Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к контрольным заданиям по одноименному курсу для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заочной формы обучения

Гомель 2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
Б12

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 11 от 27.06.2011 г.*)

Рецензенты: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *Л. Л. Великович*

Бабич, А. А.
Б12 Специальные математические методы и функции : метод. указания к контрол. заданиям по одноим. курсу для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заоч. формы обучения / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 53 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Содержит 9 задач для выполнения студентами-заочниками контрольной работы по курсу «Специальные математические методы и функции», а также вопросы для подготовки к экзамену по этому курсу.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные методические указания являются частью комплекса учебных пособий под общим названием «Специальные математические методы и функции» и написаны в соответствии с действующей программой курса «Специальные математические методы и функции», соответствующей новому образовательному стандарту и учебному плану по специальности 1–36 04 02 «Промышленная электроника». Методические указания адресованы студентам заочного отделения, овладевшим основами линейной алгебры и математического анализа в рамках курса «Высшая математика».

В методических указаниях весь практический материал по курсу «Специальные математические методы и функции» разделен на параграфы, в каждом из которых даются необходимые сведения (основные определения, формулы, примеры с решениями), используемые при самостоятельном решении задач. В конце каждого параграфа имеется задание, содержащее список контрольных задач. Нумерация заданий сквозная и состоит из двух чисел: первое из них означает номер задачи, а второе – номер варианта.

Для выполнения студентами заочного отделения контрольной работы по курсу «Специальные математические методы и функции» в методических указаниях содержится 9 задач.

Для самостоятельной подготовки к экзамену рекомендуем курс лекций [1]. Также в методических указаниях приведены список вопросов для подготовки к экзамену по курсу «Специальные математические методы и функции» и список литературы.

§ 1. Метрические пространства

<u>Определение</u>: Множество M называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in M$;
3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$.

Число $\rho(x, y)$ называется расстоянием между элементами x и y.

Для проверки аксиомы метрики полезны следующие неравенства:

1. Неравенство треугольника для модуля:
   $|x + y| \le |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \forall a, b \ge 0$.

Решение типовых задач и упражнений

<u>Пример 1.</u> Является ли метрикой на прямой следующая функция: $\rho(x, y) = |2^x - 2^y|$?

Решение.

Так как $\rho(x, y)$ определяется через модуль, следовательно, $\rho(x, y) \ge 0$.

Проверим аксиомы метрики.

1) Покажем, что из того, что $\rho(x, y) = 0$ следует, что $x = y$. И обратно: если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$.

Пусть $\rho(x, y) = 0$, т.е. $|2^x - 2^y| = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2^y = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^y \Leftrightarrow x = y$.

Пусть $x = y$. Тогда $\rho(x, y) = \rho(x, x) = |2^x - 2^x| = 0$.

Аксиома тождества выполняется.

2) $\rho(x, y) = |2^x - 2^y|$, $\rho(y, x) = |2^y - 2^x|$. Но так как $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Аксиома симметрии выполняется.

3) Проверим выполнение аксиомы треугольника. Пусть z – любое число. Тогда $\rho(x, y) = |2^x - 2^y| = |2^x - 2^z + 2^z - 2^y| \le |2^x - 2^z| + |2^z - 2^y| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Ответ: $\rho(x, y)$ – метрика. ▲

Пример 2. Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=|x^4-y^4|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

Решение.

Проверим выполнение аксиомы 1.

Пусть $\rho(x,y)=0$, т.е. $|x^4-y^4|=0 \Leftrightarrow x^4-y^4=0 \Leftrightarrow x^4=y^4$. Но из этого равенства не следует, что $x=y$. Действительно, пусть $x=1$, $y=-1$. Тогда $x^4=1^4=1$, $y^4=(-1)^4=1 \Rightarrow x^4=y^4$, но $x \neq y$. Следовательно, аксиома 1 не выполняется и $\rho(x,y)=|x^4-y^4|$ не является метрикой.

Ответ: $\rho(x,y)$ не является метрикой. ▲

Пример 3. Пусть $M=\mathbb{R}$ и $\rho(x,y)=(4x^2+y^2)|x^3-y^3|$. Является ли $\rho(x,y)$ метрикой?

Решение.

1) Пусть $\rho(x,y)=0$, т.е. $(4x^2+y^2)|x^3-y^3|=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+y^2=0 \\ x^3-y^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=y \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y.$$

Пусть $x=y$, следовательно, $\rho(x,y)=(4x^2+x^2)|x^3-x^3|=0$.

Аксиома выполняется.

2) $\rho(x,y)=(4x^2+y^2)|x^3-y^3|$, $\rho(y,x)=(4y^2+x^2)|y^3-x^3|$

$(4x^2+y^2)|x^3-y^3| \neq (4y^2+x^2)|y^3-x^3| \ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Аксиома не выполняется. Следовательно, функция не является метрикой.

Ответ: $\rho(x,y)$ не является метрикой. ▲

Пример 4. Доказать, что если $\rho(x,y)$ – метрика на *M*, то функция $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ также является метрикой на *M*.

Решение.

При решении задач такого типа необходимо постоянно помнить, что $\rho(x,y)$ – некоторая метрика, т.е. функция для которой справедливы все аксиомы метрики.

1) Пусть $\rho_1(x,y)=0 \Rightarrow \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=0 \Leftrightarrow \rho(x,y)=0$ (так как $1+\rho(x,y)\geq 1) \Rightarrow x=y$, так как $\rho(x,y)$ – метрика и для нее справедлива аксиома 1.

Пусть $x=y \Rightarrow \rho(x,y)=0$. Тогда $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\dfrac{0}{1+0}=0$.

Аксиома выполнена.

2) $\rho(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$; $\rho(y,x)=\dfrac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$. (т.к. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$).

Аксиома выполнена.

3) Проверим аксиому треугольника.

Пусть $\rho(x,y)=a$, $\rho(x,z)=b$ и $\rho(z,y)=c$. Тогда $\rho_1(x,y)=\dfrac{a}{1+a}$, $\rho_1(x,z)=\dfrac{b}{1+b}$, $\rho_1(z,y)=\dfrac{c}{1+c}$. Так как ρ – метрика, то $a\leq b+c$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ $\Rightarrow$ $\rho_1(x,y)=\dfrac{a}{1+a}=1-\dfrac{1}{1+a}\leq$

$$\leq 1-\frac{1}{1+b+c}=\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=$$
$$=\rho_1(x,z)+\rho_1(z,y).$$

Ответ: $\rho_1(x,y)$ является метрикой. ▲

ЗАДАНИЕ 1.

Являются ли метриками на прямой следующие функции:

1.1. $\rho(x,y)=\left|x^3-y^3\right|$.

1.2. $\rho(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$.

1.3. $\rho(x,y)=\left|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y\right|$.

1.4. $\rho(x,y)=\left|\sin(x-y)\right|$.

1.5. $\rho(x,y)=\left|\cos(x-y)\right|$.

1.6. $\rho(x,y)=(x^2+2y^2)\left|x-y\right|$.

1.7. $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$.

1.8. $\rho(x,y)=\left|e^{2x}-e^{2y}\right|$.

1.9. $\rho(x,y) = (3x^2 + y^2)\left|x^5 - y^5\right|$.

1.10. $\rho(x,y) = (x-y)^2$.

1.11. $\rho(x,y) = (x-y)^3$.

1.12. $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$.

1.13. $\rho(x,y) = \cos^2(x-y)$.

1.14. $\rho(x,y) = \left|x^6 - y^6\right|$.

1.15. $\rho(x,y) = \left|4^x - 4^y\right|$.

1.16. $\rho(x,y) = \left|3^x - 3^y\right|$.

1.17. $\rho(x,y) = \left|\sin(x^2 - y^2)\right|$.

1.18. Является ли метрикой на $M = \{a,b,c\}$ функция ρ, если $\rho(a,c) = \rho(c,a) = \rho(a,b) = \rho(c,b) = 2$, $\rho(b,a) = \rho(b,c) = 1$. Удовлетворяет ли ρ аксиоме треугольника.

1.19. На множестве $M = \{a,b,c\}$ задана метрика ρ такая, что $\rho(a,b) = \rho(b,c) = 1$. Какие значения может принимать $\rho(a,c)$?

1.20. Дано множество $M = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Зададим ρ так:

1) $\rho(x_i, x_i) = 0$;

2) $\rho(x_0, x_i) = \rho(x_i, x_0) = 1$ при $i > 0$;

3) $\rho(x_i, x_j) = d$ при $i \neq j$, $i > 0$, $j > 0$.

Доказать:

а) при $d = \sqrt{2}$ – ρ – метрика;

б) найти все значения d, при которых ρ – метрика.

1.21. На окружности можно (проверить это!) ввести две метрики – расстояние $r(A,B)$ по хорде и расстояние $\rho(A,B)$ по дуге. Как выражается одна метрика через другую?

1.22. Является ли множество точек плоскости метрическим пространством, если расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определить формулой $\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

1.23. Образует ли метрическое пространство множество лучей плоскости выходящих из начала координат, если за расстояние между лучами принять радианную меру наименьшего угла, образованного этими лучами.

