

УДК 656.052.14

## **АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ПОКАЗАНИЙ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ, ГИРОСКОПОВ И БАЗОВЫХ СТАНЦИЙ СОТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ**

**Е. А. ИЛЬЮЩИЦ, Ю. В. КРЫШНЕВ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, триангуляция, навигация, определение координат, расчет акселерометра, расчет гироскопа.

### **Введение**

Оптимальный выбор акселерометра и гироскопа обычно выливается в сложную математическую задачу. Необходимо определить тип измеряемого параметра. При измерении вибраций измеряются вибрационные характеристики объекта. При измерении перемещения определяются скорость и смещение объекта, находящегося в движении. Немаловажным условием при выборе акселерометра является верхняя граница измеряемого им диапазона, которая должна быть больше, чем требуемый диапазон измеряемых ускорений.

На сегодняшний день оценки погрешностей при определении навигационных параметров с использованием бесплатформенных инерциальных систем берут за основу только систематические погрешности самих приборов (акселерометров или гироскопов) [16]–[19] либо приводятся сложные модели оценки [20]. В большинстве работ влияние случайной погрешности либо не рассматривается вовсе, либо учитывается только частично.

Цель статьи – оценка возможности позиционирования, используя инерциальные системы навигации, расчет погрешностей определения скорости и пройденного пути.

### **Инерциальная навигация**

Инерциальная навигация – метод определения координат и параметров движения различных объектов (судов, самолетов, ракет и др.) и управления их движением, основанный на свойствах инерции тел и являющийся автономным, т. е. не требующим наличия внешних ориентиров или поступающих извне сигналов [21].

Инерциальный метод навигации заключается в вычислении вектора навигационных параметров – координат и скорости подвижного объекта путем решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки, за которую обычно принимается центр масс подвижного объекта, под действием всех приложенных к объекту сил. Инерциальные системы навигации предназначены для автоматического и полуавтоматического управления и ведения к цели движущихся объектов. Основной особенностью таких систем является их полная автономность, т. е. независимость от наземных устройств. Оборудование инерциальной системы, установленное на подвижном объекте, позволяет вне связи с Землей и без ориентации по каким-либо другим небесным телам вести объект к цели, используя для этого исключительно законы движения Ньютона, действующие в инерциальном пространстве.

На рис. 1 изображен движущийся в одном направлении объект, с которым связана система координат  $XU$  в северном направлении в плоскости меридиана сферической Земли. На объекте размещены два акселерометра и один гироскоп, который является датчиком угловой скорости. На рис. 1 введена также географическая система координат ( $XOY$ ).

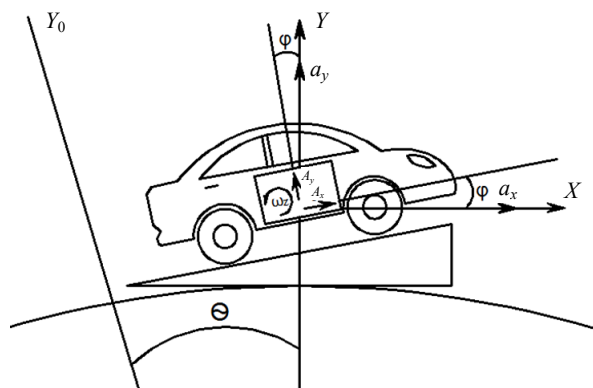


Рис. 1. Движущийся в одном направлении объект, с которым связана система координат  $XU$

$$n_{xg} = n_x \cos \varphi - n_y \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $n_{xg}$  – результирующее ускорение объекта вдоль направления движения;  $n_x, n_y$  – соответственно проекции на ось направления движения.

#### Математическая модель влияния погрешности на показания датчиков ускорения и угла наклона

На показания датчиков измерения ускорения и угла наклона (гироскопа) значительное влияние оказывают инструментальные погрешности [22], [23]. С учетом влияния инструментальных погрешностей, уравнения для определения ускорения и угла наклона запишутся в виде:

$$n_x = a_x \cos \varphi + (g + a_y) \sin \varphi; \quad (2)$$

$$n_y = -a_x \sin \varphi + (g + a_y) \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $a_x, a_y$  – составляющие ускорения объекта по оси  $OX$  и  $OY$  соответственно;  $g$  – ускорение нормальной силы тяжести;  $\varphi$  – угол наклона исследуемого объекта. Символом « $\delta$ » обозначим величины, содержащие погрешность.

$$\begin{aligned} \Delta n_{xg} &= n_{xg} - \delta n = a_x - (a_x \cos \varphi + (g + a_y) \sin \varphi) \cos \delta \varphi + \\ &+ (-a_x \sin \varphi + (g + a_y) \cos \varphi) \sin \delta \varphi = a_x - a_x \cos \varphi \cos(\delta \varphi) - (g + a_y) \sin \varphi \cos(\delta \varphi) - \\ &- a_x \sin \varphi \sin(\delta \varphi) + (g + a_y) \sin(\delta \varphi) \cos \varphi = \\ &= a_x - a_x \cos(\varphi - \varphi - \Delta \varphi) + (g + a_y) \sin(\varphi - \varphi - \Delta \varphi) = \\ &= a_x - a_x \cos \Delta \varphi + (g + a_y) \sin \Delta \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta \varphi = \varphi + \Delta \varphi$  – погрешность в измерении угла наклона.

