Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ
к расчетно-графическим работам для студентов инженерно-технических специальностей дневной формы обучения

Гомель 2009

УДК 512.64+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151я73
Л59

Рекомендовано научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 7 от 09.03.2009 г.*)

Составители: *В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич, Н. Н. Бородин*

Рецензент: доц. каф. «Высшая математика» канд. физ.-мат. наук *Ю. Д. Черниченко*

Л59 **Линейная** алгебра и аналитическая геометрия : практикум к расчет.-граф. работам для студентов инженер.-техн. специальностей днев. формы обучения / сост.: В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич, Н. Н. Бородин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 27 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит задания по теме «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Приведено решение типового варианта, в котором подробно рассмотрены все необходимые задачи.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 512.64+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151я73

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РГР

Задание 1.

Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, методом Гаусса и матричным методом (сделать проверку правильности нахождения обратной матрицы, используя матричное умножение, т.е. показать, что $A \cdot A^{-1} = E$).

1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 3x_3 = 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -21 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3=2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6 \\ 5x_1-3x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1-2x_2-3x_3=-2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=11 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=9 \\ x_1-5x_2-8x_3=23 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=12 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=9 \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-15 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=15 \\ x_1+x_2+5x_3=16 \\ 3x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 12x_1-13x_2-4x_3=-10 \\ 7x_1-9x_2-11x_3=0 \\ 12x_1-17x_2-15x_3=-7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1-19x_2-x_3=26 \\ 2x_1-5x_2-x_3=6 \\ 8x_1-31x_2-4x_3=35 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x_1-x_2+3x_3=22 \\ 4x_1+x_2+6x_3=-1 \\ 13x_1+x_2+16x_3=5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=0 \\ 9x_1+4x_2-7x_3=3 \\ 14x_1+6x_2-11x_3=6 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3=3 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-3x_2+3x_3=-4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+2x_3=-3 \\ x_1-x_2-x_3=2 \\ -x_1+2x_2+x_3=-1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1-5x_2-4x_3=-3 \\ x_1-x_2+5x_3=11 \\ 4x_1-3x_2-6x_3=-9 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1-9x_2-14x_3=6 \\ x_1+7x_2+5x_3=11 \\ 5x_1-21x_2-27x_3=-5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=1 \\ 5x_1+x_2+2x_3=6 \\ x_1+2x_2+2x_3=5 \end{cases}$

Задание 2.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **9.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **15.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ **17.** $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **18.** $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **20.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **21.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ **23.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **24.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **26.** $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **27.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **29.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **30.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 3.

Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n')$, если он задан в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$.

1. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 - \bar e_2 \\ \bar e_2' = 3\bar e_1 + \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{2, 1\}$

2. $\begin{cases} \bar e_1' = 5\bar e_1 - 2\bar e_2 \\ \bar e_2' = -5\bar e_1 - 4\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{2, 0\}$

3. $\begin{cases} \bar e_1' = 5\bar e_1 - 2\bar e_2 \\ \bar e_2' = -5\bar e_1 + 4\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{10, -1\}$

4. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 + 3\bar e_2 \\ \bar e_2' = -\bar e_1 + 5\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{6, -1\}$

5. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 - \bar e_2 \\ \bar e_2' = \bar e_1 + 2\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{-3, 2\}$

6. $\begin{cases} \bar e_1' = 3\bar e_1 + \bar e_2 \\ \bar e_2' = 2\bar e_1 - \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{2, 1\}$

7. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + 2\bar e_2 \\ \bar e_2' = \bar e_1 + \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{1, -2\}$

8. $\begin{cases} \bar e_1' = -2\bar e_1 + \bar e_2 \\ \bar e_2' = \bar e_1 - 3\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{-3, 1\}$

9. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + 3\bar e_2 \\ \bar e_2' = \bar e_1 - \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{1, -3\}$

10. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + \bar e_2 - 8\bar e_3 \\ \bar e_2' = 2/9\bar e_1 - \bar e_2 \\ \bar e_3' = -\bar e_1 + \bar e_2 + e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{1, -9, 9\}$

11. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_2 + \bar e_3 \\ \bar e_2' = -\bar e_1 + 2\bar e_3 \\ \bar e_3' = \bar e_1 + \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{1, 0, -2\}$

12. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 + \bar e_2 - \bar e_3 \\ \bar e_2' = 3\bar e_1 - \bar e_2 + \bar e_3 \\ \bar e_3' = \bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{4, 2, -1\}$

13. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + 2\bar e_2 + \bar e_3 \\ \bar e_2' = 2\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_3' = 3\bar e_1 + 4\bar e_2 + 3\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{4, 0, -12\}$

14. $\begin{cases} \bar e_1' = 3\bar e_1 + \bar e_2 + 6\bar e_3 \\ \bar e_2' = 5\bar e_1 - 3\bar e_2 + 7\bar e_3 \\ \bar e_3' = -2\bar e_1 + 2\bar e_2 - 3\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{1, -1, 0\}$

15. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 - \bar e_2 + 3\bar e_3 \\ \bar e_2' = -3\bar e_1 + \bar e_2 - 2\bar e_3 \\ \bar e_3' = 4\bar e_2 + 5\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{-1, 2, 0\}$

16. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + \bar e_2 \\ \bar e_2' = \bar e_1 - 2\bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{3, 2\}$

17. $\begin{cases} \bar e_1' = -\bar e_1 + 2\bar e_2 + \bar e_3 \\ \bar e_2' = \bar e_1 + 2\bar e_3 \\ \bar e_3' = -\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{-2, 9, 11\}$

18. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 + 2\bar e_2 \\ \bar e_2' = 4\bar e_1 + \bar e_2 - \bar e_3 \\ \bar e_3' = \bar e_1 + 3\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{7, 11, -7\}$

19. $\begin{cases} \bar e_1' = -\bar e_1 + 2\bar e_3 \\ \bar e_2' = 2\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_3' = \bar e_2 + 2\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{-6, -1, 8\}$

20. $\begin{cases} \bar e_1' = \bar e_1 - \bar e_2 + 3\bar e_3 \\ \bar e_2' = 2\bar e_1 - \bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_3' = 2\bar e_2 + \bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{4, -3, 5\}$

21. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 + \bar e_3 \\ \bar e_2' = -2\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_3' = -3\bar e_2 + 2\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{4, 0, 9\}$

22. $\begin{cases} \bar e_1' = -\bar e_1 + 4\bar e_2 + 2\bar e_3 \\ \bar e_2' = -\bar e_1 + 3\bar e_3 \\ \bar e_3' = -3\bar e_2 + 5\bar e_3 \end{cases}$ $\bar x = \{3, 11, 2\}$

23. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_2' = -\bar e_1 + 3\bar e_2 + 5\bar e_3 \\ \bar e_3' = -\bar e_1 + \bar e_2 \end{cases}$ $\bar x = \{-7, 3, 9\}$

24. $\begin{cases} \bar e_1' = 2\bar e_1 - \bar e_2 + 3\bar e_3 \\ \bar e_2' = -\bar e_1 + 3\bar e_2 + 4\bar e_3 \\ \bar e_3' = 2\bar e_2 + \bar e_1 \end{cases}$ $\bar x = \{1, -4, 4\}$

25. $\begin{cases} \bar{e}_1' = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' = 4\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$ $\bar{x} = \{-2, -9, 12\}$

26. $\begin{cases} \bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 6\bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' = 6/5\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$ $\bar{x} = \{2, 5, 10\}$

27. $\begin{cases} \bar{e}_1' = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \end{cases}$ $\bar{x} = \{5, -1\}$

28. $\begin{cases} \bar{e}_1' = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' = \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \end{cases}$ $\bar{x} = \{1, 2, -3\}$

29. $\begin{cases} \bar{e}_1' = 5\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \end{cases}$ $\bar{x} = \{-1, -2\}$

30. $\begin{cases} \bar{e}_1' = 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$ $\bar{x} = \{1, 2, -1\}$

Задание 4.

Построить параллелограмм на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и вычислить его площадь и высоту.

1. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$

2. $\bar{a} = 3\bar{k} - 2\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$

3. $\bar{a} = -2\bar{i} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} - 2\bar{i}$

4. $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} - 3\bar{k}$

5. $\bar{a} = 5\bar{k} + 6\bar{j}$, $\bar{b} = 5\bar{k} + \bar{i}$

6. $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{k} - 5\bar{j}$

7. $\bar{a} = 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 2\bar{k}$

8. $\bar{a} = 6\bar{j} - 3\bar{i}$, $\bar{b} = 6\bar{k} - 3\bar{i}$

9. $\bar{a} = 4\bar{i} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$

10. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 5\bar{j} + 4\bar{k}$

11. $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 5\bar{i} + 6\bar{j} + 7\bar{k}$

12. $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$

13. $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$

14. $\bar{a} = -3\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$

15. $\bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$

16. $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$

17. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} - 2\bar{k}$

18. $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$

19. $\bar{a} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$

20. $\bar{a} = 2\bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{j} + 3\bar{k}$

21. $\bar{a} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 4\bar{k}$

22. $\bar{a} = 4\bar{i} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 7\bar{j} + 3\bar{i}$

23. $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = 4\bar{j} - 4\bar{k}$

24. $\bar{a} = 4\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{k}$

25. $\bar{a} = 5\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + 3\bar{k}$

26. $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{j} + 4\bar{k}$

27. $\bar{a} = -3\bar{i} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + 3\bar{k}$

28. $\overline{a} = -4\overline{i} - 4\overline{k}$
$\overline{b} = -4\overline{j} + 4\overline{k}$

29. $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j}$
$\overline{b} = 6\overline{j} + 2\overline{k}$

30. $\overline{a} = 3\overline{i} - 3\overline{j}$
$\overline{b} = -3\overline{j} + 2\overline{k}$

Задание 5.