1.24. Пусть M – множество всех населенных пунктов на левом берегу реки. Расстояние $\rho(x, y)$ от пункта x до пункта y будем измерять временем движения от x до y теплохода, имеющего собственную скорость 20 км/ч. Образует ли M метрическое пространство?

Пусть ρ – метрика на M. Являются ли метриками на М следующие функции:

1.25. $\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$.

1.26. $\rho_1(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$.

1.27. $\rho_1(x, y) = \sqrt[3]{\rho(x, y)}$.

1.28. $\rho_1(x, y) = \sqrt[4]{\rho(x, y)}$.

Являются ли метрикой на множестве натуральных чисел функции:

1.29. $\rho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{x \cdot y}$.

1.30. $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x + y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$

§ 2. Евклидовы пространства. Ортогональные системы векторов

Определение: Пусть V – действительное линейное пространство. Скалярным произведением называется функционал, действующий из $V \times V$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $\forall x \in V \quad (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(x, y) = (y, x)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\qquad \forall x, y, z \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение: Линейное пространство V, наделенное скалярным произведением называется евклидовым пространством.

ТЕОРЕМА: Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Для точек пространства $\mathbb{R}^n$ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ скалярное произведение можно определить как $(x,y)=x_1\cdot y_1+$ $+x_2\cdot y_2+...+x_n\cdot y_n$.

Для функций непрерывных на $[a,b]$ скалярное произведение вводится по формуле

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx.$$

<u>Определение</u>: Два элемента x и y евклидова пространства E называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0.

<u>Определение</u>: Система ненулевых векторов $s=\{x_1,x_2,...,x_n\}\in E$ называется ортонормированной, если

1) все векторы системы взаимно ортогональны друг другу, т.е. $(x_i,x_j)=0$, $i\neq j$.

2) нормы их равны 1, т.е. $\|x_k\|=1$, $k=1,...,n$.

ТЕОРЕМА: Пусть $\{y_n\}$ – линейно-независимая система векторов в некотором евклидовом пространстве E. Тогда в E существует ортонормированная система векторов $\{f_n\}$.

Такую систему можно получить следующим образом. Не ограничивая общности пусть $n=3$. Тогда положим $f_1=y_1$, а $f_2=y_2+\lambda y_1$, где λ подбирается так, чтобы $(f_1,f_2)=0$. Тогда $\lambda=-\dfrac{(y_2,f_1)}{(f_1,f_1)}$. Два вектора найдены.

Третий вектор ищем в виде: $f_3=y_3+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$, где λ_1, λ_2 подбирается из условий: $(f_1,f_3)=0$, $(f_2,f_3)=0$.

Тогда

$$\lambda_1=-\frac{(y_3,f_1)}{(f_1,f_1)};\ \lambda_2=-\frac{(y_3,f_2)}{(f_2,f_2)}.$$

Осталось привести векторы полученной системы к единичной длине по формуле:

$$e_i=\frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i,\quad i=1,2,3.$$

Решение типовых задач и упражнений

Пример 1. Исходя из системы векторов арифметического пространства, с заданным скалярным произведением, с помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис

$$a=(1{,}0{,}1),\quad b=(2{,}1{,}0),\quad c=(0{,}1{,}1),$$

$$(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-y_1x_2+x_3y_3.$$

Решение.

1) Проверим, является ли система векторов $\{a,b,c\}$ линейно-независимой. Для этого рассмотрим равенство $\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3c=0$.

Так как $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=3\neq0$, все $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ и система векторов линейно-независима и образует базис.

2) Составим ортогональную систему векторов $\{f_1,f_2,f_3\}$ следующим образом.

Пусть $f_1=a$, $f_2=b+\lambda\cdot f_1$, где $\lambda=-\dfrac{(b,f_1)}{(f_1,f_1)}$.

$$(b,f_1)=2\cdot2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0-1\cdot1-2\cdot0=3,$$

$$(f_1,f_1)=2\cdot1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1-2\cdot1\cdot0=3,$$

$$\lambda=-\frac{3}{3}=-1.$$

Тогда $f_2=(2{,}1{,}0)+(-1)\cdot(1{,}0{,}1)=(2{,}1{,}0)+(-1{,}0{,}-1)=(1{,}1{,}-1)$.

Проверка ортогональности векторов f_1 и f_2:

$$(f_1,f_2)=2\cdot1\cdot1+0\cdot1-1-1=0\Rightarrow f_1\perp f_2,$$

$$f_3=c+\lambda_1\cdot f_1+\lambda_2\cdot f_2,\quad \text{где}\ \lambda_1=-\frac{(c,f_1)}{(f_1,f_1)},\ \lambda_2=-\frac{(c,f_2)}{(f_2,f_2)},$$

$$(c,f_1)=2\cdot0\cdot1+1\cdot0+1\cdot1-0\cdot0-1\cdot1=0,$$

$$\lambda_1=-\frac{0}{3}=0,$$

$$(c,f_2)=2\cdot0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1-0\cdot1-1\cdot1=-1,$$

$$(f_2,f_2)=2\cdot1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)-1\cdot1-1\cdot1=2,$$

$$\lambda_2=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$f_3 = (0,1,1) + 0\cdot(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,-1) = (0,1,1) + \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Проверка на ортогональность:

$$(f_2, f_3) = 2\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 0 = 0 \Rightarrow f_2 \perp f_3,$$

$$(f_1, f_3) = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_3.$$

Итак, получили систему ортогональных векторов. Проанализируем полученные векторы.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}\cdot f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{(f_2, f_2)}}\cdot f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{(f_3, f_3)}}\cdot f_3 = \frac{1}{\sqrt{6/4}}\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{3}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Искомая ортонормированная система векторов:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{3}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right). \ \blacktriangle$$

Замечание: В случае, когда исходная система векторов задана в ортонормированном базисе, скалярное произведение вычисляется следующим образом:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Пример 2. В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $\{1; 2t-3; t^2+1\}$.

Решение.

Пусть $g_1 = 1$, $g_2 = 2t - 3$, $g_3 = t^2 + 1$.

Положим $f_1 = 1$; $f_2 = g_2 + \lambda \cdot f_1$, где $\lambda = -\dfrac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}$.

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2.$$

$$(g_2, f_1) = \int_{-1}^{1} (2t - 3) \cdot 1\, dt = (t^2 - 3t)\Big|_{-1}^{1} = 1^2 - 3 \cdot 1 - ((-1)^2 - 3 \cdot (-1)) = -6.$$

Тогда

$$\lambda = -\frac{-6}{2} = 3; \quad f_2 = 2t - 3 + 3 = 2t.$$

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 2t\,dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - (-1)^2 = 0 \Rightarrow f_1 \perp f_2.$$

$$f_3 = g_3 + \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2, \quad \text{где } \lambda_1 = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)},\ \lambda_2 = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}.$$

$$(g_3, f_1) = \int_{-1}^{1} (t^2 + 1) \cdot 1dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}.$$

$$(g_3, f_2) = \int_{-1}^{1} (t^2 + 1) \cdot 2t\,dt = \int_{-1}^{1} (2t^3 + 2t)dt = \left(\frac{2t^4}{4} + \frac{2t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

$$(f_2, f_2) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot 2t\,dt = \frac{4t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}(1^3 - (-1)^3) = \frac{8}{3}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = -\frac{\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}; \quad \lambda_2 = -\frac{0}{\frac{8}{3}} = 0$$

$$f_3 = t^2 + 1 - \frac{4}{3} \cdot 1 + 0 \cdot 2t = t^2 + 1 - \frac{4}{3} = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Проверка на ортогональность:

$$(f_1, f_3) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1 + 1 - (1 + 1)) = 0.$$

$$(f_2, f_3) = \int_{-1}^{1} 2t \cdot \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt = 2\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{t}{3}\right) dt = 2 \cdot \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Искомая ортогональная система: $f_1 = 1$, $f_2 = 2t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Ответ: $f_1 = 1$, $f_2 = 2t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. ▲

ЗАДАНИЕ 2.

Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства своими координатами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис.

2.1. $a = (1,1,-1)$, $b = (-4,0,5)$, $c = (-8,2,0)$.
2.2. $a = (3,-1,-2)$, $b = (4,0,-1)$, $c = (5,1,0)$.
2.3. $a = (1,0,-1)$, $b = (3,1,0)$, $c = (4,1,2)$.
2.4. $a = (1,1,2)$, $b = (-1,0,2)$, $c = (0,1,6)$.
2.5. $a = (1,-1,0)$, $b = (0,1,2)$, $c = (3,0,2)$.
2.6. $a = (0,1,-1)$, $b = (3,0,2)$, $c = (3,-2,1)$.
2.7. $a = (1,-2,3)$, $b = (0,1,-4)$, $c = (1,1,2)$.
2.8. $a = (0,2,1)$, $b = (3,-1,1)$, $c = (3,1,4)$.
2.9. $a = (-1,3,2)$, $b = (1,0,3)$, $c = (0,3,-1)$.
2.10. $a = (2,1,-1)$, $b = (1,0,1)$, $c = (3,1,4)$.
2.11. $a = (-1,3,1)$, $b = (2,0,1)$, $c = (1,3,0)$.