Разложим в решении (4) множители, содержащие тригонометрические функции в степенной ряд Маклорена, и полагая  $g \gg a_y$ , получим приближенное равенство:

$$\Delta n_{xg} = a_x \frac{\Delta\varphi^2}{2} + g\Delta\varphi; \quad (5)$$

$$\delta\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\omega(t)t = \varphi_0 + \omega(t)t + \Delta\omega(t)t; \quad (6)$$

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\omega(t)t; \quad (7)$$

$$\Delta n_{xg} = ax \frac{(\Delta\omega t)^2}{2} + g\Delta\omega t; \quad (8)$$

$$\Delta V_{xg} = \Delta n_{xg} t; \quad (9)$$

$$\Delta X_{xg} = \frac{\Delta n_{xg} t^2}{2}. \quad (10)$$

Например, если систематическая погрешность гироскопа  $\Delta\omega = 5^\circ/\text{ч}$ , то погрешности скорости и расстояния за время работы 3 мин будут иметь следующие значения, представленные на рис. 2 и 3.

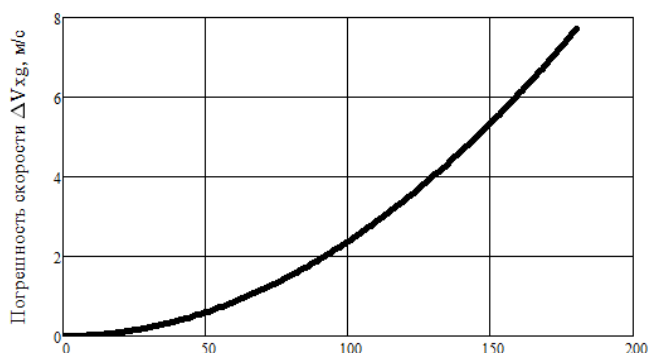


Рис. 2. Погрешность определения скорости  $\Delta V_{xg}$ , вносимая систематической погрешностью гироскопа

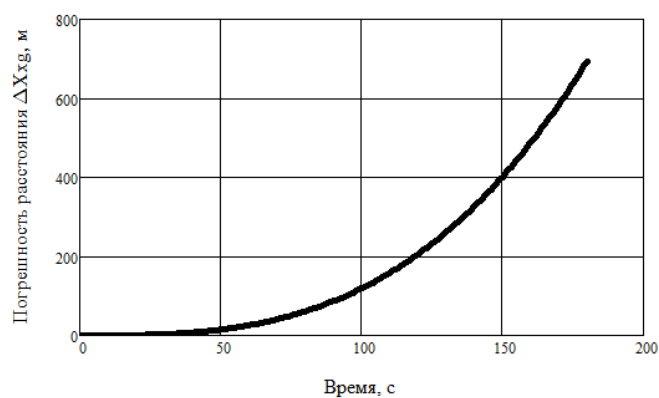


Рис. 3. Погрешность определения расстояния  $\Delta X_{xg}$ , вносимая систематической погрешностью гироскопа

Таким образом за время 3 мин (180 с) погрешности определения скорости и координаты будут следующие:

$$\Delta V_{xg} = \left[ 0,5 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{\left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} \cdot 180 \text{ с} \right)^2}{2} + 9,8 \text{ м/с}^2 \left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} 180 \text{ с} - \frac{\left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} 180 \text{ с} \right)^3}{6} \right) \right] 180 \text{ с} = 7,8 \text{ м/с};$$

$$\Delta X_{xg} = \left[ 0,5 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \frac{\left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} \cdot 180 \text{ с} \right)^2}{2} + 9,8 \text{ м/с}^2 \left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} 180 \text{ с} - \frac{\left( \frac{5^\circ/\text{с}}{3600} 180 \text{ с} \right)^3}{6} \right) \right] \frac{(180 \text{ с})^2}{2} = 707 \text{ м}.$$

Оценим влияние систематической погрешности акселерометра:

$$V_1 = V_0 + n_{xg1} \Delta t_1; \quad (11)$$

$$V_2 = V_1 + n_{xg2} \Delta t_2 = V_0 + n_{xg1} \Delta t_1 + n_{xg2} \Delta t_2; \quad (12)$$

$$V_i = V_{i-1} + n_{xgi} \Delta t_i = V_0 + n_{xg1} \Delta t_1 + n_{xg2} \Delta t_2 + \dots + n_{xgi} \Delta t_i. \quad (13)$$

Рассмотрим случай равномерного прямолинейного движения, тогда

$$V_i = V_{i-1} + n_{xgi} \Delta t_i = V_0 + i n_{xg} \Delta t = V_0 + n_{xg} t, \quad (14)$$