По координатам вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4 найти:

1) длину ребер A_1A_2 и A_1A_3;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
6) уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
7) Уравнение прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2;
8) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
9) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

№	$A_1(x, y, z)$	$A_2(x, y, z)$	$A_3(x, y, z)$	$A_4(x, y, z)$
1	-1, 2, 1	-2, 2, 5	-3, 3, 1	-1, 4, 3
2	-2, 1, -1	-3, 1, 3	-4, 2, -1	-2, 3, 1
3	1, 1, 2	0, 1, 6	-1, 2, 2	1, 3, 4
4	-1, -2, 1	-2, -2, 5	-3, -1, 1	-1, 0, 3
5	2, -1, 1	-1, -1, 5	0, 0, 1	2, 1, 3
6	-1, 1, -2	-2, 1, 2	-3, 2, -2	-1, 3, 0
7	1, 2, 1	0, 2, 5	-1, 3, 1	1, 4, 3
8	-2, -1, 1	-3, -1, 5	-4, 0, 1	-2, 1, 3
9	1, -1, 2	0, -1, 6	-1, 0, 2	1, 1, 4
10	1, -2, 1	0, -2, 5	-1, -1, -1	1, 0, 3
11	10, 9, 6	2, 6, 2	9, 8, 9	7, 10, 3
12	4, 4, 10	7, 10, 2	2, 6, 2	3, 6, 3
13	6, 1, 1	4, 5, 5	4, 1, 0	1, 2, 1
14	0, 7, 1	2, -1, 5	1, 6, 4	3, -6, 5
15	7, 5, 3	9, 4, 4	4, 2, 0	7, 9, 6
16	1, 3, 6	2, 1, 1	-1, 0, 1	-4, 6, -3
17	7, 2, 4	7, -1, -2	3, 3, 1	-4, 2, 1

18	4, -1, 3	-2, 1, 0	0, -4, 1	3, 2, -5
19	-3, 4, -7	1, 5, -4	-5, -2, 0	2, 5, 4
20	1, 1, 2	-1, 1, 3	2, -2, 4	-1, 0,-2
21	14, 4, 5	-5, -3, 2	-2, -6, -3	-2, 2, -1
22	-1, -5, 2	-6, 0, -3	3, 6, -3	-10, 6, 7
23	2, -1, -2	1, 2, 1	5, 0, -6	-10, 9, -7
24	1, -1, 2	2, 1, 2	1, 1, 4	6, -3, 8
25	1, -1, 1	-2, 0, 3	2, 1, -1	2, -2, -4
26	2, -4, -3	5, -6, 0	-1, 3, -3	-10, -8, 7
27	1, 2, 0	1, -1, 2	0, 1, -1	-3, 0, 1
28	-3, -5, 6	2, 1, -4	0, -3, -1	-5, 2, -8
29	1, 2, -3	1, 0, 1	-2, -1, 6	0, -5, -4
30	0, -3, 1	-4, 1, 2	2, -1, 5	5, 1, -4

Задание 6.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и прямую $x=1+3t$, $y=-2+4t$, $z=5-2t$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x+3y-2z-4=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$ параллельно прямой $x=2+3t$, $y=-1+5t$, $z=4t$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz параллельно прямой $x=2+t$, $y=2t$, $z=1+3t$.

4. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $x-y+2z-2=0$ и пересекающей прямые $x=1+t$, $y=2+2t$, $z=4+3t$ и $x=1-t$, $y=4+2t$, $z=-t$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые $x=t$, $y=1+4t$, $z=1-3t$ и $x=1+7t$, $y=-8t$, $z=1+5t$.

6. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $A(3,-2,4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $x=2+3t$, $y=-4-2t$, $z=1+2t$.

7. Найти угол между прямой $x=1+11t$, $y=2-7t$, $z=5-8t$ и плоскостью $7x-8y+2z-10=0$.

8. Написать уравнение перпендикуляра, проведенного из точки $A(1,2,1)$ к плоскости $3x+7y-2z+5=0$.

9. Найти угол между прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+2}{-1}$ и плоскостью $2x-4y+2z-9=0$.

10. Найти проекцию точки $A(2,11,-5)$ на плоскость $x+4y-2z+7=0$.

11. Найти угол между прямой $\begin{cases} x+4y-2z+7=0 \\ 3x+7y-2z=0 \end{cases}$ и плоскостью $3x+y-z+1=0$.

12. Найти точку, симметричную точке $P(6,-5,5)$, относительно плоскости $3x-3y+z-4=0$

13. Найти точку, симметричную точке $A(4,-5,4)$, относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$.

14. Через прямую $x=2+5t$, $y = 2 - t$, $z=-1+2t$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $4x+3y-z+3=0$.

15. Найти проекцию прямой Δ на плоскость $3x-2y+z-15=0$ если уравнение прямой Δ имеет вид: $x=1+2t$, $y=3+t$, $z=2+t$.

16. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,2,-2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$.

17. Найти основание перпендикуляра, проведенного из точки $P(1,2,3)$ к прямой $x=8+3t$, $y=1+t$, $z=6-2t$.

18. Найти проекцию прямой (a) на плоскость $5x+2y+3z+7=0$, если уравнение прямой (a) имеет вид: $\begin{cases} x+y+z-5=0 \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$.