2.12. $a=(3,1,2)$, $b=(-1,2,0)$, $c=(1,0,2)$.

2.13. $a=(-2,1,0)$, $b=(0,-1,3)$, $c=(-2,0,5)$.

2.14. $a=(1,-3,1)$, $b=(2,1,2)$, $c=(4,-2,-1)$.

2.15. $a=(1,-1,2)$, $b=(0,3,1)$, $c=(1,2,0)$.

Исходя из системы векторов арифметического пространства, с заданным скалярным произведением, с помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис.

2.16. $a=(2,1,1)$, $b=(0,1,-2)$, $c=(-1,1,3)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$.

2.17. $a=(1,3,-1)$, $b=(1,0,2)$, $c=(-1,2,1)$,
$(x,y)=4\cdot x_1\cdot y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+4x_2y_2$.

2.18. $a=(-1,0,2)$, $b=(1,1,1)$, $c=(2,-1,0)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$.

2.19. $a=(0,1,-1)$, $b=(2,0,1)$, $c=(-2,4,0)$,
$(x,y)=5x_1\cdot y_1-x_1y_2+x_2y_2+4x_3y_3$.

2.20. $a=(0,1,-2)$, $b=(0,-1,3)$, $c=(1,0,1)$,
$(x,y)=4x_1\cdot y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3$.

2.21. $a=(2,1,0)$, $b=(-1,1,1)$, $c=(1,2,3)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1+2x_1y_2+2y_1x_2+x_2y_2+2x_3y_3$.

2.22. $a=(-1,2,1)$, $b=(0,1,2)$, $c=(-1,3,-1)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1-x_1y_2+y_1x_2+2x_2y_2+3x_3y_3$.

2.23. $a=(0,1,2)$, $b=(3,-1,1)$, $c=(3,0,4)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1+3x_2y_2-x_1y_2-y_2x_1+x_3y_3$.

2.24. $a=(1,-1,2)$, $b=(-1,3,1)$, $c=(0,2,1)$,
$(x,y)=2x_1\cdot y_1+x_2y_2-x_2y_3-y_2x_3+3x_3y_3$.

2.25. $a=(1,-1,0)$, $b=(0,1,-1)$, $c=(1,0,2)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1+3x_2y_2-2x_1y_2-2x_2y_1+2x_3y_3$.

2.26. $a=(0,-1,3)$, $b=(1,2,-1)$, $c=(1,1,-1)$,
$(x,y)=x_1\cdot y_1+2x_2y_2-x_2y_3-y_2x_3+x_3y_3$.

2.27. $a=(0,3,2)$, $b=(1,-1,2)$, $c=(1,2,0)$,
$(x,y)=2x_1\cdot y_1+x_2y_2-x_1y_3-y_1x_3+2x_3y_3$.

2.28. $a=(2,1,-1)$, $b=(-1,1,2)$, $c=(1,2,0)$,
$(x,y)=3x_1\cdot y_1+x_2y_2-x_1y_2-y_1x_2+x_3y_3$.

2.29. $a=(-1,2,0)$, $b=(1,2,-1)$, $c=(0,4,2)$,

$(x,y) = x_1 \cdot y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_1 y_3 - 2y_1 x_3 + 3x_3 y_3$.

2.30. $a = (-1,-2,1)$, $b = (0,1,2)$, $c = (-1,-1,1)$,
$(x,y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 y_3 - 2x_2 y_3 - 2y_2 x_3 + 5x_3 y_3$.

ЗАДАНИЕ 3.

В пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов:

3.1. $\{1, t+2, 2t^2\}$.
3.2. $\{1, 2t+1, t^2+1\}$.
3.3. $\{1, 2t+3, 2t^2-1\}$.
3.4. $\{1, 3t-1, t^2+2\}$.
3.5. $\{1, 3t+2, t^2+3\}$.
3.6. $\{1, t+1, 2t^2+1\}$.
3.7. $\{1, t-3, 3t^2\}$.
3.8. $\{1, 1-2t, 2t^2\}$.
3.9. $\{1, 2t-3, t^2-1\}$.
3.10. $\{1, t+4, t^2-1\}$.
3.11. $\{1, t+3, 3t^2+1\}$.
3.12. $\{1, 4t+1, t^2+5\}$.
3.13. $\{1, 3t+4, 2t^2+3\}$.
3.14. $\{1, 2t+4, 2t^2+5\}$.
3.15. $\{1, t-5, 3t^2-4\}$.
3.16. $\{1, 4t-3, 2t^2-7\}$.
3.17. $\{1, t+7, 2t^2+1\}$.
3.18. $\{1, 2t-5, 4t^2\}$.
3.19. $\{1, t-2, 3t^2-1\}$.
3.20. $\{1, 2t-1, 3t^2+2\}$.
3.21. $\{1, t+5, 2t^2-3\}$.
3.22. $\{1, t-4, 2t^2-5\}$.
3.23. $\{1, t+6, 3t^2-1\}$.
3.24. $\{1, 4t+3, t^2-5\}$.
3.25. $\{1, 3t-2, 4t^2\}$.
3.26. $\{1, 2t-4, 3t^2+5\}$.
3.27. $\{1, 2t+7, 3t^2-5\}$.
3.28. $\{1, 2t-7, 4t^2+1\}$.
3.29. $\{1, 4t-1, 4t^2-3\}$.
3.30. $\{1, 4t-3, 4t^2+5\}$.

§ 3. Линейные операторы

<u>Определение</u>: Пусть V и W два линейных пространства. Тогда всякое отображение A, сопоставляющее каждому элементу $f \in V$

единственный элемент $g = Af \in W$, называется оператором, действующим из V в W.

Оператор A называется линейным, если

1. $A(x+y) = Ax + Ay$ для любых $x, y \in V$
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ для любых $x \in V$, $\lambda \in R$.

Пусть E – комплексное векторное пространство.

Определение: Комплексное число λ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент $u \in E$, такой, что

$Au = \lambda u$. (1)

Всякий вектор u, удовлетворяющий соотношению (1) называется собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ.

В конечномерных пространствах всякий линейный оператор задается матрицей. При этом уравнение (1) эквивалентно системе линейных уравнений

$(A - \lambda I)u = 0$, (2)

где I – единичная матрица.

Для того, чтобы система (2) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, а значит,

$\det(A - \lambda I) = 0$. (3)

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением и имеет n корней.

Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение, но существует бесконечное множество векторов для заданного собственного значения.

Решение типовых задач и упражнений

Пример 1. Найти собственное значение и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda I)=0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \text{ или } (\lambda+2)(\lambda^2-12\lambda+32)=0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1=8$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-2$. Обозначим через $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ координаты собственного вектора u_1 с собственным значением $\lambda_1=8$. Тогда из системы (2)

$$\begin{bmatrix} 6-8 & 0 & 2 \\ 0 & -2-8 & 0 \\ 2 & 0 & 6-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} -2\alpha_1+2\alpha_3=0, \\ -10\alpha_2=0, \\ 2\alpha_1-2\alpha_3=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_1=\alpha_3=c$, $c\in R$, $\alpha_2=0$. Таким образом, собственный вектор $u_1=(c,0,c)$, $\forall c\in R$, $c\neq 0$.

Аналогично находим собственные векторы $u_2=(t,0,-t)$, $\forall t\in R$, $t\neq 0$ и $u_3=(0,l,0)$, $\forall l\in R$ матрицы А с собственными значениями $\lambda_2=4$ и $\lambda_3=-2$.

Ответ: Множество собственных векторов:
$u_1=(c,0,c)$, $u_2=(t,0,-t)$, $u_3=(0,l,0)$, $\forall c,t,l\in R$. ▲

__Пример 2.__ Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \text{ или } (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)=0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_{1,2}=2$ кратности $m=2$ и $\lambda_3=4$.

Найдем собственный вектор $u_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ с собственным значением $\lambda_{1,2}=2$. Система (2) примет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} 4\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0, \\ -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha_3=c$, $c\in R$. Тогда собственный вектор $u_1=(0,c,c)$, $\forall c\in R$, $c\neq 0$.

При $\lambda_3=4$ система (2) примет вид

$$\begin{cases} -2\alpha_1=0 \\ -4\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \\ -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $\alpha_1=0$, $\alpha_2=k$, $\alpha_3=-k$, $k\in R$ и собственный вектор $u_2=(0,k,-k)$ $\forall k\in R$.