где  $i$  – количество отсчетов;  $\Delta t$  – интервал времени ускорения;  $t = i \Delta t$  – весь интервал времени, в течение которого производились измерения.

$$\Delta V(t) = \Delta n_{xg} t; \quad (15)$$

$$\Delta X(t) = \frac{\Delta n_{xg} t^2}{2}. \quad (16)$$

Систематическая погрешность обычно приводится в технической документации на датчик (datasheet). К примеру, акселерометры семейства Analog Devices имеют систематическую погрешность  $\Delta n_{xg}^{sys} = 0,005 g \approx 0,05 \text{ м/с}^2$ . Таким образом, за время, равное 3 мин, будут накоплены следующие величины ошибок:

$$\Delta V_{xg}^{sys} = 0,05 \cdot 180 = 9 \text{ м/с};$$

$$\Delta X_{xg}^{sys} = \frac{0,05 \cdot 180^2}{2} = 810 \text{ м}.$$

На рис. 4 и 5 изображены графики зависимости накопленных погрешностей скорости и расстояния от времени (12), (13).

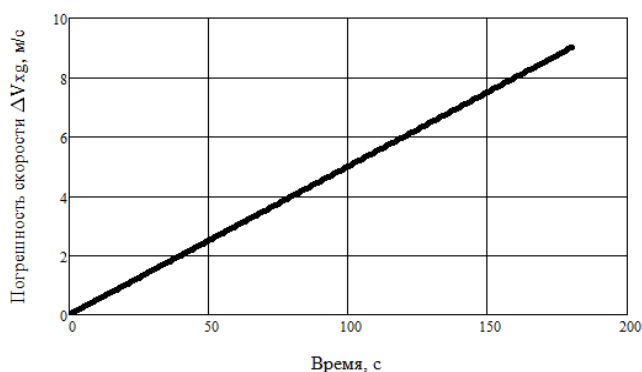


Рис. 4. Погрешность определения скорости  $\Delta V_{xg}^{sys}$ , вносимая систематической погрешностью акселерометра

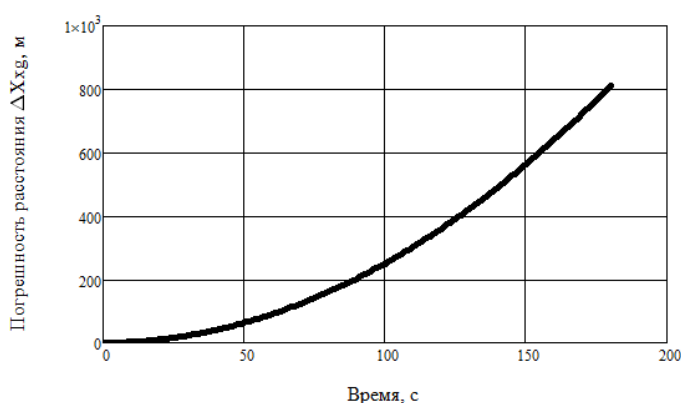


Рис. 5. Погрешность определения расстояния  $\Delta X_{xg}^{sys}$ , вносимая систематической погрешностью акселерометра

Рассмотрим случай, когда нужно выяснить, какой должна быть систематическая погрешность гироскопа, чтобы она удовлетворяла необходимым условиям. Допустим, требуется выяснить, какой должна быть систематическая погрешность гироскопа, чтобы погрешность в определении расстояния через 3 мин не превысила 500 м.

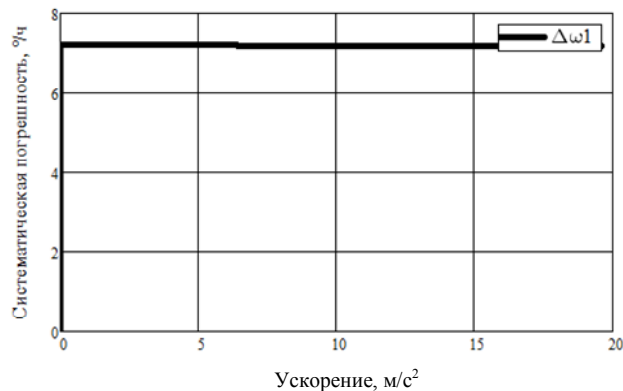
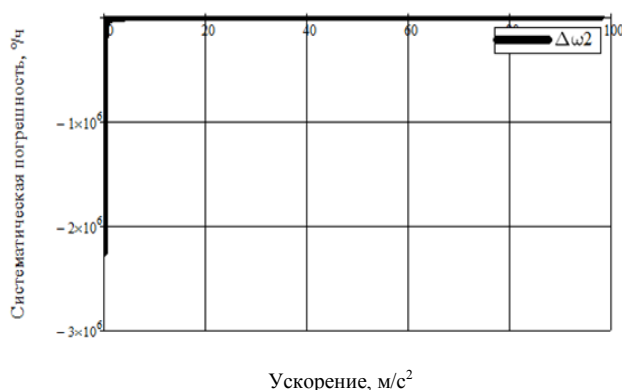
Подставляя (7) в (13), получим

$$\Delta X(t) = a_x \frac{\Delta\omega^2 t^4}{2} + \frac{g\Delta\omega t^3}{2}; \quad (17)$$

