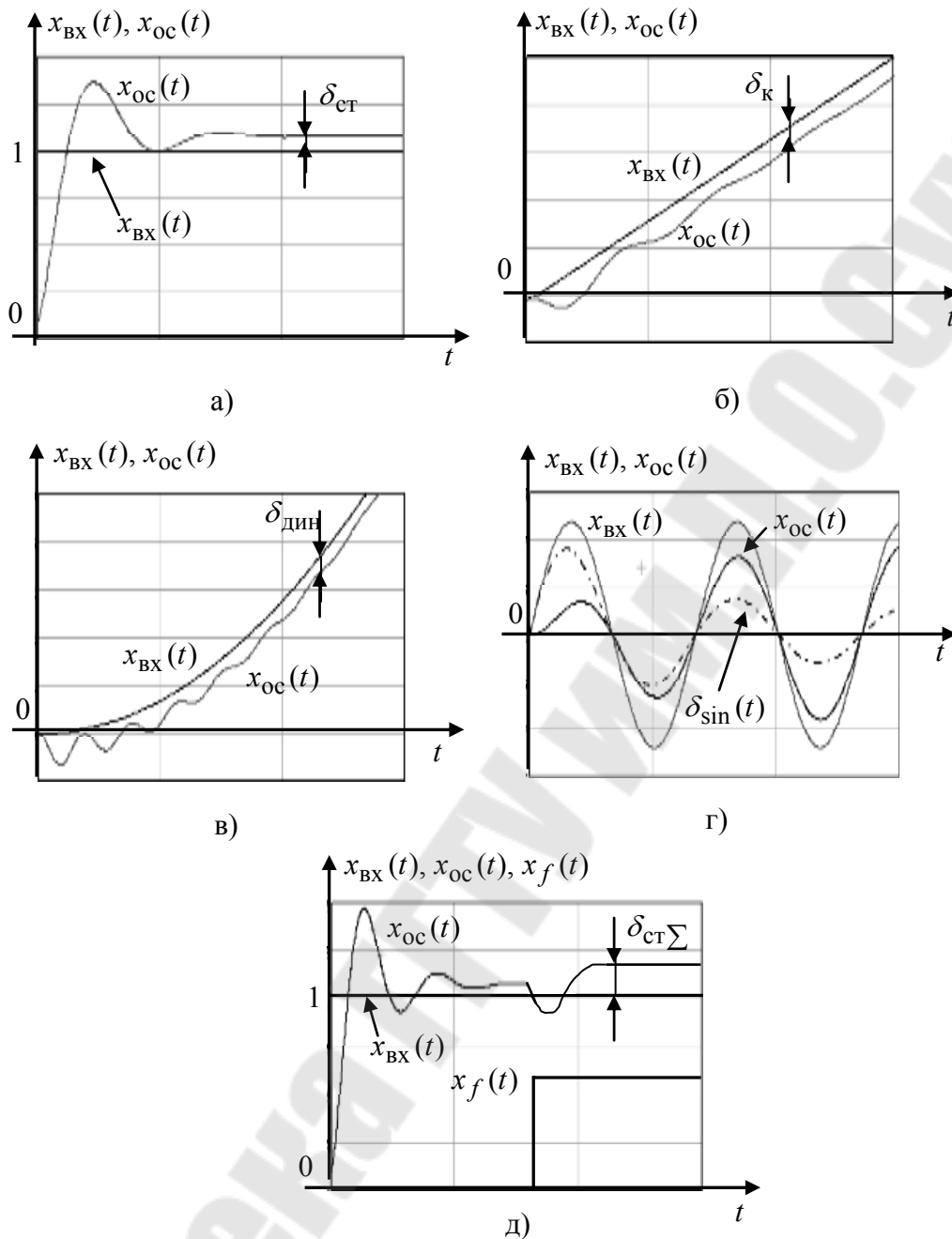


Рис.81. Определение статической (а), кинетической (б), динамической (в), синусной (г) и суммарной статической (д) от сигналов управления и возмущения.

По параметрам входных сигналов и допустимым величинам ошибок  $[\delta]$  рассчитываются по Бессекерскому В.А. значения требуемых коэффициентов передачи разомкнутой САУ на определенных частотах.

В логарифмическом масштабе они равны:

$$L_{\text{CT}} = 20 \cdot \lg A_{\text{CT}} = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX}.m} + [\delta_f]}{[\delta_{\text{CT}}]}, \quad (68)$$

$$L_{\text{K}} = 20 \cdot \lg A_{\text{K}} = 20 \cdot \lg \frac{\dot{X}_{\text{BX}.m} + [\Delta\dot{x}_f]}{[\delta_{\text{K}}]}, \quad (69)$$

$$L_s^{0,0} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX}.m} + [\delta_f]}{[\delta_{\text{sin}}]}, \quad (70)$$

$$L_s^{0,20} = L_s^{1,20} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX}.m} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta\dot{x}_f]}{\dot{x}_{\text{BX}.m}}\right)}{[\delta_{\text{sin}}]}; \quad (71)$$

$$L_s^{0,40} = L_s^{1,40} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX}.m} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta\dot{x}_f]}{\ddot{x}_{\text{BX}.m} \cdot T_1}\right)}{[\delta_{\text{sin}}]}; \quad (72)$$

$$L_s^{2,40} = 20 \cdot \lg A_s = 20 \cdot \lg \frac{X_{\text{BX}.m}}{[\delta_{\text{sin}}]}, \quad (73)$$

где  $X_{\text{BX}.m}$ ,  $\dot{X}_{\text{BX}.m}$ ,  $\ddot{X}_{\text{BX}.m}$  – максимальные значения входного сигнала, его скорости и ускорения при скачке, линейном и гармоническом задании;

$[\delta_{\text{CT}}]$ ,  $[\delta_{\text{K}}]$ ,  $[\delta_{\text{sin}}]$  – допустимые общие статическая, кинетическая и синусная ошибки;

$[\delta_f]$ ,  $[\Delta\dot{x}_f]$  – допустимые статическая и кинетическая ошибки по возмущению;

$\omega = \frac{1}{T_1}$  – первая частота излома ЛАЧХ САУ.

На логарифмической плоскости эти величины отмечаются ординатами, так называемых, контрольных точек:

1. Контрольная точка статической точности  $L_{\text{CT}}$  строится по (68) на любой частоте, но под начальным участком ЛАЧХ с наклоном 0 дБ/дек;

2. Контрольная точка кинетической точности  $L_{\text{K}}$  строится по (69) на частоте  $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$  (0 дек);

3. Контрольная точка синусной точности  $L_{\text{sin}}$  строится по (70) – (73) на частоте эквивалентного входного гармонического сигнала

$$\omega = \Omega = \frac{\ddot{x}_{\text{вх.}m}}{\dot{x}_{\text{вх.}m}}$$

Выбор формулы для расчета  $L_{\text{sin}}$  ведется в зависимости от того под какой участок ЛАЧХ (с каким наклоном) попадает  $\Omega$  и каков астатизм системы. В обозначении  $L^{a,b}$  первый индекс означает порядок астатизма по управлению, второй – наклон участка ЛАЧХ, для которого справедливо это соотношение.

Таким образом, точность САУ определяется величинами ошибок при типовых входных  $x_{\text{вх}}$  или возмущающих  $x_f$  воздействиях. Эти ошибки определяются в установившемся режиме. Имеет ли САУ ту или иную ошибку зависит от того, какова степень астатизма системы по управлению и по возмущению.

Степень астатизма определяется степенью интеграла передаточной функции САУ в разомкнутом состоянии  $W(p)$

$$W(p) = \frac{Q(p)}{N(p) \cdot p^\nu},$$

где  $\nu$  – степень астатизма;

$Q(p)$  – многочлен числителя передаточной функции  $W(p)$ ;

$N(p)$  – многочлен знаменателя передаточной функции  $W(p)$ ;

Если  $\nu = 0$ , то это статическая САУ, имеющая статическую ошибку  $\delta_{\text{ст}} = \text{const}$  и бесконечно большие кинетическую  $\delta_{\text{к}} = \infty$  и динамическую  $\delta_{\text{дин}} = \infty$ . Статические САУ не способны правильно обрабатывать входные сигналы с линейным нарастанием  $x_{\text{вх}} = t$  и с постоянным ускорением  $x_{\text{вх}} = t^2$ . Начальный участок ЛАЧХ статической САУ имеет наклон 0 дБ/дек.

Любая астатическая САУ ( $\nu \geq 0$ ) статической ошибки не имеет. Начальный участок ЛАЧХ с астатизмом первого порядка  $\nu = 1$  имеет наклон -20 дБ/дек. Такая САУ обладает конечной кинетической ошибкой  $\delta_{\text{к}} = \text{const}$  и бесконечно большой динамической ошибкой  $\delta_{\text{дин}} = \infty$ .

Если астатизм САУ  $\nu = 2$ , то  $\delta_{\text{ст}} = 0$ ,  $\delta_{\text{к}} = 0$ ,  $\delta_{\text{дин}} = \text{const}$ , а начальный участок ЛАЧХ имеет наклон -40 дБ/дек.

На рис.82 приведены примеры точных и недостаточно точных САУ.