Ответ: Множество собственных векторов: $u_1=(0,c,c)$, $u_2=(0,k,-k)$, , $\forall c,k\in R$. ▲

ЗАДАНИЕ 4.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A:

4.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.2. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4.3. $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}.$

4.4. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$

4.5. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$

4.6. $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}.$

4.7. $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

4.8. $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}.$

4.9. $A=\begin{bmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$

4.10. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$

4.11. $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$

4.12. $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}.$

4.13. $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 7\end{bmatrix}.$

4.14. $A=\begin{bmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}.$

4.15. $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}.$

4.16. $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}.$

4.17. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

4.18. $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix}.$

4.19. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}.$

4.20. $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}.$

4.21. $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}.$

4.22. $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}.$

4.23. $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}.$

4.24. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 2 & -1\\-2 & 1 & 4\end{bmatrix}.$

4.25. $A=\begin{bmatrix}5 & -4 & 4\\2 & 1 & 2\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}.$

4.26. $A=\begin{bmatrix}6 & -2 & -1\\-1 & 5 & -1\\1 & -2 & 4\end{bmatrix}.$

4.27. $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1\\-1 & 3 & -1\\1 & -2 & 2\end{bmatrix}.$

4.28. $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\-2 & 4 & -1\\-2 & 1 & 6\end{bmatrix}.$

4.29. $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\0 & 2 & 0\\-1 & 5 & 4\end{bmatrix}.$

4.30. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}.$

§ 4. *Метод Фурье для решения уравнений математической физики*

Существует несколько общих подходов к анализу и исследованию ДУ в частных производных. Один из наиболее универсальных из них – это метод Фурье.

Суть метода заключается в разделении переменных. А именно:

1) искомая функция, зависящая от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, которые в свою очередь зависят только от одной переменой.
2) после подстановки этого произведения функций в исходное уравнение получается система из нескольких однородных дифференциальных уравнений и краевых условий. Такая система представляет собой совокупность задач Штурма-Лиувилля.
3) Искомое решение представляется в виде ряда по собственным функциям решаемых задач.

Решение типовых задач и упражнений

Пример 1. Найти поперечные отклонения $u(x,t)$ от положения равновесия струны, закрепленной на концах, при заданной начальной конфигурации.

Решение.

По существу требуется решить уравнение

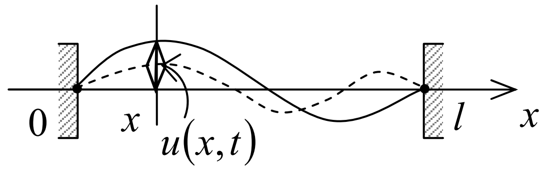
$$\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0$$

с граничными и начальными условиями вида:

$u(0,t) = u(l,t) = 0$

$u(x,0) \equiv u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ – *начальная конфигурация*

$u'(x,0) \equiv u'\big|_{t=0} = 0$ – *начальная скорость отсутствует.*



Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1)$$

Подставляя $u(x,t)$ в дифференциальное уравнение и используя линейность уравнения, получаем

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Каждая часть этого уравнения (равенства) зависит только от своей переменной. Поэтому равенство возможно, только если обе части уравнения будут константами:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Подставляя решение в виде (1) в граничные условия, получаем

$$X(0) \cdot T(t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Таким образом, функция $X(x)$ должна быть решением следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 \le x \le l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda < 0$. Положим $\nu = \sqrt{|\lambda|} = \sqrt{-\lambda}$, тогда общее решение уравнения представляется в виде

$$X(x) + Ae^{\nu x} + Be^{-\nu x},$$

в чем нетрудно убедиться, решая характеристическое уравнение $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\nu$.

Решение должно удовлетворять граничным условиям. Поэтому имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\nu l} + Be^{-\nu l} = 0. \end{cases}$$

Так как $\nu > 0$, то $e^{\nu l} \neq e^{-\nu l}$; экспоненты линейно независимы, следовательно, $A = B = 0 \Rightarrow X(x) = 0$.

Таким образом, задача при $\lambda < 0$ имеет только нулевое решение и нетривиальных решений нет.

Легко проверить, что $\lambda = 0$ также дает нулевое решение.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда находим

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Граничные условия дают

$$\begin{cases} A = 0, \\ B\sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

При $B = 0$ опять получаем тривиальное решение. Поэтому второе равенство выполняется если

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}n^2,\ n = 1,2,\ldots .$$

Собственным значениям λ_n соответствуют собственные функции:

$$X_n = \sin\frac{\pi nx}{l} .$$

Возвращаясь к уравнению для функции $T(t)$, получаем

$$\frac{T''}{a^2T} = -\lambda_n \quad \Rightarrow \quad T'' + \left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 T = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi nat}{l} + B\sin\frac{\pi nat}{l},$$

при этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot \left[A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \right].$$

В силу однородности граничных условий и уравнения сумма $u_n(x,t)$ также будет решением дифференциального уравнения. Более того, предположим, что сумму можно распространить на все натуральные n, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot \left[A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \right].$$

Найдем коэффициенты A_n и B_n, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot A_n = \varphi(x), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \cdot B_n \cdot \frac{\pi n a}{l} = 0. \end{cases}$$

Т.е. мы, по-существу, получили разложение функций $\varphi(x)$ и 0 по собственным функциям оператора $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Оператор D^2 является самосопряженным, его собственные функции образуют ортонормированный базис в пространстве дважды дифференцируемых функций.

Из второго уравнения получаем, что все $B_n = 0$. А из первого уравнения:

$$A_n = \frac{1}{\left\| \sin\frac{\pi n x}{l} \right\|^2} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

где $\left\| \sin\frac{\pi n x}{l} \right\|^2 = \int_0^l \sin\frac{2\pi n x}{l}\, dx = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\, dx.$

Здесь следует отметить, что $\varphi(x)$ – не любая функция, а должна, по крайней мере, быть дважды дифференцируемой.

Окончательно, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\cdot\cos\frac{\pi nat}{l}, \quad \text{где} \quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти методом Фурье решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l,\ t>0,$$

удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$u(0,t)=u'_x(l,t)=0;$$

$$u(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{2l}; \qquad u'_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Решение.

Будем искать решение в виде: $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя $u(x,t)$ в дифференциальное уравнение и используя его линейность, получаем

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

Каждая часть этого уравнения зависит только от своей переменной. Поэтому равенство может сохраняться, только если оба выражения будут константами: $\dfrac{T''}{a^2T}=\dfrac{X''}{X}=-\lambda$, где λ - неизвестная пока константа.

Таким образом, для функции $X(x)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=0, \quad X'(l)=0. \end{cases}$$

Это задача Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения. Общее решение уравнения будет

$$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Используя граничные условия при $x=0$, имеем $X(0)=0=B$. После этого граничное условие при $x=l$ дает $X'(x)=0=A\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l$. Отсюда находим, что $\sqrt{\lambda}l=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \quad (n=0,1,2\ldots)$. Получаем собственные значения и собственные функции в виде

$$\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right]^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)x.$$

Возвращаясь к уравнению для функции $T(t)$, получаем $\dfrac{T''}{a^2T} = -\lambda_n$. Отсюда $T_n(t) = C_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t + D_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t$, при этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем решение исходного дифференциального уравнения:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\sqrt{\lambda_n}x \cdot \left[C_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t + D_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t\right].$$

Используем начальные условия:

$$\sin\frac{3\pi x}{2l} = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot \sin\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)x,$$

$$\sin\frac{\pi x}{2l} = u_t'(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)x.$$

Приравнивая в этих соотношениях коэффициенты справа и слева при синусах одинакового аргумента, имеем $D_1 = 1$, $D_n = 0$ при $n \neq 1$;

$C_0 \dfrac{\pi}{2l} = 1$, $C_n = 0$ при $n \neq 0$.

Отсюда получаем решение в виде

$$u(x,t) = \frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}\cdot\sin\frac{\pi a t}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}\cdot\cos\frac{3\pi a t}{2l}. \blacktriangle$$

ЗАДАНИЕ 5.

5.1. Найти методом Фурье решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$u(0,t) = u_x'(l,t) = 0$, $u(x,0) = \sin\dfrac{5\pi x}{2l}$, $u_t'(x,0) = 0$.

5.2. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 2\cos 5x$.

5.3. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = \sin \frac{7\pi x}{2l}$, $u'_t(x,0) = 0$.

5.4. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 3 - \cos 4x$.

5.5. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = \sin \frac{3\pi x}{2l}$, $u'_t(x,0) = 0$.

5.6. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 5\cos 3x$.

5.7. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$u(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 3\sin \frac{4\pi x}{l}$, $u'_t(x,0) = 0$.

5.8. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 5 - 2\cos 2x$.

5.9. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \sin\frac{9\pi x}{2l}, u_t'(x,0) = 0$.

5.10. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u_x'(0,t) = u_x'(l,t) = 0, u(x,0) = 8\cos 7x$.

5.11. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = 7\sin\frac{6\pi x}{l}$.

5.12. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u_x'(0,t) = u_x'(l,t) = 0, u(x,0) = 1 - 4\cos 6x$.

5.13. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \sin\frac{11\pi x}{2l}, u_t'(x,0) = 0.$$

5.14. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u_x'(0,t) = u_x'(l,t) = 0, u(x,0) = 12\cos 5x$.

5.15. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{l}$.

5.16. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0\,, u(x,0) = 2\cos^2 x$.

5.17. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\,, u(x,0) = \sin\frac{13\pi x}{2l}\,,\ u'_t(x,0) = 0\,.$$

5.18. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0\,, u(x,0) = 3\cos 3x$.