решая уравнение (14), получим

$$\Delta\omega(t)_{1,2} = \frac{-gt \pm 2\sqrt{\frac{g^2}{4}t^2 + a_x\Delta X}}{a_x t^2}. \quad (18)$$

Для оценки влияния ускорения  $a_x$ , с которым движется объект, на величину систематической погрешности гироскопа построим график зависимости (рис. 6, 7).

Рис. 6. Зависимость  $\Delta\omega(t)_1$  от ускорения  $a_x$ Рис. 7. Зависимость  $\Delta\omega(t)_2$  от ускорения  $a_x$ 

Исходя из графика, можно судить о том, что собственное ускорение объекта не вносит существенного влияния на погрешность, вносимую систематической погрешностью гироскопа. Следовательно, формула для определения уровня погрешности гироскопа примет вид:

$$\Delta X(t) = \frac{\Delta n_{xg} t^2}{2} = \frac{g \Delta \omega t^3}{2}. \quad (19)$$

Выразив  $\Delta\omega$  и подставив значения, получим

$$\Delta\omega(180) = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с} = 3,6^\circ/\text{ч}.$$

В итоге, если через 3 мин движения погрешность определения расстояния, вызванная наклоном объекта, не должна превышать 500 м, то систематическая погрешность гироскопа должна составлять  $3,6^\circ/\text{ч}$ . Как видно, даже при достаточно грубом допуске на погрешность определения расстояния необходима весьма высокая точность гироскопа. Таким образом, формулы для расчета погрешностей, вносимых систематической погрешностью гироскопа, примут вид:

$$\Delta n_{xg}(t) = g \Delta \omega t; \quad (20)$$

$$\Delta V_{xg}(t) = g \Delta \omega t^2; \quad (21)$$

$$\Delta X_{xg}(t) = \frac{g \Delta \omega t^3}{2}. \quad (22)$$

Для определения уровня погрешности гироскопа:

$$\Delta\omega(t) = \frac{\Delta X \cdot 2}{gt^3} \cdot \frac{180}{\pi} 3600 \text{ с.} \quad (23)$$

### Мультипликативная погрешность

Значения мультипликативных погрешностей изменяются пропорционально изменениям значений измеряемой величины. Значения мультипликативных погрешностей также пропорциональны чувствительности средства измерений. В технической документации обычно приводится значение мультипликативной погрешности в процентах. Будем считать ее случайной величиной с среднеквадратичным отклонением (СКО)  $\sigma_{\Delta k}^{\Delta\omega}$  и  $\sigma_{\Delta k}^{\Delta\omega}$ . Соотношения для погрешностей будут аналогичны рассмотренным выше.

Например, если погрешность коэффициента преобразования гироскопа  $\sigma_{gyro} = 0,03\%$ , то при угловой скорости изменения угла  $\Delta\omega = 10^\circ/\text{с}$  за время 3 мин будут накоплены следующие погрешности (рис. 8, 9):

$$\Delta V_{xg}(t) = g \frac{\sigma_{gyro}}{100} \Delta\omega \frac{\pi}{180} t^2; \quad (24)$$

$$\Delta X_{xg}(t) = \frac{g \frac{\sigma_{gyro}}{100} \Delta\omega \frac{\pi}{180} t^3}{2}. \quad (25)$$

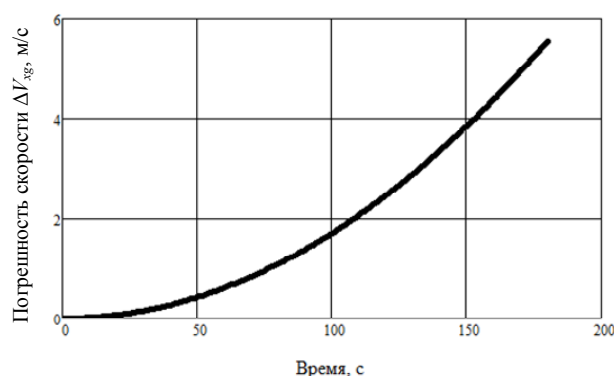


Рис. 8. Погрешность определения скорости  $\Delta V_{xg}$ , вызванная погрешностью коэффициента преобразования гироскопа