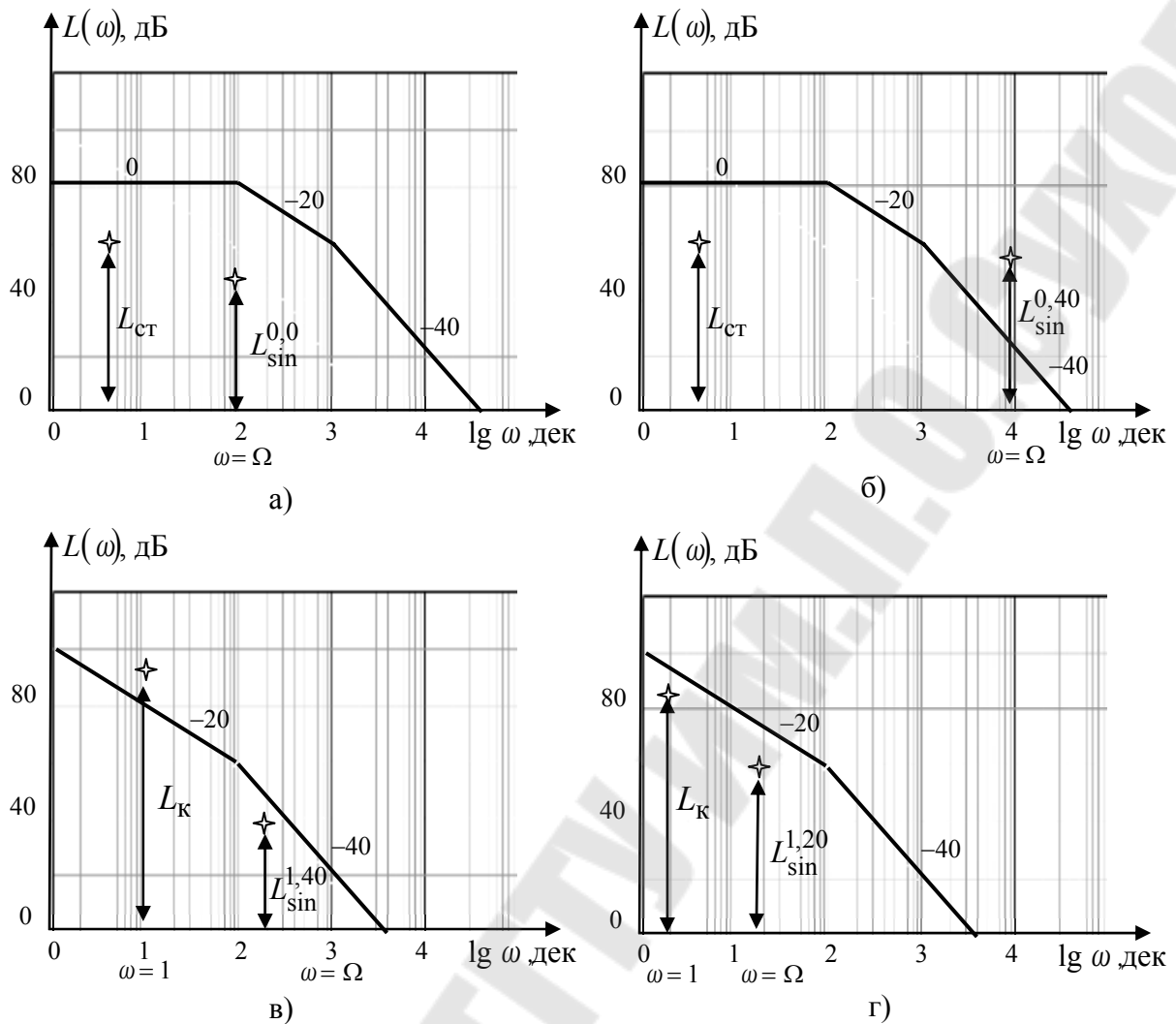


Рис.82. Примеры точных (а) и (г) и недостаточно точных (б) и (в) САУ.

Если ЛАЧХ разомкнутой САУ проходит выше контрольной точки, по крайней мере, на 3 дБ, то ее точность будет не хуже заданной  $[\delta]$ .

По рис.82.б. видно, что САУ не достаточно точно обрабатывает гармонический входной сигнал на частоте  $\omega = \Omega$  (система имеет недопустимо большую синусную ошибку  $\delta_{\text{sin}}$ ), а в САУ (рис.82.в) присутствует недопустимо большая кинетическая ошибка  $\delta_{\text{к}}$ .

Если проводится синтез САУ, то в техническом задании на проектирование указываются допустимые ошибки  $[\delta]$ , на основании которых можно по формулам (68)-(73) определить контрольные точки и проверить синтезированную САУ на точность. Если контрольные точки лежат ниже отрезков ЛАЧХ синтезируемой САУ, то САУ синтезирована согласно техническому заданию, если же выше, то требуется коррекция САУ, то есть необходимо выяснить за счет чего под-

нять отрезки ЛАЧХ и на сколько, чтобы при этом САУ не потеряла устойчивость.

При анализе САУ, наоборот, зная контрольные точки,  $L_{ст}, L_{sin}, L_{к}$  (они должны лежать на ЛАЧХ), определяют допустимые ошибки  $[\delta]$  по следующим формулам:

$$\delta_{ст} = \frac{x_{вх.m} + \Delta\delta_f}{10^{20} \frac{L_{ст}}{20}}; [\delta_{к}] = \frac{\dot{x}_{вх.m} + [\Delta\dot{x}_f]}{10^{20} \frac{L_{к}}{20}};$$

$$[\delta_{sin}] = \frac{x_{вх.m} \cdot \left(1 + \frac{\Delta\dot{x}_f}{\dot{x}_{вх.m}}\right)}{10^{20} \frac{L_{sin}^{0,20}}{20}}; [\delta_{sin}] = \frac{x_{вх.m} \cdot \left(1 + \frac{[\Delta\dot{x}_M]}{\ddot{x}_{вх.m} \cdot T_1}\right)}{10^{20} \frac{L_{sin}^{1,40}}{20}}.$$

### 2.3. БЫСТРОДЕЙСТВИЕ И ДИНАМИЧНОСТЬ САУ

САУ считается достаточно быстродействующей, если время переходного процесса  $t_{пер}$  в ней не больше допустимого

$$t_{пер} \leq [t_{пер}]$$

На переходной характеристике  $h(t)$  (рис.83.а) быстродействие определяется временем первого перехода  $\tau_{пп}$ , достижения максимума  $\tau_{max}$  и достижения установившегося значения  $\tau_{пер}$  (как правило, требуется, чтобы выходная величина попала в 2 ÷ 5 % зону от своего установившегося значения).

На логарифмической плоскости (рис.83.б) быстродействие определяется частотой среза  $\omega_{ср}$ , так как от нее непосредственно зависят указанные временные показатели быстродействия, причем, обратно пропорционально

$$\tau_{пп} \approx (0.5 \div 0.7) \cdot \pi \cdot \omega_{ср}^{-1};$$

$$\tau_{max} \approx \pi \cdot \omega_{ср}^{-1};$$

$$\tau_{пер} \approx (2 \div 4) \cdot \pi \cdot \omega_{ср}^{-1}.$$

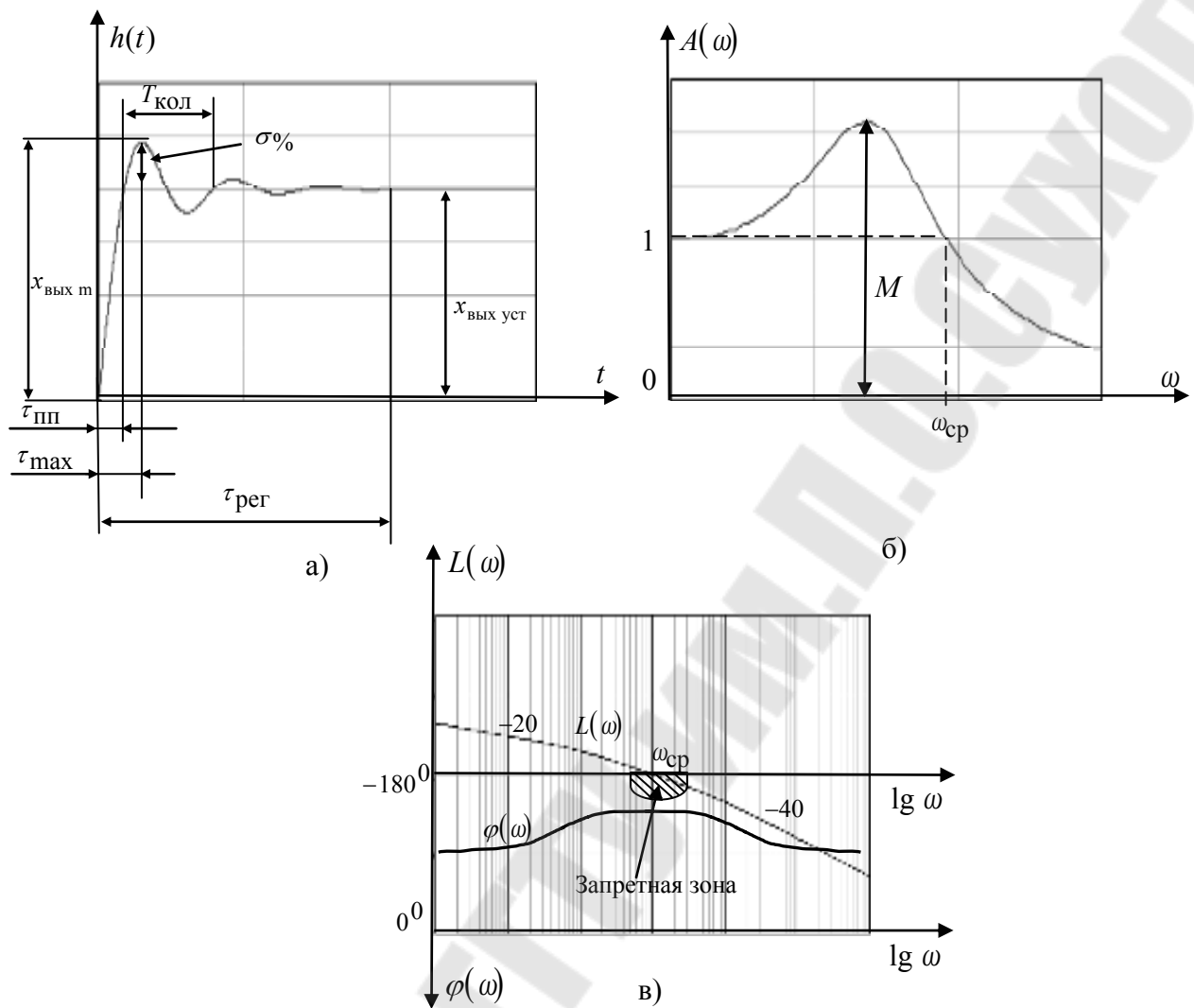


Рис.83. Определение быстродействия и динамичности по переходной (а), амплитудно-частотной для замкнутой САУ (б), логарифмическим для разомкнутой (в) характеристикам САУ

Чем меньше временные показатели  $\tau$  (или больше частота среза  $\omega_{cp}$ ), тем быстреедейственной САУ.

Динамичность САУ определяется показателями формы переходной характеристики (рис.83.а), а именно:

1. Перерегулирование  $\sigma\% = \frac{X_{\text{вых макс}} - X_{\text{вых уст}}}{X_{\text{вых уст}}} \cdot 100\%$ ;
2. Период колебаний  $T_{\text{кол}} \approx 2\pi \cdot \omega_{cp}^{-1}$ ;
3. Число колебаний  $N$ ;

Чем меньше показатели формы  $h(t)$  по сравнению с допустимыми, тем динамичнее система.

Склонность САУ к колебаниям определяется еще одним показателем динамичности, называемым колебательностью  $M$ . Показатель колебательности  $M$  – это максимальное значение ординаты амплитудно-частотной характеристики замкнутой САУ  $A(\omega)$  при начальной ординате равной единице (рис.83.б). Считается, что в хорошо демпфированных системах колебательность не должна превосходить значения  $M = 1.1 \div 1.5$ . Например, в САУ синтезированной на технический оптимум  $M = 1,05$ .

Колебательность  $M$  связана напрямую с устойчивостью САУ. Чем меньше запасы устойчивости САУ по фазе ( $\Psi_0$ ) и амплитуде ( $L_0$ ), тем больше склонность системы к колебаниям и больше  $M$ .

