

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого»  
Кафедра «Металлорежущие станки и инструменты»

М. И. Михайлов

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Гомель 2018

УДК 621.7/.09-658.512.4.011.56  
ББК 34. 5я73  
М69

Рецензенты: зав. каф. «Материаловедение и технологии материалов»  
Белорусского государственного университета транспорта  
д-р техн. наук, профессор *П. Н. Богданович*;  
проф. каф. «Технология машиностроения»  
Белорусского национального технического университета  
д-р. техн. наук, профессор *И. А. Каштальян*

**Михайлов, М. И.**

М69

Системы автоматизированного проектирования: учеб. пособие / М. И. Михайлов ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – с.

ISBN

Рассматриваются общие сведения о моделировании при проектировании оборудования и инструментов, а также приведены математические модели динамических процессов оборудования и инструментов на основе переходных матриц и механических цепей. Описаны процессы получения 3-D моделей с использованием пакетов прикладных программ.

Для студентов машиностроительных специальностей вузов.

УДК 621.9.06-519.8  
ББК 34. 63-5

ISBN

© Михайлов М. И., 2018  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1. ПРОЦЕСС АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ.....	9
1.1. Формализация и автоматизация процедур синтеза.....	9
1.2. Преобразования математических моделей в процессе получения расчетных САЕ программ .....	11
2. МЕТОДЫ В САПР.....	
2.1. Выбор численных методов для задач анализа в САПР .....	22
2.2. Моделирование логистической поддержки изделия в САПР	28
2.3. Алгоритм построения САПР, реализующей восходящее проектирование .....	32
2.4. Алгоритм построения САПР, реализующей нисходящее проектирование.....	33
3 МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СИСТЕМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ .....	35
3.1. Плоское напряженное состояние .....	35
3.2. Осесимметричная задача .....	39
3.3. Нестационарные задачи .....	43
3.4. Нелинейные задачи .....	45
3.5. Моделирование параметров монтажа оборудования .....	48
3.6. Моделирование оборудования с учетом термодинамических процессов .....	51
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАНКОВ.....	67
4.1. Основные определения физической акустики.....	67
4.2. Гармонические колебания. Комплексная форма их. Импеданс	74
4.3. Этапы проектирования звукоизоляции.....	76
5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ.....	81
5.1. Моделирование методом конечных элементов.....	81
5.2. Моделирование методом конечных разностей.....	84
6 СТАТИЧЕСКОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ.....	91
6.1. Математическое моделирование параметрического синтеза шпиндельного узла по критерию жесткости .....	91
6.2. Математическое моделирование динамики с использованием передаточной функции.....	95
7 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ	

ВАЛОВ.....	98
7.1. Математическое моделирование динамики валов по передаточным функциям.....	98
7.5.2. Моделирование изгибных колебаний переходными матрицами.....	106
8 СТАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	111
8.1. Моделирование подвижных стыков.....	111
8.2. Моделирование подшипников качения .....	111
9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРИВОДА ПОДАЧ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ.....	114
9.1. Оценка влияния параметров динамики .....	114
9.2. Моделирование виброустойчивости процесса резания.....	116
10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕХОДНЫХ МАТРИЦ.....	119
11. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ.....	125
12. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИВОДА.....	131
14. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	135
15. АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАСКАТКИ МНОГОШПИНДЕЛЬНОЙ КОРОБКИ СТАНКА...	137
16. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ.....	146
16.1. Постановка задачи оптимизации.....	148
16.2. Методы решения задач оптимизации.....	150
16.3 Оптимизация периода стойкости по себестоимости обработки.....	157
16.4. Оптимизация функции с ограничениями в виде равенств...	160
16.4.1 Метод множителей Лагранжа.....	160
16.4.2 Оптимизация функции по методу Куна - Такера.....	166
16.4.3. Оптимизация режимов резания.....	167
16.4.4. Метод градиентного спуска.....	172
16.5. Методы решения задач оптимального проектирования.....	172
16.5.1. Методы вариационного исчисления.....	173
16.5.2. Принцип максимума Понтрягина.....	174
16.5.3. Метод динамического программирования.....	180
16.5.4. Линейное программирование.....	182
16.5.5. Нелинейное программирование.....	183

17. ИНФОРМАЦИОННОЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР.....	189
17.1. Требования к математическим моделям.....	189
17.2. Информационное и техническое обеспечение жизненного цикла технологического оборудования.....	194
17.3. Программное обеспечение CALS-технологий.....	208
17.4. Анализ форматов растровой графики.....	210
17.5. Программные средства векторной графики. Графический редактор AutoCAD.....	216
17.6. 3-D графика.....	228
17.6.1. Общие положения.....	228
17.6.2. 3-D графика в среде AutoCAD.....	236
17.6.3. 3-D моделирование в среде КОМПАС.....	242
17.7. Программные продукты для исследования динамики механических систем.....	257
17.8. Интерфейсный программный продукт CADfix.....	259
17.9. Технология быстрого прототипирования (Rapid prototyping).....	267
ЛИТЕРАТУРА.....	273

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ДУЧП - дифференциальные уравнения в частных производных

ДПТ - двигатель постоянного тока

ДМП - дискретное математическое программирование

ММ – математические модели

МУВП - муфта упругая втулочно-пальцевая

МДТ – метод достижения точности

МРКГП - Максимальное расстояние между кинематической и геометрической поверхностями

ОиИ - оборудование и инструменты

ОДУ - обыкновенные дифференциальные уравнения

ОА - область адекватности

РС - расчетная схема

РТК - роботизированный технологический комплекс

САПР – система автоматизированного проектирования

САУ - система автоматического управления

СМО - системы массового обслуживания

ТО - технологическое оборудование

ТП - тиристорный преобразователь

УПТ - усилитель постоянного тока

УЧПУ – устройство числового программного управления

## **ВВЕДЕНИЕ**

Применение ЭВМ в металлообрабатывающих станках определило современный этап автоматизации производственных процессов в машиностроении. ЭВМ встраивают в систему числового программного управления отдельным станком, группой станков, станочным модулем, автоматической линией.

Сложность объектов проектирования в машиностроении непрерывно возрастает.

Так, металлорежущее оборудование оснащают следящими приводами, тончайшей измерительно-преобразующей аппаратурой, электроникой, микропроцессорной техникой, промышленными роботами и т. д. В то же время темпы обновления техники непрерывно возрастают, что приводит к быстрому моральному старению оборудования. Все это вынуждает увеличивать численность проектировщиков.

Использование ЭВМ при проектировании является единственным выходом из сложившегося положения, когда повышение производительности труда проектировщиков и ограничение их числа достигается за счет реализации возможностей ЭВМ на базе системных методов проектирования. Кроме реализации высокопроизводительной технологии проектирования, целью использования ЭВМ при автоматизации проектирования оборудования различного назначения, в том числе и металлорежущего, является повышение качества проектирования и технико-экономических показателей проектируемого оборудования; уменьшение материальных затрат и трудоемкости проектирования.

Эффективным является использование ЭВМ при выполнении проектных расчетов и при вычерчивании проектной документации. При этом уменьшается количество требуемых документов, упрощается их форма, ускоряется процесс размножения документов. Передача рутинных, утомительных работ для выполнения на ЭВМ в процессе проектирования снижает возможность появления субъективных ошибок, вызванных невнимательностью или утомлением конструктора. При необходимости на ЭВМ можно несколько раз повторить расчеты или другие действия с целью проверки правильности полученных результатов. В конечном счете все это должно приводить к уменьшению материальных затрат и снижению трудоемкости проектирования.

Повышение технико-экономических показателей проектируемого

оборудования достигается за счет увеличения числа просматриваемых конструктивных, решений, более точного и всестороннего анализа каждого проектного решения с помощью математического моделирования выбранных вариантов при различных условиях работы вплоть до отыскания оптимальных параметров принятого варианта.

Учебное пособие посвящено проблемам математического моделирования оборудования и инструментов. В учебном пособии основное внимание уделено задачам математического моделирования геометрических свойств технических устройств.

Моделированию таких объектов в последние годы, судя по публикациям, уделяется значительно меньше внимания, чем моделированию больших сложных систем различного назначения. По-видимому, это связано с тем, что теория моделирования сравнительно несложных технических устройств разработана глубже, чем больших систем, и поэтому дальнейшим развитием этой теории занимается меньшее число специалистов.



# 1 ПРОЦЕСС АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

## 1.1. Формализация и автоматизация процедур синтеза

Процесс автоматизированного проектирования ТО базируется на системном подходе, использующем принципы декомпозиции, иерархичности, итеративности, локальной оптимизации и комплексного осуществления процесса проектирования, включающего функциональный, конструкторский и технологический аспекты. Схема типового маршрута проектирования ТО в среде автоматизированного проектирования представлена на рис. 1.1. Основные компоненты маршрута предусматривают выполнение процедур анализа и синтеза, выступающих в диалектическом единстве.

*Анализ ТО* – это изучение его физических свойств, характеризуемых выходными параметрами. При анализе не создается новое оборудование, а исследуются заданные на основе изучения процессов его функционирования. Для этого проводятся вычислительные эксперименты с использованием математических моделей объектов.

*Синтез ТО* – это создание новых вариантов, обеспечивающих заданный алгоритм функционирования и выполнение технических требований к оборудованию.

Если определяют наилучшие в некотором смысле структуру и параметры, то синтез называют *оптимизацией*. При определении оптимальных значений параметров говорят о *параметрической оптимизации*. Задачу выбора оптимальной структуры называют *структурной оптимизацией*.

Иерархичность и декомпозиция процесса проектирования ТО обуславливают многообразие решаемых задач, их целей и используемых ММ на различных стадиях и этапах.

В общем случае задачей синтеза является определение структуры и параметров ТО. В связи с различием ММ непрерывных и дискретных объектов методы решения задач их синтеза различны.

Рассмотрим подробнее проектирование ТО на основе маршрута, приведенного на рис. 1.2. Объектом проектирования может быть любой элемент ТО, выделенный в результате декомпозиции

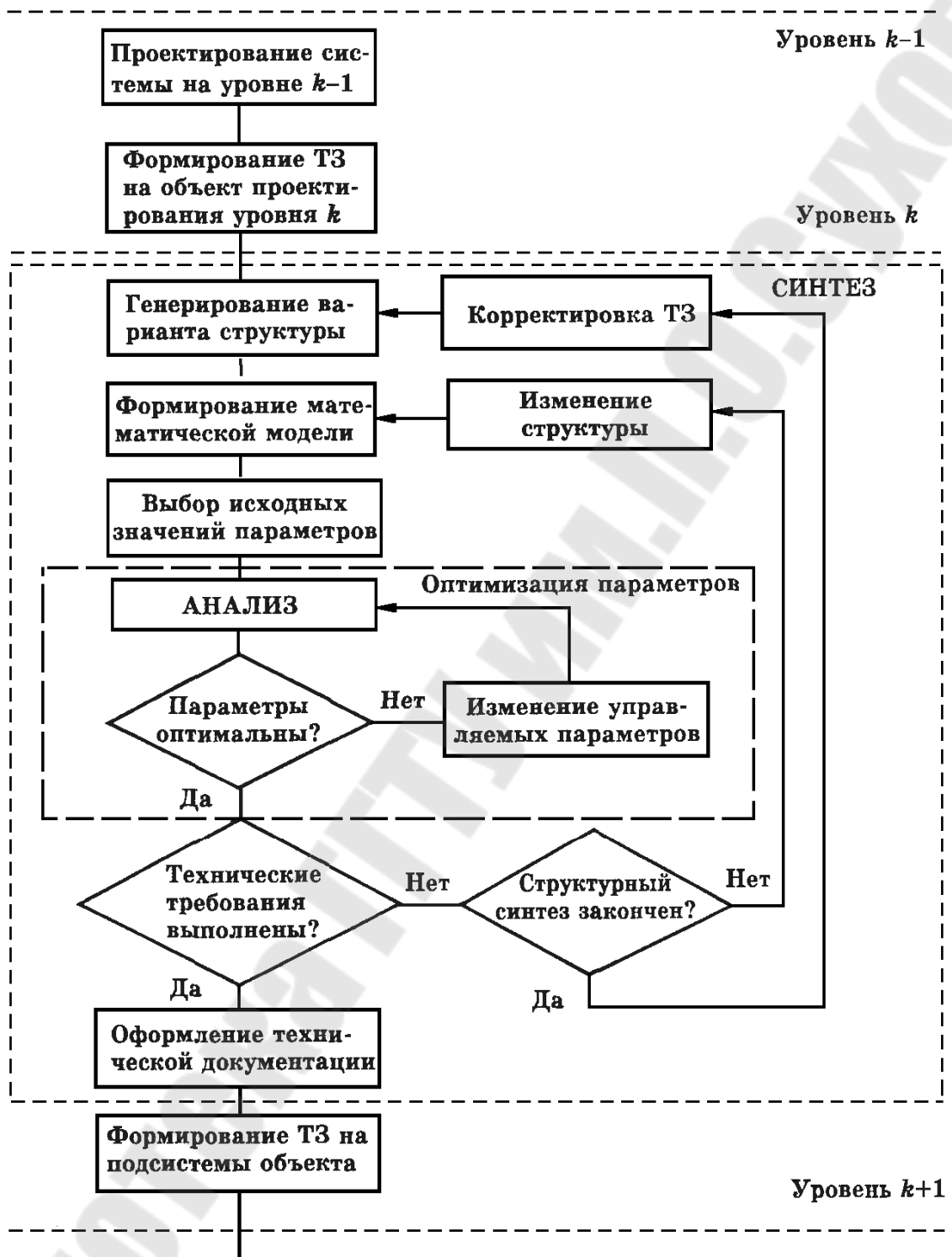


Рис. 1.1. Схема типового маршрута проектирования ТО в системе автоматического проектирования

Формализовать и автоматизировать процедуру синтеза структуры сложно, поэтому синтез структуры объекта обычно осуществляется

перебором возможных вариантов, генерируемых эвристическими методами. Для каждого варианта структуры формируется своя ММ и выбираются исходные значения внутренних параметров. Сравнить альтернативные варианты структур можно лишь после определения оптимальных параметров элементов объекта.

Математические описания элементов структуры проектируемого объекта известны и хранятся в базе данных. В результате формирования ММ представляет собой синтез абстрактной модели объекта. Процедура синтеза при этом легко формализуется и может быть автоматизирована. Оптимизации подлежат обычно не все параметры объекта, а только некоторая их часть. Это обусловлено тем, что при проектировании технических объектов широко используются стандартные и унифицированные элементы, параметры которых не могут быть изменены. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

При проектировании часто ограничиваются сравнением нескольких альтернативных вариантов структур, а иногда поиск решения заканчивают, если найден вариант, удовлетворяющий техническим требованиям. Такое проектное решение называют *допустимым*.

Если сравнивается ограниченное число вариантов структур, то основными компонентами технологического маршрута проектирования являются синтез структуры, анализ и оптимизация параметров вариантов структур, процедура оценки и принятия решения.

## **1.2. Преобразования математических моделей в процессе получения расчетных САЕ программ**

Выше были определены классы функциональных ММ на различных иерархических уровнях как системы уравнений определенного типа. Реализация таких моделей на ЭВМ подразумевает выбор численного метода решения уравнений и преобразование уравнений в соответствии с особенностями выбранного метода. Процесс преобразований ММ, относящихся к различным иерархическим уровням, иллюстрирует рис.1.2.

Система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию механической системы под действием внешних и внутренних сил, должна, как правило, содержать столько независимых уравнений второго порядка, сколько эта система имеет степеней

свободы. Если совершается переход к фазовым координатам, то уравнения оказываются первого порядка, а их число удваивается. Таким образом, значение числа степеней свободы механической системы позволяет проконтролировать полноту ее математической модели.

Ветви 1 на рис. 1.2 соответствует постановка задачи, относящейся к микроуровню, как краевой, чаще всего в виде ДУЧП. Численные методы решения ДУЧП основаны на дискретизации переменных и алгебраизации задачи. *Дискретизация* заключается в замене непрерывных переменных конечным множеством их значений в заданных для исследования пространственном и временном интервалах; *алгебраизация* – в замене производных алгебраическими соотношениями.

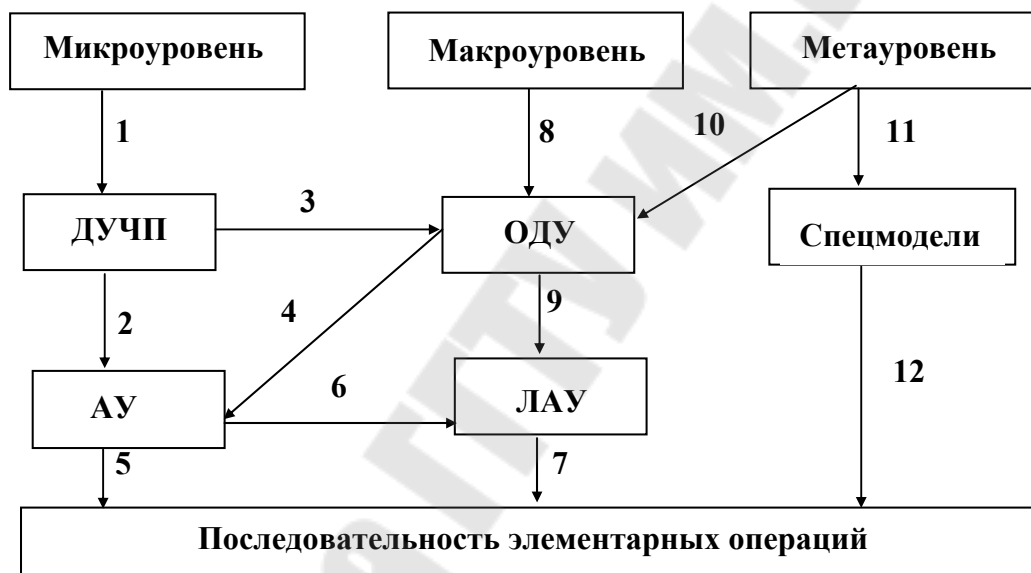


Рис. 1.2. Схема преобразования математических моделей

Предположим, что математическая модель динамики режущей пластины сборного инструмента представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{x}, x, z) = 0. \quad (1.1)$$

Статический режим рассматриваемого звена описывается алгебраическим уравнением, которое можно получить из уравнения (1.1), полагая в нём равными нулю все производные:

$$\Phi(y, x, z) = 0. \quad (1.2)$$

Решением уравнения (1.2) будет  $x_0, y_0, z_0$ , т. е. значения координат  $x, y, z$  в положении статического равновесия. Разложим в ряд Тейлора

нелинейную функцию (1.1) у точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$ , ограничиваясь линейными членами разложения:

$$F(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{x}, x, z) = F(y_0, x_0, z_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z = 0, \quad (1.3)$$

где  $\Delta y, \Delta x, \Delta z$  – отклонения соответствующих координат от их значений в точке статического равновесия:  $\Delta y = y - y_0$ ;  $\Delta x = x - x_0$ ;  $\Delta z = z - z_0$ .

Индекс «0» означает, что частные производные вычисляются в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Поскольку в этой точке  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ , получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z = 0. \quad (1.4)$$

В результате получено линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое можно записать в виде

$$a_2 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_0 \Delta y = b_1 \Delta \dot{x} + b_0 \Delta x + c_0 \Delta z, \quad (1.5)$$

где

$$a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0; \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0; \quad a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \\ b_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0; \quad b_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0; \quad c_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0.$$

Если перенести начало отсчета координат  $x, y, z$  в точку  $x_0, y_0, z_0$ , то символ отклонения координат  $\Delta$  в уравнении (1.5) исключается.

Для разложения функции  $F$  в ряд Тейлора она должна обладать непрерывными частными производными по всем аргументам в окрестности точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Если это условие не выполняется, то рассмотренный метод линеаризации применять нельзя. Динамическое звено в этом случае называют существенно нелинейным и для анализа его динамики используют методы

исследования нелинейных систем [5].

Геометрическая линейризация применяется для статических характеристик системы. Нелинейную статическую характеристику заменяют линейной, используя метод осреднения или метод малого отклонения (рис. 1.3). Первый применяют при сравнительно больших изменениях входного сигнала  $x$ , а второй – при малых отклонениях от положения статического равновесия.

В методе малого отклонения кривую  $y = f(x)$  заменяют касательной в точке с координатами  $x_0, y_0$  (рис. 1.3, а). Ошибка аппроксимации  $\varepsilon$  зависит от отклонения  $\Delta x$ . Уравнение статической характеристики в результате линейризации имеет вид:

$$y = y_0 + (dy/dx)_0 \Delta x, \quad (1.6)$$

где  $(dy/dx)_0$  – производная, определяемая в точке с координатами  $x_0, y_0$  и равная тангенсу угла наклона касательной к кривой  $y = f(x)$  в этой точке.

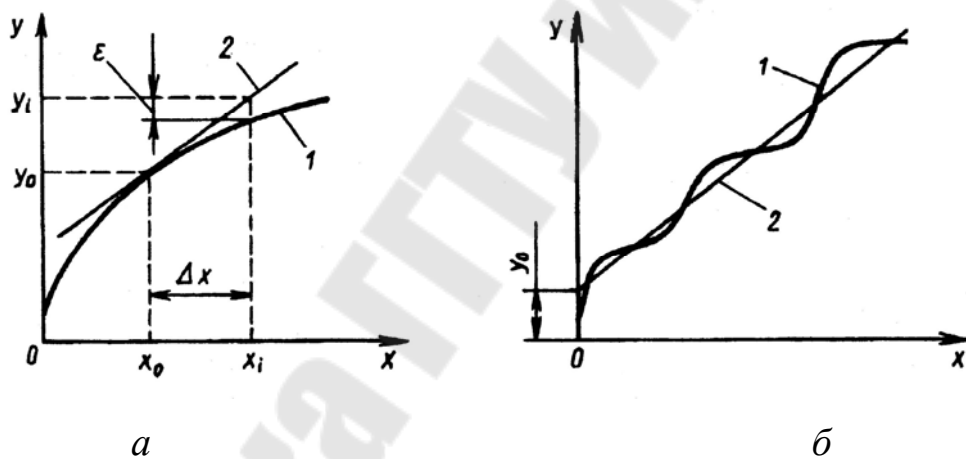


Рис. 1.3. Методы линейризации статических характеристик: а – малого отклонения; б – осреднения; 1 – кривая  $y = f(x)$ ; 2 – линейная аппроксимация

Уравнение (1.6) содержит линейные члены ряда Тейлора. Введём обозначение

$$k = (dy/dx)_0 \quad (1.7)$$

и перенесём начало координат в точку с координатами  $x_0, y_0$ . Опуская символ отклонения координат  $\Delta$ , получим

$$y = k x, \quad (1.8)$$

где  $k$  – коэффициент передачи звена.

Для некоторых функциональных элементов коэффициент  $k$  имеет специфические наименования. Так, для измерительного преобразователя или чувствительного элемента его называют коэффициентом чувствительности, а для усилителя мощности – коэффициентом усиления.

При линеаризации многомерной статической характеристики гиперповерхность заменяют гиперплоскостью, касательной к гиперповерхности в точке статического равновесия.

Если сохранить исходную систему координат, то уравнение (1.8) принимает вид:

$$y = y_0 + k x, \quad (1.9)$$

где  $y_0$  – значение координаты  $y$  при  $x = 0$  (рис. 1.3, б).

В методе осреднения значения  $y_0$  и  $k$  определяют путём минимизации средней квадратической ошибки аппроксимации в заданном диапазоне изменения аргумента  $x$ . Для упрощения записи линейных дифференциальных уравнений операцию дифференцирования заменяют символом  $p$ , а операцию интегрирования – символом  $1/p$ . В результате дифференциальное уравнение приобретает вид алгебраического уравнения. Так, уравнение (1.5) при использовании оператора дифференцирования  $p$  приводится к виду

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y = (b_1 p + b_0) x + c_0 z. \quad (1.10)$$

Такая форма записи дифференциального уравнения называется операторной. Уравнение (1.5) можно также привести к стандартной форме, преобразовав его таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине  $y$  был равным единице, а воздействия на звено  $x$  и  $z$  и их производные находились в правой части уравнения:

$$T_1^2 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + y = k_x (T_3 \dot{x} + x) + k_z z, \quad (1.11)$$

где  $T_1^2 = a_2/a_0$ ;  $T_2 = a_1/a_0$ ;  $k_x = b_0/a_0$ ;  $T_3 = b_1/b_0$ ;  $k_z = c_0/a_0$ .

Коэффициенты  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  в уравнении (1.11) имеют размерность времени (с) и их называют постоянными времени звена, а  $k_x$ ,  $k_z$  – коэффициентами передачи звена, соответственно, по входной величине  $x$  и по возмущающему воздействию  $z$ .

Из уравнения (1.11) можно непосредственно получить уравнение линеаризованной статической характеристики звена:

$$y = k_x x + k_z z. \quad (1.12)$$

Будем считать, что начала отсчета входа и выхода выбраны так, что нулевому входу отвечает нулевой выход. Тогда модель называется *линейной*, если в ней выполнен *принцип суперпозиции* (наложения), т. е. при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа на любое число выход умножается на то же число. Если этот принцип не выполнен, модель называется *нелинейной*. Линейные модели обычно описываются линейными неоднородными уравнениями - алгебраическими, дифференциальными и т. д., в которых неоднородный член отвечает входу, а решение - выходу.

Необходимо иметь в виду, что существуют принципиально нелинейные объекты (в том числе явления), для которых применение линейных моделей приводят к грубым искажениям картины. Это прежде всего системы, для которых изменение масштаба воздействия приводит к качественному изменению результата. Типичным примером могут служить механические системы с сухим трением, для которых малая сила не порождает движения, а большая - порождает; вообще, наличие любых барьеров подобного рода - это типичный нелинейный эффект.

Существенно нелинейной является также задача об изучении околосостояния объекта, зависящего от параметров, когда при их изменении устойчивость сменяется неустойчивостью или один тип движения - другим и т. п.

Выгоды линейности бывают столь велики, что приближенная замена нелинейных соотношений на линейные, нелинейных моделей на линейные, т. е. *линеаризация* соотношений, моделей и т. д. весьма распространена. Такая линеаризация обычно проводится в двух случаях: либо если эксперимент показывает (как, например, для закона Гука), что отклонение от линейности в рассматриваемых диапазонах изменения переменных невелико и несущественно, либо же, если эти диапазоны малы и мы заменяем приращения переменных на их дифференциалы, отбрасывая члены высшего порядка малости. (Во втором случае применяется также линейное интерполирование.)

Покажем последнюю процедуру на формальном примере. Пусть величины  $x, y, z$  связаны уравнением

$$\frac{x^3 + xy}{y^3 - xz} + e^{2z} + 5 = 0 \quad (1.13)$$

Это уравнение при  $x = 2, y = -1, z = 0$  удовлетворяется. Пусть теперь эти величины мало изменились, т.е. стало  $x = 2 + \xi, y = -1 + \eta, z = \zeta$ , где  $|\xi|, |\eta|, |\zeta|$  малы. Требуется найти линейное соотношение между  $\xi, \eta, \zeta$ ,



справедливое с точностью до членов высшего порядка малости; другими словами, требуется провести линеаризацию уравнения (1.13) вблизи указанных значений  $x, y, z$  (говоря также – «при этих значениях»). Для этого продифференцируем обе части уравнения (1.13):

$$\frac{(3x^2 dx + (dx)y + xdy)(y^3 - xz)}{(y^3 - xz^2)} - \frac{(x^3 + xy)(3y^2 dy - (dx)z - xdz)}{(y^3 - xz^2)} + e^{2z}(2dz) = 0$$

Подставив сюда вместо  $x, y, z$  их исходные значения, а вместо дифференциалов – приращения соответствующих переменных (при этом мы пренебрегаем величинами высшего порядка малости – в этом и состоит линеаризация), получим:

$$(11\xi + 2\eta)(-1) - 6(3\eta - 2\zeta) + 2\zeta = 0$$

т.е.

$$11\xi + 20\eta - 14\zeta = 0$$

Линеаризованное уравнение несравненно проще исходного. Его можно записать и в переменных  $x, y, z$ :

$$11(x - 2) + 20(y + 1) - 14z = 0,$$

т.е.

$$11x + 20y - 14z = 2.$$

Геометрический смысл проведенной линеаризации таков: мы получили уравнение касательной плоскости к поверхности (1.13) в пространстве  $x, y, z$  в заданной точке  $(2, -1, 0)$ .

В качестве другого примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + (1 + y^2)\sin y' + y = 1, \quad (1.14)$$

имеющее очевидное частное решение  $y_0(x) \equiv 1$ . Пусть близкое решение имеет вид  $y(x) = 1 + \eta(x)$ . Чтобы получить линеаризованное уравнение для  $\eta$ , варьируем уравнение (1.14):

$$(\delta y)'' + 2y(\delta y)\sin y' + (1 + y^2)(\cos y')(\delta y)' + \delta y = 0$$

Подставив сюда  $y = y_0(x) = 1$ ,  $\delta y = \eta$ , получаем искомое уравнение

$$\eta'' + 2\eta' + \eta = 0,$$

которое легко решается.

Применяют различные способы дискретизации и алгебраизации переменных при решении ДУЧП. Эти способы составляют сущность

методов числового решения; большинство используемых методов относится либо к методам конечных разностей, либо к методам конечных элементов.

*Уравнения для функций нескольких аргументов.* Если искомой является функция нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение становится *уравнением с частными производными*; такие уравнения традиционно называются также *уравнениями математической физики*. Они естественно появляются в задачах, связанных с механикой сплошной среды, теорией тепломассообмена, теорией электромагнитных полей и т. д., причем независимыми переменными чаще всего служат геометрические координаты и в случае эволюционных задач - время.

Уравнения с частными производными, применяемые при решении технических задач, подразделяются на два класса: уравнения, описывающие стационарное состояние среды, и *эволюционные уравнения*, описывающие развитие процесса в ней. Среди уравнений первого класса наиболее широко известны *уравнения Лапласа* и *Пуассона*, имеющие для пространственных задач, соответственно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (1.15)$$

Эти уравнения, а также их одномерные и двумерные варианты применяются при описании напряженного состояния однородных изотропных упругих тел, стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости, стационарного распределения температуры, электрических и магнитных полей и т. д. При изучении прогиба плоской однородной пластинки применяются также уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = f(x, y). \quad (1.16)$$

Если рассматривается неоднородная среда либо неплоская пластинка, то уравнения остаются линейными, но коэффициенты при производных перестают быть постоянными. Встречаются и более сложные уравнения и системы уравнений с частными производными; в частности, при рассмотрении больших деформаций, течений сжимаемой среды и др. уравнения становятся нелинейными. При применении систем уравнений с частными производными надо следить, чтобы число независимых

уравнений равнялось числу искомых функций.

Для уравнений стационарного состояния добавочными обычно служат *краевые условия*, отражающие ситуацию на границе ( $dD$ ) области ( $D$ ), в которой строится решение. Так, для уравнений (1.15) наиболее часто на ( $dD$ ) задаются значения либо  $u$ , либо  $du/dn$  (производная по внешней нормали к ( $dD$ )), либо линейная комбинация  $u$  и  $du/dn$  - это соответственно *краевые условия первого, второго и третьего родов*. Для уравнений (1.16) краевое условие состоит уже из двух равенств: например, в случае жесткой заделки на ( $dD$ ) задаются значения  $u$  и  $du/dn$ .

Среди эволюционных уравнений наиболее часто применяются *волновое уравнение* и уравнение теплопроводности, имеющие для пространственных задач, соответственно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.17)$$

где  $a$  - постоянная, равная скорости распространения волн для рассматриваемого процесса. Для таких уравнений обычно ставится начальное условие, отражающее начальное состояние моделируемого процесса.

В последнее время довольно широко распространились нестационарные задачи в областях с изменяющейся границей, причем закон изменения границы заранее не задан, а определяется попутно с построением всего решения. Такие задачи возникают при исследовании нестационарных движений жидкости или сыпучей среды со свободной поверхностью, перехода среды из одной фазы в другую (это «задача Стефана») и т. д. Для них на неизвестной границе задается еще одно добавочное условие типа равенства, которое вместе с остальными условиями и дает возможность найти границу. Встречаются и стационарные задачи с неизвестными границами.

Промежуточное положение между стационарными и эволюционными задачами занимают задачи на собственные значения.

Точное решение задачи для уравнения с частными производными в виде явной формулы, даже включающей интегралы или суммы бесконечных рядов, возможно лишь для уравнений и областей специального вида; этой возможностью не следует пренебрегать, так как при ее реализации решение иногда удается исследовать наиболее полно.

Порой удается найти точные формулы для решений специального вида - например, стационарных (т. е. не зависящих от времени) для

эволюционных задач, или не зависящих от пространственных координат, или автомодельных, или типа бегущих или стоячих волн и т. п. Из таких формул обычно удается сделать полезные выводы.

В качестве простого примера рассмотрим задачу о разогреве сверла с помощью постоянного (по времени и по пространству) теплопритока, если на концах  $x = 0$  и  $x = l$  сверла поддерживается постоянная температура  $\theta_0$ . Соответствующее дифференциальное уравнение в одномерном варианте имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{cp} \beta. \quad (1.18)$$

Естественно ожидать, что для любого начального распределения температур поле температур  $\theta$  при  $t \rightarrow \infty$  устанавливается, переходит в некоторое предельное стационарное поле  $\theta_\infty(x)$ . Как его найти? Для этого надо считать, что в уравнении (1.18)  $\theta$  не зависит от  $t$ . Тогда мы получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\frac{1}{cpa} \beta = -\frac{1}{\lambda} \beta, \quad \theta|_{x=0} = \theta|_{x=l} = \theta_0,$$

решение которой легко найти:

$$\theta = \theta_\infty(x) = \theta_0 + \frac{\beta}{2\lambda} x(l-x).$$

Это и есть предельное распределение температур. Мы видим, в частности, что оно не зависит от начального распределения.