19. Написать параметрические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки $B(5,2,4)$ к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$.

20. Найти точку, симметричную точке $P(-3,1,-1)$, относительно прямой $\begin{cases} 4x-3y-13=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$.

21. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $x=t$, $y=1$, $z=-1$, принадлежащей данной плоскости и перпендикулярной данной прямой.

22. Написать уравнение общего перпендикуляра к прямым $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ и $x=-1+3t$, $y=2+2t$, $z=1$.

23. Через точку $A(2,3,-1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z+1=0$.

24. Через две точки $M(1,2,3)$ и $N(-2,-1,3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x+4y-2z+5=0$.

25. Уравнение прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образованной этой прямой с координатными осями.

26. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} x-2y-z-1=0 \\ 3x-y+z-2=0 \end{cases}$ на координатные оси.

27. Найти острый угол между прямыми: $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$.

28. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,-4,-2)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$.

29. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскости $3x-4y-z+5=0$.

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$.

<u>Задание 7.</u>

1. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $S(1,-3)$ и проходящей через точку $A(5,-3)$.

2. Составить уравнение окружности, проходящей через точки: $A(-1,5)$, $B(7,1)$, $C(2,6)$.

3. Написать уравнения окружностей, проходящих через точку $A(1,2)$ и касающихся двух прямых: $x-y+3=0$, $x-y-1=0$.

4. Написать уравнения окружностей, касающихся прямых: $x=1$, $y=1$, $x-y=1$.

5. Из точек $A(1,1)$, $B(1,4)$, $C(5,2)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2+2x-19=0$. Составить их уравнения.

6. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1,-2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

7. Составить уравнение эллипса, вершина которого находится в начале координат, ближайший к ней фокус в точке $F(2,0)$, а одна из директрис эллипса пересекает ее фокальную ось в точке $N(12,0)$.

8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(1,0)$ и $(0,1)$, а большая ось равна 2.

9. Составить уравнение касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ параллельных прямой $3x+2y-7=0$.

10. Составить уравнение касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ перпендикулярных прямой $3x+2y-7=0$.

11. Составить уравнения общих касательных эллипсов: $\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$ и $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

12. Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $x-y+3=0$, $3x+y-7=0$ при условии, что его оси симметрии совпадают с координатными осями.

13. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(5,0)$ и оси ординат в точке $B(0,-2)$. Составить уравнение эллипса, если его оси симметрии параллельны координатным осям.

14. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если расстояние между фокусами $2c=12$ и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{6}{5}$.

15. Найти фокальные радиусы точки $M(-5,\frac{9}{4})$ гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

16. Составить уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус $F(1,1)$ и асимптоту $x+y=0$.

17. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $F_1(1,0)$ и $F_2(0,1)$ и асимптоты параллельны координатным осям.

18. Составить уравнение равносторонней гиперболы, зная один из ее фокусов $F(-2,2)$ и асимптоты $2x-y+1=0$, $x+2y-7=0$.

19. Составить уравнение касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, проходящих через точки $A(4,1)$, $B(5,2)$.

20. Составить уравнение касательных к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

21. Составить уравнение касательных к гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ перпендикулярных прямой $10x-3y+9=0$.

22. Гипербола касается прямых $5x-6y-16=0$, $13x-10y-48=0$. Составить уравнение гиперболы при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

23. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(-2,1)$ и директриса $x+y-1=0$.

24. Даны вершины параболы $A(2,1)$ и уравнение директрисы $2x-y+2=0$. Составить уравнение этой параболы.

25. Составить уравнение касательных к параболе $y^2=16x$, проходящих через точки $A(1,2)$, $B(-1,2)$, $C(1,-4)$.

26. Составить уравнение касательных к параболе $y^2=4x$ параллельных прямой $2x-y+5=0$.

27. Составить уравнение касательных к кривой $y^2=9x$ перпендикулярных прямой $2x-y+5=0$.

28. Найти расстояние от параболы $y^2 = 64x$ до прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

29. Найти общие касательные эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ и параболы $y^2 = 12x$.

30. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $A(1, -2)$, если парабола расположена относительно прямой $y + 2 = 0$ и проходит через точку $B(2, 0)$.

<u>Задание 8</u>

Дано уравнение прямой в векторном виде (L): $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{S}t$ и радиус-вектор $\bar{r}_1$ точки M_1. Найти радиус-вектор точки M_2, симметричной точке M_1 относительно прямой.