Чтобы САУ оставалась устойчивой при заданном в техническом задании на проектирование показателе колебательности  $[M]$ , необходимо, чтобы ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  разомкнутой САУ не заходила в так называемую запретную зону (рис.83.в). При этом для определения захода или (не захода) фазовой характеристики  $\varphi(\omega)$  не обязательно строить ЛФЧХ полностью. Достаточно определить выполняется ли неравенство

$$180 - |\varphi_{\max}| \geq \gamma_{\max},$$

где  $\gamma_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}$  – наибольшая глубина запретной зоны;

$\varphi_{\max}$  – ЛФЧХ на частоте, соответствующей максимальной глубине запретной зоны  $\gamma_{\max}$  (рис.84).

Пример построения запретной зоны на логарифмической плоскости по заданному показателю колебательности  $M$  приведен на рис.84.

Показатели быстродействия и динамичности можно определять по формулам связи, полученным эмпирически

$$\begin{cases} M = 0.025 \cdot \sigma_{\%} + 1; \\ \omega_{\text{ср}} \cdot t_{\text{пер}} = 5.0 + 0.18 \cdot \sigma_{\%} - 0.002 \cdot (\sigma_{\%})^2; \\ M = \frac{1}{\sin \psi_0}. \end{cases} \quad (74)$$

**Пример 14.** Для показателя колебательности  $M = 1,5$  построить запретную зону.

Определим основные параметры запретной зоны по формулам

$$L_M = 20 \cdot \lg \frac{M}{M-1} = 20 \cdot \lg \frac{1,5}{1,5-1} = 9,54 \text{ дБ};$$

$$L_m = 20 \cdot \lg \frac{M}{M+1} = 20 \cdot \lg \frac{1,5}{1,5+1} = -4,44 \text{ дБ};$$

$$L_{\text{центр}} = 0,5 \cdot (L_M - |L_m|) = 0,5 \cdot (9,54 - |4,44|) = 2,55 \text{ дБ};$$

$$L_{\text{max}} = 0,5 \cdot (L_M + |L_m|) = 0,5 \cdot (9,54 + |4,44|) = 7 \text{ дБ};$$

$$\gamma_{\text{max}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} = \arccos \frac{\sqrt{1,5^2 - 1}}{1,5} = 41,8^\circ.$$

Недостающие точки границы запретной зоны можно определить из следующей пропорции

$$\frac{\gamma_i}{L_i} = \frac{\gamma_{\text{max}}}{L_{\text{max}}} \Rightarrow \gamma_i = 5,97 \cdot L_i, \text{ град.}$$

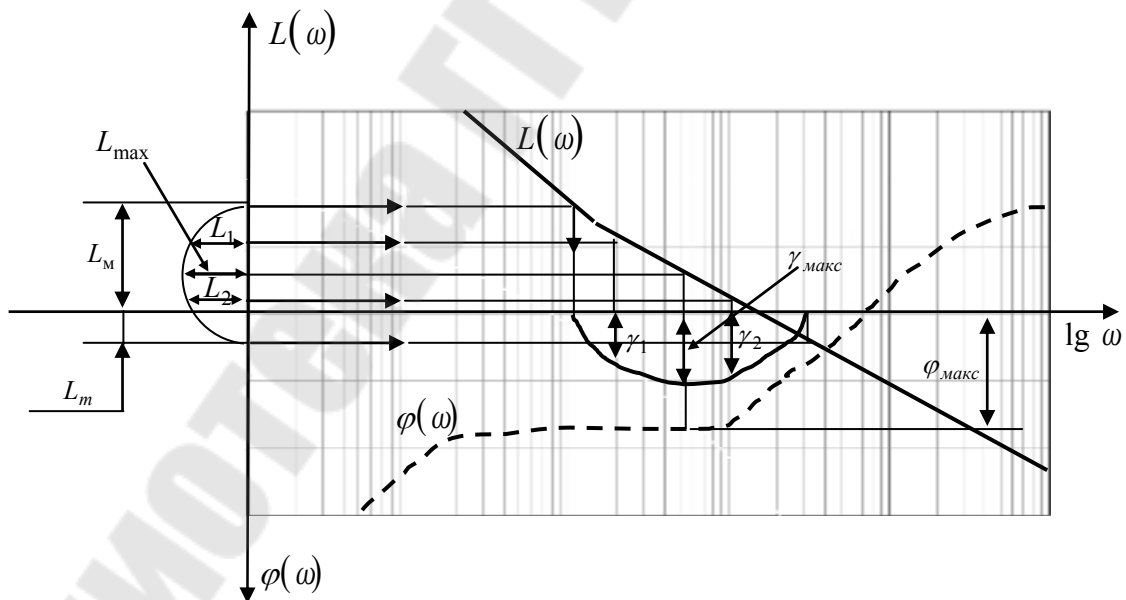


Рис.84. Построение запретной зоны на логарифмической плоскости по показателю колебательности  $M$

**Пример 15.** Определить показатели качества электрогидравлической следящей САУ «угол-угол», заданной в виде структурной схе-



мы рис.85, а именно: устойчивость ( $L_0, \Psi_0$ ); точность ( $\delta_{\text{ст}}, \delta_{\text{к}}, \delta_{\text{sin}}$ ); быстродействие ( $\tau_{\text{пер}}$ ); динамичность ( $\sigma_{\%}, M$ ).

При этом входные сигналы САУ будут  $\alpha_{\text{вх1}} = 10 \cdot 1(t)$ , град,  $\alpha_{\text{вх2}} = 20 \cdot t$ , град,  $\alpha_{\text{вх3}} = 4 \cdot \sin(5 \cdot t)$ , град. САУ работает на холостом ходу (без нагрузки).

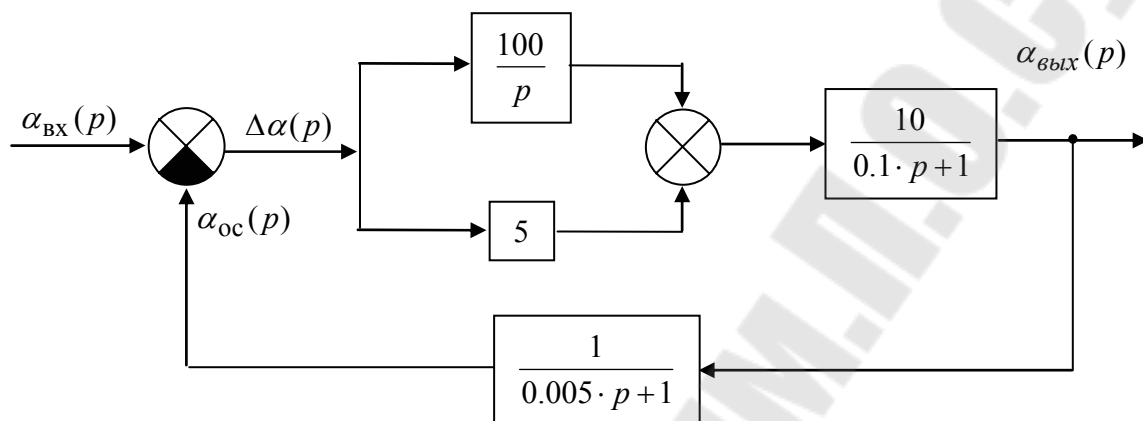


Рис.85. Структурная схема следящей САУ к примеру 15

По структурной схеме (рис.84) получим передаточную функцию разомкнутой САУ  $W(p)$

$$W(p) = \left( 5 + \frac{100}{p} \right) \cdot \frac{10}{0.1 \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{0.005 \cdot p + 1} = \frac{1000 \cdot (0.05 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.005 \cdot p + 1)}$$

На логарифмической плоскости построим ЛАЧХ  $L(\omega)$  ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  (рис.86). Для этого предварительно рассчитаем:

$$20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 1000 = 60 \text{ дБ}; \lg \omega_1 = \lg \left( \frac{1}{0.1} \right) = 1 \text{ дек};$$

$$\lg \omega_2 = \lg \left( \frac{1}{0.05} \right) = 1.3 \text{ дек}; \lg \omega_3 = \lg \left( \frac{1}{0.005} \right) = 2.3 \text{ дек}.$$

1. По ЛАФЧХ определяем что исследуемая САУ устойчива и ее запасы устойчивости составляют:  $\Psi_0 = 38^\circ$  и  $L_0 = \infty$ .

2. Для определения точности САУ на ЛАЧХ найдем координаты контрольных точек  $L_{\text{к}}$  и  $L_{\text{sin}}$ :  $L_{\text{к}} = 60 \text{ дБ}$ ;  $L_{\text{sin}}^{1,20} = 45 \text{ дБ}$  для  $\lg \Omega = \lg 5 = 0.7 \text{ дек}$ .

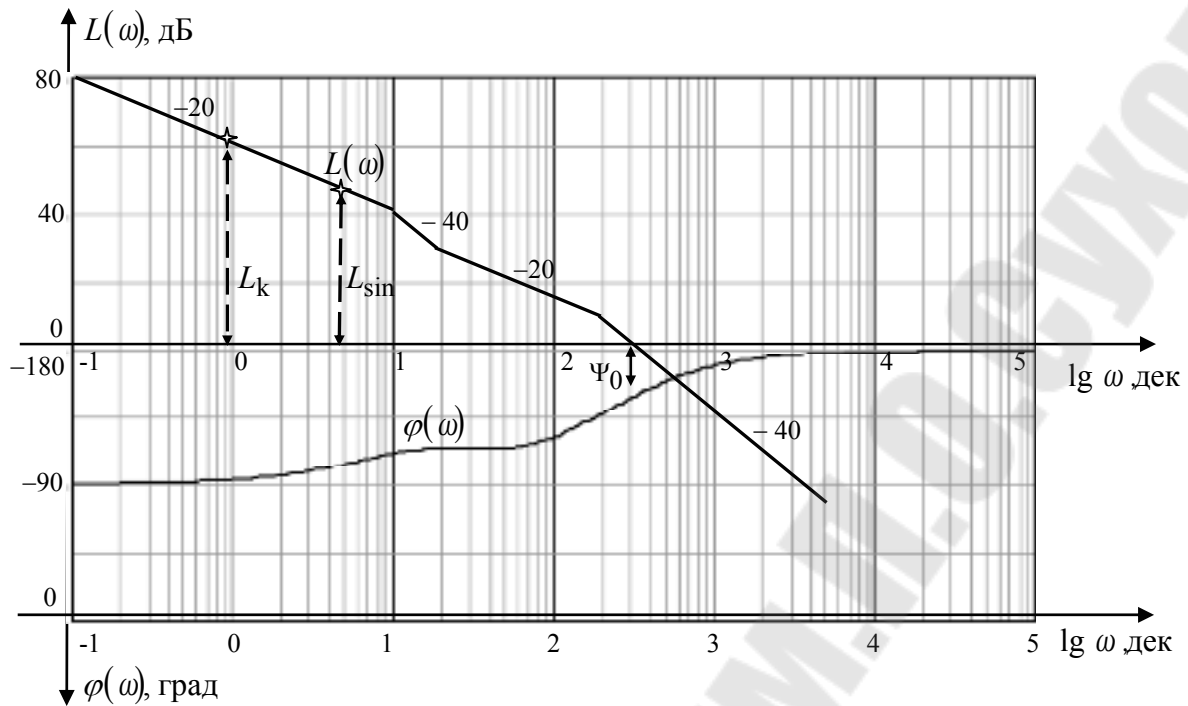


Рис.86. Совмещенные ЛАЧХ и ЛФЧХ следящей САУ к примеру 15

Значит, ошибки САУ будут следующими

$$\delta_k = \frac{\dot{\alpha}_{\text{вх}} + \Delta \dot{\alpha}_f}{10^{\frac{L_k}{20}}} = \frac{20 + 0}{10^{\frac{60}{20}}} = 20 \cdot 10^{-3} = 0.02 \text{ град};$$

$$\delta_{\text{sin}} = \frac{\alpha_{\text{вх m}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta \dot{\alpha}_f}{\dot{\alpha}_{\text{вх m}}}\right)}{10^{\frac{L_{\text{sin}}^{1,20}}{20}}} = \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{0}{20}\right)}{10^{\frac{45}{20}}} = 0.022 \text{ град}.$$

Определение статической точности для этой САУ не требуется, т.к. она обладает астатизмом первого порядка (начальный наклон ЛАЧХ составляет  $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$  ( $\delta_{\text{ст}} = 0$ )).