5.19. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0\,, u(x,0) = -5\sin\frac{4\pi x}{l}$.

5.20. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0\,, u(x,0) = 1/3 - 4\cos 4x$.

5.21. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0\,, u(x,0) = \sin\frac{2\pi x}{l}\,,\ u'_t(x,0) = 0$.

5.22. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0\,, u(x,0) = 9\cos 7x$.

5.23. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = 12\sin\frac{8\pi x}{l}$.

5.24. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = -1 + 2\cos 4x$.

5.25. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \sin\frac{13\pi x}{2l}, u'_t(x,0) = 0$.

5.26. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 13\cos x$.

5.27. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = -\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi x}{l}$.

5.28. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0, u(x,0) = 9 - 3\cos 3x$.

5.29. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l,\ t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = -\sin\frac{5\pi x}{2l}, u'_t(x,0) = 0.$$

5.30. Найти методом Фурье решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям: $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = 10\cos 9x$.

§ 5. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

то ее интеграл Фурье имеет вид

$$\int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \quad (1)$$

где введены обозначения

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \quad (2)$$

Интеграл Фурье (1) равен $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$.

В случае, когда функция $f(x)$ четная, коэффициенты (2) имеют вид

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \quad b(\lambda) = 0. \quad (3)$$

В случае нечетной функции $f(x)$:

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt. \quad (4)$$

Определение. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ будем называть функцию $g(\lambda) = F[f(x)]$, определенную формулой

$$g(\lambda) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx. \ (5)$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \ (6)$$

В зависимости от того, является ли $f(x)$ четной или нечетной, ее преобразование Фурье записывается в различной форме.

1) $f(x)$ – четная, тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx.$$

Этот интеграл известен как косинус-преобразование Фурье.

2) $f(x)$ – нечетная, тогда

$g(\lambda) = 2i\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$ – синус-преобразование Фурье.

Свойства преобразования Фурье

I. Преобразование Фурье $F[f(x)]$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ есть ограниченная непрерывная функция, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

II. Если $f^{(k-1)}(x)$ непрерывна на каждом конечном интервале и $f,\ldots,f^{(k)} \in L_1(-\infty;\infty)$, то

$$F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)]. \ (7)$$

III. Если функции $f(x)$, $xf(x), \ldots, x^k f(x)$ абсолютно интегрируемы, то $\frac{d^k}{d\lambda^k}F[f(x)] = F[(-ix)^k f(x)]$. (8)

Решение типовых задач и упражнений

<u>Пример 1.</u> Представить интегралом Фурье следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}2-|x|, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Решение.

Так как функция $f(x)$ – четная, то

$$b(\lambda)=0, \qquad a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2}(2-t)\cos\lambda t dt.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2-t}{\lambda}\bigg|_0^2+\frac{1}{\lambda}\int_0^2\sin\lambda t dt\right]=\frac{-2}{\pi\lambda^2}\cos\lambda t\Big|_0^2=$$
$$=-\frac{2}{\pi\lambda^2}(\cos 2\lambda-1)=\frac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}.$$

Интеграл Фурье примет вид:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos 2\lambda)}{\pi\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda.$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2}\frac{1-\cos 2\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda$. ▲

<u>Пример 2.</u> Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

Решение.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}e^{-i\lambda x}dx.$$

При вычислении интеграла нам понадобится лемма Жордана:

Если $f(z)$ в верхней полуплоскости и на вещественной оси удовлетворяет условию: $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$ и $m>0$, то при

$R \to +\infty$ $\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz \to 0$, где C_R есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом R, находящаяся в верхней полуплоскости.

Тогда $\lambda = -|\lambda|$ (т.е. должно быть отрицательным) и

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{C_R \to 0} = \oint\limits_C \frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+2}dz,$$

где C – замкнутый контур в верхней полуплоскости.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка $z_0 = -1-i$. Тогда

$$g(\lambda) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z}\left[\frac{e^{i|\lambda|z}}{z^2+2z+z}\right] = 2\pi i \frac{e^{i|\lambda|z}}{2z+2}\bigg|_{z=-1+i} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i|\lambda|(-1+i)}}{-2+2i+2} = \pi e^{-i|\lambda|-|\lambda|} = \pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Ответ: $\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

<u>Пример 3.</u> Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-1}^{1} e^{2x}e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-1}^{1} e^{(2-i\lambda)x}dx =$$

$$= \frac{1}{2-i\lambda}e^{(2-i\lambda)x}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2-i\lambda}\left(e^{2-i\lambda} - e^{-(2-i\lambda)}\right) = \frac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}.$$

Ответ: $\dfrac{2\,\mathrm{sh}(2-i\lambda)}{2-i\lambda}$. ▲

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right).$$

Решение.

По свойству II

$$F\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)\right]=i\lambda F\left[\frac{1}{x^2+2x+2}\right]=i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}.$$

Здесь был использован результат примера 2: $F\left[\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right]=\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$.

Ответ: $i\lambda\pi e^{-|\lambda|(1+i)}$. ▲

ЗАДАНИЕ 6.

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье:

6.1. $f(x)=\begin{cases}2x, & -2\le x\le 0,\\ 0, & x<-2,\ x>0.\end{cases}$

6.2. $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$

6.3. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.4. $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

6.5. $f(x)=\begin{cases}3x, & -3\le x\le 0,\\ 0, & x<-3,\ x>0.\end{cases}$

6.6. $f(x)=\begin{cases}4-2|x|, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

6.7. $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

6.8. $f(x)=\begin{cases}3x^2, & |x|\le 1/2,\\ 0, & |x|>1/2.\end{cases}$

6.9. $f(x)=\begin{cases}5x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<-2,\ x>0.\end{cases}$

6.10. $f(x)=\begin{cases}5-3|x|, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

6.11. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.12. $f(x)=\begin{cases}1+|x|, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

6.13. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -1\le x\le 0,\\ 0, & x<-1,\ x>0.\end{cases}$

6.14. $f(x)=\begin{cases}4+2|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

6.15. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

6.16. $f(x)=\begin{cases}3x^2+1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

6.17. $f(x)=\begin{cases}2x-5, & -2\le x\le 0,\\ 0, & x<-2,\, x>0.\end{cases}$

6.18. $f(x)=\begin{cases}5+7|x|, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$

6.19. $f(x)=\begin{cases}\sin 3x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.20. $f(x)=\begin{cases}|x|+x^2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

6.21. $f(x)=\begin{cases}3x-1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0,\, x>1.\end{cases}$

6.22. $f(x)=\begin{cases}4+|x|, & |x|\le 6,\\ 0, & |x|>6.\end{cases}$

6.23. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{3x}{2}, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

6.24. $f(x)=\begin{cases}3x^2-6, & |x|\le 1/2,\\ 0, & |x|>1/2.\end{cases}$

6.25. $f(x)=\begin{cases}5-x, & 0\le x\le 5,\\ 0, & x<0,\, x>5.\end{cases}$

6.26. $f(x)=\begin{cases}1-2|x|, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

6.27. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

6.28. $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

6.29. $f(x)=\begin{cases}x-3, & -6\le x\le 0,\\ 0, & x<-6,\, x>0.\end{cases}$

6.30. $f(x)=\begin{cases}3-2|x|, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 7.

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$:

7.1. $f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

7.2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}.$

7.3. $f(x)=\begin{cases}e^{4x}, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

7.4. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right).$

7.5. $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

7.6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+4}.$

7.7. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$

7.8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$.

7.9. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+16}\right)$.

7.10. $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

7.11. $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

7.12. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

7.13. $f(x)=\begin{cases} e^{6x}, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$

7.14. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+9}\right)$.

7.15. $f(x)=\begin{cases} 4x-3, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

7.16. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+81}$.

7.17. $f(x)=\begin{cases} xe^{2x}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

7.18. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$.

7.19. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right)$.

7.20. $f(x)=\begin{cases} x-5, & |x|\le 4,\\ 0, & |x|>4.\end{cases}$

7.21. $f(x)=\begin{cases} e^{4x}, & |x|\le 6,\\ 0, & |x|>6.\end{cases}$

7.22. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+17}$.

7.23. $f(x)=\begin{cases} xe^{4x}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

7.24. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x^2+16}\right)$.

7.25. $f(x)=\begin{cases} 4x+4, & -1\le x\le 0,\\ 4, & 0<x\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

7.26. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+10x+26}$.

7.27. $f(x)=\begin{cases} (x+1)e^{-2x}, & |x|\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

7.28. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$.

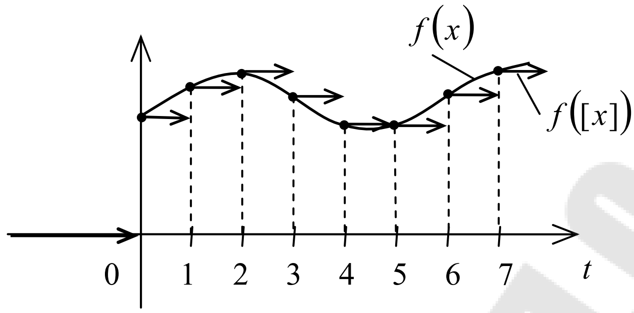
7.29. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2+25}\right)$.