Всё же чаще применяется приближенное построение решений, методы которого, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно подразделить на непрерывные и дискретные. Впрочем, ряд приближенных методов имеет и дискретные и непрерывные черты; к таким методам относится *метод прямых*, в котором производится дискретизация всех независимых переменных, кроме одной, в результате чего задача приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений; дискретные и непрерывные черты имеет также широко популярный сейчас метод конечных элементов, наиболее приспособленный к решению уравнений в областях сложной конфигурации.

Решение трехмерных задач требует применение мощных ЭВМ. Поэтому весьма желательно возможное понижение геометрической размерности задачи, т. е. переход от трехмерной задачи к двумерной или от двумерной - к одномерной, если это можно сделать без существенной потери адекватности. Иногда это удается сделать с помощью введения

специальных систем координат, иногда - с помощью объявления параметром одной из координат, от которой зависимость решения сравнительно медленная, и т. п. Подобное понижение геометрической размерности применяется, в частности, в теории пограничных слоев.

Если ДУЧП стационарное (т. е. описывает статические состояния), то дискретизация и алгебраизация преобразует ДУЧП в систему алгебраических уравнений, в общем случае нелинейных (ветвь 2 на рис.1.2). Если ДУЧП нестационарное (т. е. описывает изменяющиеся во времени и пространстве поля переменных), то дискретизацию и алгебраизацию можно представить состоящей из двух этапов: устранение производных по пространственным координатам (ветвь 3), результат – система ОДУ; устранение производных по времени (ветвь 4).

Для числового решения ОДУ при заданных начальных условиях (задача Коши) разработано большое количество численных методов, причем многие из эффективных методов получили развитие под влиянием потребностей автоматизированного проектирования. Специфика алгебраизации производных по времени и обуславливает целесообразность выделения для ветви 4 специальных средств математического и программного обеспечения, отличных от таких же средств для ветвей 2 и 3.

Ветви 8 на рис. 1.2 соответствует преобразование исходного описания задачи, относящегося к макроуровню, в систему ОДУ с известными начальными условиями. Если это система нелинейных ОДУ, то дальнейшие преобразования происходят по охарактеризованным выше ветвям 4, 6, 7 или 4, 5; если же эта система линейных ОДУ, то целесообразен непосредственный переход к системе линейных алгебраических уравнений (ветвь 9).

Для анализа объектов на метаяуровне применяют либо переход к системе ОДУ (ветвь 10), либо переход к системам логических уравнений, моделям массового обслуживания или аналитическим моделям, отображающим упрощенно технико-экономические показатели объекта (ветвь 11).

Сведение этих форм моделей в последовательность элементарных вычислительных операций (ветвь 12) не вызывает затруднений.

## 2 МЕТОДЫ В САПР

### 2.1. Выбор численных методов для задач анализа в САПР

Большинство задач анализа в САПР сводится к решению систем уравнений алгебраических и обыкновенных дифференциальных. Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений применяют итерационные методы. Главными показателями эффективности этих методов являются вероятность и скорость сходимости итераций к корню системы.

Методы приближенного построения решений дифференциальных уравнений, как и других уравнений, в которых искомыми являются функции, можно условно подразделить на непрерывные и дискретные; в первых решение строится как функция непрерывного аргумента, во вторых - дискретного. Типичными непрерывными методами являются различные варианты методы Галеркина и другие методы, в которых путем подбора параметров в формуле для приближенного решения производят «исправление» невязки. (Напомним, что *невязкой* называется разность между левой и правой частями уравнения после подстановки в него приближенного решения; для точного решения невязка равна нулю.) Эти методы широко применяются при решении краевых задач.

Типичными дискретными методами являются методы Рунге - Кутты, Адамса и другие сходные методы, особенно удобные при работе на ЭВМ. В этих методах значение приближенного решения строится в точках  $t_0, t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_0 + 2\tau, \dots, t_k = t_0 + k\tau, \dots$ , где  $\tau > 0$  - выбранный шаг метода.

$$\frac{d^n u}{dt^n} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) \quad (2.1)$$

Дифференциальное уравнение (2.1) по определенному правилу, различному для разных методов, заменяется на *разностное уравнение* вида

$$u_{k+1} = \varphi(u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r-1}, k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где под  $u_k$  понимается значение приближенного решения при  $t = t_k$ ; тогда говорят о *явном r-шаговом разностном методе*.

В последние годы в приложениях математики широко распространились *дифференциально-функциональные уравнения* (иначе - *дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом*). Как

правило, это уравнения *запаздывающего типа* или *нейтрального типа*, простыми представителями которых в случае уравнений первого порядка могут служить соответственно уравнения

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h))$$

и

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u'(t-h))$$

(штрихом обозначена производная;  $h > 0$  - заданная постоянная). Такие уравнения появляются, если в моделируемой системе имеется элемент задержки, в результате действия которого скорость эволюции системы определяется ее состоянием не только на текущий момент  $t$ , но и в предшествующих момент  $t-h$ . Дифференциально-функциональные уравнения широко применяются в теории регулирования, управления и т.д.

Реальные объекты могут описываться дифференциально-функциональными уравнениями и более сложной структуры, чем приведенная выше. В частности, уравнение может включать не одно, а несколько дискретных запаздываний, а также «распределенное запаздывание». Это приводит к *интегро-дифференциальным уравнениям*. В линейном случае такое уравнение может, например, иметь вид

$$u'(t) = \int_{t_0}^t K(t,s)u(s)ds + f(t) \quad t \geq t_0$$

(заданная функция  $K$  называется *ядром* этого уравнения); оно описывает системы, обладающие памятью. Интегро-дифференциальные уравнения могут иметь и более сложный вид.

Применяются и «чисто» *интегральные уравнения*, чаще всего - *уравнения Фредгольма второго рода*, т. е. уравнения вида

$$u(t) = \int_{\beta}^{\alpha} K(t,s)u(s)ds + f(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

и уравнение *Вольтера второго рода*, имеющие вид

$$u(t) = \int_{\alpha}^t K(t,s)u(s)ds + f(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

(Соответствующие *уравнения первого рода* получаются, если левую часть заменить нулем). При математическом моделировании колебаний сплошных сред встречается соответствующая задача на собственные значения

$$\int_{\beta}^{\alpha} K(t,s)u(s)ds = \lambda u(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Собственным значениям ядра  $K$ , определяющим частоту так называемых нормальных колебаний среды, называется любое значение  $\lambda$ , при котором последнее уравнение имеет ненулевые решения; сами эти решения, определяющие *моды* (формы) таких колебаний, называются *собственными функциями*; при этом независимой переменной служит геометрическая координата.

Встречаются и более сложные интегральные уравнения. Методы исследования и приближенного решения интегральных уравнений в принципе это, те же методы, что и для дифференциальных уравнений.

Наибольшей скоростью сходимости среди применяемых в САПР методов обладает *метод Ньютона*, основанный на линеаризации исходной системы уравнений и вычислении нового приближения к корню путем решения линеаризованной системы. Однако метод Ньютона имеет ограниченную область сходимости – итерации сходятся, если начальное приближение было выбрано в достаточно малой окрестности корня. Но заранее неизвестны ни положение корня, ни размеры области сходимости.

Поэтому в САПР находят применение также итерационные методы, для которых имеются сравнительно простые способы обеспечения сходимости. Недостаток этих методов – меньшая скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени. Основными представителями этих методов являются *релаксационные методы*. Среди других методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений в САПР находят применение: *метод установления*, заключающийся в сведении задачи к системе ОДУ, решаемой методами численного интегрирования; *метод продолжения* решения по параметру, заключающийся в многократном решении задачи, например методом Ньютона при управлении положением области сходимости с помощью некоторого параметра; *методы оптимизации*, заключающиеся в минимизации нормы вектора навязок  $\|F(V)\|$ , так как очевидно, что в точке корня эта норма минимальна и равна нулю. Основным методом решения нелинейных алгебраических уравнений в САПР следует считать метод Ньютона, используемый в рамках метода установления или метода продолжения решения по параметру. Для решения систем линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) в различных процедурах автоматизированного проектирования в основном используется



*метод Гаусса*, заключающийся в последовательном исключении неизвестных исходной системы. В задачах автоматизированного проектирования, характеризующихся большой размерностью, метод Гаусса следует применять при учете свойства разреженности матриц коэффициентов, иначе затраты машинного времени и памяти могут оказаться чрезмерно большими. В первую очередь это относится к системам уравнений, получаемым в результате дискретизации и алгебраизации дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку порядок  $p$  системы алгебраических уравнений здесь может достигать значений  $10^3$  и выше. Так, при  $p = 10^3$  полная матрица коэффициентов состоит из  $10^6$  элементов. Однако разреженность матриц в таких системах, оцениваемая количеством нулевых элементов, отнесенным к общему числу элементов, близка к единице. Благодаря этому учет разреженности позволяет решать системы ЛАУ порядка  $10^3 \dots 10^4$  с приемлемыми затратами вычислительных ресурсов. Численное интегрирование систем ОДУ возможно как явными, так и неявными методами. Большинство методов интегрирования является ограниченно устойчивым. Это означает, что на величину шага интегрирования накладываются ограничения, несоблюдение которых ведет к резкому искажению числовых результатов, колебанию числового решения вокруг истинного с нарастающей амплитудой, что обычно приводит к переполнению разрядной сетки ЭВМ и прекращению вычислений.

*Явные методы* наиболее легко реализуются, приводят к сравнительно небольшому объему вычислений на одном шаге интегрирования. Однако для соблюдения условий устойчивости приходится уменьшать шаг настолько, что увеличившееся число шагов может сделать недопустимо большими общие затраты машинного времени. Поэтому явные методы, к которым относятся известные методы Адамса-Башфорта и явные варианты метода Рунге-Кутты, оказываются малонадежными и в САПР находят ограниченное применение. Основными методами численного интегрирования систем ОДУ в САПР стали *неявные методы*. Среди них имеются методы, обеспечивающие устойчивость вычислений при любом шаге  $h > 0$ . Это неявные методы первого и второго порядков точности. В САПР рекомендуется применять неявные методы второго порядка точности или методы с автоматически меняющимся порядком, так как именно эти методы обеспечивают наилучшее компромиссное удовлетворение противоречивых требований к точности и скорости вычислений.

*Упрощение уравнений.* Имеется много способов упрощения математических моделей. Можно упрощать геометрические формы, заменять заданные зависимости между величинами на более простые и т. д. Мы здесь остановимся на упрощении уравнений, составляющих математическую модель. Основные способы упрощения таких уравнений состоят в переходе к безразмерным величинам, в отбрасывании малых членов, в замене заданных функции на постоянные значения и т. п.

**Пример.** Рассмотрим вынужденные линейные гармонические колебания суппорта, которые для простоты будем записывать в комплексной форме:

$$m \frac{d^2 x}{df^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = Ae^{i\omega f} \quad (2.3)$$

где  $m, f, k$  соответственно масса, коэффициенты демпфирования и жесткости;  $A, \omega$  - амплитуда и частота вынуждающей силы. Решение можно искать в виде

$$x = Be^{i\omega f} \quad (2.4)$$

Комплексная амплитуда  $B$  колебаний зависит от всех пяти параметров  $m, f, k, A, \omega$ , что делает, казалось бы, невозможное сколько-нибудь полное представление этой зависимости в табличном или графическом виде. Сделаем в (2.3) и (2.4) замену переменных

$$x = x_x x', \quad t = t_x t',$$

где  $x_x, t_x$  - характерные значения координаты и времени,

$x', t'$  - соответствующие безразмерные переменные.

Тогда:

$$\frac{mx_x}{t_x^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{fx_x}{t_x} \frac{dx'}{dt'} + kx_x x' = Ae^{i\omega' f'} \quad (2.5)$$

$$x' = B'e^{i\omega' f'}, \quad \omega' := \omega t_x, \quad B' := B/x_x$$

Разделив уравнение (2.5) на коэффициент при старшей производной, получаем безразмерный вариант уравнения (2.3)

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \left( \frac{ft_x}{m} \right) \frac{dx'}{dt'} + \left( \frac{kt_x^2}{m} \right) x' = \left( \frac{At_x^2}{mx_x} \right) e^{i\omega' f'} \quad (2.6)$$

Он включает четыре безразмерных параметра (три, взятых в скобки, а также  $\omega'$ ); однако путем выбора  $x_x, t_x$  их число можно уменьшить на два. Это можно сделать различными способами в соответствии с условиями задачи и целями исследования.

Пусть нас интересует в основном зависимость амплитуды вынужденных колебаний от трения и частоты возбуждения, причем силы инерции и упругости считаем примерно одного порядка. Тогда естественно положить в уравнение (2.6) безразмерные коэффициент упругости  $kt_x^2/m$  и амплитуду внешнего воздействия  $At_x^2 mx_x$  равными единице, откуда получаем

$$t_x = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad x_x = \frac{A}{k},$$

Таким образом, мы связываем здесь характерное время с периодом свободных колебаний при отсутствии трения, тогда как характерное значение координаты просто равно ее статическому значению, если внешняя сила постоянна. Выбор таких единиц масштаба определила постановка задачи.

После указанной замены уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + f' \frac{dx'}{dt'} x' = e^{i\omega' f'} \quad (2.7)$$

и содержит всего два безразмерных параметра  $f' = f/\sqrt{mk}$  и  $\omega' = \omega\sqrt{m/k}$ . Зависимость безразмерной амплитуды  $|B'|$  колебаний от безразмерной частоты  $\omega'$  («амплитудно-частотную характеристику») при различных значениях безразмерного коэффициента трения  $f'$  нетрудно представить графически. Зная зависимость  $|B'| = F(\omega, f')$ , мы получаем и соотношение между размерными величинами

$$|B| = \frac{A}{k} F\left(\frac{\sqrt{m}}{k} \omega, \frac{f}{\sqrt{mk}}\right).$$

Проведенное преобразование дает, в частности, ответ на вопрос, при котором условие в рассматриваемой задаче можно считать трение малым и упростить уравнение (2.3), отбросив средний член в левой части. Ответ « $f$  должно быть мало», хотя и правильный, требует уточнения, так как малость размерной величины имеет смысл только в сравнении с другой величиной той же размерности. Из уравнения (2.7) мы получаем более полный ответ: должно быть мало  $f'$  или, что то же, должно быть  $f \ll \sqrt{mk}$ . Что это конкретно означает, зависит от допустимого расхождения между приближенным и точным значениями амплитуды колебаний и выясняется из сравнения амплитудно-частотных характеристик для данного  $f'$  и для  $f' = 0$ .

Так, при  $f' < 0,1$  (т.е. при  $f' < 0,1\sqrt{mk}$ ) указанное расположение имеет порядок процентов.

## 2.2. Моделирование логистической поддержки изделия в САПР

Современная концепция развития CALS-технологий предусматривает, помимо информатизации процессов разработки и производства изделий, еще и их сопровождение на постпроизводственных стадиях жизненного цикла (закупка и ввод изделий в действие, эксплуатация, сервисное обслуживание и ремонт, поставка запасных частей и т. д.). Этим вопросам, получившим название интегрированной логистической поддержки (Integrated Logistic Support), пока уделяется недостаточное внимание. Развитие этого направления связывают с возможностью и необходимостью развития впоследствии так называемой концепции TQM (Total Quality Management - всеобъемлющее управление качеством), на которой будут основываться конкретные рекомендации по построению систем качества предприятия.

По данным научно-исследовательского центра «Прикладная логистика» в США (в различных отраслях промышленности) интегрированная логистическая поддержка изделий на постпроизводственном этапе обеспечивает сокращение времени поставок новых изделий на рынок на 25...75%.

Целями интегрированной логистической поддержки являются: оказание влияния на разработку изделия с целью обеспечения в будущем его оптимальной эксплуатации; определение и уточнение ресурсов обеспечения; получение необходимых ресурсов; предоставление ресурсов обеспечения по минимальной цене в течение срока службы техники.

Для создания интегрированной логистической поддержки в международном CALS-сообществе разрабатывается стандарт, описывающий ключевые виды ее данных и процессов.

В соответствии с этим стандартом информационная логистическая поддержка включает в себя:

- проработку вопросов логистической поддержки изделия на стадии его проектирования: определение требований к готовности изделия, определение допустимых затрат и ресурсов, необходимых для поддержания изделия в нужном состоянии, создание баз данных, необходимых для отслеживания перечисленных параметров в ходе

жизненного цикла изделия;

- создание электронной технической документации, необходимой для процессов закупки, поставки, ввода в действие, эксплуатации, сервисного обслуживания и ремонта изделия. Создание и ведение «электронных досье» на эксплуатируемые изделия с целью использования данных о ходе эксплуатации совместно с электронной эксплуатационной документацией для определения в каждый момент времени фактического объема работ по обслуживанию и потребности в материальных ресурсах (запасные части, материалы, оборудование);

- применение стандартизованных процессов поставки изделий и средств материально-технического обеспечения, создание компьютерных систем информационной поддержки этих процессов;

- применение стандартизованных решений по кодификации изделий и предметов снабжения;

- создание и применение компьютерных систем планирования потребностей в средствах материально-технического обеспечения формирования заявок и управления контрактами на поставку средств материально-технического обеспечения.

Одним из самых затратных элементов этапа производства является закупка комплектующих. Вместе с тем, именно в нем существует реальная возможность снижения непроизводительных затрат, оптимизации и контроля. Стоимость разработки и производства может быть снижена на 20-30% путем выбора лучших поставщиков, автоматизации документооборота, повышения скорости обработки заказов. Так как в процессе комплектации изделия участвуют многие поставщики, то оптимальный (возможно, единственный) способ объединить их в единое информационное пространство - это электронный бизнес (E-business), электронная торговая площадка с доступом каждого участника через глобальную сеть Интернет.

В результате внедрения системы производитель получает следующие эффекты:

- контроль затрат на закупку; соотнесение с имевшимися альтернативами;

- автоматизацию и повышение скорости и качества документооборота; реализацию элементов технологии CRM (Customer Relationship Management - управление отношениями с клиентами) и снижение за счет этого административных затрат на 10 % и затрат на снабжение на 10-20 %;

- возможность проведения анализа рынка и выбора поставщиков.

Интегрированная логистическая поддержка изделия на этапе эксплуатации включает организацию технического обслуживания и ремонта; управление снабжением и запасами; управление вспомогательным оборудованием; сбор, обработку и анализ данных о надежности; управление персоналом, тренировками, обучением; ведение электронной эксплуатационной документации.

В ходе эксплуатации клиент (потребитель) вносит в единое информационное пространство: эксплуатационные данные (замеры параметров технического состояния, счетчики наработки); историю выполненных работ; случаи отказов и результаты расследования их причин; данные о заменах деталей; заявки на снабжение.

В результате внедрения логистической поддержки производитель получает возможность:

- оперативного сбора данных о надежности изделия (ремонтоспособности, восстанавливаемости, готовности);
- сбора данных об отказах, причинах и отказавших деталях с целью коррекции номенклатуры поставщиков и конструкции узлов;
- планирования сроков проведения заводских ремонтов (на основании наработки или технического состояния), выполняемых производителем;
- контролировать затраты на эксплуатацию (на основании отчетов о всех выполненных работах по техническому обслуживанию и ремонту) и оптимизировать в целом затраты, связанные с жизненным циклом;
- эффективного распространения новых версий электронных эксплуатационных документов, в том числе и интерактивных электронных руководств.

В связи с изложенным приводится следующая схема взаимодействия различных участников жизненного цикла изделия в едином информационном пространстве (рис.2.1), направленного на обеспечение его интегрированной логистической поддержки.

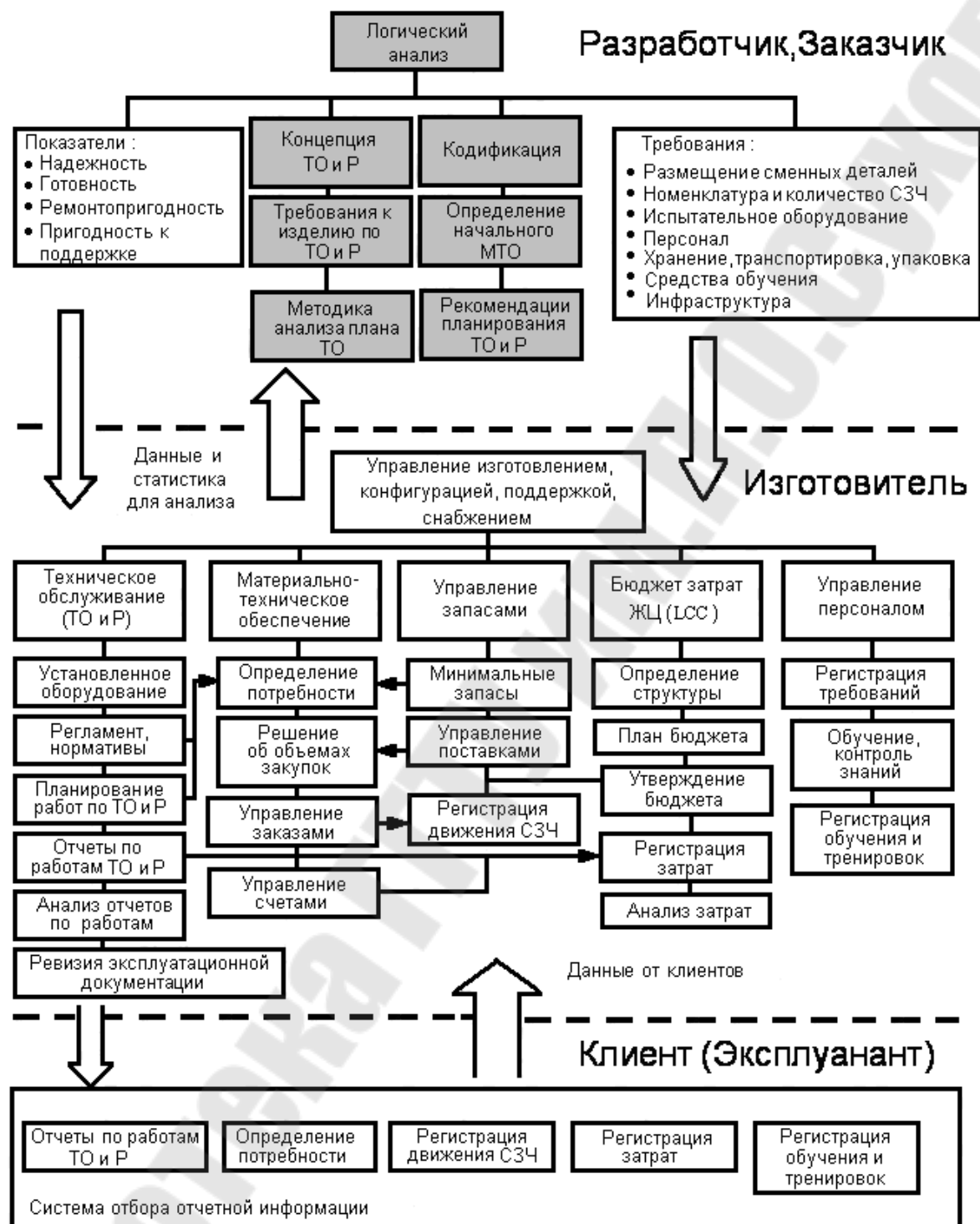


Рис.2.1. Структура взаимодействия участников жизненного цикла в едином информационном пространстве

### 2.3. Алгоритм построения САПР, реализующей восходящее проектирование

Для реализации восходящего принципа все детали разделяются на элементы, и эти элементы классифицируются на нагрузочные, базовые (опорные), соединительные. Для каждого нагрузочного элемента составляется расчетная схема, и определяются конструктивные параметры этого элемента.

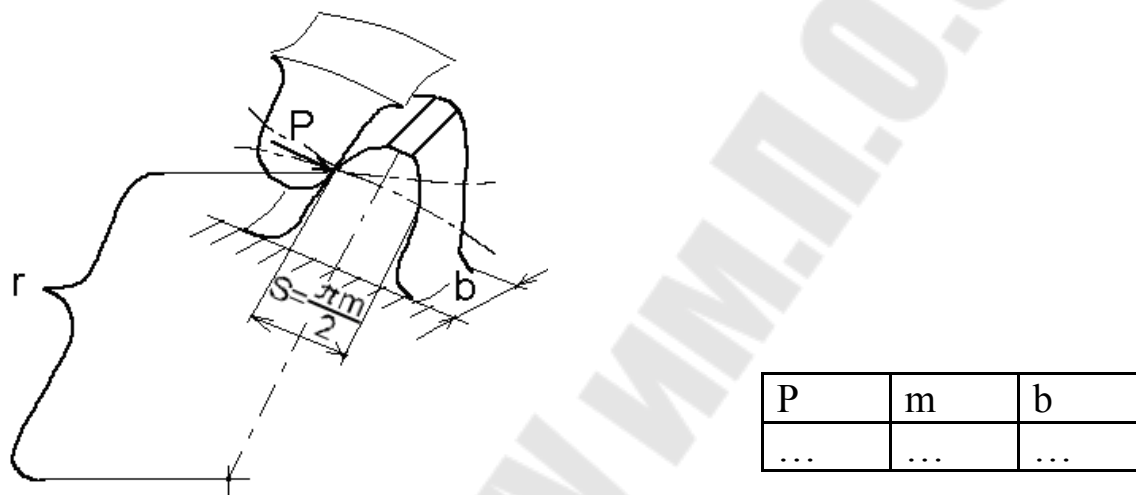


Рис. 2.2. Расчетная схема нагрузочного элемента (зуба зубчатого колеса) и его конструктивные параметры.

Зная параметры отдельных элементов, определяют геометрические параметры деталей. Из полученных данных формируется база. Эта база (электронная) включает в себя наименования параметров, геометрические размеры и допускаемые нагрузки. Такая база формируется на все виды деталей: стержневые – валы, оси, шпиндели; фланцевые – кольца, крышки и корпусные детали. Исходя из технического задания, на проектируемый узел выбираются из базы данных необходимые детали, и формируется база данных типовых узлов (шпиндельные узлы, шпиндельные бабки, коробки подач, фартуки, передачи винт-гайка). Такой подход к формированию САПР требует большую подготовительную работу по созданию баз данных. Недостатком является сложность разработки кодов на отдельные детали, элементы и узлы, и сложность работы с этими кодами. Для простоты реализации такая система чаще всего используется в диалоговом режиме. Для упрощения кодов сборочных единиц формируются детали-представители каждого класса. Деталь-



представитель зависит от технического задания и номенклатуры типовых деталей данного класса. Из типовых деталей выделяют отдельные элементы.

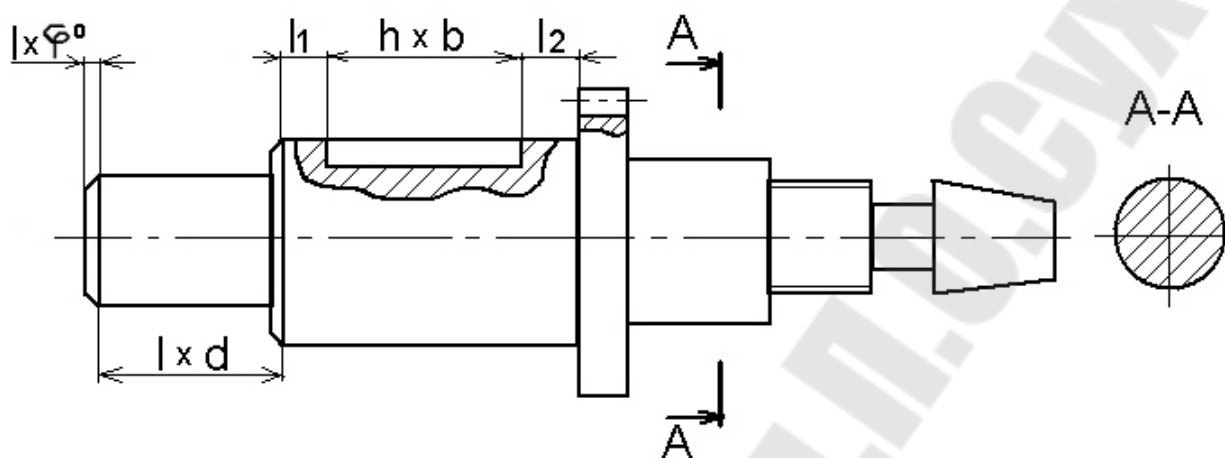


Рис. 2.3. Условный образ обобщенной детали-представителя

Из отдельных типовых деталей и элементов формируется условный образ обобщенной детали. На этой детали-представителе проставляются все размеры и технические требования. Затем нумеруем все размеры и все обозначения этих размеров. Численное значение размеров каждого элемента определяют из номенклатуры представленных деталей. Затем формируют базу данных и записывают код детали-представителя. Полученную деталь-представитель графически выполняют в электронном варианте. При реализации данной системы из общего кода детали-представителя удаляются те элементы, которые отсутствуют на конкретной детали. По полученному коду выбирают численные значения размеров отдельных участков из базы данных и технические требования к ним. По этим значениям формируется конкретная деталь и изображается графически. Недостаток – сложность кодов деталей.

## 2.4. Алгоритм построения САПР, реализующей нисходящее проектирование

1. Техническое задание на конкретный механизм. Это техническое задание включает в себя требования к геометрической точности,

статической точности, динамической точности, допускаемой нагрузки (моменты, силы), условия эксплуатации и условия поддержания их в работоспособном состоянии.

2. По полученному техническому заданию формируются схемы рабочих движений, установочных перемещений, холостых ходов отдельных механизмов.

3. Полученная траектория движений позволяет разработать компоновочный вариант проектируемого станка или механизма. Формируется база данных компоновочных вариантов по основному параметру.

4. Производится оценка выбранных компоновочных вариантов по габаритам рабочей зоны, по производительности, по удобству обслуживания, по приспособленности к автоматизации, по обеспечению требуемой точности, виброустойчивости и надежности.

5. Полученные результаты позволяют разработать принципиальные и кинематические схемы станков и механизмов. Эти схемы оптимизируются по условным габаритным размерам отдельных элементов.

6. Определяются геометрические параметры отдельных элементов кинематики путем их силового анализа.

7. Формируются компоновки отдельных узлов и определяются их габаритные и присоединительные размеры.

8. Проектируются устройства и механизмы изменения частот вращения отдельных элементов с учетом предполагаемых систем управления оборудованием.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СИСТЕМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

#### 3.1. Плоское напряженное состояние

Так как граничные условия имеют сложный характер, то решить аналитически дифференциальные уравнения четвертого порядка (степени) с достаточной точностью практически невозможно, поэтому напряженно-деформированное состояние определяется численными методами.

*Метод конечных элементов.*

1. Выполняем сечение в зоне обработки, которое разделим на конечные элементы (треугольники).

2. Вводим обозначения конечных элементов и их вершин. В точках 1-7 прикладываются внешние силы, действующие в направлении осей координат (рис. 3.1).

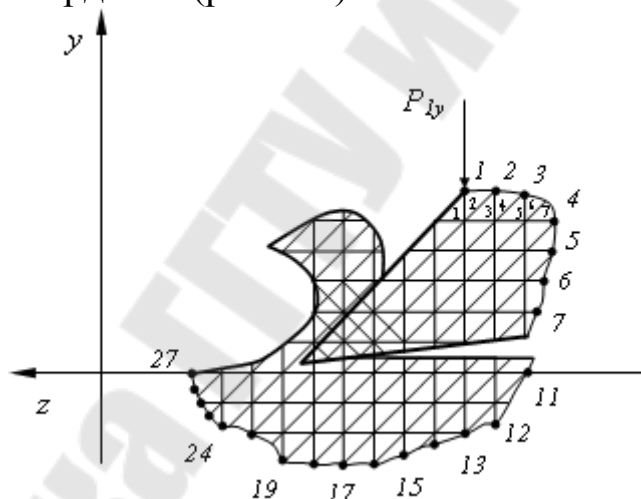


Рис. 3.1. Расчетная схема

3. Введём систему координат  $uoz$ .

4. Для обеспечения статического равновесия вводились граничные условия: в узловых точках 11-27 принимались перемещения равными нулю

$$u_{11...27} = 0$$

$$v_{11...27} = 0'$$

где  $u, v$  – соответственно перемещения узлов вдоль осей  $ou$  и  $oz$

Для раскрытия общей методики выносим первый треугольник, для которого известны координаты вершин  $y, z$ , на которые действуют силы  $P_{i,j,k}$  (рис. 3.2).

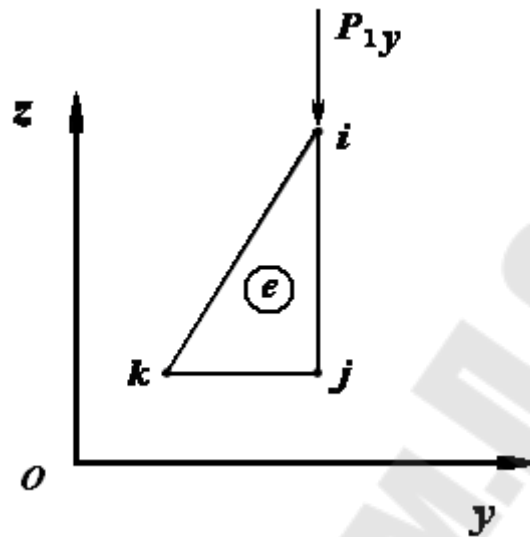


Рис. 3.2. Расчетная схема

В этом случае равновесие данного треугольника получили из условия равенства работ внутренних и внешних сил

$$a_{\text{внут}} = a_{\text{внешн}}, \quad (3.1)$$

Затем выражаем работу внешних сил через обобщенные перемещения и силы, действующие на узлы элементов

$$a_{\text{внешн}} = P_j \cdot \delta_j + P_i \cdot \delta_i + P_k \cdot \delta_k \quad (3.2)$$

где

$$P_i = \begin{Bmatrix} P_{iy} \\ P_{iz} \end{Bmatrix} \dots P_k = \begin{Bmatrix} P_{ky} \\ P_{kz} \end{Bmatrix};$$

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \dots \delta_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}.$$

Тогда выражение (3.2) в матричном виде:

$$[a_{\text{внешн}}] = [P_i \quad P_j \quad P_k] \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{bmatrix}$$

Обозначив через  $[P_e]$  и  $[\delta]$  соответственно матрицу нагрузок и перемещений элемента, получим

$$[a_{\text{внешн}}] = [P_e] \cdot [\delta_e]^T \quad (3.3)$$

Затем работу внутренних нагрузок выражаем через напряжения и деформации

$$a_{e_{внутр}} = \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \sigma_{yz} \cdot \varepsilon_{yz}$$

В матричной форме: 
$$[a_{e_{внутр}}] = [\sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz}] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

$$[a_{e_{внутр}}] = [\sigma_e] \cdot [\varepsilon_e]^T \quad (3.4)$$

Приняв, что связь между напряжением и деформациями пропорциональная, т.е. подчиняется закону Гука, т.е. для плоского напряжённого состояния:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_y)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1-\mu)} \cdot \varepsilon_{yz}$$

Эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix},$$

тогда в сокращенной матричной форме

$$[\sigma_e] = [D_e] \cdot [\varepsilon_e] \quad (3.5)$$

Связь между деформациями и напряжениями в дифференциальной форме имеет вид:

$$\varepsilon_y = \frac{du}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dv}{dz}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}$$

Эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dy} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dz} & \frac{d}{dy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

тогда в сокращенной матричной форме

$$[\varepsilon_e] = [C_e] \cdot [\delta_e] \quad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.5) и в (3.4), получили

$$[a_{e \text{ внутр}}] = [D_e] \cdot [C_e] \cdot [\delta_e] \cdot [C_e]^T \cdot [\delta_e]^T \quad (3.7)$$

Подставив (3.7) и (3.3) в (3.1), получили выражение для внешних сил

$$[P_e] = [D_e] \cdot [C_e] \cdot [C_e]^T \cdot [\delta_e]$$

Обозначив через  $[K_e] = [D_e][C_e][C_e]^T$ , получили окончательное выражения

$$[P_e] = [K_e] \cdot [\delta_e],$$

где  $[P_e]$  – матрица внешних сил;  $[K_e]$  – матрица жёсткости.