3. Показатели быстродействия и динамичности определим по формулам связи (74)

$$M = \frac{1}{\sin \psi_0} = \frac{1}{\sin(38^\circ)} = 1.62;$$

$$\sigma_{\%} = \frac{M-1}{0.025} = \frac{1.62-1}{0.025} = 24.8\%;$$

$$\omega_{cp} \cdot t_{пер} = 5.0 + 0.18 \cdot \sigma_{\%} - 0.002 \cdot (\sigma_{\%})^2 =$$

$$= 5 + 0.18 \cdot 24.8 - 0.002 \cdot 24.8^2 = 8.2.$$

По ЛАЧХ определим частоту среза системы  $\lg(\omega_{cp}) = 2.5$  дек и  $\omega_{cp} = 316 \text{ с}^{-1}$ , откуда время переходного процесса составит ориентировочно  $t_{пер} = \frac{8.2}{316} = 0.026 \text{ с}$ .

### 3. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ САУ

Статический расчёт САУ осуществляют для установившегося режима после переходных процессов от типовых входных и возмущающих сигналов:

1.  $X_{BX}(t) = X_{BX m} \cdot 1(t)$  – «скачок»;
2.  $X_{BX}(t) = \dot{X}_{BX m} \cdot t$  – «постоянная скорость»;
3.  $X_{BX}(t) = \ddot{X}_{BX m} \cdot t^2$  – «постоянное ускорение»;
4.  $X_{BX}(t) = X_{BX m} \cdot \sin t$  – «качка».

В результате статического расчёта получают недостающие коэффициенты передачи элементов или их статические характеристики, а главное определяют общую статическую характеристику САУ в замкнутом состоянии, либо по выходной величине  $x_{ВЫХ}$ , либо по отклонению (ошибке)  $\Delta x$  в зависимости как от сигналов управления  $x_{ВХ}$ , так и возмущения  $f$  соответственно.

По статической характеристике оценивают и сравнивают с заданными по техническому заданию на проектирование следующие показатели качества в статике:

$$D = \frac{X_{ВЫХ \max}}{X_{ВЫХ \min}} \left| \begin{array}{l} X_{ВХ} - \text{var} - \text{диапазон регулирования;} \\ f - \text{var} \end{array} \right.$$

$$\Delta_{\text{лин}} = [X_{\text{ВЫХ}}(X_{\text{ВХ}}) - k \cdot X_{\text{ВХ}}] \Big|_{f - \text{var}} \quad - \text{ линейность регулирования};$$

$$\sigma_{\text{уст}} = [X_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - X_{\text{ВЫХ}}(t)] \Big|_{t - \text{var}} \quad - \text{ ошибка в установившемся ре-}$$

жиме.

Есть и специфические статические показатели, например, автономность регулирования для многосвязных систем, флуктуационные ошибки для систем при случайных воздействиях и т.д.

Поскольку основной для САУ электрогидравлического типа является установившаяся ошибка, ей далее и уделим наибольшее внимание, но сначала уточним понятие ошибки САУ.

Ошибка управления  $\delta$  представляет собой разность (несоответствие!) между идеальными (желаемыми)  $x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}$  и реальными выходными  $x_{\text{ВЫХ}}$  координатами.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - x_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - [x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) + x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН}}(t)] = \\ &= x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - \left[ x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) + x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t) + \sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t) \right] = \\ &= [x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t)] - \sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t) = \\ &= \delta_x(t) + \delta_f(t) + \delta_{\text{пер}}(t). \end{aligned}$$

где  $\delta_x(t) = x_{\text{ВЫХ}}^{\text{ид}}(t) - x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},\text{X}}(t)$  – установившаяся ошибка САУ по управлению (для «скачка» входного сигнала эта ошибка  $\delta_x(t) \rightarrow \text{const}$ );

$\delta_f(t) = -\sum_{i=1}^N x_{\text{ВЫХ};\text{ВЫН},f_i}(t)$  – установившаяся ошибка САУ по возмущениям (в общем случае возмущений несколько и если это «скачки», то  $\delta_f(t) - \text{const}$ );

$\delta_{\text{пер}}(t) = -x_{\text{ВЫХ};\text{СВ}}(t)$  – переходная ошибка, вызванная обработкой системы управления коммутации ненулевых начальных условий в течение переходного процесса (для устойчивых САУ  $\delta_{(\text{пер})}(t) = 0$  в конце ( $t \rightarrow \infty$ ) переходного процесса) как по управлению, так и по возмущению.

Рассчитаем установившиеся ошибки в САУ по управляющему  $x_{\text{вх}}$  и возмущающему  $f$  воздействиям. Для этого рассмотрим типовую структурную схему одноконтурной САУ с одним сигналом возмущения (рис.69) и, используя правила структурных преобразований, представим ее в виде (рис.87)

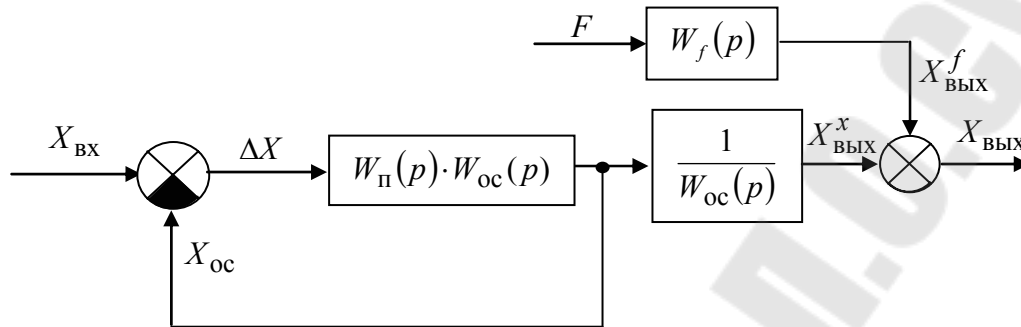


Рис.87. Преобразованная типовая структурная схема одноконтурной САУ

Рассмотрим САУ при  $F(p) = 0$ , когда  $X_{\text{вых}}^x(p) = X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) = X_{\text{вых}}(p)$ , т.е.  $\delta_x = 0$ , значит в такой САУ

$$X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) = X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)}.$$

Следовательно, в общем случае

$$\begin{aligned} \delta_x(p) &= X_{\text{вых}}^{\text{ид.}}(p) - X_{\text{вх}}^x(p) = \\ &= X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} - X_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{W(p)}{1+W(p)} \cdot \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)}. \end{aligned} \quad (75)$$

По (75) получим передаточную функцию системы по ошибке при обработке управления  $X_{\text{вх}}$

$$\Phi_{\delta_x}(p) = \frac{\delta_x(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} \cdot \frac{1}{1+W(p)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(p)} \cdot \Phi_{\Delta x}(p). \quad (76)$$

где  $W(p) = W_{\text{п}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)$  – передаточная функция разомкнутой САУ по управлению.

По (76) видно, что ошибка  $\delta_x$  равна отклонению  $\Delta x$  только в системе с единичной обратной связью, когда  $x_{\text{вх}}$  и  $x_{\text{вых}}$  имеют одну и ту же физическую природу (или в относительных величинах).

По рис.87 определим передаточную функцию системы по ошибке при обработке возмущения

$$\Phi_{\delta_f}(p) = \frac{\delta_f(p)}{F(p)} = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{F(p)} = \frac{W_f(p)}{1+W(p)} = W_f(p) \cdot \Phi_{\Delta x}(p).$$

Ошибка по возмущению обычно отрицательна, так как часто при увеличении возмущающего воздействия  $f$  регулируемая переменная  $x_{\text{вых}}$  уменьшается.

Итак, в данном случае суммарная ошибка (и переходная  $\delta_{\text{пер}}$ , и установившаяся, и по управлению  $\delta_x$  и по возмущению  $\delta_f$ )

$$\begin{aligned} \delta(p) &= \Phi_{\delta_x}(p) \cdot X_{\text{вх}}(p) + \Phi_{\delta_f}(p) \cdot F(p) = \\ &= \frac{1}{W_{\text{ос}}(p) \cdot [1+W(p)]} \cdot X_{\text{вх}}(p) + \frac{W_f(p)}{1+W(p)} \cdot F(p). \end{aligned}$$

Установившуюся ошибку во времени можно определить, используя теорему операционного исчисления о конечных значениях

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \delta(p)] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} [\Phi_{\delta_x}(p) \cdot p \cdot X_{\text{вх}}(p) + \Phi_{\delta_f}(p) \cdot p \cdot F(p)]. \end{aligned} \quad (77)$$

Установившееся значение выходного сигнала во времени  $x_{\text{вых}}(t)$  можно определить так

$$x_{\text{вых}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [\Phi_x(p) \cdot p \cdot X_{\text{вх}}(p) + \Phi_f(p) \cdot p \cdot F(p)], \quad (78)$$

где  $\Phi_x(p)$ ,  $\Phi_f(p)$  – передаточные функции замкнутой САУ по управлению и по возмущению.

Выражение (78) также определяет и статическую характеристику  $x_{\text{ВЫХ}}(x_{\text{ВХ}})$  для замкнутой САУ.

**Пример 16.** Определить статические ошибки по управлению и возмущению, а также статическую характеристику одноконтурной следящей электрогидравлической САУ, структурная схема которой имеет вид, представленный на рис.88.