№	$\vec{S}$	$\vec{r}_0$	$\vec{r}_1$
1	0, -1, 1	1, -2, 2	0, -3, 2
2	0, 0, 2	-1, 1, 4	-1, 0, 1
3	-1, 0, 0	1, -1, 2	2, -2,-3
4	-1, 0, 1	1, 2, 3	3, 3, 3
5	1, -1, 2	0, 1, 2	1, 2, 0
6	5, 4, 1	3, 1, 2	3, -2, 0
7	2, -1, 1	1, 0, 3	0, 2, 1
8	-1, 1, 3	0, 3, 4	2, 1, 3
9	-1, -1, 4	2, 3, 1	1, 1, 1
10	3, -4, 5	1, 1, 2	3, -1, 0
11	1, 0, 2	1, 0, 3	3, 2, 0
12	2, 3, 2	-1, 2, 1	1, 2, -2
13	2, 3, 5	1, 0, 3	4, -1, 2
14	2, -1, 3	1, -2, 1	0, 3, -2
15	1, -5, 3	2, 4, -1	3, -2, 0
16	2, -1, 3	4, 1, 2	5, 3, 0
17	-1, 1, 4	0, 2, 1	1, 1, 2
18	-1, 4, 2	1, 2, 5	2, 3, 1
19	1, 0, 2	5, -1, 3	0, 3, -2
20	1, -1, 0	1, 1, 3	5, 2, 3
21	2, 1, -1	3, -2, -4	6, 2, 1

22	2, -1, 3	1, 2, 4	4, 1, -1
23	1, -1, 3	5, -2, 1	4, 3, -3
24	-1, 1, 2	3, -3, 2	1, -3, 4
25	2, 0, 1	4, 3, 0	5, -1, 2
26	-1, 1, -1	5, 0, 3	4, 1, 2
27	5, 1, 2	3, 1, 4	7, 1, 3
28	-1, 0, -1	2, -2, -1	4, 0, -2
29	2, -1, 3	4, 1, 1	2, 1, 0
30	-2, 1, -1	1, 2, 7	3, -4, 2

Задание 9.

Привести уравнение: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ к каноническому виду:

№	A	B	C	D	E	F
1	1	-2	1	6	2	2
2	1	2	1	-2	-2	-10
3	0	2	0	0	4	0
4	1	-4	1	-20	20	1
5	1	1	1	-2	2	-9
6	7	6	-2	4	32	-38
7	1	-3	2	-4	0	5
8	3	-1	3	-4	12	-10
9	4	2	1	-1	5	0
10	7	24	-7	-10	10	0
11	2	1	0	-3	4	-3
12	5	6	0	3	0	-36
13	3	-1	1	2	-1	-1
14	5	3	5	-16	-16	-3
15	1	-1	10	0	0	-10
16	9	2	6	0	0	-10
17	5	3	5	-14	-2	-3
18	3	-5	3	4	4	12
19	1	1	1	0	0	-1
20	1	-2	1	-2	4	-1
21	0	2	0	4	-4	2
22	0	2	0	4	4	1
23	3	2	0	-4	-8	0

24	9	-12	16	2	-11	8
25	21	-8	9	16	-18	-16
26	1	1	-3	1	3	0
27	0	1	0	-3	2	-3
28	1	-3	5	0	0	-20
29	1	3	-1	0	0	0
30	1	-1	1	-2	2	-7

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -3 \\ -6 & 9-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Находим характеристические числа, т.е. решаем полученное уравнение:

$$(5-\lambda)(9-\lambda)^2 - 9(9-\lambda) - 36(9-\lambda) = 0$$

$$(9-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 14$ – характеристические числа.

Так как все характеристические числа действительны, то собственными значениями являются:

$$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 14.$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 9$. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + (9-\lambda_1)x_2 + 0x_3 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + (9-\lambda_1)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-9)x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + (9-9)x_2 + 0x_3 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + (9-9)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 = 0 \\ -3x_1 = 0 \end{cases}$$

Найдем решение данной однородной системы:

$$x_1 = 0; \quad 6x_2 = -3x_3;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_{3,}$$

Положим $x_3 = c,$ тогда решение равно $\left\{0, -\frac{1}{2}c, c\right\}, c \in R.$

Следовательно, собственным вектором с собственным значением $\lambda_1 = 9$ является вектор $\bar{x}_1 = \left\{0, -\frac{c}{2}, c\right\}.$

Найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda_2 = 0.$

Действуем аналогично. Имеем следующую однородную систему:

$$\begin{cases} (5-0)x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 = 0 \\ -3x_1 + 9x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 = 0 \\ -3x_1 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем решение данной системы:

$$9x_2 = 6x_1$$

$$x_2 = \frac{6}{9}x_1 = \frac{2}{3}x_{1,}$$

$$9x_3 = 3x_1$$

$$x_3 = \frac{3}{9}x_1 = \frac{1}{3}x_1$$

Полагая $x_1 = 3c,$ получим второй собственный вектор $\bar{x}_2 = \{3c, 2c, c\}$ с собственным значением $\lambda_2 = 0.$

Аналогично для собственного значения $\lambda_3 = 14$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -9x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -6x_1 - 5x_2 = 0 \\ -3x_1 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем данную однородную систему:

$$5x_2 = -6x_1$$

$$x_2 = -\frac{6}{5}x_1$$

$$5x_3 = -3x_1$$

$$x_3 = -\frac{3}{5}x_1$$

Положим $x_1 = c$, получим третий собственный вектор $\bar{x}_3 = \left\{c, -\frac{6}{5}c, -\frac{3}{5}c\right\}$ с собственным значением $\lambda_3 = 14$.