Тогда для всего рассматриваемого примера (рис. 3.1) получили систему

$$\sum_{e=1}^n [P_e] = \sum_{e=1}^n [K_e] \cdot [\delta_e],$$

из которой определяются перемещения.

$$\sum [\delta_e] = \sum [P_e][K_e]^{-1},$$

Определив которые, можно найти напряжения по выражению (3.5).

### 3.2. Осесимметричная задача

Осесимметричное напряженно-деформированное состояние тела определяется компонентами вектора напряжений:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_t, \tau_{rz}\} \quad (3.8)$$

где  $\sigma_r$  - радиальное напряжение;

$\sigma_z$  - осевое напряжение;

$\sigma_t$  - окружное напряжение;

$\tau_{rz}$  - касательное напряжение.

Указанные компоненты вектора напряжений вычисляются по закону Гука для осесимметричного напряженного состояния:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z + \mu\varepsilon_t];$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z].$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{rz}$$

Связь вектора перемещений и вектора деформаций  $\{\varepsilon\}$ , которая в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_t, \gamma_{rz}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{u}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right\}, \quad (3.9)$$

осуществляется в соответствии с приведенным выше равенством посредством матрицы-оператора  $[D]$ . Если тело аппроксимировано осесимметричными конечными элементами (рис. 3.3), например, треугольными с линейной функцией формы, то такая матрица имеет структуру

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Для треугольного осесимметричного КЭ вектор узловых перемещений и матрица формы определяются так же, как и для плоского треугольного КЭ, только последняя будет иметь вид  $[\Phi] = [[\Phi]_i [\Phi]_j [\Phi]_k]$ ,

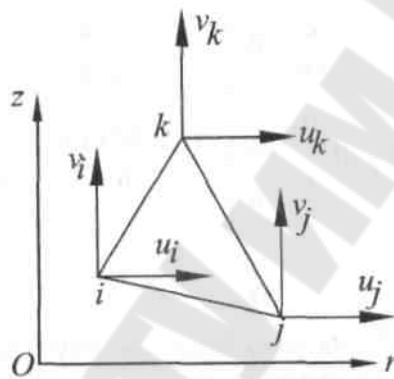


Рис.3.3. Схема перемещений конечного элемента

$$[\Phi]_i = (a_i + b_i r + c_i z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\Phi]_j = (a_j + b_j r + c_j z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\Phi]_k = (a_k + b_k r + c_k z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а коэффициенты функции формы определяются по зависимостям, аналогичным таковым для плоской задачи теории упругости:

$$a_i = (r_j z_k - r_k z_j) \frac{1}{2\Delta}; \quad b_i = (z_j - z_k) \frac{1}{2\Delta}; \quad c_i = (r_k - r_j) \frac{1}{2\Delta} \quad \text{и т.д.}$$

При подстановке в выражение всех приведенных равенств для расчета матрицы формы  $[\Phi]$  и вектора узловых сил  $\{U\}$  возникает



проблема, связанная с тем, что значения отдельных коэффициентов матрицы градиентов  $[B] = [D][\Phi] = [[B]_i [B]_j [B]_k]$  становятся зависимыми от выбора точки внутри КЭ. Это следует из того, что

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_i + b_i r + c_i z) & 0 \\ 0 & (a_i + b_i r + c_i z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ \left(\frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i \cdot z}{r}\right) & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}.$$

Матрица Гука для треугольного осесимметричного КЭ определяется равенством

$$[A] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix},$$

а матрица жесткости - формулой

$$[K] = 2\pi \int [B]^T [A] [B] r dr dz.$$

Интеграл берется по всей кольцевой области, описываемой осесимметричным КЭ при своем вращении вокруг оси  $Oz$ . Однако этот интеграл не вычисляется столь же просто, как при решении плоской задачи, поскольку (как отмечено выше) матрица градиентов является зависимой от выбора точки внутри элемента. Поэтому рассматриваются два основных приема практического вычисления матрицы жесткости. Точный способ предполагает выполнение перемножения матриц под знаком интеграла с последующим почленным интегрированием численными методами получаемых там функций. При реализации приближенного способа матрица  $[B]$  вычисляется так же, как для плоской задачи МКЭ для центра масс

треугольного элемента с координатами

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}; \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \quad (3.11)$$

Тогда матрица жесткости определяется:

$$[K] = [B]^T [A][B] \bar{r} \Delta 2\pi \quad (3.12)$$

Специалисты утверждают, что вычисления матрицы жесткости осесимметричного КЭ по формуле (3.12) с учетом соотношений (3.11) приводит к приемлемым результатам, если аппроксимация исследуемой области элементами согласуется с ожидаемым распределением напряжений.

Вектор нагрузки осесимметричного КЭ определяется в общем случае по формуле:

$$\{Q\} = \iiint_V [\Phi]^T \{P\} dV + \iint_S [\Phi]^T \{F\} dS + \iiint_V [B]^T [A] \{\epsilon_0\} dV + \{P_1\} \quad (3.13)$$

В равенстве (3.13) помимо вектора собственно сосредоточенных узловых сил  $\{P_1\}$  присутствуют объемный интеграл  $\iiint_V [\Phi]^T \{P\} dV$ , который описывает действие сил, распределенных по объему элемента (например, инерционных); интеграл  $\iint_S [\Phi]^T \{F\} dS$ , описывающий действие сил, распределенных по поверхности  $S$ , и интеграл  $\iiint_V [B]^T [A] \{\epsilon_0\} dV$ , учитывающий действие нагрузки, обусловленной начальной температурной деформацией  $\{\epsilon_0\}$ .

Если коэффициент линейного расширения материала конечного элемента равен  $\alpha$ , а температура рассчитываемого тела равна  $T$ , то  $\{\epsilon_0\} = \alpha T \{1 \ 1 \ 1 \ 0\}$ , а интеграл, описывающий тепловое расширение тела, определится

$$\iiint_V [B]^T [A] \{\epsilon_0\} dV = \frac{\alpha E T}{1 - 2\mu} [B]^T \{1 \ 1 \ 1 \ 0\} 2\pi \bar{r} \Delta$$

Интеграл, описывающий объемные силы, вычисляется следующим образом:

$$\iiint_V [\Phi]^T \{P\} dV = \frac{2\pi\Delta}{12} \begin{Bmatrix} (2r_i + r + r_k)P_r \\ (2r_i + r_j + r_k)P_z \\ (r_i + 2r_j + r_k)P_r \\ (r_i + 2r_j + r_k)P_z \\ (r_i + r_j + 2r_k)P_r \\ (r_i + r_j + 2r_k)P_z \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

где  $P_r$  и  $P_z$  - составляющие вдоль осей  $Or$  и  $Oz$  глобальной системы координат результирующей объемной силы, нагружающей расчетный КЭ (фактически это центробежная сила инерции, обусловленная вращением тела вокруг оси симметрии модели, и сила инерции, обусловленная его движением с ускорением вдоль этой оси).

Формула (3.14) показывает, что (в отличие от случая плоского напряженно-деформированного состояния) узловые нагрузки, обусловленные действием результирующей объемной силы, не равны между собой: большая часть этой нагрузки прикладывается к узлам, удаленным от оси симметрии модели.

### 3.3. Нестационарные задачи

Такие задачи относятся к классу динамических и называются также задачами о переходных процессах, описываемых системой дифференциальных уравнений, которой соответствует матричное равенство

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{Q(t)\}, \quad (3.15)$$

где  $[M]$  - матрица масс системы;

$[C]$  - матрица демпфирования;

$[K]$  - матрица статической жесткости;

$\{\ddot{x}\}, \{\dot{x}\}, \{x\}$  - векторы виброускорений, виброскоростей и виброверемещений узлов системы;

$\{Q(t)\}$  - вектор внешних узловых сил (возмущающего воздействия), зависящих от времени.

В задаче требуется найти  $\{x\} = f(t)$ . Поскольку и вектор  $\{Q(t)\}$ , и вектор искомых неизвестных  $\{x\}$  зависят от времени (рис. 3.4), сводить дифференциальные уравнения системы (3.15) к решению

системы линейных алгебраических уравнений (как в модальной задаче или статической задаче) недопустимо.

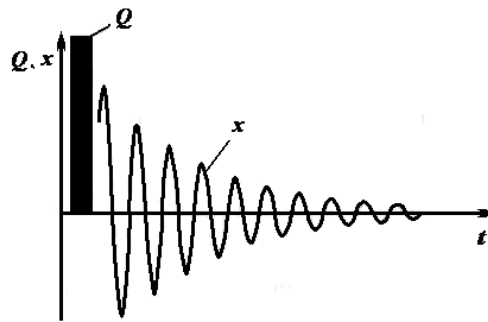


Рис. 3.4. Переходный процесс  $x = f(t)$  в системе при импульсном воздействии  $Q$

Решение МКЭ используется здесь для интегрирования дифференциальных уравнений.

Другим типом являются нестационарные задачи с переменными (зависимыми от вектора  $\{x\}$ ) матрицами коэффициентов.

Например, в станкостроении многие детали работают при повышенных температурах, причем наблюдается зависимость свойств материала от температуры (тогда при решении задачи теплопроводности теплофизические свойства материала становятся зависимыми от решения) даже без учета времени. В таком случае основное уравнение МКЭ может быть записано в виде:

$$[K(\{T\})]\{T\} = \{Q\}$$

Для решения нестационарных задач используются метод главных координат или итерационные (шаговые) методы. Метод главных координат устойчиво работает при возможности разложения компонент вектора  $\{Q(t)\}$  в ряд Фурье.

При этом составляющие высших порядков возмущающего воздействия должны быть несущественными. Итерационные методы применяются во всех остальных случаях.

Смысл итерационных методов заключается в том, что решение на каждом последующем шаге находится на основе предыдущего. Одной из достаточно широко распространенных схем итерационного решения является так называемая схема Вилсона. Ее основное положение заключается в том, что выражение для 1-й производной от искомого решения в момент времени  $t$  и  $(t + \tau)$  связаны рядом Тейлора:

$$\{\dot{x}\}_{t+\tau} = \{\dot{x}\}_t + \tau\{\ddot{x}\}_t + \frac{\tau^2}{2}\{\ddot{\ddot{x}}\}_t + 0\{\tau^3\},$$

где 0 - обозначает допустимой погрешности.

Выражение для второй производной имеет вид

$$\{\ddot{x}\}_{t+\tau} = \{\ddot{x}\}_t + \frac{\tau^2}{2}\{\ddot{\ddot{x}}\}_t + 0\{\tau^2\}$$

Исключим из приведенных выражений  $\{\ddot{x}\}_t$ :

$$\{\dot{x}\}_{t+\tau} = \{\dot{x}\}_t + \frac{\tau^2}{2}(\{\ddot{x}\}_t + \{\ddot{x}\}_{t+\tau}) + 0\{\tau^2\}$$

Аналогично для  $\{x\}$ :

$$\{x\}_{t+\tau} = \{x\}_t + \tau\{\dot{x}\}_t + \frac{\tau^2}{2}\{\ddot{x}\}_t + \frac{\tau^3}{6}\{\ddot{\ddot{x}}\}_t + 0\{\tau^4\}$$

Подстановка полученных выражений в исходное уравнение МКЭ приводит к итоговому равенству:

$$[S]\{x\}_{t+\tau} = \{Q\}_{t+\tau},$$

где

$$[S] = [K] + \frac{3}{\tau}[C] + \frac{6}{\tau^2}[M];$$

$$\{Q\}_{t+\tau} = \{Q\}_t + [M]\left(2\{\ddot{x}\}_t + \frac{6}{\tau}\{\dot{x}\}_t + \frac{6}{\tau^2}\{x\}_t\right) + [C]\left(\frac{\tau}{2}\{\ddot{\ddot{x}}\}_t + 2\{\ddot{x}\}_t + \frac{3}{\tau}\{\dot{x}\}_t\right).$$

### 3.4. Нелинейные задачи

При переходе напряженно-деформированного состояния из упругой в упругопластическую область, зависимость между напряжениями и деформациями  $\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$  перестает быть линейной. Это может иметь место, например, при применении материалов со свойствами, зависящими от деформаций и т. д. В таком случае говорят о нелинейной задаче МКЭ. Различают физически нелинейные задачи и геометрически нелинейные задачи. В том и другом случаях математически это выражается в том, что матрица жесткости как отдельного КЭ, так и всей системы становится зависящей от решения.

В физически нелинейных задачах от деформаций является зависимой матрица Гука, т. е.

$$\{\sigma\} = [A(\varepsilon)]\{\varepsilon\}.$$

Так как вектор деформаций определяется при помощи вектора узловых перемещений, то

$$\{\sigma\} = [A(U)][B(U)]\{U\}.$$

Геометрически нелинейные задачи иначе называются задачами о больших деформациях, задачами об устойчивости. В этом случае условия равновесия конструкции в деформированном состоянии отличаются от таковых до приложения нагрузок, а от перемещений становится зависящей матрица градиентов.

Решение нелинейных задач осуществляется итерационными методами - методом переменной жесткости (иначе этот метод называется методом переменных параметров) или методом начальных деформаций (напряжений).

Для решения основного уравнения МКЭ методом переменной жесткости первоначально определяется начальное решение  $\{U\}_0$ , которое часто находится как результат решения линейной задачи. Затем находится матрица жесткости  $[K(U)_0]$  и далее вычисляется следующее приближение  $\{U\}_1$  по формуле:

$$\{U\}_1 = [K(U)_0]^{-1}\{Q\}$$

Процесс таких вычислений на каждом  $n$ -м шаге по общей формуле:

$$\{U\}_n = [K(U_{n-1})]^{-1}\{Q\}$$

повторяется до тех пор, пока перемещения не перестанут изменяться.

Преимуществом метода переменной жесткости является возможность использования стандартных процедур линейной теории МКЭ. Недостатком является увеличение времени решения и потребность в значительной объеме дискового пространства, поскольку матрицы жесткости конструкции на каждом шаге итерационного процесса необходимо формировать заново.

Основа метода начальных напряжений заключается в представлении матрицы жесткости конструкции в виде суммы «линейной»  $[K]_l$  и «нелинейной»  $[K]_{nl}$  частей.

Тогда основное уравнение МКЭ запишем в виде:

$$([K]_l + [K]_{nl})\{U\} = \{Q\},$$

откуда

$$[K]_l\{U\} = \{Q\} - [K]_{nl}\{U\}.$$

Последовательные приближения осуществляются по алгоритму

$$[K]_l \{U\}_n = \{Q\}_{n-1},$$

где  $\{Q\}_{n-1} = \{Q\} - [K(U)_{n-1}]_{nl} \{U\}_{n-1}$ .

Практическое решение уравнения МКЭ обычно реализуется с помощью вычислительных процедур Ньютона-Рафсона (рис. 3.5).

После вычисления на первом шаге решения  $\{U\}_1$ , соответствующего упругой задаче с такими же граничными условиями, вычисляется так называемая невязка

$$\{\delta\} = \{Q\} - [K]_l \{U\}_1 - [K]_{nl} \{U\}_1$$

Далее вектор  $\{U\}$  на каждом  $n$ -м шаге последовательно получает приращения  $\{\Delta U\}$ , определяются новые значения невязок

$$\{\delta\}_n = \{Q\} - [K]_l \{U\}_n - ([K]_{nl})_{n-1} \{U\}_n \text{ и т.д.}$$

Более распространенным является так называемый модифицированный метод Ньютона-Рафсона с переменным шагом [3], схема которого показана на рис. 3.6.

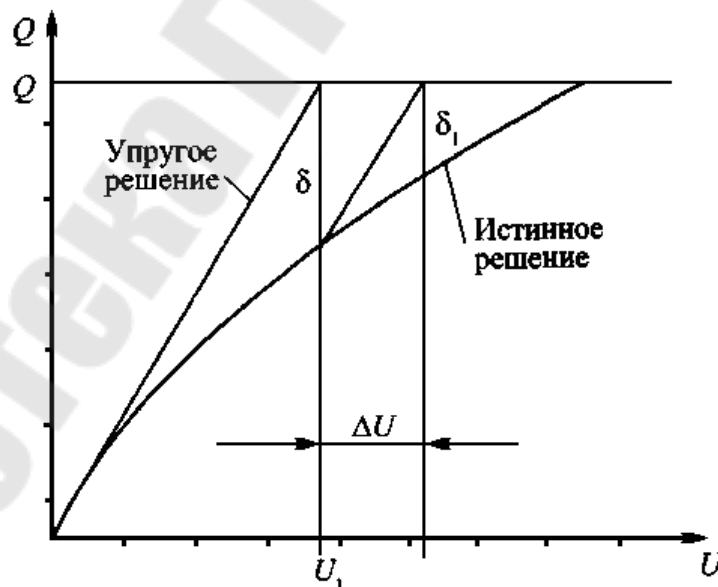


Рис. 3.5. Схема к расчету

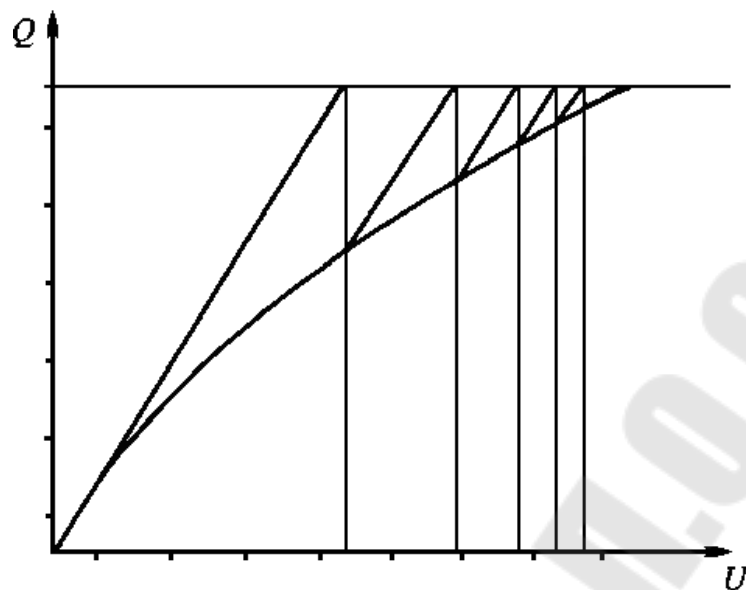


Рис. 3.6. Схема модифицированного метода Ньютона-Рафсона

### 3.5. Моделирование параметров монтажа оборудования

Под виброизоляцией понимают изоляцию источников возмущений от соседних элементов. Если на станке неуравновешенность ротора электродвигателя или шпинделя с заготовкой создает периодическую возмущающую силу, то основание станка испытывает динамические нагрузки. Защита основания от действия этих нагрузок называется активной виброизоляцией. Защита станка или какой-либо системы от внешних возмущений (колебаний) называется пассивной виброизоляцией. Оба вида задач имеют одну принципиальную основу для своего решения:

Пассивная виброизоляция характерна для точных станков и измерительных устройств, где относительные колебания между заготовкой и инструментом не должны превосходить допустимых значений при заданных колебаниях основания. Активная виброизоляция более важна для станков нормальной точности. Установка станков на виброопорах широко распространена из-за возможности быстрой перестройки технологического потока, стабильности виброизоляции, уменьшения шума и т. д. Определим силу  $N$ , которую передает на фундамент станок (рис.3.7), установленный на виброопорах с приведенной жесткостью  $c$  и вязким сопротивлением  $b$  :

$$N = b \dot{y} + cy \quad (3.16)$$



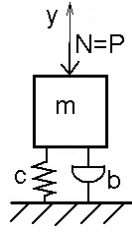


Рис. 3.7. Схема действия силы на станок

Т. к. станок совершает колебания, то перемещения его в пространстве будут иметь синусоидальный характер. Тогда решение уравнения (3.16) представим в виде синусоиды.

$$y = y_{cm} \mu \sin(\omega t - k) \quad (3.17)$$

Найдем первую производную от выражения (3.17):

$$\dot{y} = y_{cm} \mu \cos(\omega t - k) \quad (3.18)$$

Подставив выражения (9.2) и (9.3) в (9.1), получим

$$N = by_{cm} \mu \omega \cos(\omega t - k) + cy_{cm} \mu \sin(\omega t - k)$$

Примем обозначения:

$$\frac{c}{m} \equiv p^2, \quad 2b_1 \equiv \frac{b}{m}, \quad b = 2b_1 m;$$

$$P_{cm} = cy_{cm}, \quad y_{cm} = \frac{P}{c}; \quad (3.19)$$

$$N = P \mu \sin(\omega t - k) + 2b_1 \frac{P}{p^2} \mu \omega \cos(\omega t - k)$$

В любой системе при конструировании стремятся, чтобы сила  $N$  была минимальной. Как известно, минимум функции можно найти, приравняв первую производную к нулю, тогда:

$$\frac{dN}{dt} = P \mu \omega \cos(\omega t + k) - 2b_1 \frac{P}{p^2} \mu \omega^2 \sin(\omega t + k) = 0 \quad (3.20)$$

Возведем уравнения (3.19) и (3.20) в квадрат

$$N^2 = P^2 \mu^2 \sin^2(\omega t - k) + 4b_1 \frac{P^2}{p^2} \omega \cos(\omega t - k) \sin(\omega t - k) + 4b_1^2 \frac{P^2}{p^2} \mu^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - k) \quad (3.21)$$

$$P^2 \mu^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - k) - 4b_1 \frac{P^2}{p^2} \mu^2 \omega^3 \sin(\omega t - k) \cos(\omega t - k) + 4b_1^2 \frac{P^2}{p^4} \mu^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - k) = 0 \quad (3.22)$$

Найдем сумму уравнений (3.21) и (3.22)

$$N^2 = P^2 \mu^2 + 4b_1 \frac{P^2}{p^4} \mu^2 \varpi^2 = P^2 \mu^2 \left( 1 + \frac{4b_1^2}{p^2} \frac{\varpi^2}{p^2} \right)$$

$$N = P \mu \sqrt{1 + \frac{4b_1^2}{p^2} \frac{\varpi^2}{p^2}} \quad (3.23)$$

Тогда передаточная функция будет иметь вид:

$$\frac{N}{P} = \mu \sqrt{1 + \frac{4b_1^2}{p^2} \frac{\varpi^2}{p^2}} \quad (3.24)$$

Правая часть выражения (3.24) характеризует величину передаваемой на основание силы и зависит от отношения  $b/p$  и  $w/p$  (рис. 3.8, а). Но влияние сил вязкого сопротивления изменяется: с ростом  $b/p$  при  $w/p \ll \sqrt{2}$  нагрузка  $N$  снижается, а при  $w/p > \sqrt{2}$  — увеличивается. Физический смысл этого явления заключается в том, что при высокой частоте возмущающей силы возрастают скорости и соответственно возрастает сила, действующая на основание по вязкой связи (первое слагаемое в уравнении (3.16)). Для виброизоляции станки устанавливают на виброизолирующие опоры (рис. 3.8, б), состоящие из элементов с высоким рассеянием энергии, с относительно небольшой жесткостью.

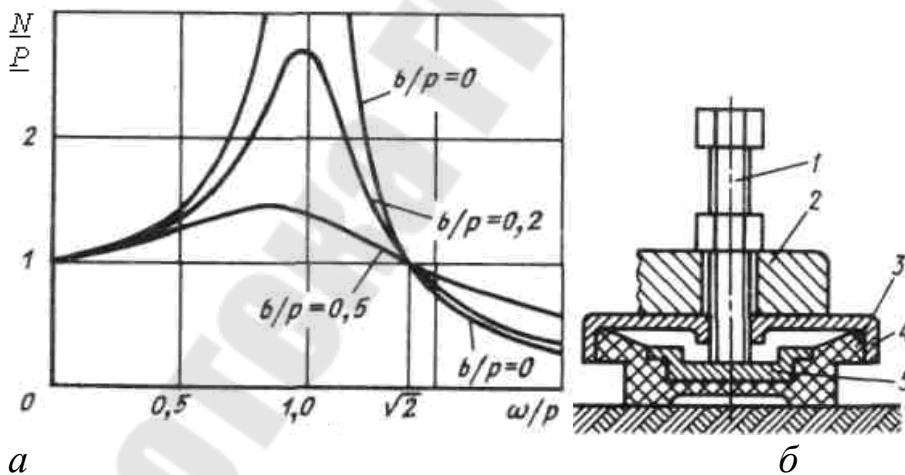


Рис.3.8. График зависимости коэффициента демпфирования от жесткости виброопор (а) и ее конструкция (б)

Исследованиями установлено, что при этом виброустойчивость существенно снижается лишь в тех случаях, когда малы собственное демпфирование, собственная частота  $f_c$  динамической системы станка

или мала масса станины по сравнению с массой несущего элемента станка. Виброустойчивость установленных на опоры станков можно оценивать по критерию  $f_c^3 \lambda$ , где  $f_c$ ,  $\lambda$  — собственная частота в вертикальном направлении и логарифмический декремент затухания виброопоры. С ростом  $f_c^3 \lambda$  монотонно растет и предельная глубина резания, т. е. растет виброустойчивость. Для токарной группы отечественных станков рекомендуют использовать виброопоры с частотой  $f_c = \frac{40}{\sqrt[5]{M}}$  при  $\lambda=0.6$  и  $f_c = \frac{30}{\sqrt[5]{M}}$  при  $\lambda=0.8$ , где  $M$  — масса станка, т.

Для уменьшения действия нагрузки на соседнее оборудование, т. е. уменьшения передаточной функции, необходимо:

- 1) повысить демпфирование виброопор (ввести гидравлические демпферы);
- 2) заменить базовый материал (полимер-бетон или бетон-полимер);
- 3) изменить жесткость виброопор.

### **3.6. Моделирование оборудования с учетом термодинамических процессов**

Всякое изменение, происходящее в термодинамической системе и связанное с изменением хотя бы одного из ее параметров, называется *термодинамическим процессом*.

Процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется *процессом релаксации*. При этом для выравнивания каждого параметра существует свое характерное время — время релаксации для данного параметра. Роль полного времени релаксации играет максимальное из этих времен.

Процесс, протекающий в термодинамической системе со скоростью, значительно меньшей скорости релаксации, представляет собой цепочку бесконечно близких равновесных состояний и называется *равновесным или квазистатическим процессом*. Для такого процесса в любой момент времени градиенты всех параметров равны нулю.

Если изменение какого-либо параметра происходит за время, равное или меньшее времени релаксации, то такой процесс называется *неравновесным (нестатическим)*.

Процесс перехода из некоторого состояния 1 к состоянию 2

называется *обратимым*, если для каждого промежуточного состояния все уравнения для бесконечно малых приращений параметров удовлетворяются также при замене знаков этих приращений на обратные. Если процесс не обладает таким свойством, то он называется *необратимым*. Обычно равновесные процессы одновременно являются и обратимыми. В то же время можно рассматривать обратимые процессы, не составленные из термодинамических равновесных состояний.

По характеру связей с внешними телами или по типу ограничений, выделяющих термодинамические системы из окружающей среды, различают три основных типа термодинамических систем:

1. Изолированная, или замкнутая система, не обменивающаяся энергией в виде теплоты с окружающей средой.

2. Адиабатически изолированная система, не обменивающаяся энергией в виде теплоты с окружающей средой.

3. Неизолированные системы.

**Аксиомы термодинамики.** Перейдем теперь к перечислению основных аксиом термодинамики.

1. *Принцип существования состояния термодинамического равновесия.* Постулируется, что изолированная система с течением времени всегда приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может.

2. *Принцип существования температуры (нулевой закон термодинамики).* Постулируется, что адиабатически изолированные, термодинамически равновесные системы образуют при приведении их в тепловой контакт общую термодинамически равновесную систему только при условии равенства температур исходных систем.

На основании этого принципа вводится эмпирическая температура

$\theta$  – величина, выражающая состояние внутреннего движения равновесной системы. Все равновесные внутренние параметры термодинамической системы являются функциями внешних параметров и температуры  $\theta$ .

3. *Первое начало термодинамики.* Общая мера материального движения при его превращении из одного вида в другой называется энергией.

Полная энергия термодинамической системы разделяется на внешнюю и внутреннюю. Во *внешнюю энергию* входит энергия

движения системы как целого и потенциальная энергия системы в поле сил. Вся остальная часть энергии системы называется ее *внутренней энергией*.

Обычно в термодинамике не рассматривается движение системы как целого и изменение ее потенциальной энергии при таком движении, поэтому энергией системы в термодинамике является ее внутренняя энергия. В состав внутренней энергии системы входит энергия всех видов движения и взаимодействия входящих в систему частиц: энергия поступательного и вращательного движения молекул и колебательного движения атомов, энергия молекулярного взаимодействия, внутриатомная энергия заполненных электронных уровней и т. д.

Внутренняя энергия  $E$  является внутренним параметром и, следовательно, при равновесии зависит от внешних параметров  $a_i$  и температуры  $\theta$ .

$$E = E(a_1, a_2, \dots, a_n, \theta).$$

При взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой происходит обмен энергией. При этом возможны два различных способа передачи энергии системе от внешних тел: с изменением внешних параметров системы и без изменения этих параметров.

Первый способ передачи энергии, связанный с изменением внешних параметров, называется *работой*, второй способ – без изменения внешних параметров – *теплотой*, а сам процесс передачи – *теплообменом*.

Количество энергии, переданное системе с изменением её внешних параметров, также называется работой  $A$  (а не количеством работы), а количество энергии, переданной системе без изменения её внешних параметров, – количеством теплоты  $Q$ .

В термодинамике принято считать работу  $A$  положительной, если она производится системой над внешними телами, а количество теплоты считать положительным, если соответствующая энергия передается системе.

Первое начало термодинамики устанавливает, что внутренняя энергия системы является однозначной функцией ее состояния и изменяется только под влиянием внешних воздействий.

В интегральном виде, т. е. для конечного процесса, первое начало записывается в виде  $E_2 - E_1 = Q - A$ , где  $E_2 - E_1$  – изменение

внутренней энергии системы при переходе из первого состояния во второе.

Для элементарного процесса имеет место уравнение

$$dE = \delta Q - \delta A, \quad (3.25)$$

здесь  $\delta Q$  обозначает элементарное количество теплоты;  $\delta A$  – элементарную работу; буква  $\delta$  выбрана для того, чтобы отметить, что они не являются точными дифференциалами, каковым является, например,  $dE$ .

4. *Второе начало термодинамики* устанавливает существование у любой равновесной системы еще одной однозначной функции состояния – *энтропии*  $S$ , которая в отличие от внутренней энергии не изменяется в изолированной системе лишь при квазистатических процессах и всегда возрастает при нестатических процессах.

Для квазистатических процессов

$$\delta Q = TdS, \quad (3.26)$$

где  $T$  – абсолютная температура, определяемая как функция эмпирически установленной температуры.

Объединяя это уравнение с уравнением первого начала (3.25), получим основное уравнение термодинамики для квазистатических (обратимых) процессов:

$$TdS = dE + \delta A. \quad (3.27)$$

Для необратимых процессов имеет место неравенство

$$TdS > dE + \delta A. \quad (3.28)$$

Кроме того, доказывается, что приращение энтропии  $\Delta S$  в любом адиабатическом процессе не может быть отрицательным:

$$\Delta S \geq 0. \quad (3.29)$$

Классическая термодинамика занимается изучением в основном равновесных процессов. При анализе неравновесных процессов она указывает лишь на их направление, не давая возможности получить количественные результаты.

В то же время именно неравновесные процессы представляют для моделирования наибольший интерес. Поэтому естественным является стремление к созданию термодинамики неравновесных процессов.

Обобщение классической термодинамики основывается прежде

всего на понятии *локального равновесия*. Известно, что время релаксации растёт с увеличением размеров системы. Поэтому отдельные макроскопически малые части системы сами по себе приходят в равновесное состояние значительно раньше, чем устанавливается равновесие между этими малыми частями. Хотя система в целом и не находится в равновесии, можно, однако, говорить о локальном равновесии в макроскопически небольших частях системы, характеризуя эти части определенной температурой и другими термодинамическими параметрами.

Современная термодинамика необратимых процессов базируется на некоторых постулатах, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1. Соотношения термодинамики равновесных процессов (3.27), (3.28) остаются справедливыми и в случае термодинамики неравновесных процессов, но только локально (принцип локального равновесного состояния).

2. В каждом локальном объеме внутренняя энергия и *энтропия*, как и при равновесии, явно зависит только от термодинамических параметров и лишь через них от времени и координат.