Для упрощения поиска пределов по (77) и (78) рассмотрим «усеченную» структурную схему при  $p = 0$ , представленную на рис.89. В интегрирующих и дифференцирующих динамических звеньях

$$\frac{1}{p^{\nu}} \quad (\nu = \pm 1, \pm 2 \text{ и т.д.})$$

подстановки  $p = 0$  не делаются сразу. Это обстоятельство учтется потом при отыскании предела.

Воспользуемся полученными соотношениями (75)-(78) и получим типовые передаточные функции для исследуемой электрогидравлической САУ.

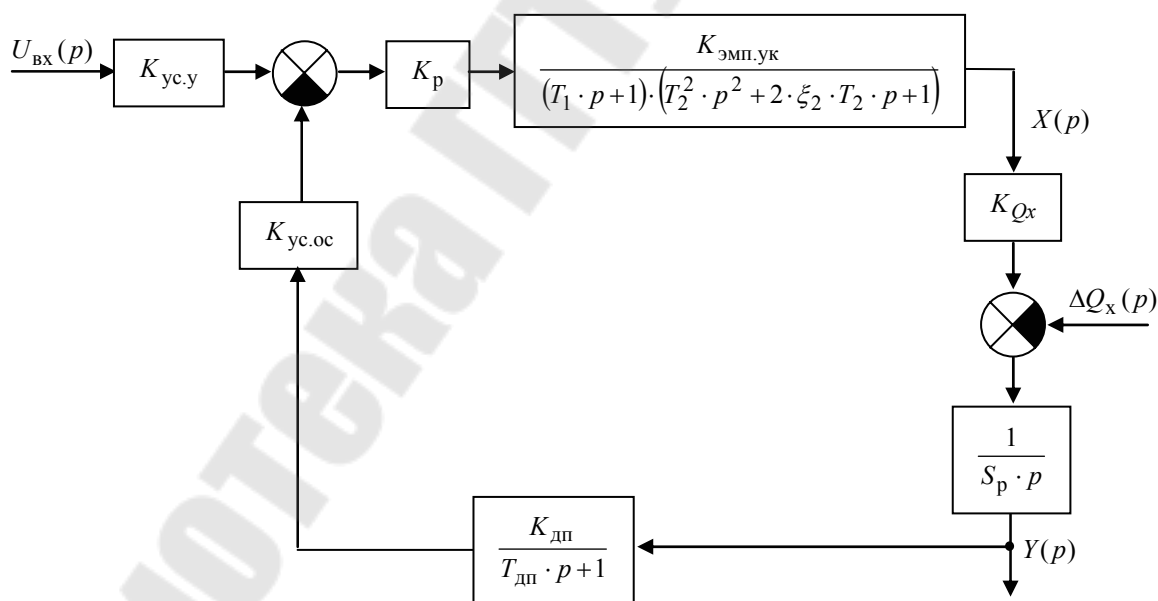


Рис.88. Структурная схема одноконтурной следящей электрогидравлической САУ

На структурной схеме (рис.88) обозначено:  
 $K_p$  – коэффициент передачи регулятора, о.е.;

$K_{Qx}$  – коэффициент усиления по перемещению золотника управляющего каскада,  $\frac{м^2}{с}$ ;

$\Delta Q_x(p)$  – потери рабочей жидкости в управляющем каскаде, обусловленные утечками,  $\frac{м^3}{с}$ ;

$S_p$  – площадь поперечного сечения золотника распределительного каскада,  $м^2$ .

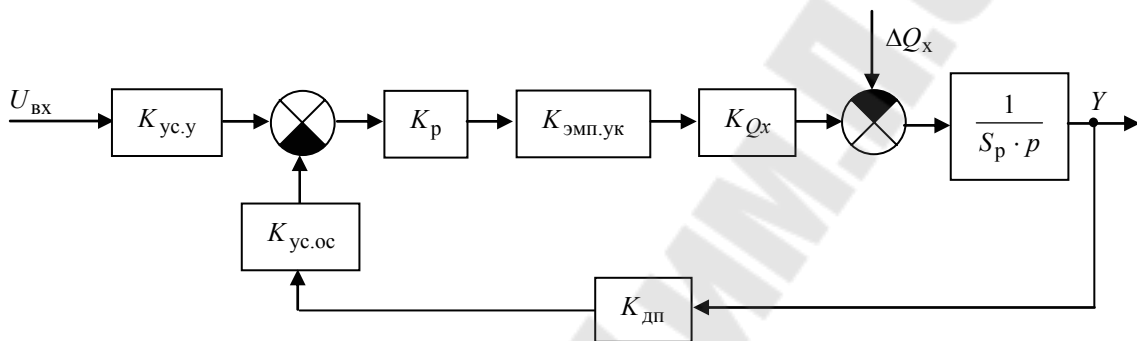


Рис.89. Усеченная структурная схема одноконтурной следящей электрогидравлической САУ, удобная для проведения статического расчета

### 1. Передаточная функция САУ по ошибке при отработке $U_{вх}$

$$\Phi_{\delta_x}(p) = \frac{\delta_x(p)}{U_{вх}(p)} \Big|_{\substack{\Delta Q_x=0 \\ p=0}} = 0.$$

В САУ будет отсутствовать статическая ошибка по управлению  $\delta_x(p) = 0$ , так как она является астатической по управлению первого порядка (присутствует интегрирующее звено в прямом канале).

### 2. Передаточная функция САУ по возмущению

$$\Phi_{\delta_f}(p) = \frac{\delta_f(p)}{\Delta Q_x(p)} = \Phi_f(p) = \frac{Y_{вых}(p)}{\Delta Q_x(p)} \Big|_{\substack{U_{вх}=0 \\ p=0}} =$$



$$\begin{aligned}
&= - \frac{\frac{1}{S_p \cdot p}}{1 - K_{дп} \cdot K_p \cdot (-1) \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot K_{ус.ос} \cdot \frac{1}{S_p \cdot p}} \Bigg|_{p=0} = \\
&= - \frac{1}{S_p \cdot p + K_{дп} \cdot K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot K_{ус.ос}} \Bigg|_{p=0} = \\
&= - \frac{1}{K_{дп} \cdot K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot K_{ус.ос}}. \quad (79)
\end{aligned}$$

Таким образом, САУ имеет статическую ошибку по возмущению, определяемую выражением

$$\delta_f = - \frac{1}{K_{дп} \cdot K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot K_{ус.ос}} \cdot \Delta Q_x. \quad (80)$$

Знак «-» в (80) показывает, что при увеличении расхода рабочей жидкости в управляющем каскаде гидроусилителя  $\Delta Q_x$  перемещение поршня исполнительного гидродвигателя  $Y$  будет меньше желаемого.

Получим статическую характеристику исследуемой САУ по (78). Для этого определим передаточную функцию по управлению

$$\begin{aligned}
\Phi_x(p) &= \frac{Y(p)}{U_{вх}(p)} \Bigg|_{\substack{\Delta Q_x=0 \\ p=0}} = \\
&= K_{ус.у} \cdot \frac{K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot \frac{1}{S_p \cdot p}}{1 + K_{дп} \cdot K_{ус.ос} \cdot K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot \frac{1}{S_p \cdot p}} \Bigg|_{p=0} = \\
&= \frac{K_{ус.у}}{K_{дп} \cdot K_{ус.ос}}. \quad (81)
\end{aligned}$$

Подставляя (79) и (81) в (78), найдем для скачков входных сигналов  $\frac{U_{вх}}{p}$  и  $\frac{\Delta Q_x}{p}$  статическую характеристику САУ

$$Y = \frac{K_{ус.у}}{K_{дп} \cdot K_{ус.ос}} \cdot U_{вх} - \frac{1}{K_{дп} \cdot K_p \cdot K_{эмп.ук} \cdot K_{Qx} \cdot K_{ус.ос}} \cdot \Delta Q_x. \quad (82)$$

По выражению (82) можно построить статические характеристики ЭГСАУ. Они представлены на рис.90.

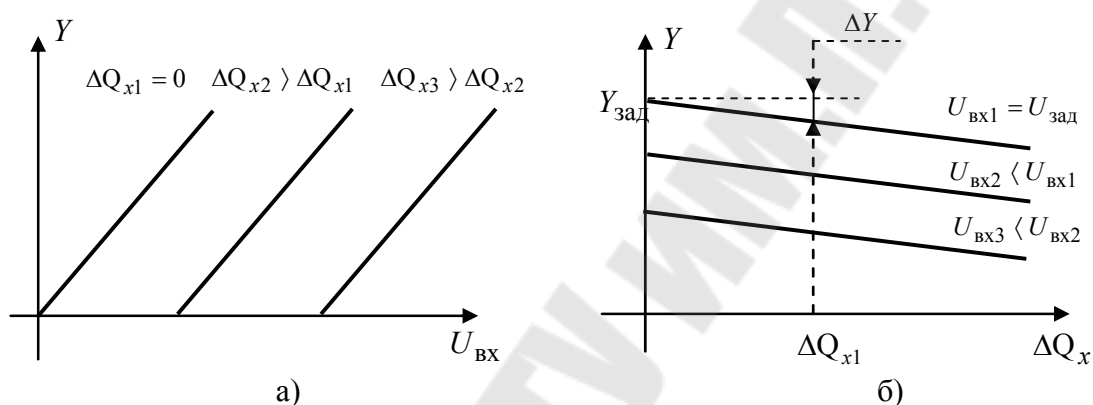


Рис.90. Статические характеристики ЭГСАУ при изменении входного сигнала (а) и сигнала возмущения (б)

На рис.90 обозначено:

$\Delta Y$  – отклонение от желаемого перемещения поршня гидравлического двигателя в результате утечки рабочей жидкости в управляющем каскаде гидроусилителя.

## 4. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 4.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СИНТЕЗА САУ

Под синтезом САУ понимается направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание рациональной структуры системы и установление оптимальных величин параметров ее отдельных динамических звеньев.

С другой стороны, синтез – это инженерная задача, сводящаяся к такому построению системы автоматического управления, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Та-

ким образом, инженер, проектирующий САУ из возможных решений должен выбрать те, которые являются оптимальными с точки зрения технического задания на проектирование, при этом САУ должна быть проста в обслуживании, надежной и негабаритной.

При синтезе САУ необходимо обеспечить приемлемый характер переходных процессов, а также требуемую точность (астатизм САУ).

Первая задача является сложной инженерной задачей, так как увеличение быстродействия системы приводит к повышению колебательного характера переходных процессов, а как следствие уменьшение запасов устойчивости САУ. Это, также, ведет к использованию более дорогой элементной базы, позволяющей протекать в САУ сигналам с большими значениями амплитуд. Использование сглаживающих фильтров, устраняющих всплески сигналов, приводит к уменьшению быстродействия и, соответственно, к повышению длительности переходных процессов, а также к усложнению системы. Поэтому разработчики САУ пытаются найти оптимальное соотношение между быстродействием и колебательным характером протекающих процессов, находясь при этом в рамках технического задания.

