УДК 537.8

РАСЧЕТ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОВОДЯЩИМИ ЗАРЯЖЕННЫМИ ШАРАМИ МЕТОДОМ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ

Д. В. Комнатный

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Задача расчета электростатического взаимодействия между двумя заряженными проводящими шарами имеет значительный теоретический и практический интерес. Известно решение этой задачи, в котором сила электростатического взаимодействия вычисляется на основании выражения для энергии электростатического поля, созданного шарами. Энергия отыскивается через потенциальные коэффициенты системы. Потенциальные коэффициенты, в свою очередь, выражаются через частичные емкости. При расчете силы требуется вычислить производные от потенциальных коэффициентов, для чего должны быть известны частичные емкости системы.

Собственная частичная емкость шара, которому присвоен номер 1, численно равна его заряду. Взаимная частичная емкость между шарами численно равна заряду шара с номером 2. Потенциал первого шара при этом равен 1 В, потенциал второго шара равен 0 В. Чтобы найти заряды шаров, требуется осуществить расчет электростатического поля в данной электродинамической системе. Для выполнения расчетов может быть применен метод теорем сложения, решение этим методом и является предметом данного доклада.

Для расчета потенциала электростатического поля в системе из двух шаров ставится задача математической физики:

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{в}\ D,\quad D \in R^3\left(\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2\right);$$

$$\varphi\Big|_{\Gamma_1} = 1,\ \varphi\Big|_{\Gamma_2} = 0;$$

$$\varphi = u_1 + u_2,$$

где φ – потенциал, В; D – область, занятая полем; D_1 – область шара 1; D_2 – область шара 2; Γ_1 – поверхность шара 1; Γ_2 – поверхность шара 2.

Решение задачи ищется в виде суперпозиции функций:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{R_{01}}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta_1).$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \left(\frac{R_{01}}{r_2} \right)^{m+1} P_m(\cos\theta_2),$$

где n, m – счетные переменные; p_n и q_m – неизвестные коэффициенты; R_{01} и R_{02} – радиусы шаров, м; r_1 и r_2 – расстояния в сферических системах координат, связанных с центрами шаров 1 и 2, м; θ_1 и θ_2 – угловая сферическая координата, рад; $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра.

С помощью теорем сложения для сферических функций, заданных в двух сферических системах координат, центры которых сдвинуты по вертикали на расстояние, равное расстоянию между центрами шаров a, функция u_1 выражена через r_2 и θ_2. Аналогично функция u_2 выражена через r_1 и θ_1. Подстановка этих функций в соответствующие граничные условия дает систему линейных алгебраических уравнений для p_n и q_m.

Анализ этой системы показывает, что коэффициенты p_n и q_m не зависят от сферических координат. Поэтому допустимо осуществить вычисление поверхностной плотности заряда обоих сфер по формулам:

$$\sigma_1 = -\varepsilon\varepsilon_0 \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r_1} \right|_{r_1 = R_{01}}; \;\; \sigma_2 = -\varepsilon\varepsilon_0 \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r_2} \right|_{r_2 = R_{02}},$$

где σ – поверхностная плотность электрического заряда, Кл/м^2; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная Ф/м.

Заряды шаров вычисляются по формулам:

$$q_1 = \int_S \sigma_1 dS_1; \;\; q_2 = \int_S \sigma_2 dS_2,$$

где q – электрический заряд, Кл; S – площадь поверхности шара, м^2.

Вычисления по приведенным формулам с учетом свойств полиномов Лежандра показывают, что заряды сфер, численно равные частичным емкостям, могут быть рассчитаны по формулам:

$$q_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 p_0 R_{01}; \;\; q_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 q_0 R_{02}.$$

Таким образом, для расчета частичных емкостей необходимо найти только коэффициенты p_0 и q_0. Для этого допустимо выразить q_m через p_0. Затем подставить q_m в первое уравнение системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов, найти p_0, а далее – вычислить q_0.

Достоинством метода теорем сложения по сравнению с известными методами отражений в сфере и решения уравнения Лапласа в бисферической системе координат является сравнительная простота расчетов. В методе отражений выполнение большого числа отражений в сфере трудоемко, громоздко и трудно контролируемо. Бисферическая система координат ненаглядна, полученное решение зависит от геометрических параметров сфер сложным образом.

Поэтому решение методом теорем сложения может успешно использоваться для расчетов частичных емкостей, потенциальных коэффициентов и силы электростатического взаимодействия в системе двух заряженных проводящих шаров.