3. Градиенты скоростей, температур, напряжений в рассматриваемой среде достаточно малы.

4. Полное изменение энергии и энтропии при деформации данного тела аддитивно складывается из изменения этих параметров в отдельных элементах объема.

Рассмотрим в некоторый момент времени  $t$  материальный объем  $W$ , ограниченный поверхностью  $\Sigma$ . Для локальной части объёма – элемента  $dW$  – можно определить внутреннюю энергию  $dE$  и энтропию  $dS$ , если ввести понятия удельной внутренней энергии  $e$  и удельной энтропии  $s$ , отнесённых к единице массы. Тогда

$$dE = e\rho dW, \quad dS = s\rho dW.$$

Из постулата об аддитивности этих величин для объема  $W$  имеем

$$E = \iiint_W e\rho dW; \quad S = \iiint_W s\rho dW. \quad (3.30)$$

Будем учитывать теперь тепловой поток через поверхность  $\Sigma$ . С этой целью введём *вектор теплового потока*  $\vec{q}$ , характеризующий поток тепла через единицу площади в единицу времени.

Кроме теплового потока через поверхность тела приток тепловой энергии извне может быть описан действием распределённых

источников интенсивностью  $z$ . Другими словами,  $z$  – количество тепла, выделяющегося в единице массы за единицу времени вследствие взаимодействия с окружающей средой (например, вследствие индукционного нагрева тела вихревыми токами).

Тогда скорость притока тела к среде выражается формулой

$$\frac{\delta Q}{dt} = -\iint_{\Sigma} q_n d\Sigma + \iiint_W \rho z dW. \quad (3.31)$$

Знак «минус» появился в связи с тем, что подсчитывается количество теплоты, втекающей за единицу времени в объём  $W$  (плюсу соответствует количество теплоты, вытекающей из объёма).

Закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{\delta A}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}. \quad (3.32)$$

$$\text{Здесь } \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_W \rho e dW = \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW.$$

Далее,  $\delta A/dt$  – мощность внешних поверхностных и массовых сил, действующих на объём  $W$ , т. е. работа, которую внешние силы производят над объёмом  $W$  в единицу времени. Поэтому в отличие от соотношений (3.25), (3.27) эта работа входит в правую часть уравнения энергии со знаком «плюс».

Буква « $\delta$ » означает, что приращения  $\delta A$  и  $\delta Q$ , соответствующие времени  $dt$ , не являются полными дифференциалами.

В развернутой форме уравнение (3.32) принимает вид

$$\begin{aligned} \iiint_W \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dW + \iiint_W \rho \frac{de}{dt} dW = \iint_{\Sigma} \sigma_{ni} v_i d\Sigma + \\ + \iiint_W \rho F_i v_i dW - \iint_{\Sigma} q_i n_i d\Sigma + \iiint_W \rho z dW. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Воспользуемся зависимостью Коши  $\sigma_{ni} = \sigma_{ik} n_k$  и преобразуем поверхностные интегралы по объёму. Получим

$$\iiint_W \left[ v_i \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho F_i \right) + \rho \frac{de}{dt} - \sigma_{ik} \xi_{ik} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho z \right] dW = 0.$$

Из уравнения движения следует, что выражение в круглых скобках равно нулю. Объём  $W$  выбран произвольно. Поэтому в каждой точке области, заполненной сплошной средой, справедливо



уравнение сохранения энергии, записанное в локальной форме:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \xi_{ik} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z. \quad (3.34)$$

Или

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ik} \xi_{ik}^B + \sigma_{ik} \xi_{ik}^P - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho z. \quad (3.35)$$

Величина  $\sigma_{ik} \xi_{ik}^P$  называется *диссипативной функцией*, она представляет собой *скорость диссипации* (рассеяния) энергии внутренними напряжениями в единице объёма. Если в среде происходит обратимый процесс, то диссипативная функция тождественно равна нулю.

Для локального элемента объёма  $dW$  можно определить конечное число внешних и внутренних термодинамических параметров. Так, для упругой среды удельная внутренняя энергия  $e$  является функцией шести внешних параметров – компонентов деформации  $\varepsilon_{ik}$  и температуры  $T$ . Приращение  $e$  при переходе от заданного состояния к бесконечно близкому состоянию деформации можно представить в виде

$$de = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T.$$

Обозначив через  $\delta Q$  приращение тепла, первое начало термодинамики можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} + \frac{\partial e}{\partial T} \delta T = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} + \delta Q).$$

В общем случае внешние термодинамические параметры локального элемента объёма  $dW$  являются некоторыми функционалами процесса изменения во времени компонентов деформации и температуры.

Энтропия элемента объёма  $dW$  равна  $\rho s dW$ , а полная энтропия объёма  $W$  определится интегралом  $\iiint_W \rho s dW$ .

Представим изменение удельной энтропии  $ds$  в виде суммы двух слагаемых:

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}.$$

Здесь  $ds^{(e)}$  – приращение удельной энтропии, вызванное взаимодействием с внешней средой;  $ds^{(i)}$  – приращение, связанное с изменениями внутри системы.

Постулируя применимость второго начала термодинамики для локальных частей, системы можно утверждать, что  $ds^{(i)} \geq 0$ , причем знак равенства справедлив только для обратимых процессов.

Из второго начала термодинамики следует, что скорость изменения полной энтропии  $S$  сплошной среды, заполняющей объём  $W$ , никогда не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через границу объёма и энтропии, производимой внутри объёма внешними источниками.

В интегральной форме этот закон выражается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho s dW \geq \iiint_W \rho \eta dW - \iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma, \quad (3.36)$$

где  $\eta$  – мощность локальных внешних источников энтропии, отнесённая к единице массы;

$T$  – абсолютная температура.

Знак равенства относится к обратимым процессам, неравенство относится к процессам необратимым.

Введём величину скорости внутреннего производства энтропии  $\gamma$ , отнесенную к единице массы.

Воспользовавшись преобразованием:

$$\iint_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\Sigma = \iiint_W \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dW,$$

и учитывая произвольность объёма  $W$ , получим неравенство Клаузиуса-Дюгема:

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - \eta - \frac{1}{\rho T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \geq 0. \quad (3.37)$$

Это неравенство накладывает определенные ограничения на уравнение связи напряженного и деформированного состояний.

В частности, из него следует, что диссипативная функция удовлетворяет неравенству

$$\sigma_{ik} \xi_{ik}^p \gg 0. \quad (3.38)$$

**Феноменологические уравнения.** Во многих необратимых

процессах, протекающих в сплошной среде, соответствующие закономерности выражаются линейными соотношениями между причиной и следствием. Например, закон теплопроводности о пропорциональности теплового потока градиенту температуры ( $\vec{q} = -\lambda \text{grad} \vartheta, \lambda > 0$ ), закон диффузии о пропорциональности потока компоненты смеси градиенту концентрации ( $\vec{j} = -D \text{grad} c, D > 0$ ), закон Ома о пропорциональности плотности тока градиенту потенциала ( $\vec{j} = -\sigma \text{grad} \varphi, \sigma > 0$ ).

Причины, вызывающие необратимые явления, носят в термодинамике этих явлений названия «сил» и обозначаются через  $\vec{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ; градиент температуры, градиент концентрации, градиент электрического потенциала и т. д.).

Количественные характеристики соответствующих необратимых явлений, вызываемых силами  $\vec{X}_i$ , называются «потоками»  $\vec{J}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ; поток тепла, поток диффузии, вектор плотности электрического тока и т. д.).

Скорость производства энтропии определяется только необратимыми процессами и может быть записана в виде.

$$\gamma = \sum_k \vec{J}_k \vec{X}_k, \quad (3.39)$$

где  $\vec{J}_k$  – «потоки» (например, диффузионный поток  $\vec{j}$ , тепловой поток  $\vec{q}$ , тензор диссипативных напряжений  $\sigma_{ik}^D$ , а  $\vec{X}_k$  – сопряжённые им «термодинамические силы», т. е. градиенты термодинамических параметров, вызывающих отклонение от равновесного состояния).

Положение равновесия с термодинамической точки зрения характеризуется равенством нулю действующих термодинамических сил. В этом случае выражение для скорости производства энтропии также обращается в нуль. Логично предположить, расширяя понятие равновесия, что вместе с обращением в нуль всех действующих термодинамических сил в положении равновесия в нуль обращаются также и термодинамические потоки. В этом случае в общем виде может быть записана связь термодинамических потоков и сил. Опыт показывает, что в широком диапазоне экспериментальных условий эта связь чрезвычайно проста – *необходимые потоки являются линейными функциями термодинамических сил*:

$$\vec{J}_i = \sum_k L_{ik} \vec{X}_k, \quad (3.40)$$

где  $L_{ik}$  – коэффициент переноса.

Феноменологическое уравнение (3.40) рассматривается как первый член разложения в ряд общей связи потоков и сил. В прямых процессах термодинамическая сила  $\vec{X}_i$  вызывает поток  $\vec{J}_i$ , например, градиент температуры вызывает поток тепла

$$\vec{q} = -k \text{grad} \theta, \quad (3.41)$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности.

В эту же схему укладывается закон Ома, устанавливающий связь между градиентом электрического потенциала и электрическим током, закон Дарси, устанавливающий связь между градиентом концентрации и потоком вещества.

Вместе с тем термодинамическая сила  $\vec{X}_i$  может вызывать также поток  $\vec{J}_k$  при  $k \neq i$ . Так, градиент температуры может вызывать поток вещества в многокомпонентных системах (термодиффузия), а градиент концентрации – поток тепла (диффузионный термоэффект). Такие процессы называются *перекрестными* или налагающимися эффектами, они характеризуются коэффициентами  $L_{ik}$ . Одной из основных теорем термодинамики необратимых процессов является *теорема Онзагера*, устанавливающая свойство симметрии коэффициентов переноса в отсутствие внешнего магнитного поля и вращения системы как целого:

$$L_{ik} = L_{ki}.$$

В качестве примера рассмотрим теоретический анализ энергетического состояния рабочего полотна ограниченного диска.

Система ограники термодинамически неустойчивая, открытая, обменивающаяся энергией и веществом с внешней средой. Согласно первому закону термодинамики работа внешних сил затрачивается на накопление внутренней энергии  $\Delta U$  и образование тепла  $Q$

$$A_{\text{внеш}} = \Delta U + Q = \Delta U_M + \Delta U_K + \Delta U_a + \Delta U_D + Q, \quad (3.42)$$

где  $\Delta U_M$  – энергия механического разрушения поверхностного слоя диска и кристалла алмаза;

$\Delta U_K$  – энергия контактного взаимодействия алмаз – алмазный порошок;

$\Delta U_a$  – энергия деформации, накопленная в поверхностном слое кристалла алмаза;

$\Delta U_D$  – энергия деформации, накопленная в поверхностных слоях диска.

Предложенное уравнение (3.42) не включает в явном виде все многообразие физических явлений, сопровождающих процесс огранки (электрические и магнитные явления, взаимодействие с внешней средой, вибрации и т. д.).

Второй закон термодинамики – закон возрастания энтропии, согласно которому изолированные макросистемы стремятся перейти из менее вероятностного состояния в более вероятностное. Иными словами, самопроизвольные процессы в системах идут в направлении уменьшения свободной энергии:

$$F = U - TS, \quad (3.43)$$

где  $T$  – температура;  $S$  – энтропия.

$$dU = dQ - dA_{\text{вн.}},$$

где  $dA_{\text{вн.}}$  – работа, совершаемая системой против приложенной внешней силы;

$dQ$  – неполный дифференциал, определяющий теплоту, подведённую к системе, указывающий на изменение экстенсивных параметров процесса огранки от направления.

В свою очередь  $dA_{\text{вн.}} = \sigma_k dv + \varepsilon d\sigma + Hdm + Edq + Udw + \mu dc + \dots$ . Каждый член правой части этого уравнения представляет собой произведение интенсивного параметра на дифференциал экстенсивного. Причем ни один из составляющих внутренней работы не является полным дифференциалом.

Функция  $U = f(s, v, m, q, w, \sigma, c \text{ и т. д.})$  имеет свойства потенциальной функции, а частная производная по одному из экстенсивных параметров равна соответствующему интенсивному  $\sigma_k$ ,  $H$ ,  $E$ ,  $\mu$  и т. д.,

здесь  $\sigma_k$  – напряжение в системе;  $H$  и  $E$  – напряженности магнитных и электрических полей;  $\mu$  – химический потенциал;  $v$  – объём тел в системе;  $m$  – намагниченность;  $q$  – величина электрического заряда;  $w$  – плотность колебательной энергии;  $c$  – количество вещества. Если все экстенсивные параметры сохраняются постоянными, то система самоорганизуется и переходит в состояние равновесия, и всякое изменение внутренней энергии сводится к ее уменьшению. При равновесии системы внутренняя энергия минимальна, что может служить термодинамическим критерием устойчивого состояния системы обработки.

Степень деформации поверхностного слоя диска в локальном объёме зерна алмазного порошка можно записать в виде

$$\varepsilon = \rho b \bar{l},$$

где  $\rho$  – плотность дислокаций материала связки;  $b$  – вектор Бюргера;  $\bar{l}$  – средняя длина свободного пробега дислокаций.

При низких температурах  $T$  энергия взаимодействия дислокаций с примесями в связке высока, что снижает скорость движения дислокаций и вызывает высокие внутренние напряжения  $\sigma_i$  в зоне ABC (рис.3.9). По мере увеличения силы, действующей со стороны кристалла, происходит накопление  $\rho$  и на границе она достигает плотности, близкой к критической, что вызывает увеличение внутренних напряжений  $\sigma_i$  локализацию деформации (значительную  $l$  и рост  $\Delta U$  до предельного значения). Ротация элементов связки способствует росту трещин и диспергированию ее частиц.

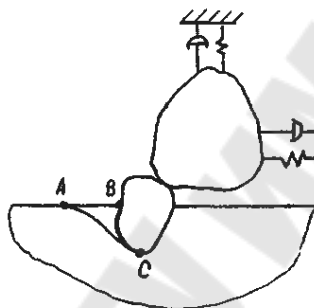


Рис. 3.9. Схема к анализу на микроуровне рабочей поверхности граничного диска

Скоростной фактор процесса увеличивает скорость деформации и температуру, а также приводит к росту диффузионной подвижности примесей ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ ). Это, в свою очередь, увеличивает скорость движения и плотность дислокаций. Диссипация запасенной упругой энергии происходит путем разориентации фрагментов и образования вязких микротрещин.

Фрагментация зерен резко повышает пластичность материала в зоне крепления микропорошка, где также происходит увеличение степени деформации материала за счет роста скорости диссипации запасенной энергии  $\Delta U$ . Повышение пластичности материала связки и высокие деформации в начальный момент образования диспергированного слоя обеспечивают рост гидростатического давления  $\sigma$  в деформируемой зоне ABC.

Увеличение силы прижима обрабатываемого алмаза к плоскости граничного диска увеличивает плотность дислокаций и скорость их движения в связке. Однако процесс перестройки дислокационной структуры требует определенной энергии активации для преодоления

дислокациями силовых барьеров и сопровождается запаздыванием пластических деформаций, а также ростом напряжений сдвига  $\sigma_{сд}$ . Все это приводит к возникновению возмущений в упругой технологической системе. Рост деформаций в зоне трения диспергированных частиц связки об обрабатываемый алмаз приводит к вихревому движению структурных элементов материала связки и, соответственно, приращению амплитуды колебаний. Время запаздывания пластических деформаций можно оценить по соотношению

$$\tau_3 = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}} \approx \frac{\rho b \bar{l}}{\rho b \bar{v}}.$$

Следовательно, периодическое приращение деформации и  $\Delta U$  в моменты контакта кристалла со связкой и с алмазным порошком можно рассматривать как внутренние силы системы, поддерживающие первичные колебания в технологической системе и формирующие поток  $\Delta P_i$  силовых импульсов.

Процесс возникновения автоколебаний при огранке можно рассматривать с термодинамических представлений.

В момент диспергирования алмазного порошка или частиц связки с порошком в зоне контакта алмаза с диском растут плотность дислокаций, скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$ , температура, силы  $P_z$  и  $P_y$ , а следовательно, запасаются энергия деформации и энтропия  $S$

$$S = \frac{\sqrt{P_y^2 + P_z^2} l}{TJ},$$

где  $P_z$  и  $P_y$  – касательная и нормальная составляющие силы, действующей на зерно;

$l$  – перемещение в направлении действия результирующей силы;

$J$  – механический эквивалент теплоты.

Увеличение результирующей силы приводит к росту энтропии в системе и к хаосу, а значит к снижению устойчивости процесса огранки.

С ростом скорости энтропия снижается. Процесс изнашивания алмазного слоя диска связан с перестройкой дислокационных структур в поверхностных слоях, а также неоднородным накоплением энергии деформации в отдельных элементах связки и порошка, что усиливает энергетическую неоднородность поверхностных слоев и интенсифицирует износ полотна диска. В результате выхода

дислокаций на поверхность полотна ограничного диска они образуют «активные центры» воздействия на алмазное зерно и усиливают процесс его разрушения.

Кроме того, на интенсивность изнашивания рабочего полотна ограничного диска влияют другие факторы, обусловленные термодинамической неустойчивостью процесса огранки: вибрации, инициирующие раскачку зерен связки и порошка, и рост микротрещин, а также энергия деформации, накопленная в диспергированных элементах и упругой системе крепления алмаза. Интенсивность влияния вибраций при огранке на колебания зерен в алмазоносном слое определяется размером зерен, их формой и может характеризоваться параметром

$$K_D = \frac{f_{кр}}{f_3},$$

где  $f_{кр}$  – частота тангенциальных колебаний кристалла (5...10 кГц);  
 $f_3$  – собственная частота колебаний зерен (8...15 кГц).

Энергетический критерий  $\eta$  качества подготовки полотна ограничного диска характеризует способность материала запасать в ней энергию деформации

$$\eta = \frac{A}{\Delta U}. \quad (3.44)$$

Уравнение (3.44) показывает, какая доля механической работы по подготовке рабочей поверхности затрачивается на изменение энергии деформации в поверхностном слое.

Выражение (4.42) позволяет указать способы управления выходными параметрами процессов подготовки ограничных дисков и огранки путем воздействия на систему теплом, ультразвуком, электрическими и магнитными полями, а также внешней средой, обеспечивая условие  $\Delta U \rightarrow \min$ ,  $\Delta S \rightarrow \min$  и устойчивое состояние системы.

Электрические и магнитные поля, ультразвук существенно влияют на скорость движения дислокаций, а значит на деформационные и кинематические характеристики срезаемого слоя, на устойчивость процесса огранки и качество обработанных поверхностей.

На основе структурно-энергетического подхода интенсивность изнашивания ограничных дисков можно записать



$$J = \mu N v / \Delta E_{np},$$

где  $\mu$  – коэффициент трения;  $N$  – нормальная сила;  $v$  – скорость огранки;  $\Delta E_{np}$  – предельная энергия, запасенная в рабочем полотно диска.

$$\Delta E = \int_{T_p}^{T_{пл}} C_p dT + E_0 \rho_{KP},$$

где  $C_p$  – удельная теплоемкость;

$T_p, T_{пл}$  – температуры рабочая и плавления;

$E_0$  – удельная энергия деформации на единицу длины дислокации;

$\rho_{KP}$  – критическая динамическая плотность дислокаций.

Деформирование поверхностных слоев при огранке локализуется в микрообъемах отдельных зерен связки и порошка вплоть до их амортизации. Значит сопротивляемость изнашиванию должна быть пропорциональна энергии, требуемой на отделение частиц с поверхности полотна вследствие накопления в локальных объемах плотности  $\rho_{KP}$  дислокаций и его амортизации. Размер частицы микроурушения должен быть равный размеру фрагментов

$$A = 1 / \sqrt{c_{KP}}.$$

Для расчета критической плотности  $\rho_{KP}$  дислокаций использовали зависимость

$$\rho_{KP} = \frac{2(1-\mu)}{Gb^2} \int_{T_p}^{T_{пл}} C_p dT,$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига;  $b$  – вектор Бюргера.

При огранке интенсивность вибраций упругой системы в условиях установившегося процесса будет в значительной степени определяться частотой воздействия отдельных зерен порошка на кристалл  $f_3$ . Эту частоту можно оценить по следующей зависимости

$$f_3 = \frac{1000v}{l_3},$$

где  $v$  – скорость процесса огранки;  $l_3$  – расстояние между зернами.

Для реальных условий  $v = 50$  м/с;  $l_3 = 10$  мкм;  $f_3 = 5 \times 10^5$  Гц.

В процессе огранки  $f_3$  снижается до значений  $(3...5) \times 10^4$  Гц. Кроме того, динамическая устойчивость процесса повышается благодаря уменьшению энтропии в системе за счёт роста температуры обработки. Рост температуры способствует уменьшению коэффициента трения кристалла с рабочим полотном диска, а также уменьшению величины энергии деформации  $\Delta U_d$ .

Переменная сила  $P_y$ , направленная вдоль контакта кристалла с цангой, создаёт сдвигающее удельное давление  $\tau$ , стремящееся сдвинуть кристалл массой  $m$  вдоль оси  $y$ . Дифференциальное уравнение движения кристалла имеет вид

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_y \sin \omega t.$$

В упругой системе крепления кристалла устанавливаются вынужденные колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $y_0$ . Значение амплитуды  $y_0$  будет определяться отношением

$$k_\omega = \omega / \omega_0,$$

где  $\omega > 0$  – частота изменения силы  $P_y$  и  $\omega_0$  – собственная частота системы.

Условием нарушения жесткости стыка и перехода зерна к микроперемещениям будет  $\tau > \mu_0 g_0$ , здесь  $\mu_0$  – коэффициент трения между кристаллом и цангой;  $g_0$  – нормальное удельное давление в контакте кристалл – цанга.

## **4 МОДЕЛИРОВАНИЕ ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАНКОВ**

Моделирование этих характеристик производится аналитическим и эмпирическим методом и численным анализом.

Источники шума подразделяются на первичные и вторичные. По частотам: непрерывные, дискретные. Численный анализ производится методом конечных элементов или графовым методом. Для его реализации разделяются интервалы времени таким образом, чтобы непрерывный звуковой сигнал превратить в дискретный с переменной амплитудой.

Расчетная модель включает в себя окружающую среду и элементы конструкций станка.

Первичными источниками является процесс резания. Частотный диапазон, которого зависит от частоты вращения и частоты образования элемента стружки. Более низкие частоты пропорциональны количеству особенностей, обрабатываемого материала по длине обработки (карбиды, раковины, несплошности) и геометрических - обрабатываемой поверхности (количеству канавок, пазов и т.д.), а также - частотам вращения заготовки и инструмента, количеству зубьев инструмента.

Кроме того, к первичным источникам относятся: процесс пересопрещения зубьев зубчатых колес, процесс перекачивания тел качения в подшипниках и направляющих, частоты которых пропорциональны количеству зубьев зубчатых колес, количеству тел качения в подшипниках и частотам вращения элементов кинематики.

Учет вторичных источников производится методом выделения участков ограждений, корпусов, коробок скоростей, коробок подач или элементов кинематики.

### **4.1. Основные определения физической акустики**

Решение задач о звукоизоляции связано с вопросами излучения, распространения и прохождения звука через различного рода препятствия. Такими задачами занимается акустика - наука о колебаниях и распространении волн в упругих средах.

В обычном состоянии частицы среды находятся в равновесии. Если в какой-либо точке пространства вывести их из этого состояния, то они начинают совершать колебания около положения равновесия. Так как в упругой среде частицы связаны друг с другом, то движение

первых вызывает движение соседних. Те, в свою очередь, передают колебания другим и т. д. Такое распространение возмущений в упругой среде называется волнами.

Волны, в которых частицы совершают колебания в направлении их распространения, называются продольными. Если не учитывать вязкость, то в жидких и газообразных средах существуют только продольные волны. Волны, в которых частицы колеблются перпендикулярно к направлению их распространения, называются поперечными. В твердых телах могут существовать как те, так и другие волны.

*Определение звука.* Понятие «звук» означает физическое возмущение частиц воздуха, возникающее в результате изменений давления в воздухе. Движение частиц воздуха при распространении звуковых волн подчиняется законам аэродинамики. Движение волны характеризуется скоростью, с которой происходит передача количества движения через частицы. Скорость распространения звуковых колебаний или звуковых волн носит название скорости звука.

В газообразной среде скорость звука  $c$  зависит от температуры и состава газа

$$c = \sqrt{\gamma_0 (p_0 / \rho_0)} = \sqrt{\gamma_0 RT}, \quad (4.1)$$

где  $\gamma_0 = c_p / c_v$  - отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (для воздуха  $\gamma_0 = 1,4$ );  $p_0$  - статическое давление газа;  $\rho_0$  - плотность (масса единицы объема) покоящейся среды;  $R$  - газовая постоянная;  $T$  - абсолютная температура.

При температуре порядка  $20^\circ\text{C}$  скорость звука в воздухе близка к 340 м/с.

Скорость звука в жидкости

$$c_{ж} = \sqrt{K / \rho}, \quad (4.2)$$

где  $K$  - модуль объемной упругости.

В воде и жидких топливах скорость звука при практических расчетах можно принимать равной 1500 м/с.

Волны сжатия и разрежения движутся с одинаковой скоростью, т.е. со скоростью звука. Если движение волн остановить в какой-то момент времени, то расстояние между максимумами давления называют длиной волны и обозначают буквой  $\lambda$ . Зависимость между частотой, длиной волны и скоростью звука можно представить в виде

$$f = c / \lambda \text{ или } \lambda = c / f .$$

Длину волны в воздухе при распространении шума необходимо знать, так как длина волны часто используется при разработке мероприятий по снижению шума в машиностроении. Например, при частоте 100 Гц длина волны в воздухе 3,4 м, при 250 Гц - 1,36 м, при 500 Гц - 0,64 м, при 2000 Гц - 0,17 м, при 4000 Гц - 0,08 м и т. д.

В диапазоне частот 16 ... 16 000 Гц (некоторые авторы считают до 20 000 Гц), в котором колебания воспринимаются ухом человека как звук, волны называются звуковыми. Колебания с частотой ниже 16 Гц называют инфразвуком, выше 16 кГц (20 кГц) - ультразвуком. В машиностроении нас может интересовать как инфразвук, так и ультразвук. Эти звуки высокой интенсивности оказывают большое влияние на здоровье человека. В машиностроении встречаются шумы с различными частотами; применяются как ультразвуковое оборудование высокой частоты, так и оборудование с инфразвуком, например компрессоры, прессы и другое оборудование.

*Звуковое давление, интенсивность и мощность.* В газах и жидкостях при прохождении звуковых волн изменяются давление, плотность, температура и колебательные скорости частиц. В принципе достаточно знать одну какую-либо величину, чтобы определить остальные. В нашем случае за такую основную величину удобно принимать звуковое давление  $p$  - превышение мгновенного давления в некоторой точке пространства над давлением в невозмущенной среде. Такой выбор диктуется тем, что для решения задач о звукоизоляции основной интерес представляют звуковое давление и колебательная скорость  $v$ , но последняя является векторной величиной. Вследствие этого для ее определения необходимо решить не одно (как для  $p$ ), а три уравнения - по одному для каждой составляющей вектора  $v$ . Можно было бы обойти это неудобство, используя потенциал скорости, но это иногда затрудняет понимание физики явления. Единица измерения звукового давления - паскаль (Па), Н/м<sup>2</sup>. Как будет показано ниже, другими важными характеристиками звукового поля являются интенсивность звука и звуковая мощность.

Интенсивность звука характеризует передачу звуковой энергии (Вт/м<sup>2</sup>). В плоской волне она может быть выражена формулой  $I = p^2 / (\rho c)$ , где  $\rho c$  - удельное акустическое сопротивление среды, через которую распространяется звук. В этом случае интенсивность звука пропорциональна квадрату эффективного значения звукового давления.

Интенсивность звука показывает, какая мощность  $P$  передаётся через единицу площади, расположенную перпендикулярно к вектору скорости.

*Звуковой мощностью*  $P$  (Вт) источника звука называют общую звуковую энергию, излучаемую им в единицу времени. Она равна

$$P = \int_{\delta} I_n ds, \quad (4.3)$$

где  $I_n$  - интенсивность потока звуковой энергии в направлении нормали к элементу поверхности;  $S$  - площадь поверхности, окружающей излучатель.

*Уровни акустических величин.* Встречающиеся на практике интенсивности звуков, с которыми приходится иметь дело, могут меняться в широких пределах - до 15 порядков (в  $10^{16}$  раз). Пользоваться такими цифрами при расчетах и построении графиков очень трудно.

Кроме того, согласно закону Вебера-Фехнера слуховые ощущения человека приблизительно пропорциональны относительному увеличению раздражения, т. е. раздражающее действие шума на человека пропорционально логарифму давления или интенсивности звука. Вследствие этого на практике удобно пользоваться не абсолютными, а относительными единицами - уровнями, измеряемыми децибелами (дБ). Децибел - это десятикратный десятичный логарифм отношения интенсивности или мощности к выбранному стандартному значению. Так определяемые отношения называют уровнями.

Уровень интенсивности звука

$$L_I = 10 \lg(I / I_0);$$

уровень звукового давления

$$L = 10 \lg(\bar{p}^2 / p_0^2) = 20 \lg(\bar{p} / p_0);$$

уровень колебательной скорости частиц

$$L_v = 10 \lg(\bar{v}^2 / v_0^2) = 20 \lg(\bar{v} / v_0);$$

уровень звуковой мощности источника

$$L_p = 10 \lg(P / P_0),$$

где  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>;  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па;  $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$  м/с;  $P_0 = 10^{-12}$  Вт.

При нормальных атмосферных условиях для плоской волны  $L_I = L$ .

*Частотный спектр и характеристика шума.* Спектры звукового давления или мощности показывают, на каких частотах расположены

наиболее интенсивные и наиболее слабые составляющие данного звука.

Частотные спектры шума определяют экспериментально с помощью фильтров или анализаторов. При этом чаще всего применяют октавные или третьоктавные полосы частот, а для тонкого анализа - узкополосные частоты.

Частотные спектры представляют в виде графиков или таблиц. В обоих случаях указывают полосы частот, в которых определяются уровни и значения последних. Полосы частот характеризуются шириной полосы и средними частотами. Для полос с постоянной относительной шириной средняя геометрическая полоса частоты  $f_{op} = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$  и для полос с постоянной абсолютной шириной средняя частота  $f_{cp} = (f_1 + f_2) / 2$ .

Частотные спектры дают возможность судить о том, как снижаются составляющие различных частот в результате применения звукоизолирующих и звукопоглощающих конструкций на машиностроительных предприятиях.

На рис. 4.1 показаны различные виды спектров: на рис. 4.1, *а* - спектр дискретный или линейчатый, в котором отдельные составляющие отделены одна от другой определенными частотными интервалами; на рис. 4.1, *б* - спектр сплошной, где составляющие следуют одна за другой непрерывно; на рис. 4.1, *в* - смешанный спектр, где на сплошные участки накладываются отдельные дискретные составляющие.

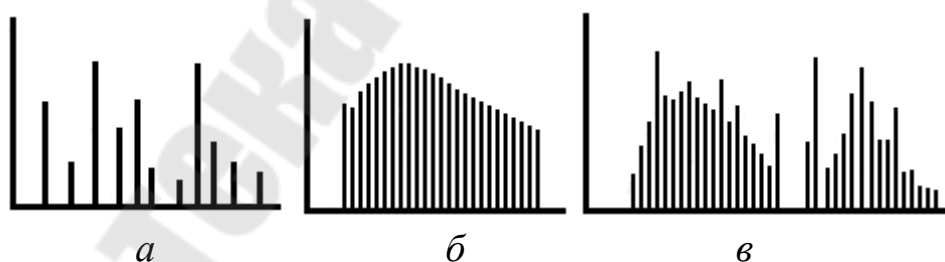


Рис. 4.1. Типы спектров шума

Сплошной и смешанный спектры шума имеют большинство станков и оборудования на машиностроительных предприятиях.

Рассмотрение звуковых спектров дает возможность характеризовать шум, как с физической, так и с физиологической точек зрения. С физической точки зрения шум определяется как смесь

различных звуков с частотами и фазами, распределенными нерегулярно. С физиологической точки зрения шумом считается любой звуковой процесс, который в большей или меньшей степени неприятен для восприятия, мешает работе или отдыху.

*Основные уравнения.* Прежде чем перейти к уравнениям акустики, напомним об операторах Гамильтона (набла)  $\nabla$  и Лапласа  $\Delta$ , которые будут использованы в дальнейшем изложении. Их применение сокращает запись дифференциальных уравнений и делает её универсальной, так как она одинакова для всех систем координат.

Оператор  $\nabla$  - символический вектор, заменяющий символы градиента, дивергенции и ротора:

$$\nabla \rho = \text{grad } \rho \quad \nabla \vec{v} = \text{div } \vec{v}, \quad [\nabla \times \vec{v}] = \text{rot } \vec{v}.$$

В декартовых координатах

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Для примера, умножив формально  $\nabla$  на вектор  $\vec{v}$ , получим выражение для  $\text{div } \vec{v}$  (скалярное произведение векторов равно сумме произведений их составляющих):

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} (\vec{i} v_x) + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} (\vec{j} v_y) + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} (\vec{k} v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Двукратное применение оператора  $\nabla$  к скалярной функции приводит к оператору Лапласа  $\nabla(\nabla \rho) = \nabla^2 \rho = \Delta \rho = \text{div grad } \rho$ .

В декартовых координатах

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.4)$$

Записи операторов  $\nabla$  и  $\Delta$  в других координатах можно найти в любом справочнике по высшей математике, например [6].

Перейдём к уравнениям движения частиц жидкой и газообразной среды – непрерывности, движения (Эйлера) и состояния.