Вторая задача по сравнению с первой является более простой, поскольку обеспечение требуемой точности может достигаться за счет изменения коэффициента передачи разомкнутого контура или за счет увеличения порядка астатизма, или за счет введения в алгоритм управления компенсирующих связей по задающему или возмущающему воздействиям.

В систему автоматического управления обычно входят: объект регулирования и два типа устройств управления.

К первому типу устройств управления обычно относят усилительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство (датчики в обратной связи), которые практически невозможно изменить в процессе синтеза систем управления.

Ко второму типу относят корректирующее устройство или регулятор в виде электронного усилителя, т.е. устройства, которое легко можно изменять в процессе синтеза.

В результате этого всю САУ можно разделить на две части:

1. Объект регулирования, исполнительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство – это так называемая **неизменяемая часть системы**;
2. Корректирующее устройство – это **изменяемая часть системы**. Далее, корректирующее устройство САУ будем называть ре-

гулятором. Стоит отметить также, что часто регулятор совмещается с устройством сравнения и представляет собой единый электронный блок (рис.91).

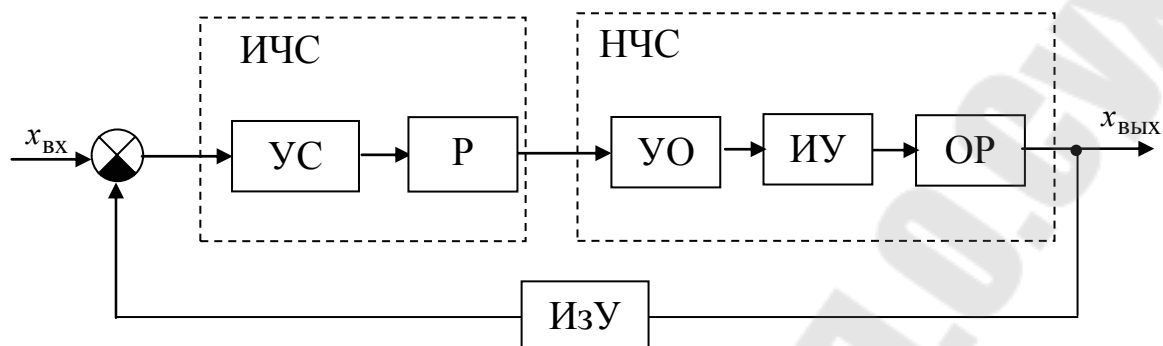


Рис.91. Блок-схема САУ, с точки зрения проведения ее синтеза

На рис.91 обозначено: ИЧС – изменяемая часть системы; НЧС – неизменяемая часть системы; УС – устройство сравнения; Р – регулятор; УО – усилительное устройство; ИУ – исполнительное устройство; ОР – объект регулирования; ИзУ – измерительное устройство.

Устройства управления неизменяемой части САУ, как правило, указаны в техническом задании и при проектировании необходимо учитывать их технические параметры. К ним предъявляются требования по стоимости, надежности действия, весу и габаритным размерам, дополнительным техническим условиям (режим вибрации, температура окружающей среды, влияние агрессивных сред, требования пожарной безопасности, взрывобезопасности и т. д.).

***Поэтому общая задача синтеза САУ в связи с тем, что ее силовая часть и датчик обычно выбираются по тем или иным критериям из стандартных, сводится по существу к синтезу регуляторов или корректирующих устройств, обеспечивающих заданные статические и динамические показатели качества управления!!!***

Основные этапы синтеза автоматического регулирования следующие:

1. Изучение технических условий и динамических свойств объекта регулирования;
2. Выбор критерия оптимизации условий качества и точности процессов регулирования;

3. Определение структурной схемы системы и технических средств реализации неизменяемой части системы;
4. Определение желаемой логарифмической характеристики разомкнутой синтезируемой системы;
5. Синтез регулятора;
6. Выбор средств технической реализации корректирующих и усилительных устройств;
7. Проверка характеристик качества и точности синтезированной системы расчетным путем или с помощью моделирования на ЭВМ с применением прикладных компьютерных программ;
8. Изготовление макета системы автоматического регулирования и экспериментальное определение ее динамических характеристик;
9. Уточнение параметров корректирующих и усилительных устройств по данным макетной отработки системы регулирования.

Существующие инженерные методы синтеза САУ ограничиваются решением задачи обеспечения требуемого качества переходного процесса, так как обеспечение требуемой точности может быть достигнуто на основании существующих критериев точности.

## 4.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РЕГУЛЯТОРОВ САУ

Для решения задачи синтеза САУ различают и используют три основных вида регуляторов: последовательные с передаточной функцией  $W_{p1}(p)$ , в виде местной обратной связи с передаточной функцией  $W_{p2}(p)$  и параллельные с передаточной функцией  $W_{p3}(p)$ .

Структурные схемы с использованием трех основных типов регуляторов представлены на рис.92.

Способ синтеза с помощью последовательных регуляторов (рис.92.а) прост в расчетах и легко технически реализуется. Поэтому он нашел самое широкое применение особенно при синтезе САУ без модуляции сигналов. Эти типы регуляторов далее и будем использовать при синтезе САУ.

Регулятор САУ в местной обратной связи (рис.92.б) существенно ослабляет влияние нелинейности характеристик динамических звеньев.

Синтез САУ с помощью параллельного регулятора эффективна, когда есть необходимость высокочастотного шунтирования инерционных динамических звеньев, но такой регулятор достаточно сложен в настройке.

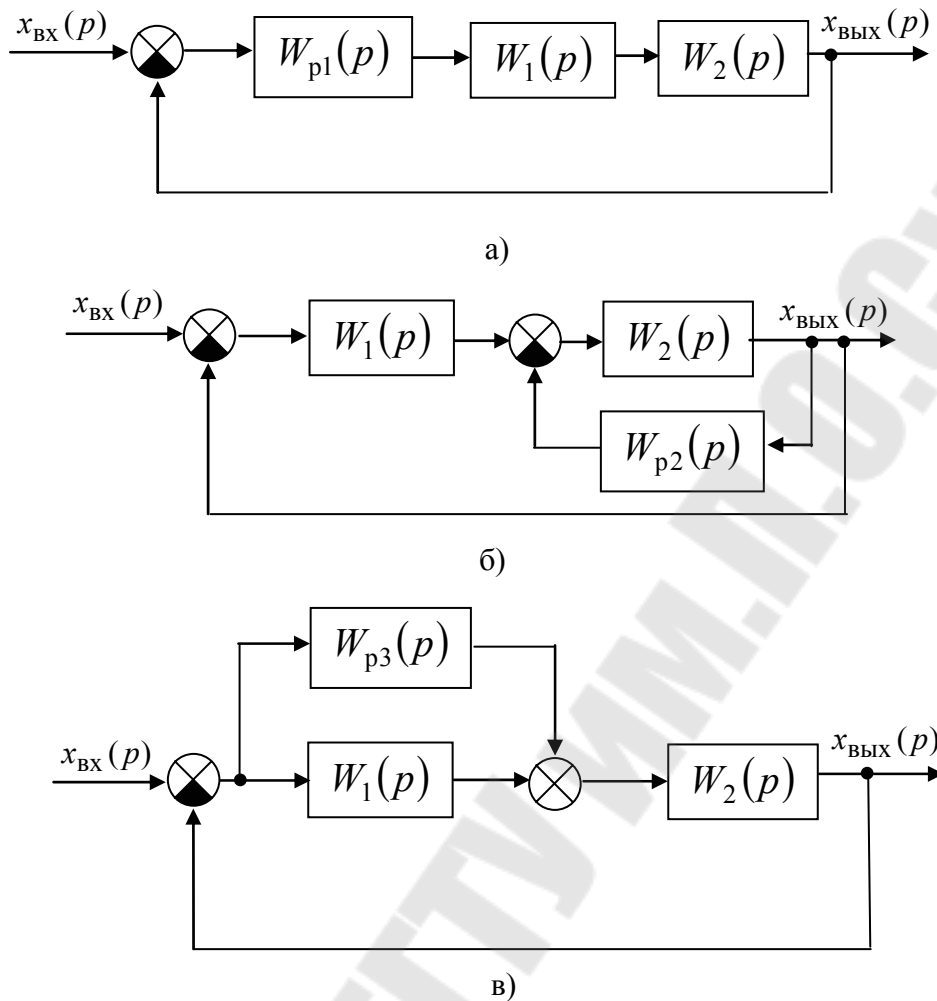


Рис.92. Структурные схемы САУ с последовательным регулятором (а), в виде местной обратной связи (б), с параллельным регулятором (в)

На рис.92 обозначено:

$W_1(p), W_2(p)$  – передаточные функции неизменяемой части САУ;

$W_{p1}(p), W_{p2}(p), W_{p3}(p)$  – передаточные функции регуляторов САУ.

Независимо от использования типа регулятора передаточная функция разомкнутой системы должна быть одной и той же, т.е.

$$\begin{aligned}
 W_1(p) \cdot W_{p1}(p) \cdot W_2(p) &= W_1(p) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_{p2}(p)} = \\
 &= W_2(p) \cdot [W_1(p) + W_{p3}(p)].
 \end{aligned}$$

### 4.3. МЕТОДЫ СИНТЕЗА САУ

Как уже отмечалось выше, целью синтеза САУ является определение и обеспечение показателей качества управления в динамике (динамическая ошибка  $\delta_{\text{дин}}$ , быстродействие  $t_{\text{рег}}$ , динамичность  $\sigma\%$ ,  $M$ ), т.е. в процессе отработки САУ заданного управляющего или возникшего возмущающего воздействий (в переходных процессах).

Поскольку обычно спроектированная САУ сразу не удовлетворяет заданным показателям качества, то динамический расчет САУ совмещают с синтезом регулятора, который позволяет этих показателей достичь.

В целом последовательность динамического расчета будет следующей:

1. Определяют показатели качества спроектированной САУ и сравнивают их с требуемыми;
2. По расхождению полученных и требуемых показателей качества синтезируют регулятор или корректирующий контур;
3. Вновь рассчитывают показатели качества управления или переходной процесс для проверки правильности синтеза.

Наиболее распространены следующие методы решения задачи синтеза регуляторов САУ, являющейся задачей оптимизации:

1. Метод логарифмических частотных характеристик;
2. Метод модального управления;
  - 2.1. Подчиненное регулирование;
  - 2.2. Использование принципа наблюдаемости.;
3. Методы теории оптимального управления;
  - 3.1. Принцип максимума Понтрягина;
  - 3.2. Динамическое программирование Беллмана;
  - 3.3. Классическое вариационное исчисление.