7.30. $f(x)=\begin{cases} 3-x, & |x|\le 1/2,\\ 0, & |x|>1/2.\end{cases}$

§ 6. Дискретное преобразование Лапласа и z-преобразование

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента *f*, определенного для $t\ge 0$.

Рассмотрим числовую последовательность $a_n=f(n)$ ($n=1,2,...$), которую будем называть *решетчатой (ступенчатой) функцией*. При этом функция $f(t)$ называется *порождающей функцией*. Аргумент решетчатой функции принимает только целые значения, причем при $n<0$ $f(n)\equiv 0$, и её график имеет вид



<u>Определение.</u> Дискретным преобразованием Лапласа (изображением) решетчатой функции f_n называется комплекснозначная функция $D\{f_n\}$ комплексного переменного *p*, которая определяется как

$$D\{f_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-np}f_n\,. \quad (1)$$

Выполним замену $z=e^p$. Тогда ряд (1) примет вид

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^{-n}\equiv z\{f_n\}. \quad (2)$$

Такой переход от функции $f(n)$ к функции $F^*(z)$ по формуле (2) называется <u>z-преобразованием</u> и обозначается

$$f_n \doteq F^*(z). \quad (3)$$

<u>Таблица соответствия для z-преобразований</u>

№	f_n	$F^*(z)$
1.	1	$\frac{z}{z-1}$
2.	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$
3.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$

4.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
6.	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$

Некоторые свойства z-преобразования

I. _Линейность._ Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$ и $g_n \risingdotseq G^*(z)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(n)+\beta g(n) \risingdotseq \alpha F^*(n)+\beta G^*(n).$$

II. _Теорема запаздывания_ (первая теорема смещения).

Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n-k} \risingdotseq z^{-k}F^*(z),\ k=1,2,...$$

III. _Теорема опережения_ (вторая теорема смещения).

Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то для любого целого $k>0$ справедливо преобразование

$$f_{n+k} \risingdotseq z^k\left[F^*(z)-\sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right].$$

IV. _Изображение суммы._ Если $f_n \risingdotseq F^*(z)$, то $\sum_{m=0}^{n-1} f_m \risingdotseq \frac{1}{z-1}F^*(z)$.

Для того, чтобы по известному изображению $F^*(z)$ найти оригинал f_n можно:

1) воспользоваться таблицей, после разбиения дроби $F^*(z)$ на сумму простейших дробей;

2) в случае, когда $F^*(z)$ есть правильная рациональная дробь относительно z, функцию f_n можно найти по формуле

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(F^*(z) z^{n-1}\right),$$

где сумма берется по всем полюсам функции $F^*(z)$.

Решение разностных уравнений

Разностью первого порядка решетчатой функции f_n называется величина, обозначаемая как Δf_n, и равная $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$.

Разностью второго порядка $\Delta^2 f_n$ называется величина, определяемая как $\Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n$.

Разностью k-го порядка $\Delta^k f_n$ называется величина

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

$$\Delta^k f_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m f_{n+k-m}, \quad \text{где} \quad C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

<u>ТЕОРЕМА</u> (о z-преобразовании разности). Пусть $f_n \doteq F^*(z)$. Тогда z-преобразование разностей равны

$$\Delta f_n = f_{n+1} \doteq (z-1)F^*(z) - zf_0,$$

$$\Delta^k f_n = f_{n+k} \doteq (z-1)^k F^*(z) - z\sum_{m=0}^{k-1} (z-1)^{k-m-1}\left(\Delta^m f_0\right).$$

<u>Определение.</u> Уравнение вида

$$F\left(n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)\right) = 0$$

или

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+k}) = 0,$$

где $f(n) \equiv f_n$ – решетчатая функция, называется разностным уравнением k-го порядка.

<u>*Замечание.*</u> Далее в задачах для решетчатой функции будет использоваться обозначение x_n ($f_n \equiv x_n$).

Рассмотрим процедуру решения линейного неоднородного разностного уравнения:

$$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \ldots + a_k x_n = \varphi(n).$$

1) Применяем к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа

$$x_n \doteq X^*(z), \qquad \varphi(n) \doteq \Phi^*(z)$$

и, учитывая, что

$$x_{n+1} \doteq z\left(X^*(z) - x_0\right) - z,$$

$$x_{n+2} \doteq z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

получим линейное алгебраическое уравнение относительно изображения $X^*(z)$.

2) Разрешив полученное уравнение относительно $X^*(z)$, возвращаемся назад к оригиналу – последовательности. Общее решение будет содержать неопределенные константы $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$, которые фиксируются, исходя из начальных условий.

Решение типовых задач и упражнений

<u>Пример 1.</u> Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = e^{\alpha n}$.

Решение.

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\alpha} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{e^{\alpha}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}} \quad \text{при} \quad |z| > e^{\operatorname{Re}\alpha}. \ \blacktriangle$$

<u>Пример 2.</u> Пользуясь определением, найти изображение $F^*(z)$ для функции $f_n = \sin n$.

Решение.

$$\sin n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{zi}; \quad e^{in} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{i})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{i}} = \frac{z}{z - e^{i}}; \quad e^{-in} \doteq \frac{z}{z - e^{-i}}.$$

Тогда

$$\sin n \doteq \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i}} - \frac{z}{z - e^{-i}}\right] = \frac{z}{2i} \cdot \frac{e^{i} - e^{-i}}{\left(z - e^{i}\right)\left(z - e^{-i}\right)} = \frac{z \sin 1}{z^2 + 2z\cos 1 + 1}. \ \blacktriangle$$

Пример 3. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \stackrel{\bullet}{-} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \stackrel{\bullet}{-} z\left(X^*(z) - x_0\right) = z\left(X^*(z) - 1\right) = zX^*(z) - z\,,$$

$$x_{n+2} \stackrel{\bullet}{-} z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right) = z^2 X^*(z) - z^2 + z\,.$$

Применяя к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$z^2 X^*(z) - z^2 + z - 6zX^*(z) + 6z + 9X^*(z) = 0\,,$$

откуда

$$(z-3)^2 X^*(z) - z^2 + 7z = 0\,.$$

Выразим функцию $X^*(z)$:

$$X^*(z) = \frac{z(z-3) - 4z}{(z-3)^2} = \frac{z}{z-3} - 4 \cdot \frac{z}{(z-3)^2}\,.$$

Так как $\dfrac{z}{z-3} \stackrel{\bullet}{-} 3^n$, $\quad \dfrac{z}{(z-3)^2} \stackrel{\bullet}{-} n3^n$;

то $\qquad x_n = 3^n - 4n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n)\,.$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(X^*(z) z^{n-1}\right) = \underset{z=3}{res}\left(\frac{z^2 - 7z}{(z-3)^2} z^{n-1}\right) = \lim_{z \to 3} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1} - 7z^n}{(z-3)^2}(z-3)^2\right) =$$

$$\lim_{z \to 3}\left((n+1)z^n - 7nz^{n-1}\right) = n3^n + 3^n - 7n3^{n-1} = 3^{n-1}(3-4n)\,.$$

Ответ: $x_n = 3^{n-1}(3-4n)$. ▲

Пример 4. С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 5^n\,,\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Решение.

Способ 1. Пусть $x_n \stackrel{\bullet}{-\!\!-} X^*(z)$, тогда

$$x_{n+1} \stackrel{\bullet}{-\!\!-} z\left(X^*(z) - x_0\right), \qquad x_{n+2} \stackrel{\bullet}{-\!\!-} z^2\left(X^*(z) - x_0 - x_1 z^{-1}\right), \quad 5^n \stackrel{\bullet}{-\!\!-} \frac{z}{z-5}.$$

Имеем

$$z^2 X^*(z) - z - 4zX^*(z) + 4X^*(z) = \frac{z}{z-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (z-2)^2 X^*(z) - z = \frac{z}{z-5} \qquad \Rightarrow X^*(z) = \frac{z^2 - 4z}{(z-5)(z-2)^2}.$$

Разложим функцию $X^*(z)$ на слагаемые следующим образом

$$\frac{z^2-4z}{(z-5)(z-2)^2} = z \cdot \frac{z-4}{(z-5)(z-2)^2} = \frac{1}{9}\frac{z}{z-5} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-2} + \frac{2}{3}\frac{z}{(z-2)^2}.$$

Так как $\dfrac{z}{z-2} \stackrel{\bullet}{-\!\!-} 2^n$, $\dfrac{z}{(z-2)^2} \stackrel{\bullet}{-\!\!-} n \cdot 2^{n-1}$, $\dfrac{z}{z-5} \stackrel{\bullet}{-\!\!-} 5^n$, то

$$x_n = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Способ 2. Используем для определения функции x_n формулу

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \underset{z_i}{res}\left(X^*(z) z^{n-1}\right) = \underset{z=2}{res}\left(\frac{z^{n+1} - 4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) + \underset{z=5}{res}\left(\frac{z^{n+1} - 4z^n}{(z-5)(z-2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{n+1} - 4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-2)^2\right) + \lim_{z\to 5}\left(\frac{z^{n+1} - 4z^n}{(z-5)(z-2)^2}(z-5)\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{((n+1)z^n - 4nz^{n-1})(z-5) - \left(z^{n+1} - 4z^n\right)}{(z-5)^2} + \frac{5^{n+1} - 4\cdot 5^n}{9} =$$

$$= \frac{((n+1)2^n - 4n2^{n-1})(-3) - \left(2^{n+1} - 4\cdot 2^n\right)}{9} + \frac{5^n}{9} = \frac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \frac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ: $x_n = \dfrac{1}{9}\left(5^n - 2^n\right) + \dfrac{2}{3} n \cdot 2^{n-1}$.▲

ЗАДАНИЕ 8.