Первое из них выражает тот факт, что изменение массы среды (а следовательно, и плотности  $\rho$ ) в каком-либо выбранном объёме равно количеству вещества, которое прошло через его границу. Записывается оно в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0.$$



Уравнение Эйлера – это второй закон Ньютона, применённый к небольшому объёму жидкости или газа:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = 0.$$

Третье уравнение состояния – адиабата:

$$\frac{\rho}{\rho^{\nu}} = \frac{\rho_0}{\rho_0^{\nu}} = const,$$

где  $\rho = c_p / c_0$  - отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме, а  $p_0$  и  $\rho_0$  - давление и плотность в невозмущённой среде; эти уравнения являются нелинейными, что затрудняет их использование.

В акустике, несмотря на широкий диапазон изменений давления и скорости, колебания остаются малыми почти во всех случаях, с которыми приходится сталкиваться в практике борьбы с шумом. Это даёт возможность использовать приближение уравнений, которые получаются из точных путём линеаризации.

В конечном виде они записываются так:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0, \quad (4.5)$$

уравнение Эйлера:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (4.6)$$

и уравнение состояния в дифференциальной форме:

$$p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho = c^2 \rho. \quad (4.7)$$

Здесь  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_{\rho_0}$  - постоянная, корень из которой есть скорость распространения звуковых волн в среде; для газа

$$c = \sqrt{RT / \mu}$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $T$  - абсолютная температура;  $\mu$  - молекулярный вес газа.

Как видно, в газе скорость распространения звука не зависит от статического давления и плотности. Если выражение (4.5) продифференцировать по времени, к выражению (4.6) применить операцию *div* (т.е. умножить скалярно  $\nabla$  на уравнение Эйлера), вычесть одно уравнение из другого и поставить вместо  $\rho$  его значение из выражения (4.7), получим уравнение,

$$\Delta\rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

которое называется *волновым уравнением*. В декартовых координатах оно записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

В работе [5] показано, что условие применимости линеаризованных уравнений (4.5) – (4.7) для распространения звуковых волн заключается в малости колебательной скорости частиц среды по сравнению со скоростью распространения звука:  $v \ll c$ . Это неравенство можно использовать для оценки границ применимости линеаризованных уравнений.

#### 4.2. Гармонические колебания. Комплексная форма их. Импеданс

В акустике гармоническое движение, при котором величины изменяются со временем по синусоидальному закону, предпочтительнее всех остальных видов движения. С одной стороны, это объясняется большой их распространенностью в жизни. С другой стороны, как детерминированные, так и случайные колебания частиц можно представить в виде суммы гармонических колебаний разных частот. Поэтому вместо изучения колебаний с произвольной зависимостью от времени можно изучить только гармонические колебания, что сделать значительно проще. Кроме того, звукоприемники уха разлагают каждый сложный звуковой процесс на его гармонические составляющие и, таким образом, делают синусоидальные колебания практической реальностью.

Звуковое давление любого гармонического колебания можно записать в виде:

$$p = p_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.10)$$

где  $p_0$  и  $\varphi_0$  - амплитуда колебаний и начальная фаза;  $\omega = 2\pi f$  - круговая (циклическая) частота;  $f$  - частота колебаний, Гц;  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$  - фаза колебаний.

Если положить, что  $p_0$  зависит от координат и подставить уравнение (4.10) в волновое уравнение (4.8), то получим уравнение Гельмгольца:

$$\rho_0 + k^2 \rho_0 = 0, \quad (4.11)$$

где  $k = \omega / c$  - волновое число ( $\text{м}^{-1}$ ).

На практике редко пользуются записью (4.10) из-за трудностей, которые возникают при сложении, вычитании и других действиях. Чаще применяют комплексную форму записи\*

$$\Delta p = p e^{-i\omega t}, \quad (4.12)$$

где  $p = p_0 e^{-i\varphi_0}$  - комплексная амплитуда;  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Согласно формуле Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

Поэтому выражение (4.12) можно записать как

$$p = p_0 [\cos(\omega t + \varphi_0) - i \sin(\omega t + \varphi_0)].$$

Действительная часть этого выражения совпадает с (4.10). Если воспользоваться комплексной формой записи, произвести все необходимые операции, а затем взять действительную часть от полученного выражения, то получим тот же результат, как если бы производили операции с (4.10). Только конечный результат при этом получается значительно быстрее и проще.

Использование комплексной формы записи гармонических колебаний позволяет упростить операцию дифференцирования по времени. Она сводится к простому умножению на  $(-i\omega)$ , так как производная от  $\exp(-i\omega t)$  равна  $(-i\omega)\exp(-i\omega t)$ . Это позволяет записать уравнение Эйлера в простом виде:

$$\vec{v} = \frac{1}{i\rho\omega} \Delta p. \quad (4.12)$$

С помощью уравнения (4.12) легко определить  $\vec{v}$  по известному  $p$ . Кроме того, комплексная запись позволяет ввести полезное для практики понятие импеданса, широко используемое для описания гармонических процессов. Он определяется отношением комплексного давления к комплексной скорости

$$Z = p/v \quad (4.13)$$

и не зависит от времени. Через импеданс характеризуют излучательные свойства источников звука, звукоизолирующие свойства различного рода пластин, оболочек и др.

### 4.3. Этапы проектирования звукоизоляции

Проектирование звукоизоляции машин включает следующие этапы.

*Этап 1.* Информационный поиск наилучших прототипов проектируемой звукоизолированной машины. Анализ способов и средств снижения шума по данным научных исследований и конструкторских разработок. Составление перечня необходимых мероприятий и технического задания по снижению шума в соответствии с требованиями ГОСТ 12.1.003-83.

*Этап 2.* Определение шумовых характеристик машин и требуемой величины звукоизоляции. Выполнение расчетов ожидаемой шумности. Выбор основных конструктивных типов средств звукоизоляции: звукоизолирующей оболочки, виброизоляции машин, звуковиброизоляции коммуникаций, глушителей шума. Разработка эскизного проекта звукоизоляции машины.

*Этап 3.* Изготовление и испытания в звукомерных камерах и на заводских стендах образцов наиболее важных частей и элементов звукоизоляции машины с целью проверки отработки и уточнения технических решений. Выполнение уточненных расчетов ожидаемой шумности. Оценка эффективности основных вариантов звукоизоляции машины с целью обеспечения нужной звукоизоляции при выполнении эксплуатационных и эргономических требований, требований техники безопасности и технической эстетики. Разработка технического проекта звукоизоляции машины.

*Этап 4.* Рабочее проектирование комплекса звукоизоляции машины с учетом выполнения технологических норм, обеспечивающих минимальные затраты средств, материалов и времени на ее изготовление при наивысшем качестве. Выпуск рабочих чертежей опытного образца комплекса звукоизоляции машины.

*Этап 5.* Изготовление опытного образца комплекса звукоизоляции, монтаж ее на машине, проведение акустических испытаний. Отладка и доработка звукоизоляции с целью получения необходимых положительных результатов. Установление фактических значений шумовых характеристик машины с отработанной звукоизоляцией и без нее. Включение их в стандарты и технические условия на машину. В случае, когда значения шумовых характеристик звукоизолированной машины, соответствующей лучшим мировым достижениям аналогичной техники, превышают значения, установленные ГОСТ 12.1.003-83 в стандартах и технических условиях на машину, допускается устанавливать

технически достижимые значения шумовых характеристик этих машин.

Завершается проектирование приемкой опытного образца и выпуском рабочих чертежей звукоизоляции машины на серию. Все этапы проектирования звукоизоляции (техническое задание, эскизный и технический проекты, рабочие чертежи опытного образца, изготовление и испытания опытного образца и выпуск рабочих чертежей на серию) могут быть несколько иными, но всегда должны выполняться в полном соответствии со сроками и содержанием соответствующих этапов проектирования самой машины и составлять их неотъемлемую часть.

Для управления шумовыми характеристиками используется частота и скорость. Частота обратно пропорциональна времени кинематического взаимодействия между элементами:

$$f = \frac{1}{\tau}$$

Если сталь, по стали, то  $f \longrightarrow 10kГц$

$$\text{Среднее: } \bar{f}_\tau = \frac{1}{2\tau}$$

Одним из направлений уменьшения шума является увеличение времени контакта.

$$\text{Интенсивность звукового потока: } \Delta L = 40 \lg \frac{f}{f\tau}$$

От изменения скорости интенсивность зависит в виде:

$$\Delta L = 20 \lg \frac{v_1}{v_2}; f \leq \bar{f}_\tau$$

$$\Delta L = 28 \lg \frac{v_2}{v_1}; f > \bar{f}_\tau$$

На частотный диапазон влияют звукопоглощающие покрытия. Звукопоглощающие покрытия наносятся на стенки коробок или приклеиваются пластинками. Тем тоньше покрытие, тем соответственно смещается частотный диапазон.

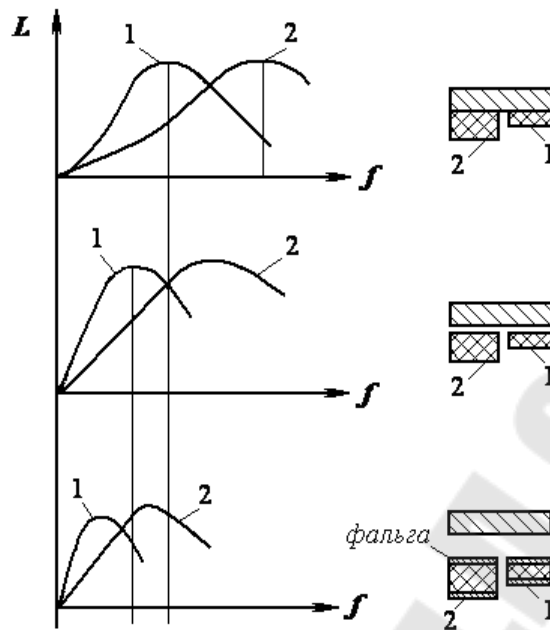


Рис.4.2. Звукопоглощающие покрытия

Звуковое давление внешнее превращается во внутреннее трение и повышение температуры.

Электрические двигатели (1, 2, 3, 4 классов) снижают шум на 3-5 дБ при переходе от первого класса к другому.

Повышение точности шарикоподшипника от первого класса к другому более высшему приводит к снижению шума на 3-5дБ.

Переход от роликоподшипников к шарикоподшипникам и подшипникам скольжения снижает уровень шума соответственно на 3-8дБ и 10-15дБ

Если заменить зубчатое колесо 12 степени точности на 5 или 6, то уровень шума может понизиться на 20 дБ, если произвести притирку зубчатых передач, то до 10дБ, а полирование зубчатого колеса – от 15 до 20дБ.

Замена металла на полимер снижает уровень шума на

$$L = 40 \operatorname{tg} K$$

$$K = 5 \sqrt{\left( \frac{E_M}{2E_n} \right)^2},$$

где  $E_m$  и  $E_n$  – соответственно модуль упругости металла и полимера.

Зубчатые колеса изготавливаются с полимерными вставками для снижения уровня шума (рис. 4.3).

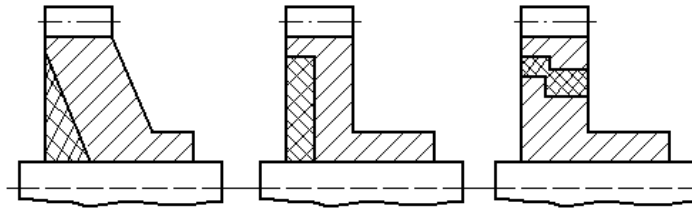


Рис.4.3. Эскизы зубчатых колес

При равной площади щелей и окон более высокой звукопроводностью обладают корпусные детали со щелями. Если выбрать корпусную деталь с одним окном и сравнить с корпусной деталью такой же площади щелью, то более высокой звукопроводностью обладают щели. Если окно или щель расположены в геометрическом центре панели корпусной детали, то корпусная деталь более звукопроводна, чем если окно расположено ассиметрично.

Кроме того, при составлении математической модели используются три основные расчетные схемы:

- 1) интенсивность звукового потока рассматривается от каждого источника с учетом коэффициента звукопередачи до рассматриваемой точки;
- 2) от каждого источника через каждый элемент кинематики, а от него в рассматриваемую точку;
- 3) от каждого источника через один элемент и от него в рассматриваемую точку.

Основные расчетные зависимости имеют вид:

$$J = \sum_{i=1}^n W_i C_i$$

$$W'_k = \sum_{m=1} W_i C'_m \mu_m \rightarrow J' = \sum_{m=1} W_1 C'_m \mu_m C_i$$

$$W''_k = \sum_{k=1} W_k C_k \mu_m \rightarrow J'' = \sum_{k=1} W_k C_k \mu_m C_i$$

$$C_i = \frac{1}{\omega r_i^2}; \mu = 10^{-0,1R}; L = 10 \lg \frac{J}{J_0}; R = 10 \lg \left( \frac{1}{\tau} \right)$$

где  $W$  - мощность звукового потока  $i$ -го источника;

$J$  - интенсивность;

$C_i$  - коэффициент звукопередач;

$\mu$  - коэффициент звукопроводности;

$J_0$  - базовая интенсивность;

$r_i$  - расстояние от источника до рассматриваемого элемента;  
 $\omega = 2\pi$ , когда высота от пола до рассматриваемой точки  $\leq \frac{1}{3}$  расстояния до инструмента, и  $4\pi$ , в других случаях;  
 $\tau$  - время контактного взаимодействия между элементами;  
 $L$  - уровень звукового давления.

Основную сложность представляет определения коэффициентов звукопередачи и звукопроводности. Чаще они определяются эмпирическим путем.

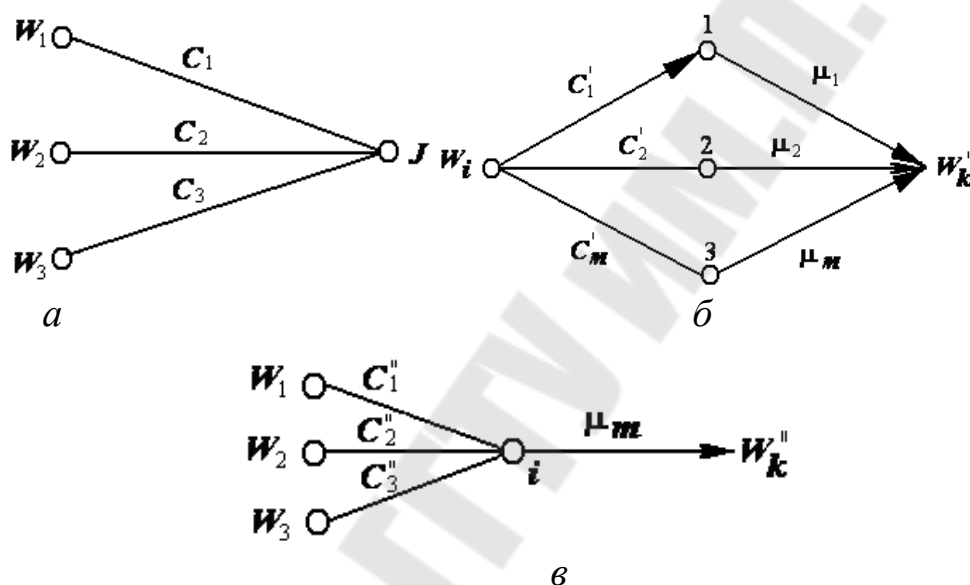


Рис.4.4. Расчетные схемы

Если использовать разделенные ограждения и экраны, то изменения частоты происходит на:

$$f = 600 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 a}}$$

где  $m_1, m_2$  - массы стенок;  
 $a$  - расстояние между ними.



## 5 МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

### 5.1. Моделирование методом конечных элементов

В качестве примера рассмотрим применение метода конечных элементов для анализа распространения тепла по длине сверла (рис. 5.1, а).

Пусть на левом конце сверла граничные условия описываются выражением,  $q = -\lambda d\theta/dx$ , а на другом торце сверла ( $x = l$ ) имеет место конвективный теплообмен со средой, температура которой  $\theta_0$ . Тогда граничное условие на этой поверхности описывается выражением

$$\alpha(\theta_s - \theta_0) = -\lambda \frac{\partial \theta_s}{\partial n}.$$

В вариационном исчислении показано, что существует функционал, имеющий минимум в случае, когда выполняются граничные условия.

$$\chi = \frac{1}{2} \int_V \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dV \pm \int_{S_1} q \theta dS + \int_{S_2} \frac{\alpha}{2} (\theta - \theta_0)^2 dS. \quad (5.1)$$

Вдоль оси  $X$  наметим в сверле несколько узловых точек, например, пять, располагая их на любом расстоянии друг от друга. Разбиение области  $l$  на элементы может быть выполнено несколькими способами. Можно, во-первых, ограничить каждый элемент двумя соседними узловыми точками, образовав четыре подобласти неодинаковой длины  $l_1, \dots, l_4$  (рис. 5.1, б). Можно сделать и по-другому: разбить всю область на два элемента длиной  $l_1 + l_2$  и  $l_3 + l_4$ , каждый из которых содержит по три узла (рис. 5.1, в). В первом случае кусочно-непрерывная функция для каждого элемента линейна по  $X$  (две точки определяют уравнение прямой), а окончательная аппроксимация  $\theta(x)$  будет состоять из четырех (в условиях примера) полиномов первой степени. Другой способ разбиения приводит к аппроксимации  $\theta(x)$  совокупностью из двух кусочно-непрерывных функций в виде полиномов второго порядка.

Рассмотрим первый вариант аппроксимации. Присвоим узлам, расположенным на левом торце каждого из  $k$  элементов ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), индекс  $i$ , а на правом – индекс  $j$ .

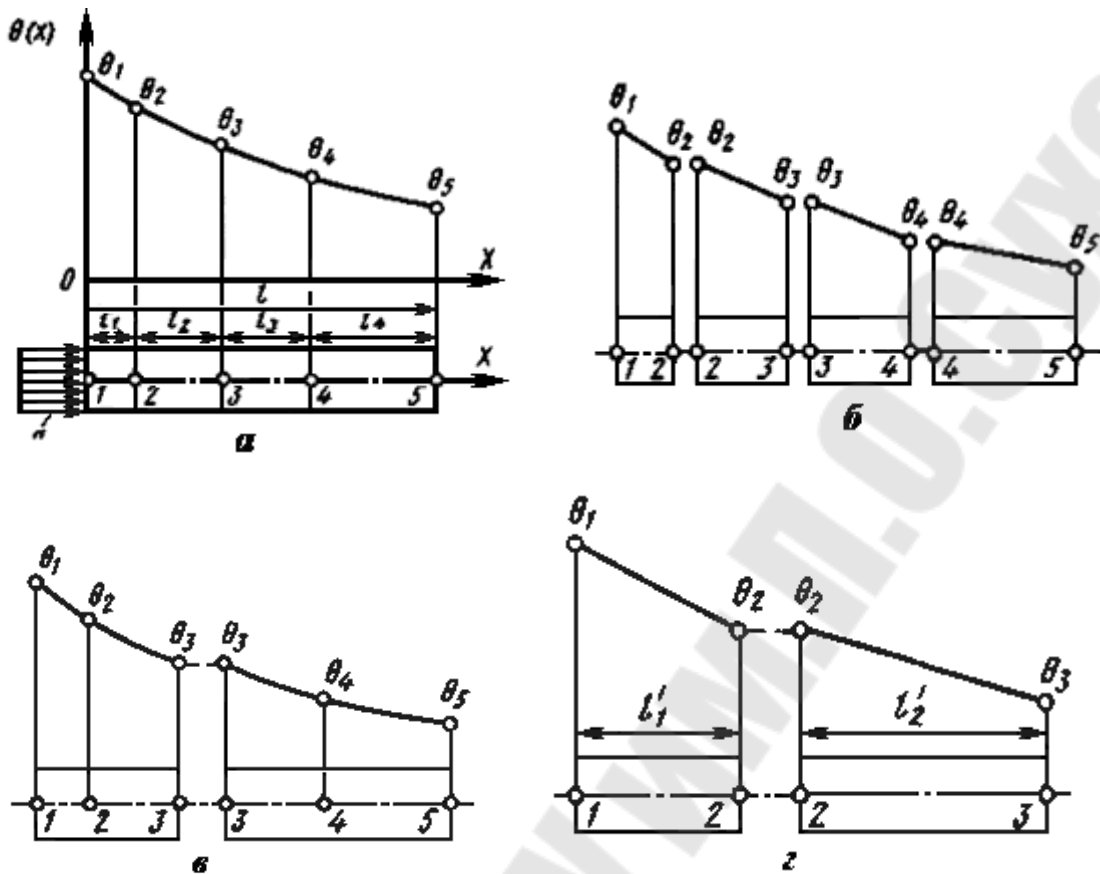


Рис.5.1. Расчетная схема

Используя известное уравнение для прямой, проходящей через две точки, для каждого элемента запишем  $(\theta - \theta_i)/(\theta_j - \theta_i) = (x - x_i)/(x_j - x_i)$ , откуда

$$\theta = \frac{x_j - x}{l_k} \theta_i + \frac{x - x_i}{l_k} \theta_j,$$

где  $l_k = x_j - x_i$  — длина элемента;  $\theta_i$  и  $\theta_j$  — температуры в его узловых точках. Так как  $i = k$ , а  $j = k + 1$ , то

$$\theta = \frac{x_{k+1} - x}{l_k} \theta_k + \frac{x - x_k}{l_k} \theta_{k+1}. \quad (5.2)$$

Дифференцируя выражение (5.2) по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{l_k} (\theta_{k+1} - \theta_k). \quad (5.3)$$

Теперь возвратимся к функционалу (5.1). Если площадь поперечного сечения сверла равна  $F$ , то интеграл по объёму  $V$  можно

заменить интегралом  $F \int_{\ell} \lambda (d\theta / \partial x)^2 dx$ . Имея в виду формулу (5.3), положим приближённо

$$\int_{\ell} \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \approx \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{l_k} (\theta_{k+1} - \theta_k)^2, \quad (5.4)$$

где  $\lambda_k$  – средний коэффициент теплопроводности для каждого из элементов длиной  $l_k$ ;  $m$  – число этих элементов.

Второй интеграл в функционале (5.1) относится к граничным условиям на левом торце сверла. Перед этим интегралом берётся знак «минус», если теплота поступает через граничную поверхность внутрь тела, и знак «плюс» при противоположном направлении теплового потока. Для рассматриваемого примера (рис.5.1) температура на торце  $x = 0$  равна  $\theta_1$ , а  $q = \text{const}$ . Следовательно, в формуле (5.1)

$$\int_{S_1} q \theta dS = qF\theta_1. \quad (5.5)$$

Для второго торца  $\theta = \theta_{m+1}$  и  $\bar{b} = \text{const}$ , следовательно,

$$\int_{S_1} \frac{\alpha}{2} (\theta - \theta_0)^2 dS = \frac{\alpha F}{2} (\theta_{m+1} - \theta_0)^2. \quad (5.6)$$

Объединяя выражения (5.4) – (5.6), получаем

$$\chi = \frac{F}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{l_k} (\theta_{k+1} - \theta_k)^2 - qF\theta_1 + \frac{\alpha F}{2} (\theta_{m+1} - \theta_0)^2. \quad (5.7)$$

Как видно по формуле (5.7), значение функционала  $\chi$  зависит от значений независимых переменных  $\theta_1, \dots, \theta_{m+1}$ , которые необходимо подобрать так, чтобы получить  $\chi \rightarrow \min$ . Это значит, что

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta_1} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta_k} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta_{m+1}} = 0.$$

Получаем систему из  $m + 1$  уравнений с таким же числом неизвестных, разрешая которую с помощью ЭВМ, определяем искомые значения  $\theta_{1,j}$  в узловых точках, а с ними – и интересующую нас функцию  $\theta(x)$ . Последнюю можем описать приближённо, аппроксимируя результаты машинного счёта тем или иным способом.

Рассмотрим с чисто методической целью простой пример, иллюстрирующий порядок расчёта при использовании метода

конечных элементов. Пусть сверло, показанное на рис.5.1, разбивают на две неравные части, каждая из которых имеет свой коэффициент теплопроводности  $\lambda_{1,2}$  (рис. 5.1, з). В соответствии с формулой (5.7) в этом случае

$$\chi = \frac{F\lambda_1}{2l'_1}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{F\lambda_2}{2l'_2}(\theta_3 - \theta_2)^2 - qF\theta_1 + \frac{\alpha F}{2}(\theta_3 - \theta_0)^2. \quad (5.8)$$

Обозначим  $C_1 = F\lambda_1/l'_1$ ;  $C_2 = F\lambda_2/l'_2$ . С целью минимизации функционала  $\chi$  определим частные производные выражения (5.8) и результаты приравняем к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \theta_1} &= C_1\theta_1 - C_1\theta_2 - qF = 0; \\ \frac{\partial \chi}{\partial \theta_2} &= -C_1\theta_1 + (C_1 + C_2)\theta_2 - C_2\theta_3 = 0; \\ \frac{\partial \chi}{\partial \theta_3} &= -C_2\theta_2 + (C_2 + \alpha F)\theta_3 - \alpha F\theta_0 = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть представлены в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} C_1 & -C_1 & 0 \\ -C_1 & (C_1 + C_2) & -C_2 \\ 0 & -C_2 & (C_2 + \alpha F) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qF \\ 0 \\ \alpha F\theta_0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Решая систему уравнений (5.9), получаем искомые значения температур:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= q \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{l'_1}{\lambda_1} + \frac{l'_2}{\lambda_2} \right) - \theta_0; \\ \theta_2 &= q \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{l'_2}{\lambda_2} \right) - \theta_0; \\ \theta_3 &= \frac{q}{\alpha} - \theta_0. \end{aligned}$$

## 5.2. Моделирование методом конечных разностей

В качестве примера применения метода конечных разностей рассмотрим задачу распределения температуры по длине сверла.

Разделим сверло на малые объемы длиной  $h_x$  (рис.5.2) и

пронумеруем эти объемы цифрами 1, 2, ...,  $i - 1$ ,  $i$ ,  $i + 1$ , ...  
 Время, в течение которого происходит теплообмен, разобьем на конечные малые промежутки  $\Delta\tau$ , которые также пронумеруем цифрами 1, 2, ...,  $k - 1$ ,  $k$ ,  $k + 1$ , ...

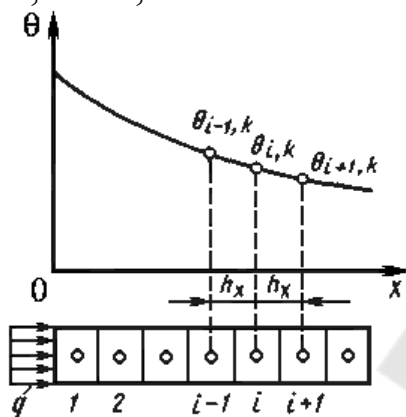


Рис.5.2. Схема к определению температуры вдоль сверла

Предположим, что закон изменения температуры по длине сверла во времени нам известен. Для  $k$ -го промежутка времени представим его в виде линии  $\theta = \varphi(x)$ . Рассмотрим точку  $i$  на этой кривой. Первую производную  $\theta$  по  $x$  в окрестности точки  $i$  можем приближённо заменить выражением

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} \approx \frac{\theta_{i,k} - \theta_{i-1,k}}{h_x} \quad (5.10)$$

или выражением

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} \approx \frac{\theta_{i+1,k} - \theta_{i,k}}{h_x}. \quad (5.11)$$

Две эти формулы принято кратко записывать в виде  $(\Delta\theta/h_x)_-$  и  $(\Delta\theta/h_x)_+$  и называть разностными выражениями назад (-) и вперед (+).

Вторая производная представляет собой изменение первой производной на длине  $h_x$ . Пользуясь разностными выражениями, запишем

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{h_x} \left[ \left( \frac{\Delta\theta}{h_x} \right)_+ - \left( \frac{\Delta\theta}{h_x} \right)_- \right].$$

Подставляя в эту формулу значения разностных выражений (5.10) и (5.11), получаем:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h_x^2} (\theta_{i+1,k} + \theta_{i-1,k} - 2\theta_{i,k}). \quad (5.12)$$

Теперь рассмотрим производную  $\partial\theta/\partial\tau$ . Изменение  $\theta$  по времени в точке  $i$  можно приближённо описать отношением

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \approx \frac{\theta_{i,k+1} - \theta_{i,k}}{\Delta\tau}. \quad (5.13)$$

Подставляя значения производных из формул (5.12) и (5.13) в уравнение теплопроводности  $\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \omega \frac{d^2\theta}{dx^2}$ , получаем:

$$\theta_{i,k+1} - \theta_{i,k} = \frac{\omega\Delta\tau}{h_x^2} (\theta_{i+1,k} + \theta_{i-1,k} - 2\theta_{i,k})$$

или

$$\theta_{i,k+1} = \frac{\omega\Delta\tau}{h_x^2} (\theta_{i+1,k} + \theta_{i-1,k}) + \left(1 - \frac{2\omega\Delta\tau}{h_x^2}\right) \theta_{i,k}. \quad (5.14)$$

Выражение (5.14) – это дифференциальное уравнение теплопроводности, представленное в конечно-разностной форме.

Поскольку при разбиении сверла на малые участки длиной  $h_x$ , а времени на короткие промежутки  $\Delta\tau$  мы не налагали на величины  $h_x$  и  $\Delta\tau$  никаких ограничений, их значения можем выбирать произвольно. Выберем их так, чтобы  $F_{ox} = \omega\Delta\tau/h_x^2 = 0,5$ . Тогда вместо уравнения (5.14) получаем

$$\theta_{i,k+1} \approx 0,5(\theta_{i+1,k} + \theta_{i-1,k}). \quad (5.15)$$

Формулу (5.15) можем интерпретировать так: чтобы определить температуру в любой точке сверла в данный момент времени, достаточно знать температуру соседних точек в предыдущий момент времени.

Пусть сверло в рассматриваемой задаче разбито по длине на  $m$  равных элементов, а время, в течение которого происходит теплообмен, на  $n$  равных промежутков. Тогда для каждого из  $m$  узлов, включая узлы, расположенные у граничных поверхностей, может быть написано  $n$  уравнений типа (5.15), в том числе и для начальных промежутков времени. Имея в виду, что граничные и начальные условия заданы, получаем систему из связанных друг с другом  $mn$  уравнений типа (5.15) с таким же числом неизвестных.

Решая эту систему с помощью ЭВМ, рассчитываем значения  $\theta$  в

каждом узле сверла в данный момент времени, т. е. получаем численное описание нестационарного температурного поля в сверле при заданных условиях теплообмена. Результат расчета будет тем точнее, чем меньшими (в пределах  $F_{0x} < 0,5$ ) будут приняты значения интервалов  $h_x$  и  $\Delta\tau$ . Однако при этом следует учесть, что объем вычислительной работы с уменьшением возрастает, так как возрастает число элементов  $m$  при заданной длине сверла, а с ним число уравнений, подлежащих решению, и число неизвестных, входящих в эти уравнения. Аналогично влияет на объем работы и уменьшение промежутка времени  $\Delta\tau$ .

Заметим, что при  $F_{0x} < 0,5$  устойчивость решения уравнений типа (5.14) теряется и расчет может дать неверные результаты. Формула (5.14), описывающая одномерный процесс распространения теплоты в сверле, является частным случаем выражения

$$\begin{aligned} \theta_{i,j,p,k+1} = & F_{0x}(\theta_{i+1,j,p,k} + \theta_{i-1,j,p,k}) + F_{0y}(\theta_{i,j+1,p,k} + \theta_{i,j-1,p,k}) + \\ & + F_{0z}(\theta_{i,j,p+1,k} + \theta_{i,j,p-1,k}) + [1 - 2(F_{0x} + F_{0y} + F_{0z})]\theta_{i,j,p,k} \end{aligned} \quad (5.16)$$

описывающего трёхмерный нестационарный процесс теплопроводности, причём критерии  $F_{0y} = \omega\Delta\tau/h_y^2$  и  $F_{0z} = \omega\Delta\tau/h_z^2$  учитывают размеры  $h_y$  и  $h_z$  элементарных объёмов. Для обеспечения устойчивости решения уравнения (5.16) следует принимать  $F_{0x} + F_{0y} + F_{0z} \leq 0,5$ .

Покажем применение *метода конечных разностей* к решению плоской задачи распространения тепла в станине карусельного станка (рис.5.3). Процесс происходит достаточно долго, в связи с чем теплообмен в системе можно полагать установившимся. Вследствие разницы между скоростями точек, расположенных на различных окружностях торца направляющих, тепловыделение на площадке контакта можно полагать распределенным по линейному закону вдоль оси  $OX$  и равномерно по длине окружности. Все поверхности станины, исключая направляющие и противоположную им поверхность, можно считать адиабатическими. Плоскость  $AA$ , соприкасающаяся с массивным фундаментом, имеет избыточную температуру, равную температуре фундамента  $\theta = 0$ . Пользуясь методом конечных разностей, опишем температурное поле в станине.

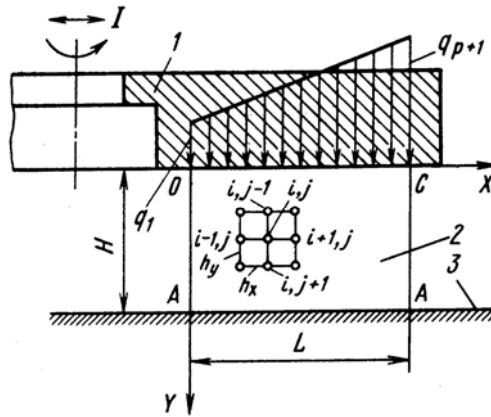


Рис.5.3. Схема к расчету распределения температуры в станине станка

Процесс теплопроводности в условиях рассматриваемой задачи описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad (5.17)$$

поскольку вследствие адиабатичности плоскостей  $H \times L$  по правилам отражения источников трёхмерная задача преобразуется в двумерную. Представим уравнение (5.17) в конечно-разностной форме. Для этого поверхность стола ( $0 \leq x \leq L$ ;  $0 \leq y \leq H$ ) разобьем на площадки размером  $h_x \times h_y$ , присвоив узловым точкам номера 1, 2, ...,  $i-1, i, i+1, \dots$  по оси  $OX$  и номера 1, 2, ...,  $j-1, j, j+1, \dots$  по оси  $OY$  (несколько условных точек показано на рис.7.24). По аналогии с формулой (5.12), заменив индекс  $k$  на  $j$ , запишем вместо уравнения (5.17) выражение

$$\frac{1}{h_x^2} (\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j}) + \frac{1}{h_y^2} (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j}) = 0.$$

Если принять  $h_x = h_y = h$ , то

$$\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} + \theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 4\theta_{i,j} = 0. \quad (5.18)$$

Формула (5.18) представляет собой уравнение теплопроводности, записанное в конечно-разностной форме. Оно должно быть дополнено граничными условиями, которые также следует представить в конечно-разностной форме. Проще всего описать граничное условие первого рода на плоскости  $AA$ , поскольку здесь для всех точек  $\theta = 0$ , т. е.

$$\theta_{1,m+1} = \dots = \theta_{i-1,m+1} = \theta_{i,m+1} = \theta_{i+1,m+1} = \dots = \theta_{p+1,m+1} = 0, \quad (5.19)$$



где  $p = L/h$  и  $m = H/h$  – число элементов, на которые разбиты размеры  $L$  и  $H$ .