Здесь будет рассмотрен один метод, наиболее часто употребляемый в практике проектирования САУ, основанный на анализе логарифмических частотных характеристик систем управления – метод желаемых логарифмических частотных характеристик (ЖЛЧХ).

#### 4.3.1. РАСЧЕТ ДИНАМИКИ САУ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этом методе используются частотные показатели качества:

1. Допустимые установившиеся ошибки ( $\delta_{\text{ст}}$ ,  $\delta_{\text{к}}$ ,  $\delta_{\text{sin}}$ ,  $\delta_{\text{f}}$ );

2. Показатель колебательности  $M$  ;
3. Частота среза  $\omega_{\text{ср}}$ .

Если в техническом задании на проектирование заданы временные показатели ( $t_{\text{рег}}$ ,  $\sigma\%$ ,  $\delta_{\text{дин}}$ ,  $\delta_{\text{уст}}$ ) или частотные, но другие, например ( $L_0$ ,  $\Psi_0$ ), то надо перейти по формулам связи (74) к указанным показателям качества.

Рассмотрим общий порядок синтеза регулятора САУ методом ЖЛЧХ:

1. Строится ЛАЧХ нескорректированной системы управления в разомкнутом состоянии  $L_{\text{неск}}(\omega)$ ;

2. Строятся контрольные точки требуемой точности ( $L_{\text{ст}}$ ,  $L_{\text{к}}$ ,  $L_{\text{син}}$ ) и точка требуемой частоты среза  $[\omega_{\text{ср}}]$ . Если  $L_{\text{неск}}(\omega)$ , не перекрывает эти точки, то сразу переходят к пункту 4, а если перекрывает, то исполняют пункт 3;

3. Строится ЛФЧХ нескорректированной САУ в разомкнутом состоянии  $\Psi_{\text{неск}}(\omega)$  и запретная зона по показателю колебательности  $M$  (см. пример 15). Если  $\Psi_{\text{неск}}(\omega)$  заходит в зону, то переходят к пункту 4 (к непосредственному синтезу регулятора САУ или корректирующего контура), если не заходит, то расчет прекращают, так как регулятор не требуется, т.е. имеющиеся показатели качества САУ удовлетворяют требуемым.

4. Строится желаемая ЛАЧХ  $L_{\text{жел}}(\omega)$ , отвечающая заданным показателям качества:

- 4.1. Среднечастотная часть проводится через точку с заданной  $\omega_{\text{ср}}$  и под наклоном -20 дБ/дек так, чтобы она перекрывала частотный диапазон, охватываемый запретной зоной, т.е. среднечастотная область ЖЛЧХ должна находиться между частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$  определяемые по следующим формулам

$$\omega_2 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M-1}{M}, \quad \omega_3 \geq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M+1}{M};$$

- 4.2. Низкочастотную часть проводят выше контрольных точек ( $L_{\text{ст}}$ ,  $L_{\text{к}}$ ,  $L_{\text{син}}$ ) и параллельно нескорректированной ЛАЧХ  $L_{\text{неск}}(\omega)$ , если в ней уже учтен требуемый порядок астатизма САУ;

- 4.3. Высокочастотную часть проводят параллельно нескорректированной ЛАЧХ  $L_{\text{неск}}(\omega)$ ;



4.4. Сопрягают все части прямыми с наклонами, кратными 20 дБ/дек;

5. ЛАЧХ регулятора (последовательного корректирующего контура)  $L_{\text{рег}}(\omega)$  находят путем вычитания из ЖЛАЧХ  $L_{\text{жел}}(\omega)$  нескорректированной ЛАЧХ  $L_{\text{неск}}(\omega)$

$$L_{\text{рег}}(\omega) = L_{\text{жел}}(\omega) - L_{\text{неск}}(\omega); \quad (83)$$

6. По виду ЛАЧХ регулятора  $L_{\text{рег}}(\omega)$  сначала определяют передаточную функцию регулятора  $W_{\text{рег}}(p)$ , затем подбирают нужный пассивный или активный корректирующий контур и синтезируют по его электрической схеме параметры: сначала коэффициенты передачи и постоянные времени  $K_i, T_i$ , затем электрические параметры  $R, C$ ;

7. Учитывая, что полученный регулятор включается последовательно, то есть в прямой канал, а не в обратную связь, строятся ЛАЧХ и ЛФЧХ скорректированной разомкнутой САУ и определяется эффективность (правильность) коррекции по получившимся показателям качества.

#### 4.3.2. ПРИМЕР СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ САУ

**Задача:** синтезировать регулятор одноконтурной САУ углом поворота гидромотора вращательного действия, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{100}{p \cdot (0.1p + 1) \cdot (0.01p + 1)}, \quad (84)$$

если максимальные скорость и ускорение поворота входного вала

$$\omega_{\text{вх},m} = 20 \text{ град/с}, \quad \xi_{\text{вх},m} = 10 \text{ град/с}^2.$$

При этом следует обеспечить следующие показатели качества:

$$[\delta_{\text{к}}] = 2', \quad [\omega_{\text{ср}}] = 320 \text{ с}^{-1}, \quad [M] = 1.4.$$

Необходимо учесть также, что скоростная моментная ошибка

$$\Delta\omega_m = 10 \text{ град/с}.$$

Синтез регулятора заданной САУ проведем по алгоритму, представленному в разделе 4.3.1.

1. По передаточной функции ЭГСАУ в разомкнутом состоянии (84) построим  $L_{\text{нecк}}(\omega)$ . Для этого найдем

$$20 \cdot \lg K = 20 \cdot \lg 100 = 40 \text{ дБ},$$

$$\lg \frac{1}{0.1} = 1 \text{ дек}, \quad \lg \frac{1}{0.01} = 2 \text{ дек},$$

ЛАЧХ нескорректированной системы приведена на рис.93;

2. Проверим нескорректированную САУ на устойчивость, точность и быстродействие.

Рассчитав и построив потребную точку среза

$$\lg[\omega_{\text{cp}}] = \lg[320] \approx 2,5 \text{ дек},$$

сразу определим, что быстродействие не обеспечено и ЭГСАУ требует коррекции. Поэтому проверку на устойчивость проводить не будем, так как она обеспечится ЖЛАХ  $L_{\text{жел}}(\omega)$ , а координаты контрольных точек точности рассчитаем, поскольку они потребуются далее.

В данной системе управления статическая точность обеспечена, т.е  $\delta_{\text{ст}} = 0$ , так как по  $W(p)$  (84) видно, что имеется астатизм по управлению первого порядка (наличие интегрирующего звена).

Контрольную точку кинетической точности рассчитаем по формуле

$$L_k = 20 \cdot \lg \frac{\omega_{\text{вх}m} + \Delta\omega_M}{[\delta_k]} \approx 20 \cdot \lg \frac{20 \cdot 60 + 10 \cdot 60}{2} = 59 \text{ дБ}.$$

Рассчитаем параметры эквивалентного синусоидального сигнала для расчета контрольной точки синусной точности

$$\alpha_{\text{вх},m} = \frac{\omega_{\text{вх},m}^2}{\varepsilon_{\text{вх},m}} = \frac{20^2}{10} = 40 \text{ град},$$

$$\Omega_{\text{эКВ}} = \frac{\varepsilon_{\text{вх},m}}{\omega_{\text{вх},m}} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ с}^{-1}.$$

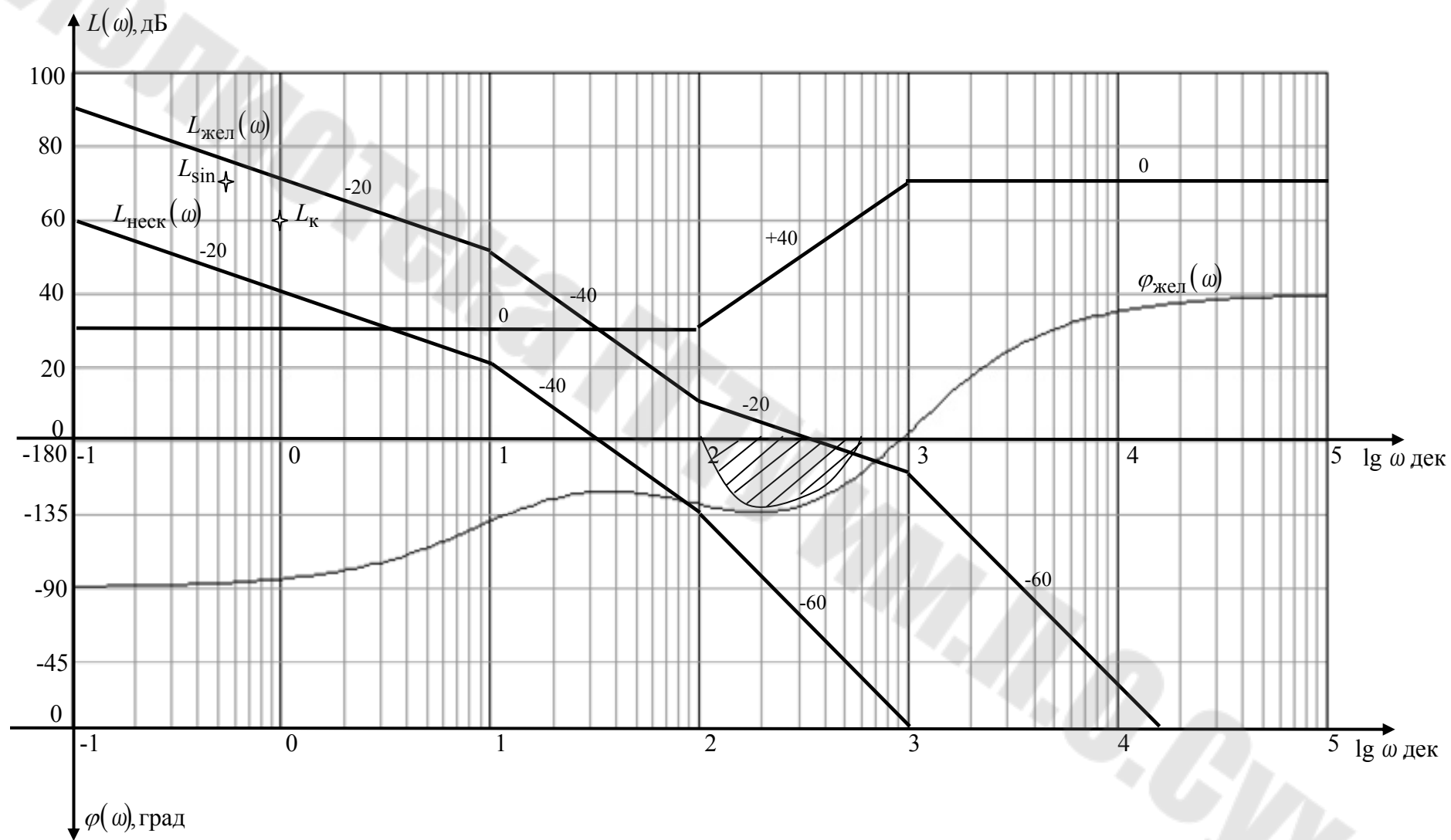


Рис. 93 Логарифмические частотные характеристики ЭГСАУ для синтеза регулятора методом ЖЛАЧХ