Ответ: $\lambda_1 = 9,\ \bar{x}_1 = \left\{0, -\frac{c}{2}, c\right\}$

$\lambda_2 = 0,\ \bar{x}_2 = \{3c, 2c, c\}$

$\lambda_3 = 14,\ \bar{x}_3 = \left\{c, -\frac{6}{5}c, -\frac{3}{5}c\right\}$

2. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, если он задан в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 0{,}5\bar{e}_3$$
$$\bar{e}_2' = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2$$
$$\bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$
$$\bar{x} = \{2, 4, 3\}$$

Решение:

Запишем матрицу перехода от старого базиса к новому:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и воспользуемся формулой преобразования координат вектора $X = TX'$, где X – матрица-столбец с координатами в старом, а X' – матрица-столбец с координатами в новом базисе. Следовательно,

$$X' = T^{-1}X, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу T^{-1}:

вычислим $\det T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0{,}5 - 0{,}5 + 1 = -1$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0{,}5) = -0{,}5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}5; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу $\widetilde{T}$, получаем присоединенную матрицу:

$$T^{np} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -0{,}5 & 1{,}5 & -2 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$T^{-1}=\frac{T^{np}}{\det T}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ -0,5 & 1,5 & -2\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0,5 & -1,5 & 2\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$$

Вычислим $X'=T^{-1}X$

$$X'=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0,5 & -1,5 & 2\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & +6\\ 1 & -6 & +6\\ -1 & +2 & +0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Следовательно, координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе $\left(\bar{e}'_{1,}\bar{e}'_2,\bar{e}'_3\right)$ будут $(4,1,1)$.

Ответ: $\bar{x}=\{4,1,1\}$.

3. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a}=\bar{k}-\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

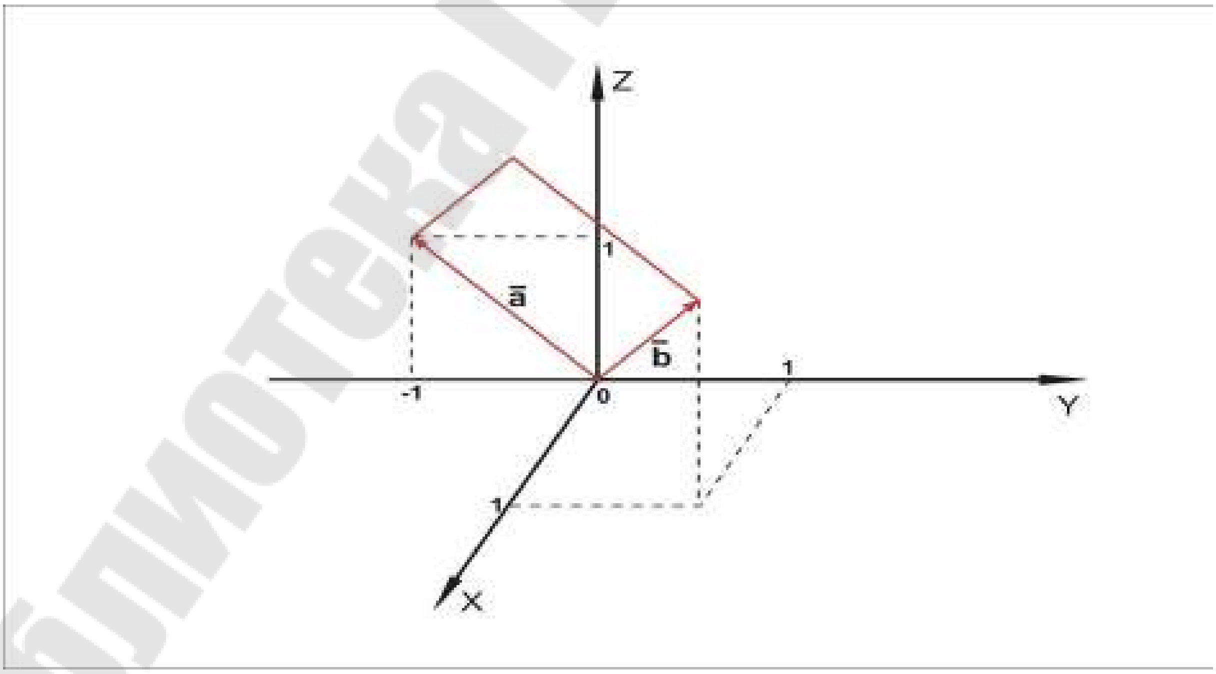

рис.1

Решение:

1) Найдем векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

2) Найдем модуль векторного произведения:

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},$$

но модуль векторного произведения есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $S_{\square} = \sqrt{6}$.