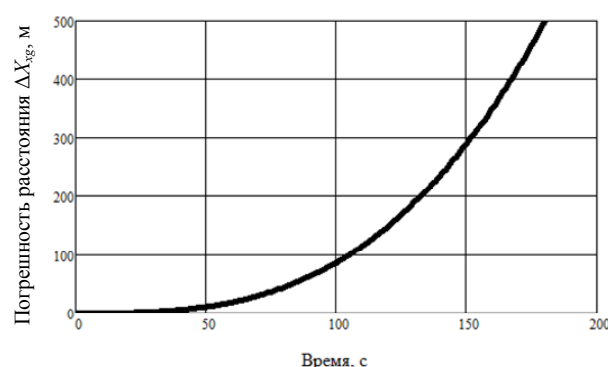


Рис. 9. Погрешность определения расстояния  $\Delta X_{xg}$ , вызванная погрешностью коэффициента преобразования гироскопа

Как можно видеть, нестабильность нуля в 0,03 % может привести к значительным погрешностям, которые будут определяться динамикой подвижного объекта. Оценим погрешности, вызванные мультипликативной погрешностью акселерометра со значением  $\sigma_{acc} = 0,01\%$  и ускорением  $1g$ , накопленные за 3 мин (рис. 10, 11):

$$\Delta V_{xg}(t) = \sigma_{acc} n_{xg} t; \quad (26)$$

$$\Delta X_{xg}(t) = \frac{\sigma_{acc} n_{xg} t^2}{2}. \quad (27)$$

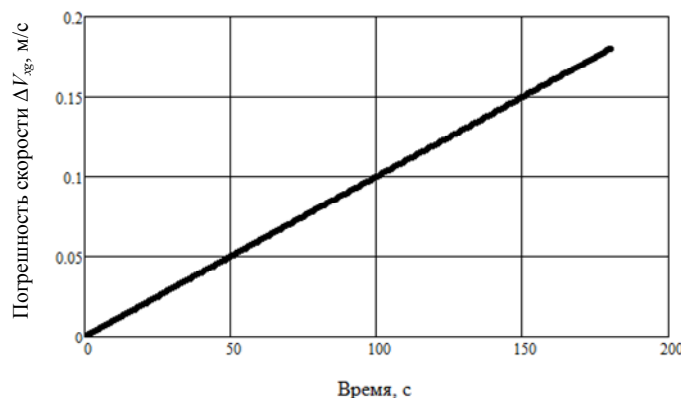


Рис. 10. Погрешность определения скорости  $\Delta V_{xg}$ , вызванная погрешностью коэффициента преобразования акселерометра

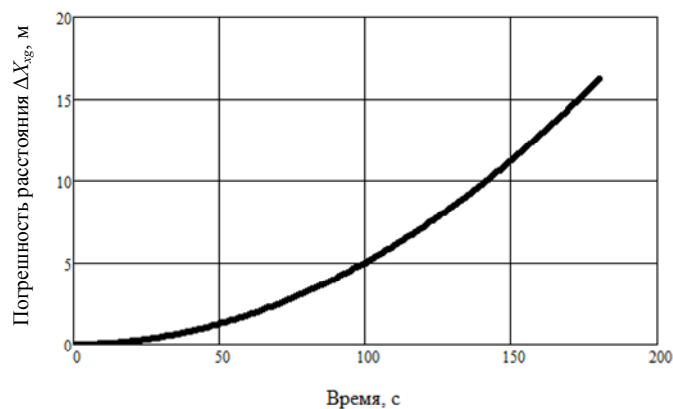


Рис. 11. Погрешность определения расстояния  $\Delta X_{xg}$ , вызванная погрешностью коэффициента преобразования акселерометра

### Влияние шума

Для характеристики шума гироскопа в документациях обычно приводится параметр случайного блуждания угла, с размерностью  $[\text{рад}/\text{с}/\sqrt{\text{Гц}}]$ . Шум акселерометров соответственно характеризуют величиной случайного блуждания скорости с размерностью  $[g/\sqrt{\text{Гц}}]$ . Дисперсия выходного случайного процесса определяется как [23]:

$$D(t) = 2\pi S_0 \int_0^t k^2(\tau) d\tau. \quad (28)$$



В случае воздействия на систему белого шума с корреляционной функцией  $S_0(t) = S_0 = \text{const}$  получим

$$D(t) = S_0 \int_0^t k^2(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Среднеквадратичное отклонение на выходе системы определяется зависимостью [25]:

$$\sigma^2(t) = D(t). \quad (30)$$

Учитывая выражения (28)–(30), найдем влияние белого шума на параметры движения.