С помощью дискретного преобразования Лапласа решить линейное разностное уравнение

8.1. $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=5^n$, $x_0=1$, $x_1=-1$.

8.2. $x_{n+2}-8x_{n+1}+16x_n=2^n$, $x_0=1$, $x_1=1$.

8.3. $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=4^n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.4. $x_{n+2}-6x_{n+1}+5x_n=3^n$, $x_0=1$, $x_1=1$.

8.5. $x_{n+2}+4x_{n+1}+3x_n=n$, $x_0=1$, $x_1=1$.

8.6. $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=8^n$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.7. $x_{n+2}-2x_{n+1}=5^n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.8. $x_{n+2}-6x_{n+1}+5x_n=(-1)^n$, $x_0=0$, $x_1=-1$.

8.9. $x_{n+2}-4x_n=5^n$, $x_0=-1$, $x_1=2$.

8.10. $x_{n+2}+8x_{n+1}+16x_n=3$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.11. $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=6^n$, $x_0=0$, $x_1=0$.

8.12. $x_{n+2}+x_n=(-1)^n$, $x_0=1$, $x_1=1$.

8.13. $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=n$, $x_0=0$, $x_1=0$.

8.14. $x_{n+2}-6x_{n+1}+8x_n=2$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.15. $x_{n+2}-3x_{n+1}=(-1)^n$, $x_0=-1$, $x_1=0$.

8.16. $x_{n+2}-9x_n=2n$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.17. $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$, $x_0=2$, $x_1=-2$.

8.18. $x_{n+2}+4x_{n+1}-5x_n=(-1)^n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.19. $x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=n$, $x_0=0$, $x_1=0$.

8.20. $x_{n+2}+6x_{n+1}-7x_n=3^n$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.21. $x_{n+2}-4x_n=n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.22. $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=n$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.23. $x_{n+2}-4x_{n+1}=2^n$, $x_0=-1$, $x_1=0$.

8.24. $x_{n+2}-6x_{n+1}+5x_n=1$, $x_0=0$, $x_1=1$.

8.25. $x_{n+2}-16x_n=(-1)^n$, $x_0=0$, $x_1=0$.

8.26. $x_{n+2}-8x_{n+1}+16x_n=n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.27. $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=3^n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.28. $x_{n+2}-x_n=n$, $x_0=1$, $x_1=0$.

8.29. $x_{n+2}-4x_{n+1}=n$, $x_0=-1$, $x_1=1$.

8.30. $x_{n+2}+5x_{n+1}-6x_n=(-1)^n$, $x_0=0$, $x_1=1$.

§ 7. Вариационное исчисление

<u>Определение.</u> Если каждой функции $y(x)$ из некоторого множества поставлено в соответствие некоторое число J, то говорят, что на этом множестве задан <u>функционал</u> $J(y) = J[y]$.

Приведем примеры функционалов.

1. Длина плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

2. Стоимость проезда по дорогам, имеющим вид кривых, соединяющих пункты A и B.

Основная задача вариационного исчисления – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается, например:

1. Из всех кривых плоскости, соединяющих точки A и B, найти ту, которая имеет наименьшую длину.
2. Из всех линий найти ту, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает под действием силы тяжести из точки A в точку B (задача о брахистохроне).

Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \ (1)$$

где $F(x, y, y')$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Граничные точки допустимых кривых будем считать закрепленными:

$$y(a) = A, \ y(b) = B. \ (2)$$

Простейшая задача вариационного исчисления ставится так: среди всех функций $y(x)$ ($y(x) \in C^2[a;b]$) и удовлетворяющих условиям (2), найти ту, которая доставляет экстремум функционалу (1). Эта кривая удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \quad (3)$$

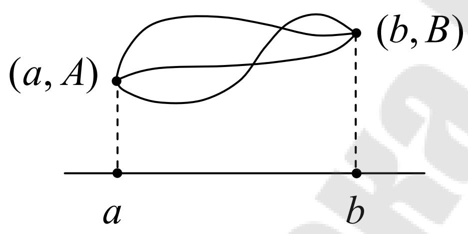
(Здесь $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$; $F_{y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$).

Решения (интегральные кривые) уравнения Эйлера называются экстремалями.

Итак, граничная задача, которой должна удовлетворять функция $y(x)$, доставляющая экстремум функционалу (1) с граничными условиями (2) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{cases} \quad (4)$$

Данная краевая задача может иметь единственное решение, может иметь множество решений или не иметь ни одного.



Частные случаи уравнения Эйлера.

1. F не зависит от y': $F = F(x, y)$.

Уравнение Эйлера (3) в этом случае принимает вид:

$$F_y(x, y) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является алгебраическим и определяет одну или конечное число кривых, которые могут и не удовлетворять граничным условиям.

2. F зависит лишь от y': $F = F(y)$.

В этом случае экстремалями является семейство прямых линий

$$y = C_1 x + C_2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (2).

Решение типовых задач и упражнений

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$J(y)=\int_1^0 (y'^2+2yy'+y^2)dx\,,\quad y(1)=1\,,\quad y(2)=0\,.$$

Решение.

$$F(x,y,y')=y'^2+2yy'+y^2.$$

Найдем частные производные функции $F(x,y,y')$:

$$F_y=2y'+2y\,,\ F_{y'}=2y'+2y\,.$$

Уравнение Эйлера примет вид

$$2y'+2y-\frac{d}{dx}(2y'+2y)=0\,,$$

т.е.

$$2y'+2y-2y''-2y'=0 \quad \text{или} \quad y''-y=0\,.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}\,.$$

Определим константы C_1 и C_2 исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1)=C_1e+C_2e^{-1}, \\ y(2)=C_1e^2+C_2e^{-2}=0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_1=-\frac{1e^{-2}}{2\,\mathrm{sh}\,1};\ C_2=-\frac{1e^{2}}{2\,\mathrm{sh}\,1}.$$

Тогда

$$y(x)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(-e^{-2+x}+e^{2-x}\right)=\frac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$$ – единственная экстремаль.

Ответ: $y(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(2-x)}{\mathrm{sh}\,1}$. ▲

Пример 2. Найти все экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$J[y]=\int_0^{\pi/2}(y^2+y'^2-2y\sin x)dx\,;\quad y(0)=0\,;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

Решение.

Экстремали функционала $J[y]$ являются интегральными кривыми уравнения Эйлера. Находим производные:

$$F_y=2y-2\sin x\,,\quad F_{y'}=2y'\,,\quad \frac{d}{dx}F_{y'}=2y''.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y''-y=-\sin x\,.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общим решением является функция

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x\,.$$

Используя граничные условия, находим:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Откуда $C_1\left(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}\right)=2$ или $C_1=\dfrac{2}{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}=\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}$, $C_2=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}$.

Следовательно, экстремали данного функционала имеют вид:

$$y=\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin x\,.$$

Ответ: $y(x)=\dfrac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}\sin x$. ▲

ЗАДАНИЕ 9.

Найти все экстремали функционала $J[y]$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

9.1. $J[y]=\int_0^{\pi}(y^2+y'^2-6y\sin x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=2$.

9.2. $J[y]=\int_0^{1}(4y^2+y'^2-ye^{4x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.3. $J[y]=\int_0^{\pi}(2y^2+y'^2-4y\cos x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=1$.

9.4. $J[y]=\int_0^{1}(y^2-y'^2-ye^{2x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.5. $J[y]=\int_0^{\pi/2}(8y^2+4y'^2-2y\sin 2x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=1$.

9.6. $J[y]=\int_0^{1}(6y^2+4y'^2-ye^{8x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.7. $J[y]=\int_0^{\pi}(2y^2+y'^2-y\cos 2x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=2$.

9.8. $J[y]=\int_0^{1}(2y^2-y'^2-4ye^{5x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.9. $J[y]=\int_0^{2\pi}(y'^2-y^2)dx$; $y(0)=1$; $y(2\pi)=1$.

9.10. $J[y]=\int_0^{1}(4y^2+y'^2-12ye^{3x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.11. $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y^2+y'^2+2y\cos x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=-1$.

9.12. $J[y]=\int_0^{1}(y^2-9y'^2-ye^{-2x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.13. $J[y]=\int_0^{\pi/2}(y^2+4y'^2-y\sin 4x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=1$.