Переходим к описанию граничных условий на верхней плоскости ( $y = 0$ ). По условиям задачи плотность тепловыделения на участке  $0 \leq x \leq L$  описывается линейной функцией

$$q(x) = q_1 + \frac{q_{p+1} - q_1}{L} x$$

или

$$q(i) = q_1 + \frac{q_{p+1} - q_1}{p} (i - 1). \quad (5.20)$$

Граничные условия второго рода представим выражением

$$q(x) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

По аналогии с формулой (5.11) запишем  $\partial \theta / \partial y \approx (\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}) / h$ .

В данном случае на верхней границе  $j = 1$ . Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \approx \frac{\theta_{i,2} - \theta_{i,1}}{h}, \text{ откуда}$$

$$\theta_{i,1} = \theta_{i,2} + \frac{h}{\lambda} \left[ q_1 + \frac{q_{p+1} - q_1}{p} (i - 1) \right]. \quad (5.21)$$

Выражение (5.21) описывает в конечно-разностной форме граничные условия второго рода на плоскости ОС. Для боковой грани ОА граничное условие имеет вид  $\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ . Вновь используя формулу (5.11), запишем

$$\theta_{1,j} = \theta_{2,j}. \quad (5.22)$$

Аналогично для грани СА, применив выражение (5.10), получим

$$\theta_{p+1,j} = \theta_{p,j}. \quad (5.23)$$

В соответствии с методом конечных разностей далее следует написать уравнения, содержащие значения температур для всех узловых точек тела. Для точек, расположенных на верхней граничной поверхности, это будут уравнения типа (5.21) при  $1 < i < p + 1$ . Для точек, лежащих на плоскости АА, следует написать уравнения типа (5.19) при тех же значениях  $i$ . Уравнения типа (5.22) и (5.23), будучи написаны для  $1 < j < m + 1$ , соответствуют точкам плоскостей ОА и СА. Для всех остальных точек, расположенных внутри контура, т. е.

при  $2 < i < p$  и  $2 < j < m$ , должны быть составлены уравнения по типу (5.18).

Таким образом будет получена система из  $(m+1)(p+1)$  алгебраических уравнений, в которые войдут искомые значения  $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{p+1,m+1}$  описывающие температурное поле в станине.

## 6 СТАТИЧЕСКОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ

### 6.1. Математическое моделирование параметрического синтеза шпиндельного узла по критерию жесткости

Математическое моделирование параметрического синтеза шпиндельного узла производится на примере шпинделя с одним приводным элементом в виде зубчатого колеса.

Составляем расчетную схему шпинделя с учетом конфигурации и расставляем все действующие силы на шпиндель, а также реакции в опорах (рис.6.1).

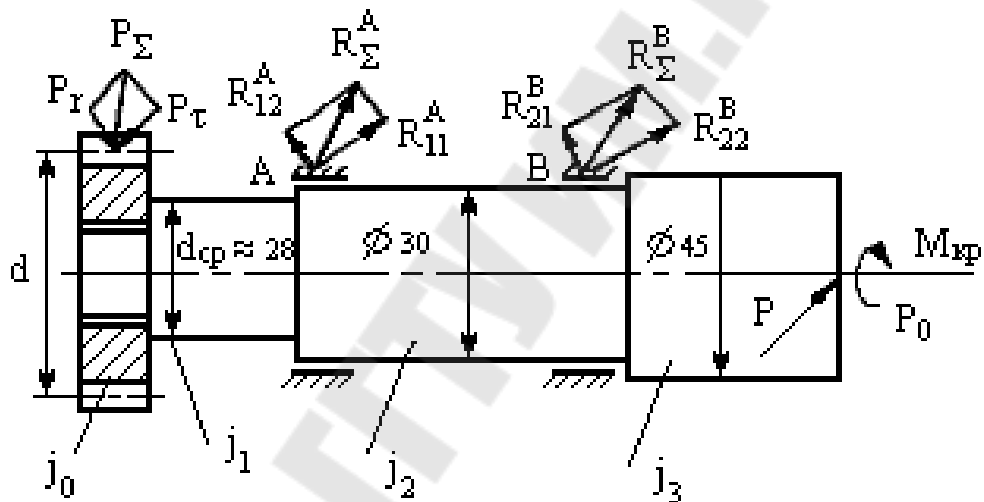


Рис. 6.1. Расчетная схема (1-зубчатое колесо, 2-шпиндель, 3-патрон)

Рассчитываем силы резания  $P_0$  и момент крутящий  $M_{кр}$ , возникающие при обработке и действующие на шпиндель, на примере сверления отверстий.

Определяем усилие в зацеплении зубчатых колес

- тангенциальная сила  $P_\tau = \frac{2M_{кр}}{d}$ ;

- радиальная сила  $P_r = P_\tau \cdot \operatorname{tg}\alpha$ , Н.

Далее определяем суммарную силу в зацеплении  $P_\Sigma$

$$P_\Sigma = \sqrt{P_\tau^2 + P_r^2}, \text{ Н}$$

Считаем, что сила  $P$  направлена в одной плоскости с силой  $P_\Sigma$

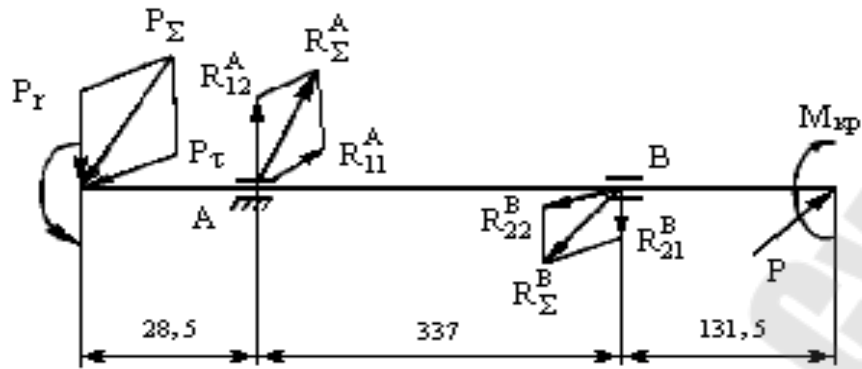


Рис. 6.2. Расчетная схема

Определяем суммарные реакции  $R_{\Sigma}^A$  и  $R_{\Sigma}^B$

$$\Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0.$$

Далее определяем коэффициенты приведения  $K_1, K_2, K_3$ .

$$K_1 = \frac{J_0}{J_1}; K_2 = \frac{J_0}{J_2}; K_3 = \frac{J_0}{J_3}; J_0 = \frac{\pi d^4}{64}$$

Далее разделяем шпиндель условно на 4 части, так чтобы каждая часть имела свой постоянный момент инерции (рис. 6.3).

Определим силы  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$  с учетом внешних активных сил:  $P_{\Sigma}, R_{\Sigma}^A, R_{\Sigma}^B$  и  $P$ .

Тогда  $Q_1 = P_{\Sigma}, H; Q_2 = Q_1, H$

$Q_3 = R_{\Sigma}^B - R_{\Sigma}^A + Q_2, H.$

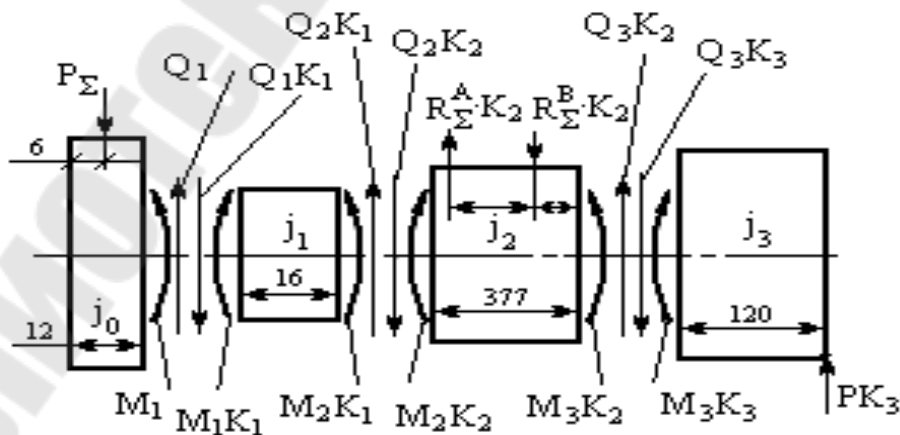


Рис. 6.3. Расчетная схема

Далее определяем моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$

Затем приводим шпиндель к балке, которая имеет по всей длине постоянное поперечное сечение и прикладываем к этой балке все найденные силы в характерных точках (рис.6.4).

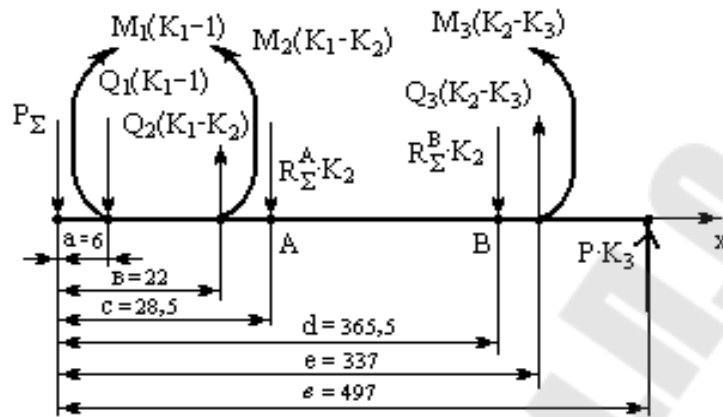


Рис. 6.4. Расчетная схема

Для определения критической частоты вращения шпинделя  $\omega_{кр}$  необходимо знать перемещение каждой его точки, для этого составляем дифференциальное уравнение упругой линии полученной балки.

$$EJ_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x); EJ_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = P_{\Sigma} \cdot x + Q_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot (x - a) - M_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot (x - a)^0 - Q_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot (x - \epsilon) + M_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot (x - \epsilon)^0 - R_{\Sigma}^A \cdot K_2 \cdot (x - c) + R_{\Sigma}^B \cdot K_2 \cdot (x - d) - Q_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot (x - e) + M_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot (x - e)^0$$

Интегрируем полученное уравнение два раза

$$EJ_0 \frac{dy}{dx} = R_{\Sigma}^A \cdot \frac{x^2}{2} + Q_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} - M_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot (x - a) - Q_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot \frac{(x - \epsilon)^2}{2} - M_0 K_1 (x - \epsilon) + P_1 K_1 \frac{(x - \epsilon)^2}{2} + M_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot (x - \epsilon) - Q_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot \frac{(x - f)^2}{2} + M_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot (x - f) + P_2 K_3 \frac{(x - g)^2}{2} - M_{0_2} K_3 (x - g) + Q_4 (K_3 - K_4) \frac{(x - m)^2}{2} + M_4 (K_3 - K_4) (x - m) + C \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
 EJ_0 y = & R_{\Sigma}^A \cdot \frac{x^3}{6} + Q_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot \frac{(x-a)^3}{6} - M_1 \cdot (K_1 - 1) \cdot \frac{(x-a)^2}{2} - \\
 & - Q_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot \frac{(x-e)^3}{6} - M_0 K_1 \frac{(x-e)^2}{2} + P_1 K_1 \frac{(x-e)^3}{6} + M_2 \cdot (K_1 - K_2) \cdot \frac{(x-e)^2}{2} - \\
 & - Q_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot \frac{(x-f)^3}{6} + M_3 \cdot (K_2 - K_3) \cdot \frac{(x-f)^2}{2} + P_2 K_3 \frac{(x-g)^3}{6} - M_{02} K_3 \frac{(x-g)^2}{2} + \\
 & + Q_4 (K_3 - K_4) \frac{(x-m)^3}{6} + M_4 (K_3 - K_4) \frac{(x-m)^2}{2} + Cx + D
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Определяем коэффициенты  $C$  и  $D$  из граничных условий.

Первое граничное условие:  $x = c$ .

Тогда перемещение шпинделя в точке А можно определить из выражения (6.2)

$$y_A = \frac{1}{EJ_0} [N + c \cdot C + D],$$

где  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа - модуль продольной упругости

Находим  $y_A$  из выражения для жесткости опоры

$$C_A \cdot y_A = R_{\Sigma}^A,$$

где  $C_A$  - жесткость опоры А [7].

$$C_A = \frac{10 R_{\Sigma}^A}{\delta_r^1 + \delta_r^{11}}, \text{ Н/мм}$$

где  $\delta_r^1 = K_1 \cdot (R_{\Sigma}^A)^a$ , - упругое сближение тел качания и колец подшипников;

$K_1 = (0,7 - 0,002 \cdot d) \cdot 10^{-3}$ , где  $d$  - посадочный диаметр подшипника  
 $a = 2/3$ .

Определим радиальную податливость в контакте колец подшипников с посадочными поверхностями вала и корпуса

$$\delta_r'' = \frac{4R_{\Sigma}^A \cdot k_2}{\pi \cdot d \cdot b} \left(1 + \frac{d}{D}\right)$$

$$k_2 = 0,0005 \div 0,0025 \text{ мм}^3/\text{Н}$$

Подставим второе граничное условие  $x = d$  в уравнение (6.2)

$$y_e = \frac{1}{EJ_0} [N_1 + d \cdot C + D]$$

Находим  $y_B$  из выражения для жесткости опоры В

$y_B \cdot C_B = R_{\Sigma}^B$ , где  $C_B$  - жесткость опоры В

$$C_B = \frac{10 R_{\Sigma}^B}{\delta_r' + \delta_r''} \text{ Н / мм};$$

$$\delta_r' = k_1 \cdot (R_\Sigma^B)^a; \quad k_1 = 6,4 \cdot 10^{-4}, \quad a = 2/3.$$

$$\delta_r'' = \frac{4 R_\Sigma^B k_2}{\pi d b} \cdot \left(1 + \frac{d}{D}\right).$$

В результате получим коэффициент жесткости опоры  $B$  и ее перемещение

Далее решаем систему уравнений и определяем  $C$  и  $D$

Подставляем текущие значения  $x_i$  в уравнения (6.1) и (6.2) можно вычислить значения углов поворота и перемещений  $y_i$  в характерных точках.

## 6.2. Математическое моделирование динамики с использованием передаточной функции

Моделирование производим на примере шпиндельного узла, на который действует динамическая сила  $R$  (рис. 6.5).

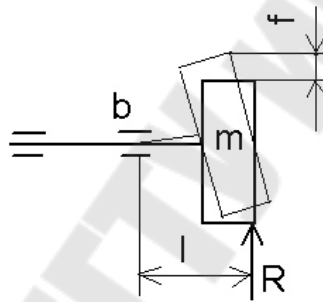


Рис. 6.5. Расчетная схема определения виброустойчивости изгибных колебаний.

Как известно, при консольном закреплении сила упругости

$$R_{yn} = \frac{3EIf}{l^3} = Cf.$$

Динамическую силу можно представить через ее составляющие: силу инерции, силу демпфирования и силу упругости

$$R = m\ddot{u} + b\dot{u} + Cu.$$

Так как действующая сила динамическая, то перемещения вызываемые ею можно представить в форме комплексного числа

$$u = e^{i\varphi}$$

$$\frac{du}{dt} = i\omega e^{i\varphi}.$$

С учетом выше приведенных выражений силу  $R$  можно представить в

операционной форме:

$$R = mpu^2 + bpu + Cu = (mp^2 + bp + C)u$$

В этом случае передаточная функция будет иметь вид:

$$W = \frac{u}{R} = \frac{1/C}{\frac{mp^2}{C} + \frac{bp}{C} + \frac{C}{C}} = \frac{1/C}{m_1^2 p^2 + b_1 p + 1}$$

Умножив числитель и знаменатель на выражение сопряженное знаменателю, получим:

$$W = \frac{1/C \left( (1 - m_1^2 \varpi^2) - b_1 i \varpi \right)}{\left( (1 - m_1^2 \varpi^2) + b_1 i \varpi \right) \left( (1 - m_1^2 \varpi^2) - b_1 i \varpi \right)}$$

Выделяем действительную и мнимую части передаточной функции:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{1/C (1 - m_1^2 \varpi^2)}{(1 - m_1^2 \varpi^2)^2 + b_1^2 \varpi^2}; \\ \text{Im} &= \frac{-1/C b_1 \varpi}{(1 - m_1^2 \varpi^2)^2 + b_1^2 \varpi^2} i. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из математики известны связи между действительной и мнимой частями с амплитудой и фазой

$$A = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\text{Re}}{\text{Im}}$$

Подставив в соотношения (6.3) частные значения частот получим:

	$\varpi_{кр} = \frac{1}{m_1}$	
1) $\varpi = 0$	2) $\text{Re} = 0$	3) $\varpi = \infty$
$\text{Re} = \frac{1}{C}$	$\text{Im} = -\frac{1}{C} \frac{m_1}{b_1}$	$\text{Re} = 0$
$\text{Im} = 0$	$A = \frac{1}{C} \frac{m_1}{b_1}$	$\text{Im} = 0$
$A = \frac{1}{C}$		$A = 0$
$\varphi = 0$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\pi$

По полученным результатам строим амплитудо-частотную, фазо-частотную и амплитудо-фазо-частотную характеристики (рис.6.6).



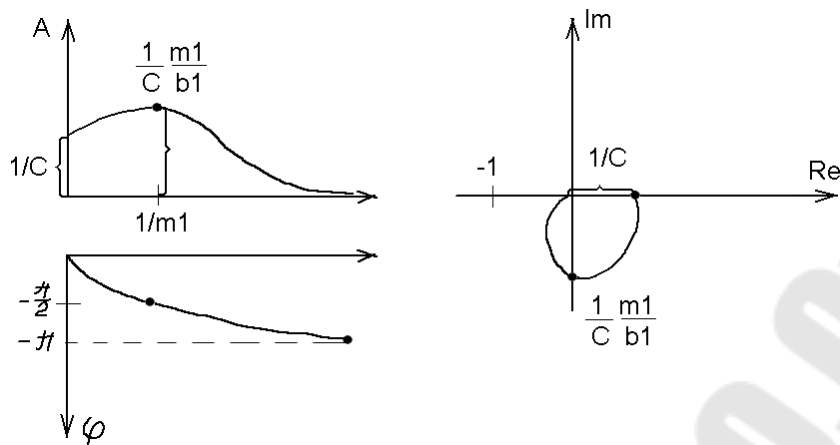


Рис. 6.6. Графики зависимостей

Такая система виброустойчива, но имеются критические частоты, при которых амплитуда возрастает.

$$\omega_{кр} = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{\sqrt{m/C}}$$

Изменить численные значения критических частот можно путем:

- 1) изменения длины вылета патрона ( $l$ );
- 2) изменения момента инерции ( $I$ );
- 3) изменения материала шпинделя.

По АФЧХ, с учетом критерия Найквиста, можно заключить, что система виброустойчива.

## 7 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВАЛОВ

### 7.1. Математическое моделирование динамики валов по передаточным функциям

Математическое моделирование рассмотрим на примере мотор-шпинделя (рис. 7.1, а).

Динамические нагрузки возникают за счет несовпадения геометрического центра вращения с центром масс.

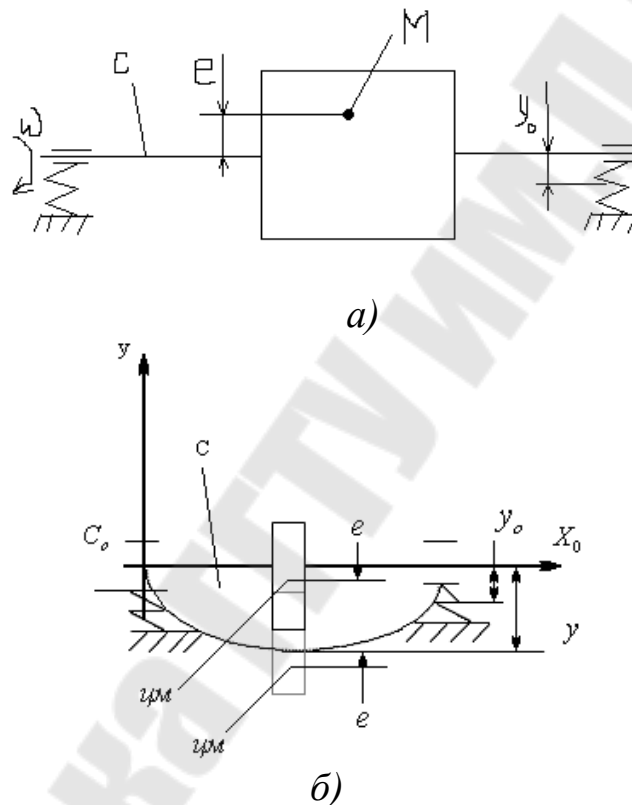


Рис. 7.1. Расчетная схема

При вращении вала устанавливается динамическое равновесие:

$$F_{ц} = F_y \quad (7.1)$$

где  $F_{ц}$  - центробежная сила;

$F_y$  - сила упругости.

Известны выражения для центробежной и силы упругости

$$F_{ц} = m \cdot \omega^2 \cdot (y + e) \quad (7.2)$$

$$F_y = c \cdot (y - y_0) \quad (7.3)$$

Из условия статического равновесия определяются силы реакции в

опорах

$$R_{1,2} = \frac{F_y}{2}.$$

Принимаем, что опоры испытывают только упругие деформации, тогда

$$R_{1,2} = c_0 \cdot y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{F_y}{2 \cdot c_0} \quad (7.2)$$

где  $C$  - изгибающая жесткость вала;

$C_0$  - жесткость подшипниковой опоры.

Подставив (7.2) в уравнение (7.3) и с учетом (7.1) получим:

$$F_{\psi} = c \cdot \left( y - \frac{F_{\psi}}{2 \cdot c_0} \right);$$
$$F_{\psi} \left( 1 + \frac{c}{2 \cdot c_0} \right) = c \cdot y$$

Тогда

$$F_{\psi} = \frac{c \cdot y}{1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}} \quad (7.3)$$

Так как  $F_{\psi} = F_y$ , то  $m \cdot \omega^2 \cdot (y + e) = \frac{c \cdot y}{1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}}$ ;

$$y \cdot \left( m \cdot \omega^2 - \frac{c}{1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}} \right) = -m \cdot \omega^2 \cdot e.$$

Так как передаточная функция - отношение выходного параметра к входному, то:

$$W = \frac{y}{e} = - \frac{m \cdot \omega^2}{m \cdot \omega^2 - \frac{c}{1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}}} \quad (7.4)$$

Для построения графика влияния угловой скорости на передаточную функцию выберем несколько частных значений

угловой скорости (рис.7.2)

1)  $\omega = 0, W=0$

2)  $m \cdot \omega^2 - \frac{c}{1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}} = 0 \Rightarrow \omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m \cdot \left(1 + \frac{c}{2 \cdot c_0}\right)}}$

3)  $\omega = \infty, W = -1.$

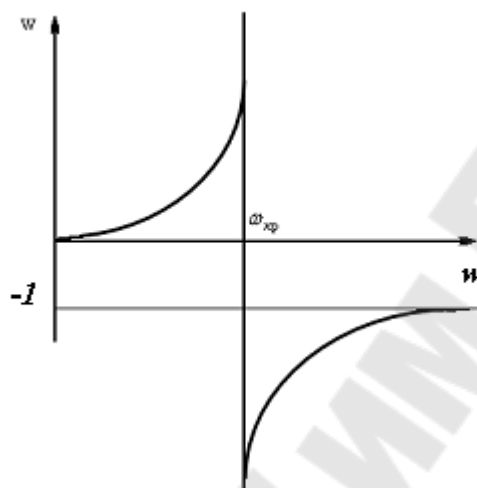


Рис.7.2. График влияния угловой скорости на передаточную функцию

При высоких частотах вращения центр масс стремится занять положение центра оси вращения.

**Пример.** Найти критические скорости тонкого вращающегося шпинделя длиной  $l$ . Радиус поперечного сечения шпинделя  $r$ , сила тяжести  $P$  и модуль упругости материала  $E$ .

При увеличении угловой скорости шпинделя от значения  $\omega = 0$  до некоторого предельного значения  $\omega = \omega_{max}$ , называемого критической угловой скоростью, вал сохраняет свою прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости  $\omega_k$  шпиндель искривляется и начинает колебаться. При дальнейшем увеличении  $\omega$  колебание прекращается, а затем вновь возникает при второй критической скорости, и так периодически.

При вращении изогнутого шпинделя на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент шпинделя (рис. 7.3) действует центробежная сила

$$F = m\omega^2 \eta,$$

где  $m$  - масса элемента  $d\xi$ ;

$\omega$  - угловая скорость вращения;

$\eta$  - прогиб, равный радиусу вращения элемента  $d\xi$ .

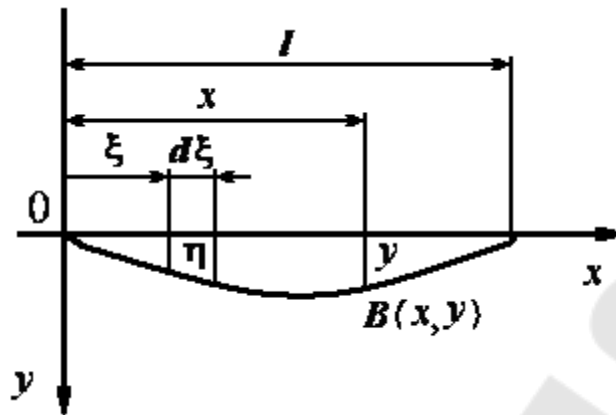


Рис. 7.3. Схема к расчету шпинделя

Сила тяжести элемента  $d\xi$  равна  $\frac{P}{l}d\xi$ , а масса  $m = \frac{P}{gl}d\xi$ .

Элементарная центробежная сила  $dF = \frac{P}{gl}\omega^2\eta d\xi$ . Прогиб  $\eta$  является функцией  $\xi$ , определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, выражение  $\frac{P}{gl}\omega^2\eta = f(\xi)$  и элементарная центробежная сила

$$dF = f(\xi)d\xi = \frac{P}{gl}\omega^2\eta d\xi \quad (7.5)$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения  $B$  будет

$$dF(x - \xi) = (x - \xi)f(\xi)d\xi$$

Аналогично предыдущим рассуждениям изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x - \xi)f(\xi)d\xi$$

Дифференцируя под знаком интеграла дважды это выражение по параметру  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= \int_0^x f(\xi)d\xi + (x - x)f(x)\frac{dx}{dx} - (x - 0)f(0)\frac{d}{dx}(0) = \int_0^x f(\xi)d\xi; \\ \frac{d^2M}{dx^2} &= \int_0^x 0 \cdot d\xi + f(x)\frac{dx}{dx} - f(0)\frac{d}{dx}(0) = f(x) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Так как в основании равенства (7.5)

$$f(x) = \frac{P}{gl} \omega^2 y,$$

то выражение (7.6) имеет вид

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{P\omega^2}{gl} y,$$

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{P\omega^2}{EJgl} y = 0 \quad (7.7)$$

Вводим обозначение  $\frac{P\omega^2}{EJgl} = q^4$ . Тогда уравнение (7.7) представляется

так:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - q^4 y = 0.$$

Для того, чтобы решить это неполное линейное уравнение четвертого порядка, записываем характеристическое уравнение

$$m^4 - q^4 = 0$$

или

$$(k - q)(k + q)(k^2 + q^2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= q \\ k_2 &= -q \\ k_3 &= qi \\ k_4 &= -qi \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \sin qx + C_4 \cos qx. \quad (7.8)$$

Для определения постоянных интегрированных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  используем граничные условия задачи. На опорах шпинделя прогиб и кривизна оси равна нулю. Математически это выражается четырьмя граничными условиями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \quad y = 0 \\ \text{при } x = 0 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \\ \text{при } x = l \quad y = 0 \\ \text{при } x = l \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \end{array} \right\}$$

Дифференцируя дважды общее решение (7.8), получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} + C_3 q \cos qx - C_4 q \sin qx \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} + C_3 q^2 \sin qx - C_4 q^2 \cos qx. \end{array} \right\}$$

Граничные условия дают систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 e^{q \cdot 0} + C_2 e^{-q \cdot 0} + C_3 q \sin(q \cdot 0) + C_4 q \cos(q \cdot 0) = 0, \\ C_1 q^2 e^{q \cdot 0} + C_2 q^2 e^{-q \cdot 0} + C_3 q^2 \sin(q \cdot 0) - C_4 q^2 \cos(q \cdot 0) = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0 \\ C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0 \end{array} \right\}$$

или

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0 \\ C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0 \end{array} \right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем,

$$\left. \begin{array}{l} C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

или

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = -C_1, \\ C_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Поступая аналогично с двумя последующими уравнениями той же системы, имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_3 \sin ql + C_4 \cos ql &= 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Подставляя выражение (7.9) в систему (7.10), получим

$$\left. \begin{aligned} C_3 \sin ql &= 0, \\ C_1 (e^{ql} - e^{-ql}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Так как при  $l \neq 0$  и  $q \neq 0$  последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ C_3 \sin ql &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Если  $C_3 = 0$ , уравнение упругой линии вала  $y = 0$ , т.е. упругая линия совпадает с осью  $x$  и вал не искривлен. При искривлении вала необходимо, чтобы  $C_3 \neq 0$ . Но когда необходимо, чтобы  $\sin ql = 0$ .

Отсюда

$$ql = k\pi \text{ и } q = \frac{k\pi}{l},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

при  $k = 0$  получим  $q = 0$ , и уравнение упругой линии шпинделя

$$y = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

т.е. ось прямая.

При остальных значениях  $q$  ось шпинделя искривляется. В таких случаях уравнение упругой линии

$$y = C_3 \sin ql$$

при

$$q = q_1 = \frac{\pi}{l}, \quad q = q_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad q = q_3 = \frac{3\pi}{l}.$$

Упругая линия будем синусоидой:



$$\left. \begin{aligned} y &= C_3 \sin \frac{\pi}{l} x \\ y &= C_3 \sin \frac{2\pi}{l} x \\ y &= C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

содержащие по длине оси одну, две, три и больше полуволн. Таким образом, при критическом значении

$$q_{кр} = \frac{k\pi}{l}$$

упругая линия – синусоида с  $k$  полуволнами по длине. Вернемся к введенному обозначению

$$q^4 = \frac{P\omega^3}{EJgl},$$

Подставляя в последнее равенство критические значения  $q_{кр}$  и  $\omega_{кр}$ , получим

$$q_{кр}^4 = \frac{P\omega_{кр}}{EJgl}; \quad \frac{a^4 \pi^4}{l^4} = \frac{P\omega_{кр}^2}{EJgl}$$

или

$$\omega_{кр} = \frac{a^2 p^2}{l} \sqrt{\frac{EJg}{Pl}}$$

Вычислим момент инерции площади сечения шпинделя.

Момент инерции  $J$  материальной точки относительно оси представляет собой, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции площади поперечного сечения шпинделя

$$J = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum R^{2\Delta k} = \int R^2 dm,$$

где  $\Delta m$  - масса элементарной частицы;

$R$  - расстояние любой точки элементарной частицы от оси;

$dm$  - дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для шпинделя) при плотности  $\rho = 1$ .

В общем случае  $dm = \rho d\upsilon$  и  $J = \rho \int R^2 d\upsilon$ .

Момент инерции  $J$  площади поперечного сечения шпинделя относительно диаметра:

$$J = \frac{\rho \pi r^4}{4}$$

Эту величину можно получить из справочных таблиц или вычислить при помощи определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра.

Масса шпинделя:

$$m = \rho \pi r^2 l = \frac{P}{g}.$$

Таким образом, момент инерции сечения шпинделя.

$$J = \frac{Pr^2}{4gl}$$

и для определения критической скорости получим выражение

$$\omega_{кр} = \frac{a^2 \pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}$$

Минимальная критическая скорость

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}.$$

### 7.5.2. Моделирование изгибных колебаний переходными матрицами

Предположим, что невесомый участок вала постоянного сечения совершает собственные незатухающие колебания.

Дифференциальное уравнение собственных колебаний невесомого участка имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0, \quad (7.11)$$

где  $\xi$  – поперечное перемещение сечения участка с абсциссой  $x$ ;  $EJ$  – изгибная жёсткость рассматриваемого участка стержня.

Представим поперечное перемещение в виде

$$\xi = z(x) \sin \omega t, \quad (7.12)$$

где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний;  $z(x)$  – зависимость амплитуд колебаний от абсциссы рассматриваемого сечения. С учётом равенства (7.12) из равенства (7.11) получим

$$z^{IV} = 0. \quad (7.13)$$

Интегрируя последовательно (7.13), будем иметь

$$z^{III} = C_1; \quad z^{II} = C_1 x + C_2;$$

$$z^I = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3; \quad (7.14)$$

$$z = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \xi^I &= z^I(x)\sin\omega t = \varphi\sin\omega t; \\ EJ\xi^{II} &= EJz^{II}(x)\sin\omega t = \tilde{M}\sin\omega t; \\ EJ\xi^{III} &= EJz^{III}(x)\sin\omega t = Q\sin\omega t. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Легко установить, что величины  $\varphi$ ,  $\tilde{M}$  и  $Q$  представляют, соответственно, амплитуды угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в текущем сечении с абсциссой  $x$ .