С другой стороны $S_{\square} = |\bar{b}| \cdot h_1 = |\bar{a}| \cdot h_2$,

Следовательно, $h_1 = \dfrac{S_{\square}}{|\bar{b}|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

$$h_2 = \frac{S_{\square}}{|\bar{a}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

Ответ: $S_{\square} = \sqrt{6}$; $h_1 = \sqrt{2}$; $h_2 = \sqrt{3}$;

4. По координатам вершин пирамиды $A_1(2,-3,1)$, $A_2(-1,-4,2)$, $A_3(4,-1,2)$, $A_4(3,-4,2)$ найти:

1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;
3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
6) уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
7) уравнение прямой A_4N параллельной прямой A_1A_2;
8) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
9) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

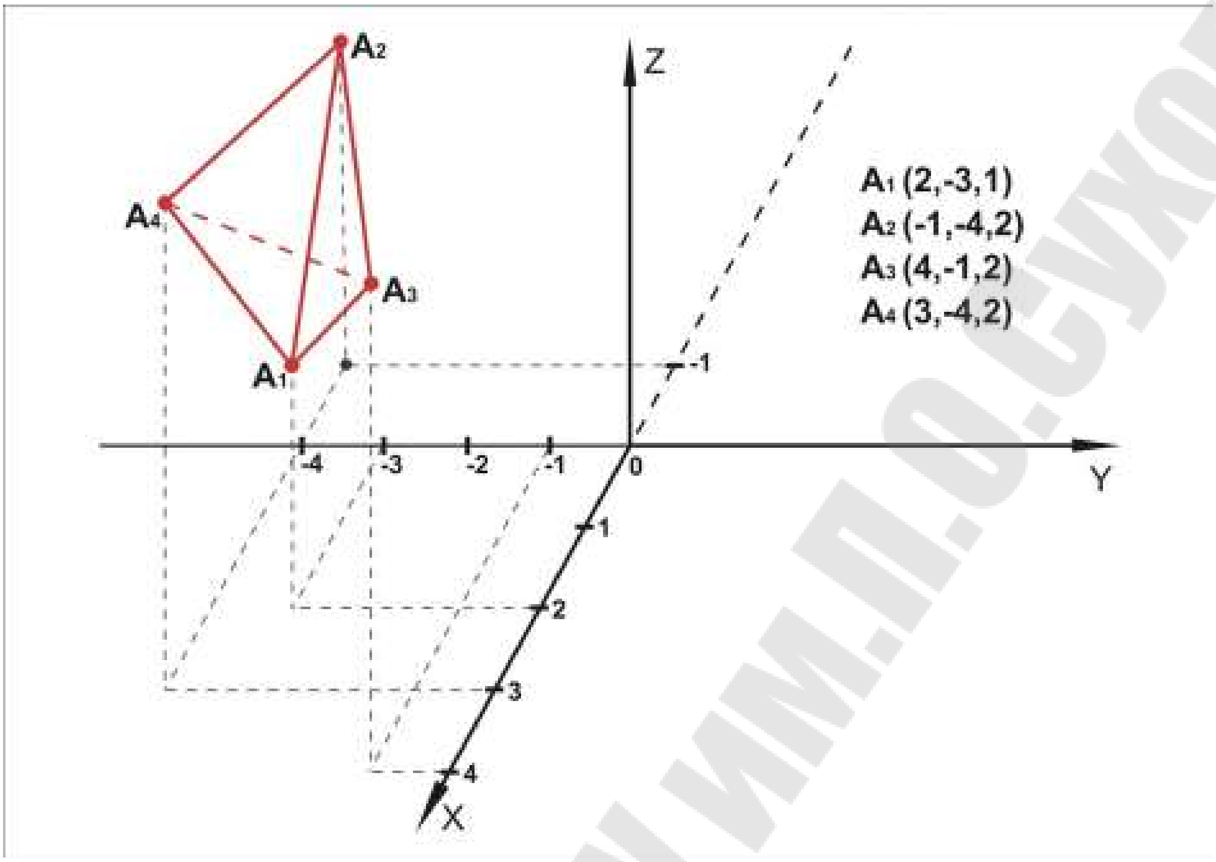

рис. 2

Решение:

1. а) Находим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

$$\overline{A_1A_2} = (-1-2)\bar{i} + (-4+3)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = -3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{A_1A_3} = (4-2)\bar{i} + (-1+3)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{A_1A_4} = (3-2)\bar{i} + (-4+3)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

б) длины этих векторов, т.е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_3:

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + 1^2} = 3.$$

2. Из формулы скалярного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right) = \left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_3}\right| \cos\left(\overline{A_1A_2} \,\hat{}\, \overline{A_1A_3}\right)$$

Найдем косинус угла между ними:

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \,\hat{}\, \overline{A_1A_3}\right) = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_3}\right|} = \frac{-3\cdot 2 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1}{\sqrt{11}\cdot 3} = -\frac{7}{3\sqrt{11}}.$$

Отсюда следует, что угол – тупой угол, равный

$$\pi - \arccos\frac{7}{3\sqrt{11}} = \pi - \arccos 0{,}703 \approx 2{,}35 \text{ рад.}$$

Это и есть искомый угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3.

3. Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 4-2 & -1+3 & 2-1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда $-3x+5y-4z+25=0$ – уравнение искомой плоскости.