9.14. $J[y]=\int_0^{1}(4y^2+y'^2-ye^{8x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.15. $J[y]=\int\limits_0^{\pi}(2y^2+2y'^2-y\cos 4x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=2$.

9.16. $J[y]=\int\limits_0^{1}(y'^2-y^2-y)e^{2x}dx$; $y(0)=0$; $y(1)=e^{-1}$.

9.17. $J[y]=\int\limits_0^{\pi/8}(y^2+2yy'-16y^2)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/8)=1$.

9.18. $J[y]=\int\limits_0^{1}(xy'+y'^2)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=2$.

9.19. $J[y]=\int\limits_0^{\pi}(2y^2+y'^2-4y\cos x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=1$.

9.20. $J[y]=\int\limits_0^{1}(y^2+y'^2+2ye^x)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.21. $J[y]=\int\limits_0^{\pi/2}(y^2-y'^2-2y\sin x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=1$.

9.22. $J[y]=\int\limits_0^{1}(y^2+4y'^2-3ye^{8x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.23. $J[y]=\int\limits_0^{\pi}(y^2+y'^2-5y\cos 3x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=2$.

9.24. $J[y]=\int\limits_0^{1}(12xy-y'^2)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.25. $J[y]=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2-12y\sin 4x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=2$.

9.26. $J[y]=\int\limits_0^{1}(2yy'+y'^2+y^2)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.27. $J[y]=\int\limits_0^{\pi}(-y^2+y'^2+4y\cos 3x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi)=1$.

9.28. $J[y]=\int\limits_0^{1}(y^2-y'^2-ye^{2x})dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

9.29. $J[y]=\int\limits_0^{\pi/2}(y^2+4y'^2-2y\sin 3x)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=1$.

9.30. $J[y]=\int\limits_0^{1}(6y^2+4y'^2-y)e^{8x}dx$; $y(0)=0$; $y(1)=1$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

по дисциплине

«Современные математические методы и функции»

1. Множество. Элементы множества. Способы задания множеств. Универсальное множество. Пустое множество. Равенство множеств.
2. Операции над множествами, их свойства. Принцип двойственности.
3. Понятие отображения. Образы и прообразы. Типы отображений. Отображения объединения и пересечения множеств. Биекция.
4. Понятие мощности множеств. Счетные множества, их свойства. Несчетные множества. Множества мощности континуум. Терема Кантора-Бернштейна. Континуум – гипотеза.
5. Метрика и метрические пространства. Примеры метрических пространств. Неравенства Коши- Буняковского, Гельдера, Минковского, Шварца.
6. Непрерывность отображений в метрических пространствах. Гомеоморфные отображения. Изоморфизм.
7. Открытые и замкнутые шары в метрических пространствах. Понятие ε-окрестности, их примеры. Ограниченные множества.
8. Точки прикосновения множества. Замыкание множества. Свойства операции замыкания. Предельные и изолированные точки.
9. Открытые и замкнутые множества, их определения и свойства. Плотные подмножества. Сепарабельные пространства, их примеры.
10. Сходимость в метрических пространствах. Понятие предела. Свойства пределов и сходящихся последовательностей. Непрерывность отображений в терминах сходящихся последовательностей.
11. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства, их примеры. Критерий полноты метрических пространств. Пополнение метрических пространств. Теорема Хаусдорфа.
12. Сжимающиеся отображения. Неподвижные точки. Принцип сжимающихся отображений Пикара-Банаха.
13. Понятие компактных множеств. Компактность в метрических пространствах. Понятие ε-сети. Критерий компактности Хаусдорфа.
14. Линейные пространства. Линейная независимость в линейных пространствах. Размерность линейных пространств. Базис в линейных конечномерных пространствах.
15. Линейные подпространства. Линейная оболочка множества векторов. Векторная сумма подпространств. Прямая сумма. Прямое произведение.
16. Понятие нормы. Нормированные пространства. Метрика в нормированных пространствах. Примеры нормированных пространств.
17. Банаховы пространства. Свойства банаховых пространств. Примеры банаховых пространств. Проблема базиса в банаховых пространствах.
18. Скалярное произведение в линейных пространствах. Евклидовы (предгильбертовы) пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Норма в евклидовых пространствах. Примеры евклидовых пространств. Неравенство параллелограмма.

19. Ортогональность в евклидовых пространствах. Свойства ортогональных систем. Ортогональное дополнение. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта.
20. Гильбертовы пространства. Примеры гильбертовых пространств. Свойства гильбертовых пространств (теорема о ближайшем элементе, теорема о проекции).
21. Полные и ортонормированные множества в гильбертовых пространствах, их свойства. Обобщенный ряд Фурье. Ортонормированный базис в сепарабельных гильбертовых пространствах.
22. Тригонометрическая система функций, ее свойства. Ряд Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.
23. Многочлены Лежандра, их свойства. Формула Родрига для многочленов Лежандра. Разложение функций по многочленам Лежандра. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.
24. Многочлены Чебышева, их свойства. Ряд Фурье-Чебышева. Рекуррентные соотношения.
25. Многочлены Эрмита, функции Эрмита. Формула Родрига для многочленов Эрмита. Ряд Фурье-Эрмита. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.
26. Многочлены Лагерра, функции Лагерра. Формула Родрига для многочленов Лагерра. Ряд Фурье – Лагерра. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.
27. Понятия оператора. Функционал. Линейные операторы. Ограниченные операторы. Норма линейного оператора. Непрерывные операторы. Операторы в конечномерных пространствах.
28. Обратный оператор, его свойства (условие обратимости оператора, свойства обратимых ограниченных операторов). Ряд Неймана, его существование.
29. Собственные значения и собственные векторы (функции) операторов. Понятия резольвенты, регулярных точек и спектра оператора. Точечный и непрерывный спектр. Спектр операторов в конечномерных пространствах.
30. Сопряженные операторы, их свойства.
31. Самосопряженные операторы, их свойства. Эрмитовы матрицы.
32. Унитарные операторы, их свойства.
33. Спектр самосопряженных и унитарных операторов. Теорема Гильберта-Шмидта. Спектральная теорема для самосопряженных компактных операторов.
34. Линейные дифференциальные операторы, их область определения. Типы граничных условий.
35. Сопряженный дифференциальный оператор. Условие самосопряженности.
36. Задача Штурма-Лиувилля. Задача Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями. Оператор Штурма – Лиувилля, его свойства.
37. Задачи Штурма – Лиувилля для ортогональных многочленов. ДУ Лежандра. Присоединенное ДУ Лежандра. ДУ Чебышева.
38. Задачи Штурма – Лиувилля для ортогональных многочленов. ДУ Лагерра. Присоединенное ДУ Лагерра. ДУ Эрмита.
39. Основные уравнения математической физики.

40. Метод разделения переменных для уравнений математической физики. Его применение к уравнению колебаний струны.
41. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя, их свойства. Ряд Фурье-Бесселя.
42. Сходимость ряда Фурье. Условие Дини. Формула Фурье, условие ее существования. Формула Фурье в комплексной форме.
43. Преобразование Фурье, его свойства.
44. Применение преобразования Фурье к уравнению теплопроводности.
45. Решетчатые функции. Дискретное преобразование Лапласа. Z-преобразование. Условия существования Z-преобразования.
46. Формулы обращения Z-преобразования.
47. Свойства Z-преобразования.
48. Разности k-го порядка, их представление через значения решетчатой функции. Z - преобразование разностей.
49. Разностные и рекуррентные уравнения. Приложение Z-преобразования для решения разностных и рекуррентных уравнений.
50. Основные задачи вариационного исчисления.
51. Функционал. Дифференцирование функционалов по Фреше и по Гато. Вариация функционала.
52. Понятие экстремума функционала. Сильные и слабые экстремумы. Необходимое условие экстремума.
53. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Экстремали.
54. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера-Лагранжа.
55. Вариационная задача для вектор-функции.
56. Вариационная задача в параметрической форме.
57. Вариационная задача с подвижными границами.
58. Условие трансверсальности. Естественное граничное условие. Задача о навигации.
59. Вариационная задача на условный экстремум. Функция Лагранжа.
60. Изопериметрические задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Специальные математические методы и функции: учебно-методическое пособие по одноименной дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения./ А. А. Бабич, Л. Д. Корсун, А. В. Емелин. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 195 с.
2. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования/ Г. Деч. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
3. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учеб. пособие для втузов./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М.: Наука, 1981. – 302с.
4. Эксгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление./ Л. Э. Эксгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.
5. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов./ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко - М.: Наука, 1981.
6. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов.: Учебное пособие. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др./ под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – Москва : Наука, 1986. – Ч.2. Специальные разделы математического анализа. – 386 с.
7. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. : Учебное пособие/ Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др./ под. Ред. А.В. Ефимова. – Москва : Наука, 1990. – Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения – 304 с.
8. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями./ Л. Коллатц. – Москва: Наука, 1968. – 504 с.

Бабич Александр Антонович
Корсун Лидия Дмитриевна
Емелин Анатолий Владимирович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Методические указания к контрольным заданиям по одноименному курсу для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 10.10.11.

Рег. № 46Е.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by