Как показывает последнее выражение (7.14), амплитуда упругой линии стержня образует кривую третьего порядка.

Подчиняя равенства (7.14) условию на правом конце рассматриваемого участка  $x = 0$ , получим

$$C_1 = z^{III}(0); \quad C_2 = z^{II}(0); \quad C_3 = z^I(0); \quad C_4 = z(0).$$

Принимая во внимание условия (7.15), запишем

$$z^I(0) = \varphi(0); \quad z^{II}(0) = \frac{\tilde{M}(0)}{EJ}; \quad z^{III}(0) = \frac{Q(0)}{EJ}.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} z &= z(0) + \varphi(0)x + \frac{\tilde{M}}{2EJ}x^2 + \frac{Q(0)}{6EJ}x^3; \\ \varphi &= \varphi(0) + \frac{\tilde{M}(0)x}{EJ} + \frac{Q(0)x^2}{2EJ}; \\ \frac{\tilde{M}}{EJ} &= \frac{\tilde{M}(0)}{EJ} + \frac{Q(0)x}{EJ}; \quad \frac{Q}{EJ} = \frac{Q(0)}{EJ}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Если предположить, что рассматриваемый участок вала ограничен двумя сечениями, –  $i-1$  справа и  $i$  – слева, – то введя матрицы-столбцы начальных параметров, соответствующие принятым индексам и считая  $x_i = l_i$ , запишем на основании (7.15)

$$[Z_i] = [G_i][Z_{i-1}].$$

Здесь

$$[G_i] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{l} & \frac{l_i^2}{2l^2} & \frac{l_i^3}{6l^3} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{l} & \frac{l_i^2}{2l^2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{l_i}{l} \end{bmatrix}, \quad [Z_i] = \begin{bmatrix} z_i \\ \varphi_i l \\ \frac{\tilde{M}_i l^2}{EJ} \\ \frac{Q_i l^3}{EJ} \end{bmatrix},$$

где  $l$  – пролёт балки;  $l_i = x_i$ .

Матрица  $[G_i]$  преобразует параметры в непосредственной близости слева от сечения  $i-1$  в параметры, имеющие место в непосредственной близости от сечения  $i$  справа.

Предположим теперь, что в некотором  $i$ -м сечении расположена сосредоточенная масса  $\mu_i$ . Будем считать её точечной, не обладающей моментом инерции относительно оси, проходящей через неё перпендикулярно плоскости изгиба стержня.

Поскольку зависимости (7.16) образованы в предположении, что ось  $x$  возрастает справа налево, условия перехода через сосредоточенную массу можно записать в виде

$$z_i^n = z_i^n; \quad \varphi_i^n = \varphi_i^n; \quad \tilde{M}_i^n = \tilde{M}_i^n; \quad Q_i^n = Q_i^n - \mu_i \omega^2 z_i, \quad (7.17)$$

где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний.

Умножая последнее равенство (7.17) на  $l^3/(EJ)$ , получим

$$\frac{Q_i^n l^3}{EJ} = \frac{Q_i^n l^3}{EJ} - \frac{\mu_i \omega^2 z_i l^3}{EJ}.$$

В этом случае матрицы-столбцы параметров колебаний вправо и влево от сечения  $i$  в непосредственной близости от него связаны зависимостью

$$[Z_i^n] = [M_i][Z_{i-1}^n]. \quad (7.18)$$

В дальнейшем, где это не будет вызывать сомнения, индексы  $l$  и  $n$  в равенстве (7.18) будем опускать. Матрица  $[M_i]$ , входящая в уравнение (7.18), имеет вид:

$$[M_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_i \omega^2 l^3}{EJ} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим теперь, что в  $i$ -м сечении расположено зубчатое колесо с массой  $\mu_i$  и моментом инерции  $I_{iy}$  относительно оси, проходящей через центр масс колеса и перпендикулярной плоскости изгиба вала.

Введем обозначения:

$$v_i = \frac{\mu_i \omega^2 l^3}{EJ}, \quad \delta_i = \frac{I_{iy} \omega^2 l}{EJ}.$$

В рассматриваемом случае по аналогии с равенством (7.18) будем иметь:

$$[Z_i^n] = [m_i][z_i^n].$$

Переходная матрица здесь учитывает силы инерции поступательных колебаний сосредоточенной массы и момент сил инерции, обусловленный изгибом упругой линии участка вала:

$$[m_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_i & 1 & 0 \\ v_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Если  $i$ -й участок вала длиной  $l_i$  включает на своём правом конце сосредоточенную массу  $\mu_{(i-1)}$  и моментом инерции  $I_{(i-1)}$ , то зависимость между параметрами в  $i$ -м и  $i-1$  сечениях принимает форму:

$$[Z_i] = [G_i][m_{i-1}][Z_{i-1}].$$

Из этого уравнения находим

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i-1} + \varphi_{i-1} l \beta_i + \frac{\tilde{M}_{i-1} l^2}{2EJ} \beta_i^2 + \frac{Q_{i-1} l^3}{6EJ} \beta_i^3 + \\ &+ \frac{v_{i-1} \beta_i^3}{6} z_{i-1} - \frac{\delta_{i-1} \beta_i^2}{2} \varphi_{i-1} l; \\ \varphi_i l &= \frac{v_{i-1} \beta_i^2}{2} z_{i-1} + \varphi_{i-1} l + \frac{\tilde{M}_{i-1} l^2}{EJ} \beta_i + \frac{Q_{i-1} l^3}{2EJ} \beta_i^2 - \delta_{i-1} \beta_i \varphi_{i-1} l; \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{M}_i l^2}{EJ} = \nu_{i-1} \beta_i z_{i-1} + \frac{\tilde{M}_{i-1} l^2}{EJ} + \frac{Q_{i-1} l^3}{EJ} \beta_i - \delta_{i-1} \varphi_{i-1} l; \quad (7.19)$$

$$\frac{Q_i l^3}{EJ} = \frac{Q_{i-1} l^3}{EJ} + \nu_{i-1} z_{i-1},$$

где  $\beta_i = l_i / l$ .

Зависимости (7.19) могут быть использованы для определения частот собственных колебаний.

## 8 СТАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШПИНДЕЛЬНЫХ УЗЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 8.1. Моделирование подвижных стыков

Рассмотренная в главе 3 «непрерывная» модель стыка является сложной в применении. Ее использование наиболее целесообразно при исследовании качества стыков и оценке их влияния на статические и динамические характеристики несущей системы станка. При анализе же конструктивных вариантов базовых деталей и компоновок несущей системы станка, а также прогнозировании статической и динамической жесткости несущей системы, ее применение требует трудоемких процедур вычислений. В связи с этим разработан экспресс метод моделирования подвижных стыков (направляющих, подшипников качения и др.). Метод заключается в следующем.

1. Тела качения заменяются податливым (эластичным) элементом из модельного материала.

2. Значение модуля упругости модельного материала принимается таким, чтобы жесткость стыка была равна заданной (табличной).

3. Для оценки чувствительности жесткости несущей системы станка к жесткости стыка производится варьирование модуля упругости эластичного элемента от уровня жесткого тела до уровня податливого тела с пониженной жесткостью. Это позволяет также установить вклад стыка в формирование общей жесткости станка.

### 8.2. Моделирование подшипников качения

Для моделирования подшипников качения в шпиндельном узле станка использовались их условные геометрические модели. Особенностью таких моделей является то, что тела качения представлены не в виде отдельных элементов (шариков или роликов), а в виде сплошного тела (кольца). Условно принимается, что данное кольцо является эластичным, т.е. его модуль Юнга принимается гораздо меньшим, чем для стали, из которой на самом деле выполнены тела качения подшипника. Подбор значений модуля Юнга для модели кольца производится следующим образом.

Внутреннее кольцо подшипника нагружается пробной силой (например, 1000 Н), наружное кольцо зафиксировано. Направление пробной силы соответствует нагрузке, воспринимаемой подшипником. Затем в среде МКЭ пакета производится расчет величины перемещения внутреннего кольца и определяется жесткость подшипника (Н/мкм) по формуле

$$j_{расч} = F/\Delta$$

где  $F$  - пробная сила, Н;  $\Delta$  - величина смещения внутреннего кольца относительно наружного, мкм.

Расчетная величина деформации  $\Delta$  должна быть таковой, чтобы при подстановке в формулу расчетное значение жесткости подшипника  $j_{расч}$  соответствовало табличному значению  $j_{табл}$  (по каталогу производителя). Варьированием величиной модуля Юнга эластичного элемента подшипника достигается равенство  $j_{расч} = j_{табл}$ .

Например, значения модуля Юнга эластичных колец подшипников для условной модели шпиндельного узла (рис. 8.1), приведены в табл. 8.1. В передней опоре шпиндельного узла установлены двухрядный роликовый и упорно-радиальный шариковый подшипники, в задней опоре установлены два шариковых радиально-упорных подшипника по схеме дуплекс-О.

Таблица 8.1

Параметры расчетных моделей подшипников

Тип подшипника	Направление нагрузки	Жесткость подшипника $j_{табл}$ , Н/мкм	Модуль Юнга эластичного элемента $E$ , МПа
Двухрядный роликовый	Радиальная	6400	8700
Упорно-радиальный шариковый	Осевая	1395	1600
Сдвоенный радиально-упорный шариковый	Радиальная	1200	2400

Результат расчета шпиндельного узла, нагруженного вертикальной статической силой 1000 Н, приложенной к концу шпинделя, приведен на рис. 8.2.



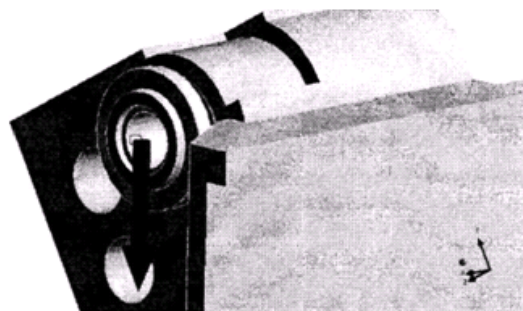


Рис. 8.1. Картина деформаций

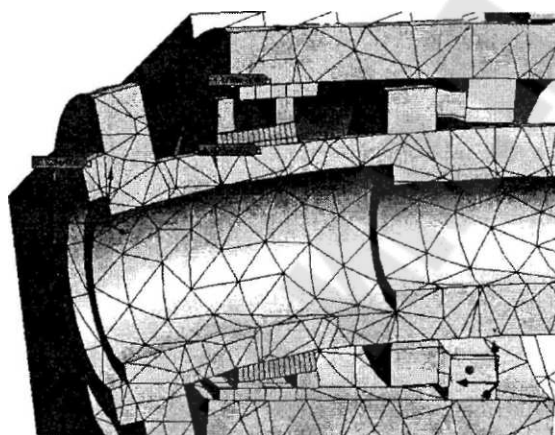


Рис. 8.2. Расчетные деформации в опоре

Шпиндель изгибается в вертикальной плоскости и величина прогиба на его конце составляет 1,5 мкм, а жесткость равна  $j_{расч} = 666,7 \text{ Н/мкм}$ .

В соответствии с разработанным экспресс методом выполнялось варьирование жесткости подшипников относительно значений, приведенных в табл. 8.1. Для этого модуль Юнга модельного материала подшипников уменьшался в 2 и в 8 раз, а затем увеличивался в 20 раз (соответствует модулю упругости конструкционной закаленной стали  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ).

Таким образом, значительное увеличение жесткости подшипниковых опор (более чем в 20 раз) и снижение в 2 раза существенно не сказывается на общей жесткости узла.

## 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРИВОДА ПОДАЧ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

### 9.1. Оценка влияния параметров динамики суппорта

Рассмотрим вынужденные линейные гармонические колебания суппорта, которые для простоты будем записывать в комплексной форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = Ae^{i\omega t} \quad (9.1)$$

где  $m, f, k$  соответственно масса, коэффициенты демпфирования и жесткости;  $A, \omega$  - амплитуда и частота вынуждающей силы. Решение можно искать в виде

$$x = Be^{i\omega t} \quad (9.2)$$

Комплексная амплитуда  $B$  колебаний зависит от всех пяти параметров  $m, f, k, A, \omega$ , что делает, казалось бы, невозможным сколько-нибудь полное представление этой зависимости в табличном или графическом виде. Сделаем в (9.1) и (9.2) замену переменных

$$x = x_x x', \quad t = t_x t',$$

где  $x_x, t_x$  - характерные значения координаты и времени,  
 $x', t'$  - соответствующие безразмерные переменные.

Тогда:

$$\frac{mx_x}{t_x^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{fx_x}{t_x} \frac{dx'}{dt'} + kx_x x = Ae^{i\omega' t'} \quad (9.3)$$

$$x' = B'e^{i\omega' t'}, \quad \omega' := \omega t_x, \quad B' := B/x_x$$

Разделив уравнение (9.3) на коэффициент при старшей производной, получаем безразмерный вариант уравнения (9.1)

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \left( \frac{ft_x}{m} \right) \frac{dx'}{dt'} + \left( \frac{kt_x^2}{m} \right) x' = \left( \frac{At_x^2}{mx_x} \right) e^{i\omega' t'} \quad (9.4)$$

Он включает четыре безразмерных параметра (три, взятых в скобки, а также  $\omega'$ ); однако путем выбора  $x_x, t_x$  их число можно уменьшить на два. Это можно сделать различными способами в

соответствии с условиями задачи и целями исследования.

Пусть нас интересует в основном зависимость амплитуды вынужденных колебаний от трения и частоты возбуждения, причем силы инерции и упругости считаем примерно одного порядка. Тогда естественно положить в уравнение (9.4) безразмерные коэффициент упругости  $kt_x^2/m$  и амплитуду внешнего воздействия  $At_x^2 mx_x$  равными единице, откуда получаем

$$t_x = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad x_x = \frac{A}{k},$$

Таким образом, мы связываем здесь характерное время с периодом свободных колебаний при отсутствии трения, тогда как характерное значение координаты просто равно ее статическому значению, если внешняя сила постоянна. Выбор таких единиц масштаба определила постановка задачи.

После указанной замены уравнение (9.4) принимает вид

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + f' \frac{dx'}{dt'} x' = e^{i\omega' t'} \quad (9.5)$$

и содержит всего два безразмерных параметра  $f' = f/\sqrt{mk}$  и  $\omega' = \omega\sqrt{m/k}$ . Зависимость безразмерной амплитуды  $|B'|$  колебаний от безразмерной частоты  $\omega'$  («амплитудно-частотную характеристику») при различных значениях безразмерного коэффициента трения  $f'$  нетрудно представить графически. Зная зависимость  $|B'| = F(\omega, f')$ , мы получаем и соотношение между размерными величинами

$$|B| = \frac{A}{k} F\left(\frac{\sqrt{m}}{k} \omega, \frac{f}{\sqrt{mk}}\right).$$

Проведенное преобразование дает, в частности, ответ на вопрос, при котором условии в рассматриваемой задаче можно считать трение малым и упростить уравнение (9.1), отбросив средний член в левой части. Ответ « $f$  должно быть мало», хотя и правильный, требует уточнения, так как малость размерной величины имеет смысл только в сравнении с другой величиной той же размерности. Из уравнения (9.5) мы получаем более полный ответ: должно быть

мало  $f'$  или, что то же, должно быть  $f \ll \sqrt{mk}$ . Что это конкретно означает, зависит от допустимого расхождения между приближенным и точным значениями амплитуды колебаний и выясняется из сравнения амплитудно-частотных характеристик для данного  $f'$  и для  $f' = 0$ . Так, при  $f' < 0,1$  (т.е. при  $f' < 0,1\sqrt{mk}$ ) указанное расположение имеет порядок процентов.

## 9.2. Моделирование виброустойчивости процесса резания

Известно, что влияние толщины срезаемого слоя на силу резания имеет не линейный вид в переходных периодах рис.9.1,

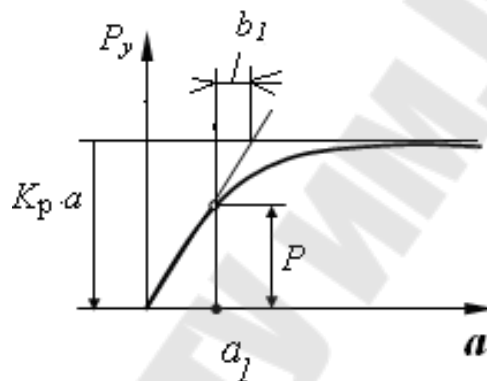


Рис.9.1. Динамическая характеристика процесса резания

Тогда уравнение динамической составляющей силы резания примет вид:

$$K_p \cdot a = P + P' \cdot b_1 \quad (9.6)$$

где  $P$  – статическая составляющая в момент  $a_1$ .

$b_1$  – постоянная времени стружкообразования, отражающая отставание силы резания от ее установившегося значения.

Так как сила  $P$  изменяется во времени, то закон ее изменения соответствует синусоиде, которую можно представить в форме комплексного числа:

$$P = e^{i\varphi}, \text{ для которого } \frac{\partial P}{\partial t} = e^{i\varphi} i \omega$$

Обозначив  $\frac{\partial}{\partial t} = p$ , и подставив его в (9.6), получим:

$$K_p \cdot a = P + b_1 \cdot p \cdot P$$

Тогда передаточная функция динамики процесса резания примет вид:

$$W = \frac{P}{a} = \frac{Kp}{1 + b_1 \cdot p}$$

В частотном выражении:

$$W = \frac{Kp}{1 + b_1 i \cdot \omega} \quad (9.7)$$

Представим передаточную функцию в алгебраической форме комплексного числа, для этого умножим числитель и знаменатель (9.7) на выражение сопряженное знаменателю.

$$W = \frac{Kp(1 - b_1 \cdot i \cdot \omega)}{1 + b_1^2 \cdot \omega^2}$$

Выделим действительную и мнимую части передаточной функции:

$$Re = \frac{Kp}{1 + b_1^2 \cdot \omega^2} \quad - \text{ действительная часть}$$

$$Im = -\frac{b_1 \cdot \omega \cdot Kp}{1 + b_1^2 \cdot \omega^2} i \quad - \text{ мнимая часть}$$

Затем производим анализ виброустойчивости процесса резания по амплитудно-частотной (АЧХ), фазочастотной (ФЧХ) и амплитудно-фазочастотной характеристикам (АФЧХ).

$$A = \sqrt{R_e^2 + I_m^2}; \quad tg \varphi = \frac{I_m}{R_e},$$

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $\varphi$  – фаза колебаний.

Для этого выберем значения частоты в наиболее характерных точках

$\omega = 0$ $R_e = K_p$ 1) $I_m = 0$ $A = K_p$ $\varphi = 0$	$\omega = \frac{1}{b_1}$ $R_e = \frac{K_p}{2}$ 2) $I_m = -\frac{K_p}{2}$ $A = \frac{K_p}{2} \cdot \sqrt{2}$ $\varphi = -\frac{\pi}{4}$	$\omega \rightarrow \infty$ $R_e \rightarrow 0$ 3) $I_m \rightarrow 0$ $A = 0$ $\varphi = -\pi$
---	--	---

По полученным данным построили графики зависимости амплитуды и фазы от частоты, а также амплитудно-фазочастотную характеристику (рис. 9.2).

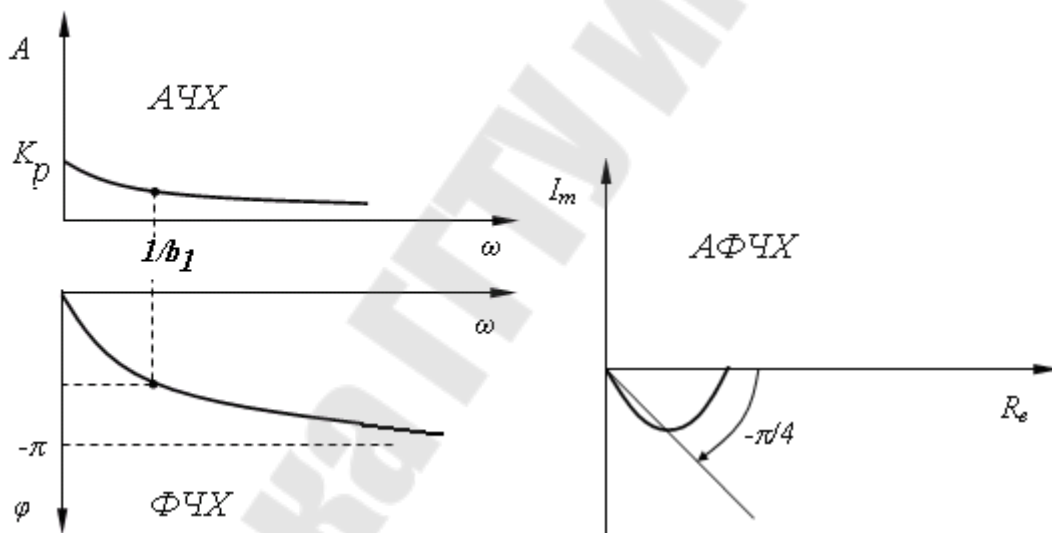


Рис.9.2. АЧХ, ФЧХ и АФЧХ процесса резания

Анализ полученных графиков позволяет заключить, что процесс резания виброустойчив по критерию Найквиста.

## 10. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕХОДНЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим собственные колебания участка виброизолированной системы (рис.10.1). Обозначим через  $u_{i-1}, u_i$  амплитуды осевых перемещений концов участка виброизолированной системы, заключённого между сечениями  $i$  и  $i-1$ , а через  $N_{i-1}, N_i$  – амплитуды осевых сил. Запишем матрицы параметров:

$$u_{i-1} = \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ N_{i-1} \end{bmatrix}, \quad u_i = \begin{bmatrix} u_i \\ N_i \end{bmatrix}. \quad (10.1)$$

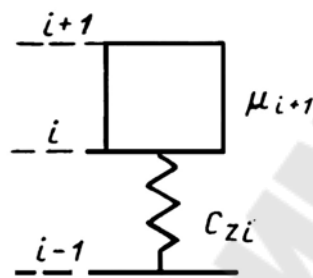


Рис.10.1. Участок виброизолированной системы

Зависимость между параметрами на границах рассматриваемого участка в соответствии с законом Гука и условием равновесия принимает вид:

$$u_i = u_{i-1} + \frac{N_{i-1}}{C_{Zi}}; \quad (10.2)$$

$$N_{i-1} = N_i$$

или в матричной форме

$$u_i = G_i^n u_{i-1}, \quad (10.3)$$

где  $G_i^n$  – переходная матрица жесткости

$$G_i^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C_{Zi}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$C_{Zi}$  – коэффициент жесткости  $i$ -го упругого элемента в вертикальном направлении.

Для учета влияния сил инерции при переходе через сечение  $i + 1$  (рис.10.1) умножаем параметры колебаний  $i$ -го сечения на матрицу массы  $M_{i+1}^n$ , имеющую следующий вид:

$$M_{i+1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \mu_{i+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.4)$$

где  $\omega$  – угловая частота собственных колебаний системы;  $\mu_{i+1}$  – сосредоточенная масса.

Матрица (10.4) соответствует следующему соотношению параметров:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i; \\ N_{i+1} &= \omega^2 \mu_{i+1} u_i + N_i. \end{aligned} \quad (10.5)$$

И выражает скачкообразное изменение осевой силы под действием инерционной силы, амплитуда которой равна  $\omega^2 \mu_{i+1} u_i$ .

В качестве примера рассмотрим случай, когда нижнее сечение системы неподвижно закреплено (см. рис.10.1). Зависимость между параметрами на границах системы может быть представлена равенством

$$u_2 = M_2^n G_1^n u_0 \quad (10.6)$$

или

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & \frac{-\omega^2 \mu_2}{C_{Zi}} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_0 \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Приравнявая в соответствии со структурой матриц  $u_2$  и  $u_0$  к нулю элемент, удержанный в переходной матрице системы и расположенный на пересечении строки, соответствующей нулевому элементу матрицы  $u_2$  и столбца, номер которого совпадает с отличным от нуля номером элемента матрицы  $u_0$ , получим частотное уравнение:

$$\frac{-\omega^2 \mu_2}{C_{Zi}} + 1 = 0. \quad (10.8)$$

Предположим, что в некотором сечении, например, в сечении  $i + 1$  (см. рис.10.2), действует сосредоточенная сила  $P_{i+1} \sin \Omega t$ .

В этом случае связь между параметрами в сечениях  $i + 1$  и  $i + 2$  примет вид:

$$[u_{i+2}] = [M_{i+1}^n][G_i^n] - [P_{i+1}^n]. \quad (10.9)$$



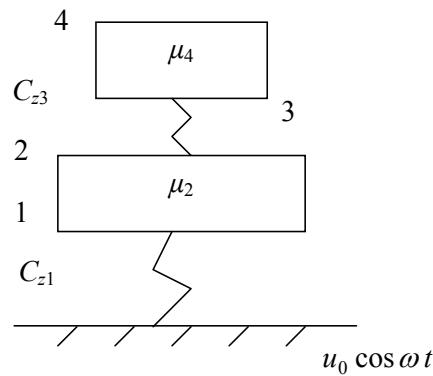


Рис.10.2. Расчётная схема системы с двумя степенями свободы

Матрица  $M_{i+1}^n$  сохраняет свою форму, однако частоту собственных колебаний  $\omega$  в ней следует заменить частотой  $\Omega$ . Приравнявая  $i - 1 = 0$  и обозначив  $\mu_2$  через  $m$ ,  $C_{zi}$  через  $C_z$ , а амплитуду возмущающей силы через  $P_z$ , из выражения (10.9) получим:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C_z} \\ -\Omega^2 m & \frac{-\Omega^2 m}{C_z} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ P_z \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

Из уравнения (10.10) находим амплитуду колебаний  $u_2$  виброизолированной системы и амплитуду силы  $N_0$

$$u_2 = \frac{N_0}{C_z}; \quad N_0 = \frac{P_z}{\frac{-\Omega^2 m}{C_z} + 1}.$$

Приведённая методика может быть применена при расчёте многозвенных виброизолированных систем и динамических гасителей колебаний. В качестве примера рассмотрим приведённую на рис. 10.2 систему. Допустим, что плоскость крепления упругой системы к опорной конструкции совершает гармонические колебания в вертикальном направлении  $Z(t) = u_0 \cos \Omega t$ .

Связь между параметрами на границах системы выражается уравнением

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Omega^2 \mu_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C_{Z3}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Omega^2 \mu_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C_{Z1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ N_0 \end{bmatrix}. \quad (10.11)$$

Из уравнения (10.11) находим амплитуду осевой силы

$$N_0 = -\frac{u_0 \left[ -\Omega^2 \mu_4 - \Omega \left( -\frac{\Omega^2 \mu_4}{C_{Z3}} + 1 \right) \mu_2 \right]}{-\frac{\Omega^2 \mu_4}{C_{Z1}} + \left( -\frac{\Omega^2 \mu_4}{C_{Z3}} + 1 \right) \left( \frac{-\Omega^2 \mu_2}{C_{Z1}} + 1 \right)}.$$

Зная  $N_0$  и используя зависимости

$$[u_2] = [M_2^n][G_1^n][u_0],$$

получим

$$u_2 = \frac{u_0 \omega_1^2 (-\Omega^2 + \omega_{21}^2)}{\Omega^2 - \Omega^2 (\omega_1^2 + \omega_{21}^2 + \beta_{12}) + \omega_1^2 \omega_{21}^2},$$

где  $\omega_1^2 = \frac{C_{Z1}}{\mu_2}$ ;  $\omega_{21}^2 = \frac{C_{Z3}}{\mu_4}$ ;  $\beta_{12} = \frac{C_{Z3}}{\mu_2}$ .

Из выражения (10.11) находим

$$u_4 = \frac{u_0 \omega_1^2 \omega_2^2}{\Omega^4 - \Omega^2 (\omega_1^2 + \omega_{21}^2 + \beta_{12}) + \omega_1^2 \omega_{21}^2}.$$

Представленные соотношения позволяют вычислить параметры колебаний рассматриваемой системы.

Для повышения демпфирующей способности виброизоляторов иногда применяют специальные демпферы, например, демпферы вязкого трения. Расчётную схему виброизолятора в этом случае можно условно представить в виде упругого консервативного элемента и обобщенного демпфера, установленных параллельно. Силы упругого  $N_{ic}$  и неупругого  $N_{ih}$  сопротивлений:

$$\begin{aligned} N_{ic} &= N_{(i-1)c} = c_{zi} (Z_i - Z_{i-1}); \\ N_{ih} &= N_{(i-1)h} = b_{zi} (\dot{Z}_i - \dot{Z}_{i-1}), \end{aligned}$$

где  $Z, Z_{i-1}$  – перемещения сечений с индексами  $i, i-1$ . Переходя к комплексным величинам, запишем

$$\begin{aligned} Z_{i-1} &= \bar{u}_{i-1} e^{j\Omega t}; \\ Z_i &= \bar{u}_i e^{j\Omega t}, \end{aligned}$$

где  $j$  – мнимая единица.

При параллельном размещении упругого консервативного элемента и демпфера вязкого трения комплексную амплитуду результирующей осевой силы можно представить в виде

$$\bar{N}_i = \bar{N}_{i-1} = \bar{N}_{ic} + \bar{N}_{ih} = (c_{zi} + jh_{zi}\Omega)(\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}).$$

Откуда

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{i-1} + \frac{\bar{N}_{i-1}}{c_{zi} + jh_{zi}\Omega}.$$

Зависимость между комплексными параметрами имеет вид:

$$[\bar{u}_i] = [\bar{D}_i^n][\bar{u}_{i-1}].$$

Здесь  $[u_{i-1}]$ ,  $[u_i]$  – матрицы параметров;  $[D_i^n]$  – переходная матрица участка:

$$[\bar{D}_i^n] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c_{zi} + jh_{zi}\Omega} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Из матрицы (10.12) легко составить матрицу  $[G_i^n]$  при  $h_{zi} = 0$  и переходную матрицу участка вязкого трения  $[\bar{F}_i^n]$ :

$$[\bar{F}_i^n] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{jh_{zi}\Omega} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При последовательном соединении идеально упругого элемента и демпфера вязкого трения переходную матрицу, учитывающую их влияние, получаем перемножением матриц  $[G_i^n]$  и  $[\bar{F}_i^n]$ . Для системы с одной степенью свободы, обладающей упругим элементом и демпфером, установленными параллельно, находим, что при закреплении системы по сечению с индексом  $i = 0$  и при действии возмущающей силы с амплитудой  $P_2 = P_z$  по верхнему торцу виброизолированной системы ( $i = 2$ )

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c_{z1} + jh_{z1}\Omega} \\ -\Omega^2 m & \frac{\Omega^2 m}{c_{z1} + jh_{z1}\Omega} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{N}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 \end{bmatrix}, \quad (10.13)$$

где  $m = \mu_2$  – масса виброизолированной системы.

Из уравнения (10.13) находим параметры  $\bar{u}_2$  и  $\bar{N}_0$ . Используя их, получим следующие выражения для амплитуды колебаний виброизолированной системы  $u_2$  и амплитуды силы, передаваемой на поддерживающую конструкцию  $N_0$ :

$$u_2 = \frac{P_z}{m\sqrt{(\omega_{z1}^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}};$$

$$N_0 = u_2 \sqrt{c_{z1}^2 + (h_{z1}\Omega)^2},$$

где

$$\omega_{z1}^2 = \frac{c_{z1}}{m}; \quad n = \frac{h_{z1}}{2m}.$$

## 11. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ

Действующую на механическую систему нагрузку можно представить в виде:

$$P = m \ddot{y} + b \dot{y} + cy . \quad (11.1)$$

Так как сила  $P$  изменяется во времени, то закон ее изменения соответствует синусоиде, которой соответствуют и перемещения, тогда перемещения можно представить в форме комплексного числа. Первая производная перемещения будет иметь вид:  $\frac{dy}{dt} = j\omega e^{i\varphi}$ . Тогда в операционной форме действующую силу можно представить в виде:

$$P = mp \dot{y} + b \dot{y} + \frac{c}{p} \dot{y} = \dot{y} \left( mp + b + \frac{c}{p} \right). \quad (11.2)$$

Как известно, если сила пропорциональна скорости, то выражение при ней отражает сопротивление движению.

Таким образом, выражение  $\left( mp + b + \frac{c}{p} \right)$  отражает сопротивление, которое называют полным комплексным сопротивлением (ПКС) и обозначают  $S$ .

ПКС состоит из частных комплексных сопротивлений.

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\frac{Q}{V} = S$$

где  $S_1 = mp$  - ЧКС, отражающее инерционные свойства системы;

$S_2 = b$  - ЧКС, отражающее трение;

$S_3 = \frac{c}{p}$  - ЧКС, отражающее упругость системы.

Перепишем полное комплексное сопротивление в частотной форме:

$$ПКС \rightarrow mj\omega + b + \frac{c}{j\omega}$$

Т. к. колебания имеют периодический характер, то и скорости будут иметь такой же характер. Тогда можно записать выражение для скорости:


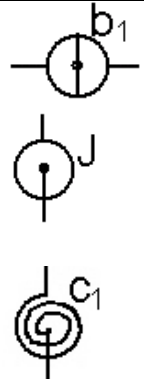
$$V = V_m \sin(\omega t + k)$$

В механических цепях в качестве источников колебаний могут быть скорости и силы.

Приведем соотношения между параметрами для поступательного и вращательного движений в виде табл. 11.1.

Таблица 11.1

### Сравнительная характеристика поступательной и вращательной механических систем

Линейная механическая система	Условное обозначение	Механическая система вращательного движения	Условное обозначение
<p><math>P, V</math></p> <p>1. <math>P = bV</math></p> <p>2. <math>P = ma</math></p> <p>3. <math>P = cy</math></p> $\frac{dP}{dt} = c \frac{dy}{dt}$ $V = \frac{1}{c} \frac{dP}{dt}$ <p>Закон Гука:</p> $\sigma = E\varepsilon$ $S\sigma = E\varepsilon S$ $P = ES \frac{\Delta y}{l}$ $\frac{dP}{dt} = \frac{ES}{l} \frac{d\Delta y}{dt}$ <p style="text-align: center;">c      V</p>		<p><math>M, \omega</math></p> <p>1. <math>M = b_1 \omega</math></p> <p>2. <math>M = I\varepsilon</math></p> <p>3. <math>M = c_1 \varphi</math></p> <p>где <math>c_1</math> - коэффициент крутильной жесткости.</p>	

Частные комплексные сопротивления в механических цепях

могут быть соединены последовательно или параллельно.