Влияние белого шума гироскопа (рис. 12, 13):

$$\sigma_{V_{xg}}(t) = ARW \sqrt{\int g^2 t^2 dt} = ARW \frac{g}{\sqrt{3}} t^{3/2}; \quad (31)$$

$$\sigma_{X_{zg}}(t) = ARW \sqrt{\int \frac{g^2 t^4}{4}} = ARW \frac{g}{2\sqrt{5}} t^{5/2}. \quad (32)$$

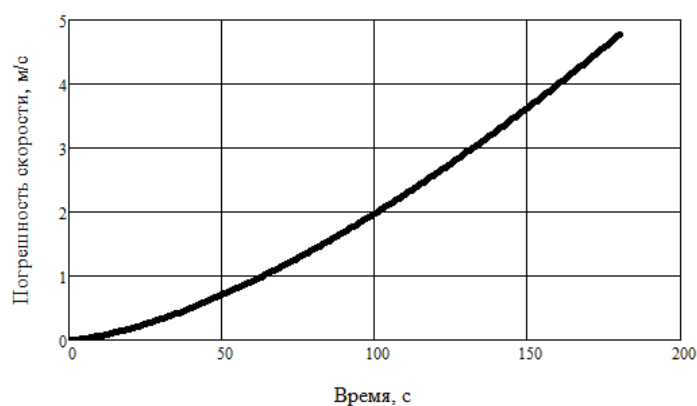


Рис. 12. Погрешность определения скорости  $\sigma_{V_{xg}}$ , вызванная влиянием белого шума гироскопа

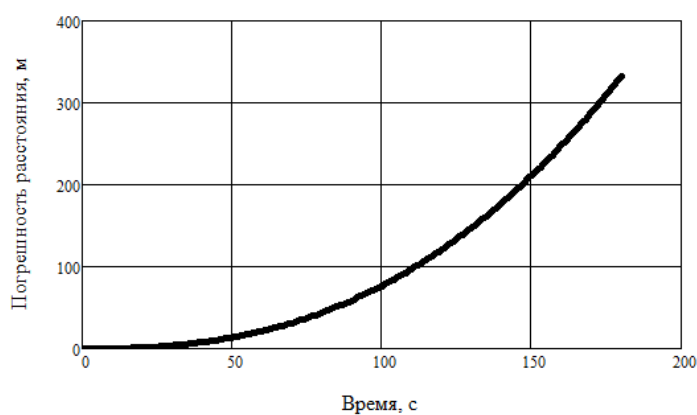


Рис. 13. Погрешность определения расстояния  $\sigma_{X_{zg}}$ , вызванная влиянием белого шума гироскопа

Влияние белого шума акселерометра (рис. 14, 15):

$$\sigma_{\Delta V}(t) = VRW \sqrt{\int dt} = VRW \sqrt{t}; \quad (33)$$

$$\sigma_{\Delta X}(t) = VRW \sqrt{\int \frac{t^2}{2} dt} = VRW \frac{t^{3/2}}{\sqrt{6}}. \quad (34)$$

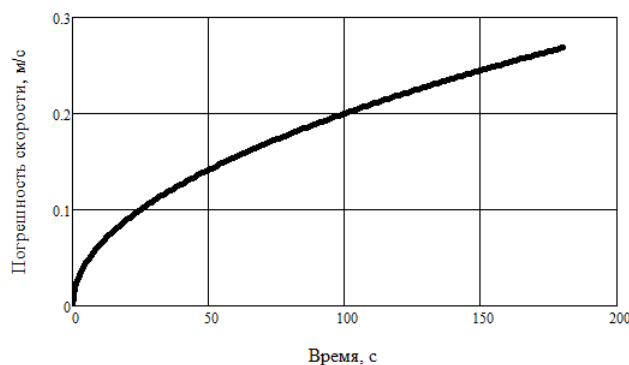


Рис. 14. Погрешность определения скорости  $\sigma_{\Delta V}$ , вызванная влиянием белого шума акселерометра

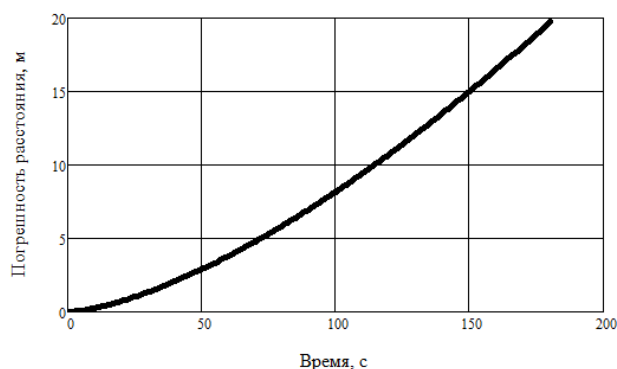


Рис. 15. Погрешность определения расстояния  $\sigma_{\Delta X}$ , вызванная влиянием белого шума акселерометра

### Построение мультиканальной системы трекинга транспортных средств.

Для анализа возможности использования базовых станций сотовых операторов для определения примерных координат нахождения были взяты трассы Гомель–Жлобин и Гомель–Светлогорск.

Как можно видеть на рис. 16, доступность сети мобильной связи на обоих участках дорог разная. На трассе Гомель–Жлобин у нас не должно возникнуть проблем с определением приблизительной координаты. На трассе Гомель–Светлогорск, теоретически, из-за плохого уровня сигнала погрешность определения координаты будет хуже, чем на трассе Гомель–Жлобин.