Таким образом, эквивалентный синусоидальный входной сигнал примет вид

$$\alpha_{\text{вх}}(t) = \alpha_{\text{вх},m} \cdot \sin \Omega_{\text{ЭКВ}} \cdot t = 40 \cdot \sin(0.5 \cdot t).$$

Контрольная точка синусной точности будет находиться на частоте

$$\lg \Omega_{\text{ЭКВ}} = \lg 0,5 = -0.3 \text{ дек},$$

а ордината контрольной точки, учитывая то, что она лежит под отрезком ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек определяется по формуле

$$L_{\text{sin}}^{1,20} = 20 \cdot \lg \frac{\alpha_{\text{вх},m} \left(1 + \frac{\Delta \omega_M}{\omega_{\text{вх},m}}\right)}{[\delta]} = 20 \lg \frac{40 \cdot 60 \left(1 + \frac{10}{20}\right)}{2} = 71 \text{ дБ};$$

3. Построим ЖЛАХ  $L_{\text{жел}}(\omega)$ . Для этого найдем границы среднечастотной части ЖЛАЧХ по формулам

$$\omega_2 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M-1}{M} = 320 \cdot \frac{1.4-1}{1.4} = 91.42 \text{ с}^{-1}, \lg \omega_2 = 1.96 \text{ дек} \approx 2 \text{ дек},$$

$$\omega_3 \leq \omega_{\text{ср}} \cdot \frac{M+1}{M} = 320 \cdot \frac{1.4+1}{1.4} = 548.6 \text{ с}^{-1}, \lg \omega_3 = 2,74 \text{ дек} \approx 3 \text{ дек}.$$

Желаемая логарифмическая частотная характеристика ЭГСАУ  $L_{\text{жел}}(\omega)$  представлена на рис.93;

4. Графическим вычитанием характеристик в соответствии с (84) построим ЛАЧХ регулятора  $L_{\text{рег}}(\omega)$  (рис.93) и синтезируем его электрическую схему.

По виду  $L_{\text{рег}}(\omega)$  определяем, что регулятор представляет собой двойное форсирующее звено с замедлением и имеет передаточную функцию

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{K \cdot (T_1 + p)^2}{(T_2 \cdot p + 1)^2},$$

параметры которой определим по  $L_{\text{рег}}(\omega)$  и получим

$$L(0) = 20 \cdot \lg K = 30 \text{ дБ} \Rightarrow K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.62 \text{ дБ},$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = 2 \Rightarrow T_1 = 0.01 \text{ с},$$

$$\lg \frac{1}{T_2} = 3 \Rightarrow T_2 = 0.001 \text{ с}.$$

Вариантов электронных схем такого регулятора достаточно много, но мы остановимся на схеме, реализованной на операционных усилителях. Она приведена на рис.94.

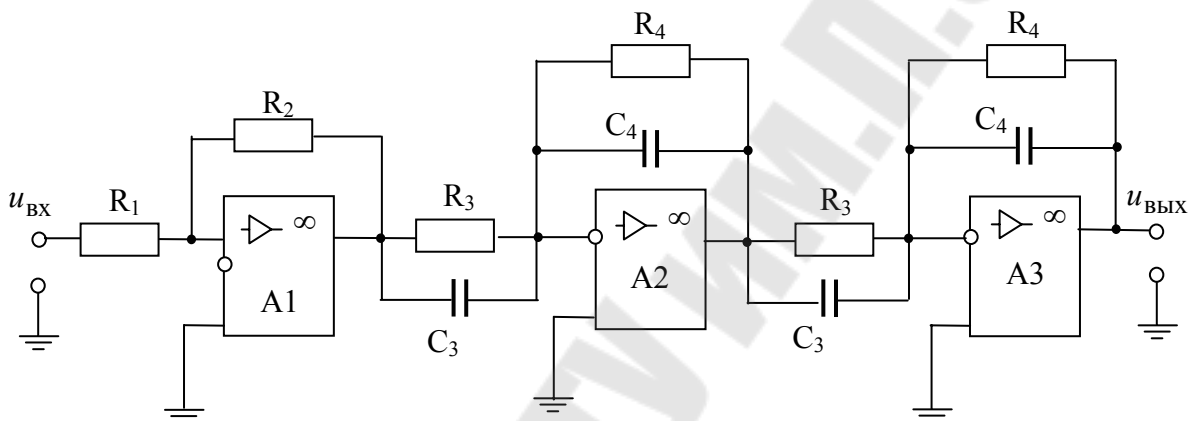


Рис.94. Электрическая схема регулятора синтезируемой ЭГСАУ

Рассчитаем электрические параметры схемы регулятора (рис.94)

Примем  $\frac{R_2}{R_1} = K$ ,  $R_4 = R_3$ ,  $\frac{R_4}{R_3} = 1$ ,  $R_3 \cdot C_3 = T_1$ ,  $R_4 \cdot C_4 = T_2$ .

Пусть  $R_1 = 10 \text{ кОм}$ ,

$$R_2 = K \cdot R_1 = 31,62 \cdot 10 = 316,2 \text{ кОм} \approx 300 \text{ кОм} \Rightarrow K = 30$$

$$R_4 = R_3 = 1 \text{ МОм}, \quad C_3 = \frac{T_1}{R_3} = \frac{0,01}{10^6} = 0,01 \text{ мкФ},$$

$$C_4 = \frac{T_2}{R_4} = \frac{0,001}{10^6} = 0,001 \text{ мкФ};$$

5. Проверим правильность синтеза регулятора. Для принятых номинальных элементов схемы регулятора ЭГСАУ в разомкнутом состоянии будет иметь

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{100}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.01 \cdot p + 1)} \cdot \frac{30 \cdot (0.01 \cdot p + 1)^2}{(0.001 \cdot p + 1)^2} = \\
 &= \frac{3000 \cdot (0.01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.1 \cdot p + 1) \cdot (0.001 \cdot p + 1)^2}. \quad (85)
 \end{aligned}$$

Построенная по (85) ЛАЧХ, практически «ляжет» на расчетную ЖЛАХ, т.к.  $20 \cdot \lg 31,6 = 29,99$  дБ, а  $20 \cdot \lg 30 = 29,54$  дБ, т.е. реальная ЖЛАЧХ пройдет на 0,45 дБ ниже, чем расчетная, а это очень маленькая величина, которой можно пренебречь.

Рассчитаем параметры запретной зоны по формулам примера 14 и построим ее (рис.93)

$$\begin{aligned}
 L_M &= 20 \cdot \lg \frac{M}{M-1} = 20 \cdot \lg \frac{1.4}{1.4-1} = 11 \text{ дБ}, \\
 L_{\text{центр}} &= 0.5 \cdot (L_M - |L_m|), \\
 L_m &= 20 \cdot \lg \frac{M}{M+1} = 20 \cdot \lg \frac{1.4}{1.4+1} = -5 \text{ дБ} \\
 L_0 &= \frac{L_M + L_m}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \text{ дБ}, \\
 \gamma_{\text{max}} &= \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{1.4^2}} = 45^\circ 30', \\
 L_{\text{max}} &= 0.5 \cdot (L_M - |L_m|) = 0.5 \cdot (10.88 + 4.68) = 7.78 \text{ дБ}.
 \end{aligned}$$

ЛФЧХ скорректированной САУ не входит в запретную зону, поэтому можно сделать вывод о правильной настройке регулятора. Синтез произведен верно.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
В.1. Основные понятия и определения.....	4
В.2. Классификация систем автоматического управления.....	6
В.2.1. Классификация САУ по принципу построения.....	6
В.2.2. Классификация САУ по числу контуров регулирования.....	8
В.2.3. Классификация САУ по характеру параметров.....	9
В.2.4. Классификация САУ по характеру управляющего воздей- ствия.....	13
В.2.5. Классификация САУ по типу выходного сигнала.....	16
1. Основные методы анализа и синтеза САУ.....	17
1.1. Условно-графическое представление САУ.....	17
1.2. Основы операторно-частотного метода анализа и синтеза САУ.....	22
1.2.1. Передаточные функции элементов управления САУ.....	22
1.2.2. Операторная математическая модель электрогидравлического преобразователя.....	28
1.2.3. Структурная схема электрогидравлического преобразователя.....	32
1.3. Структурный анализ САУ.....	33
1.4. Метод динамических звеньев.....	40
1.4.1. Характеристики динамических звеньев САУ.....	41
1.4.2. Типовые линейные динамические звенья.....	48
1.4.2.1. Позиционные динамические звенья.....	49
1.4.2.2. Дифференцирующие динамические звенья.....	68
1.4.2.3. Интегрирующие динамические звенья.....	77
1.4.2.4. Особые динамические звенья.....	82
1.4.3. Построение асимптотических ЛАЧХ и шаблонов для ЛФЧХ.....	87
1.5. Виды передаточных функций САУ и их взаимосвязь.....	90
1.6. Статическое и астатическое регулирование САУ.....	93
2. Показатели качества регулирования САУ.....	96
2.1. Устойчивость САУ.....	97
2.2. Точность САУ.....	103
2.3. Быстродействие и динамичность САУ.....	109
3. Статический расчет САУ.....	115

4. Синтез линейных систем автоматического управления.....	122
4.1. Цели и задачи и основные этапы синтеза САУ.....	122
4.2. Основные типы регуляторов САУ.....	125
4.3. Методы синтеза САУ.....	127
4.3.1. Расчет динамики САУ с помощью логарифмических частотных характеристик.....	127
4.3.2. Пример синтеза регулятора электрогидравлической САУ.....	129
Содержание.....	135
Литература.....	137



## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, М.1973. 607 с.
- 2 Бесекерский В.А. Попов Е.П. Теория систем автоматического управления, Санкт-Петербург 2003. 744 с.
- 3 Анхимюк В.Л., Опейко О.Ф. Теория автоматического управления, Мн. 2000. 351 с.
- 4 Шагинян А.С., Болотский В.В. Электрогидравлические усилители, Гомель 2001. 105 с.
- 5 Лотош М.М. Основы теории автоматического управления, М.1979. 256 с.
- 6 Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидروпневмосистем, М.1977, 417 с.

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Пособие  
по одноименному курсу для студентов  
специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы  
мобильных и технологических машин»  
дневной и заочной форм обучения**

Составитель: **Луковников** Вадим Иванович  
**Козлов** Андрей Владимирович  
**Савельев** Вадим Анатольевич

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного документа  
учебно-методических материалов 23.06.09.

Рег. № 50Е.  
E-mail: [ic@gstu.gomel.by](mailto:ic@gstu.gomel.by)  
<http://www.gstu.gomel.by>