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$, т.е. половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -1 & +1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 5\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Следовательно,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\,\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\,\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+5^2+(-4)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. Объем V пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

$$V = \overline{A_1A_2}\;\overline{A_1A_3}\;\overline{A_1A_3} = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\operatorname{mod}(-12) = 2.$$

6. Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\overline{S}$ можно взять нормальный вектор $\bar{n} = \{-3, 5, -4\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде:

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-4}.$$

7. Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ можно считать совпадающими: $\bar{S}_1=\bar{S}_2$.

Учитывая уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой A_1A_2 можно записать в виде:

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Отсюда $\bar{S}_1=\bar{S}_2=\{-3,-1,1\}$.

Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид:

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{1}.$$

8. По формуле: $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ вычислим синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$:

$$\sin\varphi=-\frac{12}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}.$$

9.Косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$ найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{n}_1,\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}=\frac{0(-3)+0(5)+1(-4)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{(-3)^2+5^2+(-4)^2}}=-\frac{4}{\sqrt{50}}=-\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

5. Дано уравнение прямой в векторном виде: $\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{s}\cdot t$ и радиус $\bar{r}_1$ точки M_1. Найти радиус вектор точки M_2, симметричной точке M_1, относительно прямой.

Решение:

$$\bar{r}_0=\{1,2,3\};\ \bar{s}=\{-1,2,2\};\ \bar{r}_1=\{0,1,2\}.$$

Проведем через точку M_1 плоскость (α), перпендикулярную прямой (L). Пусть N – точка пересечения прямой и плоскости.

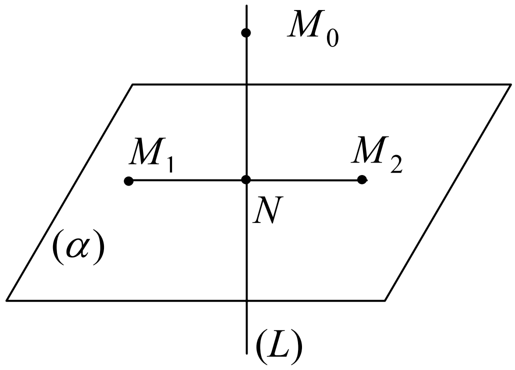

Рис. 3.

Уравнение плоскости в векторном виде имеет вид:
(α): $(\bar{r}-\bar{r}_1, \bar{s}) = 0$.

Пусть $\bar{r}_N$ – радиус вектор точки N. Из системы $\begin{cases}(\bar{r}-\bar{r}_1, \bar{s}) = 0 \\ \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t\end{cases}$ находим значение параметра t, соответствующего точке N ,и радиус вектор точки N

$$t = \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{s})}{|\bar{s}|^2}; \;\; \bar{r}_N = \bar{r}_0 + \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{s})}{|\bar{s}|^2} \cdot \bar{s}.$$

Так как точка N – середина отрезка M_1M_2, то радиус вектор точки M_2

$$\bar{r}_2 = 2\bar{r}_0 - \bar{r}_1 + 2 \cdot \frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{s})}{|\bar{s}|^2} \cdot \bar{s}$$

Подставляя $\bar{r}_0 = \{1, 2, 3\}$, $\bar{r}_1 = \{0, 1, 2\}$ и $\bar{s} = \{-1, 2, 2\}$ находим

$$\bar{r}_2 = \left\{\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right\}.$$

6. Привести уравнение линии к каноническому виду

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 20\sqrt{5}y = 10.$$

Решение:

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сначала осуществим поворот системы координат на угол α:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}, \quad \text{где } A = 9,\; B = 2,\; C = 6$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{9-6}{4} = \frac{3}{4}.$$

Находим:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

В нашем случае

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$$

Подставляя x и y в уравнение линии, получим

$$\frac{9}{5}(2x' - y')^2 + \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{6}{5}(x' + 2y')^2 -$$

$$-20\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') = 10$$

$$50x'^2 + 25y'^2 - 100x' - 200y' = 50$$

$$2x'^2 + y'^2 - 4x' - 8y' = 2$$

Выделяя полный квадрат по переменным x' и y', получим

$$2(x' - 1)^2 + (y' - 4)^2 = 20.$$

Вводя новые координаты

$$X = x' - 1$$
$$Y = y' - 4$$

получаем

$$\frac{X^2}{10} + \frac{Y^2}{20} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1974.
2. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1985.
3. Гурский Е.И., Ершова В.В. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия. – Мн.: Вышэйшая школа, 1968.
4. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986.
5. Гусак А.А. Высшая математика. – Мн.: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, - 1976. – Т. I.
6. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1968.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Изд-во Харьковского ордена Трудового Красного знамени гос. университета им. А.М. Горького, 1970.
8. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973.
9. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике /под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. I.
10. Герасимович А.И. Рысюк И.А. Математический анализ: Спр. пособие. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. I.
11. Руководство к решению задач по высшей математике /под ред.Е.И. Гурского. – Мн.: Вышэйшая школа. 1989.
12. Выготский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум
к расчетно-графическим работам для студентов инженерно-технических специальностей дневной формы обучения

Составители: **Вальковская** Валентина Ивановна
Лашкевич Василий Иванович
Бородин Николай Николаевич

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 23.04.09.
Рег. № 44Е.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by