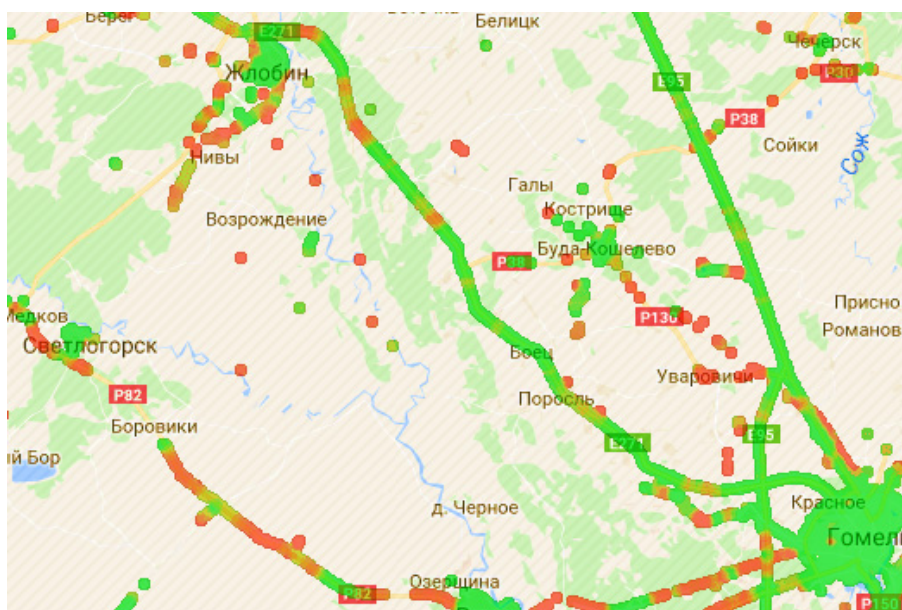


Рис. 16. Доступность сети мобильной связи

На рис. 17 приведены экспериментальные попытки определить собственную координату, используя вышки сотовых операторов. Символом «звезда» обозначены координаты вышек, маркером обозначена высчитанная координата. Погрешность измерения не превысила 200 м, однако за пределами города такая погрешность будет значительно больше из-за меньшего количества вышек и большой удаленности. Определение координат с использованием вышек сотовых операторов планируется использовать в случае, когда другие системы (GPS/ГЛОНАСС, инерциальная система) не могут быть задействованы в силу технических, климатических и географических условий.

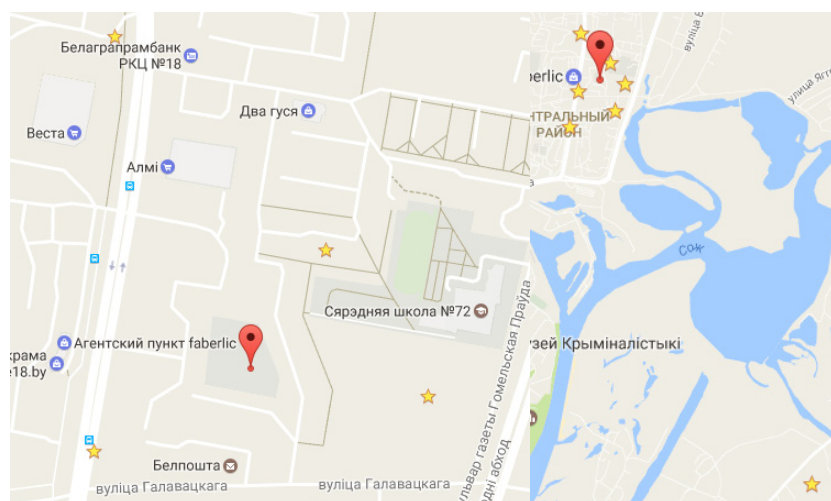


Рис. 17. Доступность сети мобильной связи

На рис. 18 приведены экспериментальные данные определения скорости и расстояния с помощью акселерометра и гироскопа. Вырезаны участки, на которых фактическая и экспериментальная скорости были равны нулю. Фактическая погрешность измерения расстояния не превысила 45 м.

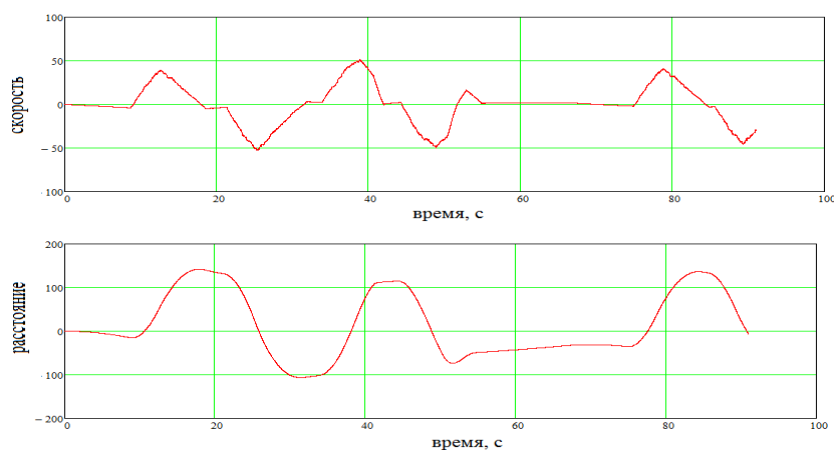


Рис. 18. Определение скорости и расстояния с использованием акселерометра и гироскопа

### Заключение

В результате оценки погрешностей измерения с использованием акселерометров, гироскопов и базовых станций сотовых операторов можно сделать вывод: использование акселерометров с гироскопами для определения координат дает меньшую погрешность, чем определение координат с использованием вышек сотовых операторов в коротком интервале времени (около нескольких минут, в зависимости от погрешностей используемых датчиков). Когда накопленная погрешность акселерометров и гироскопов выйдет за допустимые границы, можно использовать вышки сотовых операторов, что в результате уменьшит погрешность измерения координат объекта.

### Литература

1. Яценков, В. С. Основы спутниковой навигации. Системы GPSNAVSTAR и ГЛОНАСС / В. С. Яценков. – М. : Горячая линия-Телеком, 2005. – 272 с.
2. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / В. А. Болдин [и др.]. – М. : ИПРЖР, 1998. – 104 с.
3. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Р. В. Бакитько [и др.]. – М. : Радиотехника, 2010. – 227 с.
4. Российская система дифференциальной коррекции и мониторинга. – Режим доступа: <http://www.sdcm.ru/>. – Дата доступа: 17.01.2016.
5. Карасев, В. В. Современные спутниковые радионавигационные системы : учеб.-метод. пособие / В. В. Карасев. – Владивосток : ДГТРУ, 2016. – 39 с.
6. Андропов, А. В. Система точной посадки вертолетов / А. В. Андропов, В. И. Кокорин // Совместные проблемы радиоэлектроники : сб. науч. тр. – Красноярск, 2000. – С. 113–117.
7. Спутниковые радионавигационные системы / В. С. Шабшаевич [и др.]. – М. : Радио и связь, 1993. – 321 с.
8. Соловьев, Ю. А. Спутниковая навигация и ее приложения / Ю. А. Соловьев. – М. : Эко-Трендз, 2003. – 89 с.
9. Поваляев, А. А. Определение относительных координат по радиосигналам системы ГЛОНАСС / А. А. Поваляев, В. В. Тюбалин, А. А. Хвальков // Радиотехника. – 1996. – № 4. – С. 48.

10. Ярлыков, М. С. Повышение качества функционирования спутниковых радионавигационных систем за счет использования информационной избыточности / М. С. Ярлыков. – М. : ИПРЖР, 2000. – Вып. IV. – С. 31–39.
11. Поваляев, Е. Системы спутниковой навигации ГЛОНАСС и GPS / Е. Поваляев, С. Хуторной // ChipNews. – 2002. – № 2. – С. 3–10.
12. Самков, И. Ю. Спутниковая навигация для потребительской электроники / И. Ю. Самков // Современ. электроника. – 2008. – № 8. – С. 19–25.
13. Информационно-аналитический центр. – Режим доступа: <https://www.glonass-iac.ru>. – Дата доступа: 15.02.2016.
14. Федеральное космическое агенство. – Режим доступа: <http://www.federalspace.ru>. – Дата доступа: 17.02.2016.
15. Office for Outer Space Affairs. – Режим доступа: <http://www.unoosa.org/oosa/en/ourwork/icg/icg.html>. – Дата доступа: 17.02.2016.
16. Folded MEMS Pyramid Inertial Measurement Unit / S. A. Zotov [et al] // IEEE SENSORS JOURNAL. – Vol. 11, № 11. – 2011. – P. 2780–2789.
17. Groves, P. D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems / P. D. Groves // Artech Hous. – 2008. – 505 p.
18. Mohinder S. Grewal, Lawrence R. Weill, Angus P. Andrews. Global Position Systems, Inertial Navigation, and Integretion. John Wiley & Sons, 2001.
19. Бранец, В. Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
20. Новый политехнический словарь / под ред. А. Ю. Ишлинского, В. А. Дубровского. – 2000. – Т. 31. – 189 с.
21. Быковский, А. В. Инерциальная навигационная система И-21 : метод. указание к лаборатор. работам / А. В. Быковский, Л. М. Селиванова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. – 53 с.
22. Селиванова, Л. М. Инерциальные навигационные системы : учеб. пособие / Л. М. Селиванова, Е. В. Шевцова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – Ч. 1 : Однокональные инерциальные навигационные системы. – 30 с.
23. Пешехонов, В. Г. Ключевые задачи современной автономной навигации / В. Г. Пешехонов // Гироскопия и навигация. – 1996. – № 1 (12). – С. 22–30.
24. Климов, Д. М. Инерциальная навигация на море / Д. М. Климов. – М. : Юрайт, 2018. – 126 с.
25. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник : в 3 т. / под ред. Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 239 с. – Т. 1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления.

*Получено 02.08.2018 г.*