При последовательном соединении сила, действующая на систему равна силе действующей на каждый элемент.

$$Q = Q_i$$

Разность перемещений первого и последнего элемента равна сумме перемещений всех частных сопротивлений.

$$y_1 - y_n = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\dot{y}_1 - \dot{y}_n = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i$$

При параллельном соединении сила, действующая на систему равна сумме сил действующих на каждый элемент.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Перемещения, скорости и ускорения каждого элемента равны:

$$y = y_i$$

$$\dot{y} = \dot{y}_i$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}_i$$

Последовательность анализа механических систем:

1. С учетом принятых условных обозначений составляем механическую цепь.
2. Определяем вид источника колебаний (сила или скорость).
3. Определяем характер соединения ПКС в зависимости от вида источников.
4. Находим полное сопротивление всей цепи, т. е. упрощаем первоначальную механическую цепь.
5. Определяем ПКС в частотном выражении.
6. Производим анализ частот.

Вид соединения сопротивлений зависит от характера преобразования сигналов.

По характеру: прямая или рычажная передача сигналов, т. е. в цепи находится преобразователь одного источника в другой.

Источник силы можно выразить в виде синусоиды. Так как сила пропорциональна перемещению в элементах жесткости, то в

элементах трения необходимо взять первую производную  $V = \dot{y}$ , т. е. синусоида преобразуется в косинусоиду и обратное преобразование возможно путем смещения фазы на величину  $\pi/2$ . Это позволяет заключить, что источник силы по направлению повернут на  $90^\circ$  по отношению к источнику скорости (рис.11.1).

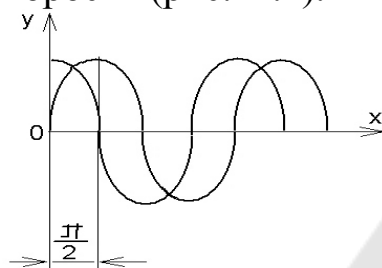


Рис. 11.1. Источник силы, выраженный в виде синусоиды

Если ПКС расположены последовательно при действии силы, то при действии скорости они будут расположены параллельно, и наоборот.

Тогда при последовательном расположении элементов (рис. 11.2):

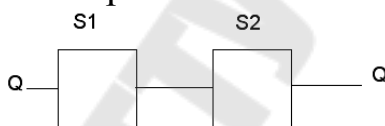


Рис. 11.2. Последовательное соединение элементов

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2; \quad y = y_1 + y_2; \quad \vartheta = \frac{Q}{S}; \quad Q = Q_1 = Q_2;$$

$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2}; \quad S = \frac{1}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}} = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2};$$

$$S = \frac{\prod S_i}{\sum S_i} \quad (11.3)$$

При параллельном расположении элементов (рис. 11.3):

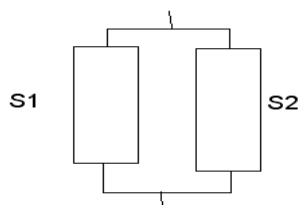


Рис. 11.3. Параллельное соединение элементов



$$Q = Q_1 + Q_2; \quad \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2; \quad S\vartheta = S_1\vartheta_1 + S_2\vartheta_2;$$

$$S = \frac{Q}{\vartheta} \Rightarrow Q = S\vartheta.$$

$$S = \sum S_i; \quad (11.4)$$

Полученные соотношения позволяют производить анализ динамической системы.

*Пример.* Необходимо исследовать динамическую систему механическая цепь, которой приведена на рис.11.4.

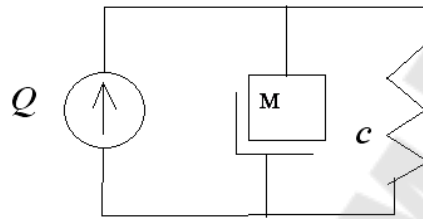


Рис. 11.4. Исходная схема механической системы

Так как частные комплексные сопротивления расположены параллельно, то воспользуемся соотношениями (11.4).

$$Q = Q_1 + Q_2; \quad \vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2;$$

$$Q_1 = ma \longrightarrow m \frac{d\vartheta}{dt} = mp\vartheta = miw\vartheta;$$

$$Q_2 = \frac{c\vartheta}{p} = \frac{\vartheta c}{iw}$$

Любая механическая система (суппорт, станок, стол) состоит из нескольких деталей, каждая из которых перемещается одна относительно другой. Эту динамическую систему можно представить в виде механической цепи, используя принятые условные обозначения. Считая каждый элемент цепи как частное комплексное сопротивление можно найти полное комплексное сопротивление системы в зависимости от того, как соединены частные комплексные сопротивления.

*Пример.* Необходимо исследовать динамическую систему суппорта станка. На рис. 11.5 приведена расчетная схема с учитываемыми параметрами.

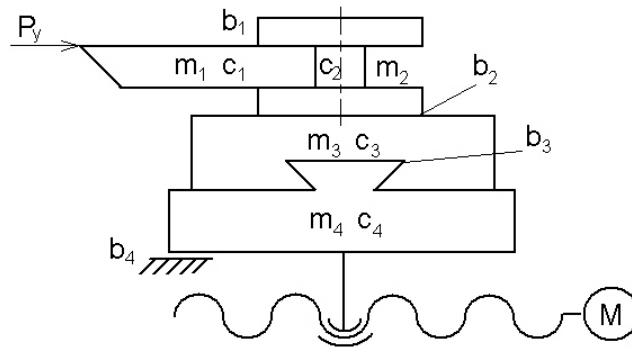


Рис.11.5. Расчетная схема суппорта станка

Используя обозначения, приведенные в табл.11.1, получим механическую цепь (рис. 11.6).

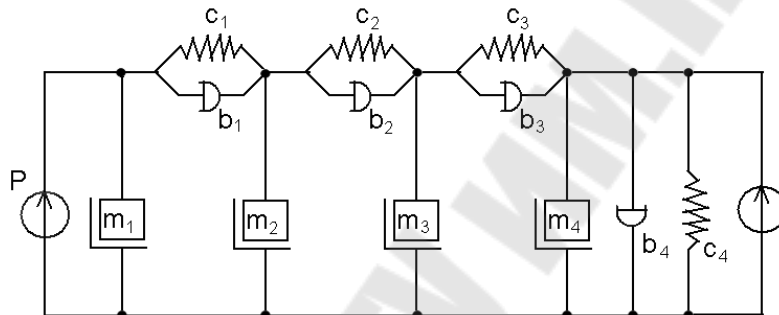


Рис. 11.6. Механическая цепь

Проведя преобразования аналогичные ранее приведенному примеру получим динамические показатели механической системы.

## 12. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИВОДА

В качестве примера можно также рассмотреть анализ влияния элементов кинематики на динамический момент привода станка.

Расчетная кинематическая схема с учитываемыми параметрами приведена на рис. 11.1.

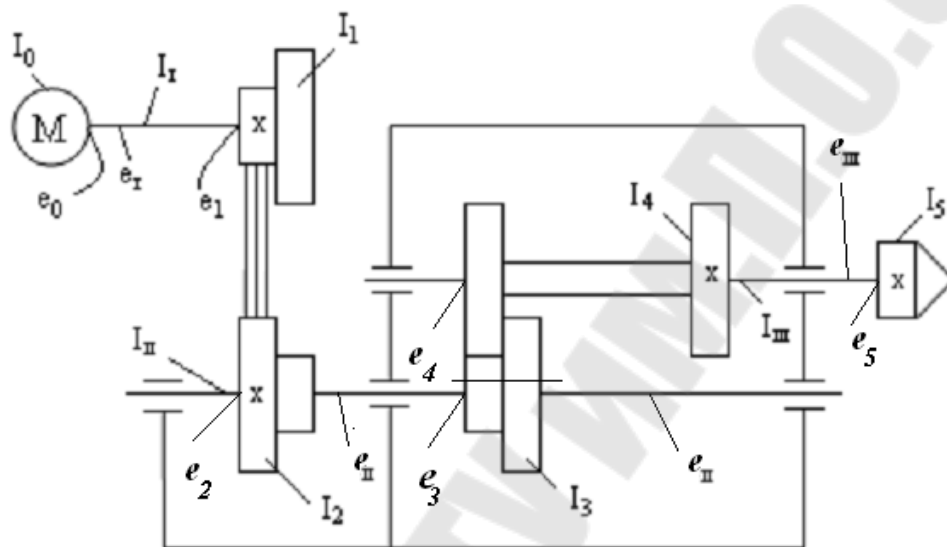


Рис. 11.1. Кинематическая схема привода:  
моменты инерции двигателя  $I_0$ , шкивов  $I_1, I_2$ , валов  $I_I, I_{II}, I_{III}$ , блоков  $I_4, I_3$ , патрона  $I_5$ .

Динамический анализ выполняется поэтапно.

На первом этапе формируется схема инерции привода.

Для этого заменяются реальные валы на идеальные, а их моменты инерции сосредотачиваются в элементах кинематики и рассчитываются по следующим зависимостям:

$$I_0' = I_0 + \frac{1}{6} I_I$$

$$I_1' = I_1 + \frac{1}{6} I_I$$

$$e_1' = e_I + e_0 + e_1,$$

где  $e_I$  – крутильная податливость вала;

$e_0$  – податливость соединения якорь двигателя - вал;

$e_1$  – податливость соединения шкив - вал.

Аналогично для остальных валов:

$$e_2' = e_2 + e_{II} + e_3; \quad I_2' = I_2 + \frac{1}{6}I_{II} \quad I_3' = I_3 + \frac{1}{6}I_{II};$$

$$I_4' = I_4 + \frac{1}{6}I_{III}; \quad I_5' = I_5 + \frac{1}{6}I_{III}; \quad e_3' = e_4 + e_{III} + e_5.$$

Используя рассчитанные моменты инерции и податливости, формируется расчетная схема (рис.11.2).

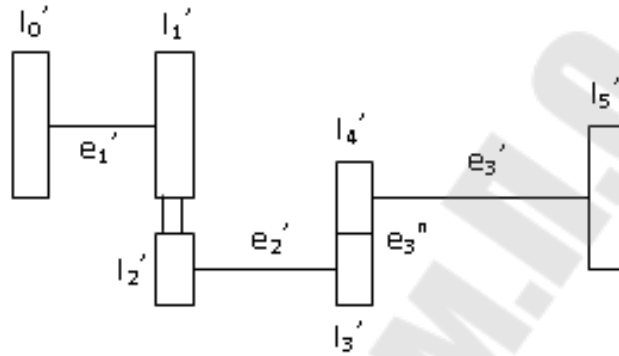


Рис. 11.2. Расчетная схема

Затем приводится эта система к первому валу из условия равенства кинетических энергий. Для этого рассчитываются приведенные моменты инерции и податливости.

$$\frac{I_3' \cdot \omega_{II}^2}{2} = \frac{I_3^n \omega_I^2}{2}; \quad \frac{I_2' \cdot \omega_{II}^2}{2} = \frac{I_2^n \omega_I^2}{2};$$

$$I_2^n = I_2' \cdot \frac{\omega_{II}^2}{\omega_I^2} = I_2' \cdot i_p^2;$$

$$e_2^{II} = \frac{e_2'}{i_p^2}; \quad I_3^n = I_3' \cdot i_p^2;$$

$$\frac{I_4' \cdot \omega_{III}^2}{2} = \frac{I_4^n \cdot \omega_I^2}{2};$$

$$I_4^n = I_4' \cdot \frac{\omega_{III}^2}{\omega_I^2} = I_4' \cdot i_p^2 \cdot i_{3n}^2;$$

$$e_3^n = \frac{e_3'}{i_p^2 \cdot i_{3n}^2}; \quad I_5^n = I_5' \cdot i_p^2 \cdot i_{3n}^2.$$

Используя рассчитанные моменты инерции и податливости, формируется расчетная схема (рис.11.3).

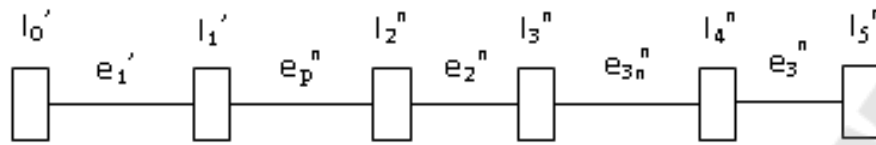


Рис. 11.3. Линейная приведенная схема

На следующем этапе расчетная схема приводится к двум массам (рис. 11.4).

Для этого рассчитываются эквивалентные моменты инерции и податливости

$$I_{\mathcal{E}} = I_1' + I_2^n + \dots + I_5^n$$

$$e_{\mathcal{E}} = \frac{e_1' \cdot I_0' + e_p \cdot (I_0' + I_1') + \dots + e_3^n \cdot (I_5^n + \dots + I_1')}{I_{\mathcal{E}}}$$

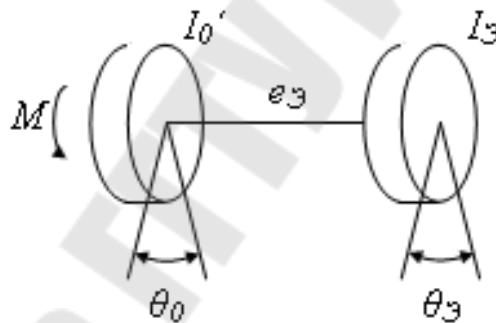


Рис. 11.4. Упрощенная схема

При действии момента  $M$  якорь повернется на угол  $\theta_0$ , а весь привод повернется на условный угол  $\theta_{\mathcal{E}}$ .

Затем формируются уравнения динамики:

$$M = I_0' \cdot \ddot{\theta}_0 + C_{\mathcal{E}}(\theta_0 - \theta_{\mathcal{E}}) \quad (11.1)$$

$$0 = I_{\mathcal{E}} \cdot \ddot{\theta}_{\mathcal{E}} + C_{\mathcal{E}}(\theta_{\mathcal{E}} - \theta_0), \quad (11.2)$$

где

$$C_{\mathcal{E}} = \frac{1}{e_{\mathcal{E}}}$$

Полученные уравнения сводятся к одному.

Для этого выражение (11.1) умножается на  $I_{\vartheta}$ , а (11.2) - на  $I_0'$  и вычитаются почленно:

$$M \cdot I_{\vartheta} = I_0' \cdot I_{\vartheta} (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_{\vartheta}) + C_{\vartheta} (\theta_0 - \theta_{\vartheta}) (I_{\vartheta} + I_0') \quad (11.3)$$

Обозначив  $\theta_0 - \theta_{\vartheta} = \theta$  и разделив уравнение (11.3) на  $I_0' \cdot I_{\vartheta}$ , получили:

$$\ddot{\theta} - C_{\vartheta} \cdot \frac{I_0' + I_{\vartheta}}{I_0' \cdot I_{\vartheta}} \cdot \theta = \frac{M}{I_0'} \quad (11.4)$$

Решение полученного уравнения имеет вид:

$$\theta = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t + \frac{M}{I_0' \cdot p^2} \quad (11.5)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий:

$$t = 0; \quad A = 0; \quad \theta = 0;$$

$$B = -\frac{M}{I_0' \cdot p^2}$$

В результате уравнение (11.5) примет вид:

$$\theta = \frac{M}{I_0' \cdot p^2} (1 - \cos \omega t)$$

Максимальный статический момент привода определится по выражению:

$$M_{\max} = \theta_{\max} \cdot C_{\vartheta}$$

$$M_{\max} = \frac{2M \cdot C_{\vartheta} \cdot I_0' \cdot I_{\vartheta}}{I_0' \cdot C_{\vartheta} (I_0' + I_{\vartheta})} = \frac{2M \cdot I_{\vartheta}}{I_0' + I_{\vartheta}}$$

Максимальный динамический момент:

$$M_{\max} = \frac{2M \cdot I_{\vartheta}}{I_0' + I_{\vartheta}}$$

## 14. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Метод конечных элементов эффективно может быть использован для решения так называемой модальной задачи, в ходе которой определяются частоты и формы собственных колебаний конструкции. Рассмотрим теоретические основы этого решения.

Собственное недемпфированное колебательное движение несвободной материальной точки массой  $m$  описывается дифференциальным уравнением (рис. 14.1)

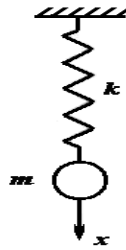


Рис. 14.1. Схема к расчету динамических показателей

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (14.1)$$

где  $k$  - жесткость удерживающей связи;

$x$  - текущее перемещение;

$\ddot{x}$  - мгновенное значение ускорения.

Для системы из  $N$  точек может быть записано равенство:

$$[M]\{\ddot{x}\} + (K)\{x\} = 0 \quad (14.2)$$

где  $[M]$  - матрица масс конструкции, имеющая структуру

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

$[K]$  - матрица статической жесткости конструкции;

$\{\ddot{x}\}$  - вектор ускорений точек системы;

$\{x\}$  - вектор перемещений точек системы.

Решение такой системы можно представить в виде:

$$x_1 = A_i \cos \omega_c t \quad (14.3)$$

где  $\omega_c$  - частота;

$A_i$  - амплитуда свободных колебаний,

При подстановке (14.3) в (14.2) их вторых производных получим алгебраическое равенство

$$([K] - \omega_c^2 [M])\{A\} = 0 \quad (14.4)$$

или

$$([K] - \lambda [M])\{A\} = 0$$

где  $\lambda = \omega^2$  - собственное значение (число);

$\{A\}$  - собственный вектор колебательной системы.

Выражение  $([K] - \omega_c^2 [M])$  также называют матрицей динамической жесткости системы.

Формируют из коэффициентов матрицы динамической жесткости определитель  $N$ -го порядка и приравнивая его к нулю, получают так называемое частотное уравнение, позволяющее определить спектр частот собственных колебаний, присущих анализируемой системе, т.е.

$$\det([K] - \lambda [M]) = 0 \quad (14.5)$$

Затем, подставляя в частотное уравнение поочередно все найденные частоты свободных колебаний, находим соответствующие каждой из них формы (моды) колебаний. При таком решении возникает так называемая проблема собственных значений и собственных векторов, выражающаяся для нашей задачи в том, что частоты собственных колебаний определяются в явной форме, а формы – в относительной (т.е. определяются не значения амплитуд колебаний, а лишь соотношение между ними).



## 15. АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАСКАТКИ МНОГОШПИНДЕЛЬНОЙ КОРОБКИ СТАНКА

На рис.15.1 показана раскатка девятишпиндельной коробки, где шпиндели 1 ... 9 обозначены жирными окружностями; промежуточные валы 10 ... 20, 23 (0 — вал приводного электродвигателя, 21 — вал ручного проворота, 22 — вал привода насоса для подачи смазывающей жидкости). На окружностях колес указано число зубьев и модуль, в местах зацепления колес указано, в каком ряду обеспечивается зацепление.

Значительное число многошпиндельных насадок имеет однорядное расположение зубчатых колес. В этом случае задача разработки раскатки значительно упрощается. В [1] приведен алгоритм программы построения раскатки однорядных многошпиндельных насадок. Программа включает два этапа: создание кинематической схемы насадки и вычисление координат центров промежуточных валов, а также диаметров зубчатых колес. Если результаты второго этапа не удовлетворяют конструктивным ограничениям или условиям совместимости деталей, происходит возврат к первому этапу с учетом коррекции исходных данных.

Задача представляется в виде дерева, вершинами которого являются шпиндели и промежуточные валы, а дугами — межосевые расстояния. Этапы разработки раскатки многошпиндельной насадки реализуются с помощью соответствующих подпрограмм.

Согласование работы подпрограмм производится с помощью управляющей программы. При определении общей структуры кинематической схемы (первая подпрограмма) строится кратчайшая сеть, связывающая центры исходных координат шпинделей и валов. Эта процедура реализуется в виде алгоритма Прима — Краскала для решения задачи Штайнера. Сначала строится дерево варианта раскатки с введением дополнительных узлов (промежуточных валов). Затем решается задача оптимизации расположения дополнительных узлов циклическим итерационным процессом релаксации.

Алгоритм конструирования многошпиндельных коробок на ЭВМ включает следующие этапы.

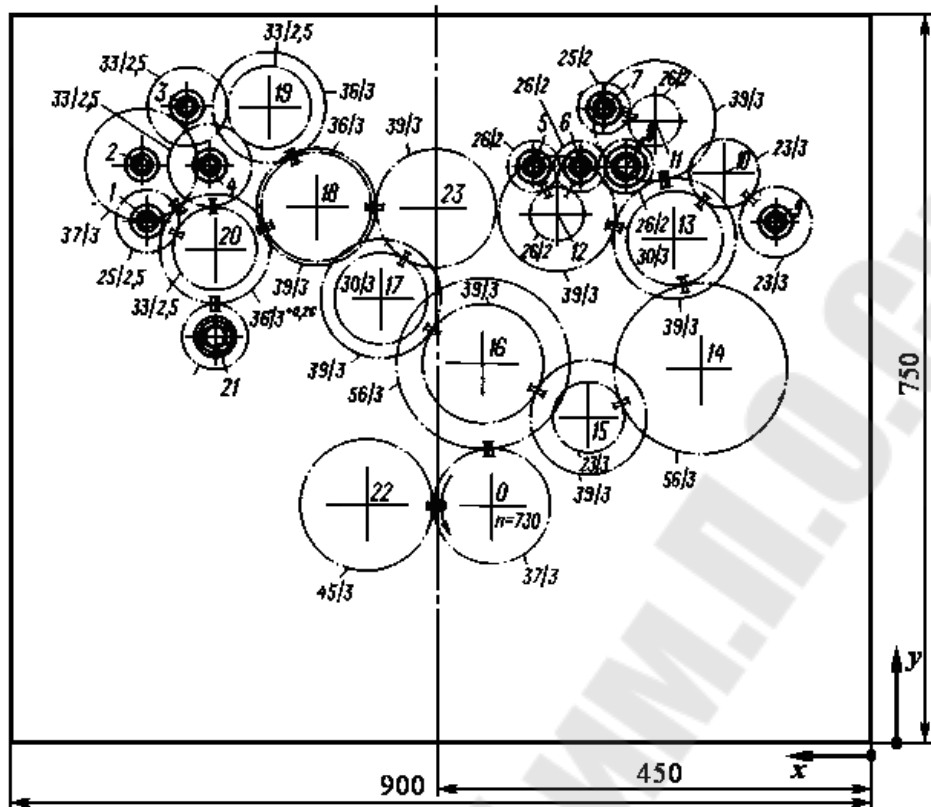


Рис.15.1. Раскатка девятишпиндельной коробки

1. Ввод исходных данных вращения: осевые силы, диаметры инструментальных оправок, цикл работы силового стола и вид исполнения шпиндельной коробки.

2. Определение габаритных размеров шпиндельной коробки по координатам центров шпинделей. Поскольку на чертеже многошпиндельные коробки изображают со стороны шпинделей, координаты центров шпинделей являются зеркальным отображением координат обрабатываемых отверстий детали.

3. Подбор упорного угольника (согласно таблице применяемости шпиндельных коробок по габаритам упорных угольников).

4. Ориентировочное определение мощности приводного электродвигателя. В зависимости от числа шпинделей и предполагаемого числа промежуточных валов. КПД шпиндельной коробки находится в диапазоне 0,9 ... 0,5. Например, для числа шпинделей до 15 значение КПД примерно равно 0,9.

5. Определение координат оси входного вала. Вертикальная ось входного вала чаще всего располагается

посередине шпиндельной коробки, и корректируется с учетом осевых сил, действующих на шпиндели; это необходимо для того, чтобы не происходило перекоса инструментов. Наименьшая высота расположения центра входного вала зависит от мощности электродвигателя и габаритных размеров упорного угольника.

6. Выбор комплектов шпинделей. Каждому внутреннему диаметру шпинделя под инструментальную оправку соответствует свой диаметр хвостовика. Как правило, радиальные подшипники не лимитируют выбор комплекта шпинделя, поэтому можно ограничиться проверкой упорного подшипника по осевой силе.

7. Построение вариантов раскатки.

8. Выбор оптимального варианта раскатки.

9. Уточнение и проверка конструктивных параметров выбранных вариантов, рассчитанных на этапах 2—6.

10. Вывод характеристик наилучших вариантов и выбор проектировщиком оптимального варианта.

11. Вывод рабочей документации оптимального варианта. Наиболее сложными и трудоемкими являются этапы 7 и 8 алгоритма.

Рассмотрим основные положения методики при реализации этих этапов на ЭВМ. Конструирование раскатки многорядных многошпиндельных насадок и коробок значительно усложняется, так как в этом случае число вариантов зацеплений неизмеримо возрастает. Алгоритм, который был разработан для однорядной раскатки, в этом случае не может быть использован.

Процесс конструирования раскатки многошпиндельной коробки может быть выполнен в диалоговом режиме. Исходные данные для проектирования вводятся в оперативную память ЭВМ. В режиме диалога с помощью графического дисплея производится конструирование раскатки многошпиндельной коробки. Далее обеспечивается вывод информации на плоттер. Кроме того, подготавливаются управляющие программы и конструкторская документация для обработки деталей на станках с ЧПУ. Спецификация сконструированной шпиндельной коробки используется в автоматизированной системе управления производством.

Первым шагом при автоматическом построении вариантов раскатки является упорядочение шпинделей относительно центра приводного вала. Проверяется наличие оси симметрии; если такая ось

есть, то строится половина раскатки, а другая половина берется идентичной. Процесс построения раскатки начинается со шпинделя, который находится на максимальном расстоянии от центра приводного вала. Формируются пучки шпинделей, т. е. строятся варианты зацепления этого шпинделя с ближайшими к нему шпинделями при условии выполнения ограничений, для того чтобы число промежуточных валов и колес было минимальным. По направлению к приводному валу строится цепь промежуточных валов, связывающая первый шпиндель с приводным валом; при этом проверяются возможности зацепления колес на промежуточных валах с другими шпинделями. Далее берется последующий шпиндель (по величине расстояния от центра входного вала) и также зацепляется с ближайшими шпинделями; причем зацепления, полученные ранее, не повторяются.

Рассмотрим формирование пучка из трех шпинделей как наиболее часто встречающегося при формировании раскатки шпиндельной коробки. Представим каждый вариант исполнения пучка шпинделей в виде структурной формулы

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_3\gamma_3 - \dots - \alpha_v\beta_v\gamma_v,$$

где  $\alpha$  - номер ведущего вала или шпинделя;  $\beta$  - номер ведомого вала или шпинделя;  $\gamma$  - номер вала шпиндельной коробки; 1, 2, ...,  $v$  – номер зацепления (всего  $v$  зацеплений).

Получим следующие варианты пучка из трёх шпинделей (промежуточный вал обозначим цифрой 0): 011-021-031 (4); 011-021-032 (5); 011-022-033 (6); 011-023-033 (5); 011-121-233 (5) и т.д.

Оптимальность варианта пучка будет определять число шестерен, которое указано в скобках после формулы каждого варианта, а при их равенстве – лучшие условия работы (например, четвертый вариант хуже второго, так как имеется консольное закрепление пары шестерен в третьем ряду, а пятый хуже, чем четвертый, так как движение передается через шпиндели). Для этого случая число шестерен

$$K_1 = 2K_2 + K_3 - 3$$

где  $K_2$  – число шпинделей;  $K_3$  – число занятых рядов; коэффициенты  $K_2$  и  $K_3$  подсчитывают по структурной формуле соответствующего варианта.

Параметры пучка шпинделей связаны между собой следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 &= (r_{11} + r_{01})^2; \\
(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 &= (r_{22} + r_{02})^2; \\
(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 &= (r_{33} + r_{03})^2; \\
n_1 r_{11} = n_0 r_{01}; \quad n_2 r_{21} = n_0 r_{02}; \quad n_3 r_{31} = n_0 r_{03}.
\end{aligned}$$

Первые три уравнения следуют из записи межосевых расстояний, следующие три уравнения из равенства линейных скоростей зацепляющихся шестерен. Известными величинами являются координаты центров шпинделей  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  и частоты их вращения  $n_1, n_2, n_3$ . Неизвестными величинами в общем случае будут: координаты центра промежуточного вала  $x_0, y_0$ , частота вращения промежуточного вала  $n_0$ , радиусы колес на шпинделях и на промежуточном вале в соответствующем ряде шпиндельной коробки  $r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{01}, r_{02}, r_{03}$ .

Алгоритм расчета варианта 011—022—033 рассмотрен при известных  $r_{11}, r_{22}, r_{33}$ .

Рассмотрим более общий случай, являющийся наиболее сложным, когда радиусы колес на шпинделях неизвестны. В этом случае задача осложняется тем, что для системы из семи уравнений имеем девять неизвестных  $x_0, y_0, n_0, r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{01}, r_{02}, r_{03}$ . Если заданы  $x_0, y_0, n_0$ , то исходная система нелинейных уравнений решается в общем виде:

$$\begin{aligned}
r_{01} &= \frac{a_{10}(x_0, y_0)}{1 + U_{10}(n_0)}; \quad r_{11} = \frac{a_{10}(x_0, y_0)U_{10}(n_0)}{1 + U_{10}(n_0)}; \\
r_{02} &= \frac{a_{20}(x_0, y_0)}{1 + U_{20}(n_0)}; \quad r_{22} = \frac{a_{20}(x_0, y_0)U_{20}(n_0)}{1 + U_{20}(n_0)}; \\
r_{03} &= \frac{a_{30}(x_0, y_0)}{1 + U_{30}(n_0)}; \quad r_{33} = \frac{a_{30}(x_0, y_0)U_{30}(n_0)}{1 + U_{30}(n_0)},
\end{aligned}$$

где  $a_{10}, a_{20}, a_{30}$  – межцентровые расстояния;  $U_{10}, U_{20}, U_{30}$  – передаточные числа;

$$a_{j0} = \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + (y_0 - y_j)^2}; \quad U_{j0} = n_0 / n_j, \quad j = 1, 2, 3$$

При этом необходимо проверять все ограничения, которые накладывают на конструктивные параметры зубчатых передач, например, на минимальное межцентровое расстояние исходя из расчета зубчатых передач на контактную выносливость. Выбор параметров  $x_0, y_0, n_0$  заканчивается, как только будет получен

минимум целевой функции  $\Phi_1$ , определяющей объем колес в пучке шпинделей (при одинаковой ширине колес):

$$\Phi_1 = \pi b \sum_{j=1}^{K_1} a_{j0}^2 \frac{(1 + U_{j0}^2)}{(1 + U_{j0})^2}$$

Оптимизация параметров может осуществляться по алгоритму направленного случайного поиска. Как только уменьшение целевой функции станет равным нулю или будет незначительно, подпрограмма оптимизации остановит вариацию параметров и получим оптимальные значения  $X^*_0$ ,  $Y^*_0$ ,  $n^*_0$ . Данный алгоритм может быть использован при оптимизации и других вариантов пучков в том случае, когда имеется несколько промежуточных валов. Для этого требуется найти минимум целевой функции

$$\Phi_2 = \pi b \sum_{j=1}^{K_0} a_{j0}^2 \frac{(1 + U_{j0}^2)}{(1 + U_{j0})^2} + K_4 \frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^{K_2} a_j^2 \ell_j,$$

где  $K_0$  – число промежуточных валов;  $d_j$  и  $\ell_j$  – соответственно их диаметр и длина валов;  $K_4$  – коэффициент приведения объема валов (учитывается объем подшипников и других деталей промежуточных валов).

Для формирования алгоритма выбора вариантов многошпиндельной коробки построим модель раскатки. На рис.15.2 показана структурная схема вариантов раскатки, где шпиндели  $\text{Ш}_1 \dots \text{Ш}_6$  разными способами объединены промежуточными валами с входным валом  $B_0$ .

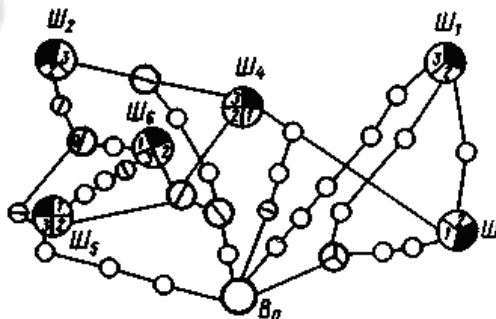


Рис.15.2. Структурная схема вариантов раскатки шестишпиндельной коробки

Например, движение может передаваться на Ш, по второму

ряду через один вал с Ш<sub>1</sub>, который соединен с входным валом через пять промежуточных валов по третьему ряду. Далее может быть построена кинематическая цепь от Ш<sub>1</sub> через два промежуточных вала к третьему (по второму ряду), и к нему же от Ш<sub>3</sub> тоже через два промежуточных вала (по первому ряду) и от третьего промежуточного вала передача идет к входному валу.

При формировании алгоритма выбора наилучших вариантов раскатки наиболее удобно пользоваться графом  $G = (X_1, A_1)$ , который условно назовем «шпиндельным» (рис.15.3, а), так как в число его вершин входят лишь шпиндели и приводной вал В<sub>0</sub> (т. е. граф  $G_I = (X_1, A_1)$  является подграфом графа вариантов раскатки).

Каждый вариант раскатки можно представить в виде остова шпиндельного графа. Таким образом, задача сводится к поиску остова с минимальным числом промежуточных валов. Число всех остовов графа находится с помощью матрицы инцидентий, являющейся матрицей размерности  $n \times m$  ( $n$  - число вершин,  $m$  - число дуг). Элементы матрицы инцидентий для графа  $G = (X, A)$  определяются следующим образом:  $c_{ij} = 1$ , если  $x_i$  является начальной вершиной дуги  $a_j$ ;  $c_{ij} = -1$ , если  $x_i$  конечная вершина дуги  $a_j$  или если есть петля в вершине  $x_i$ .

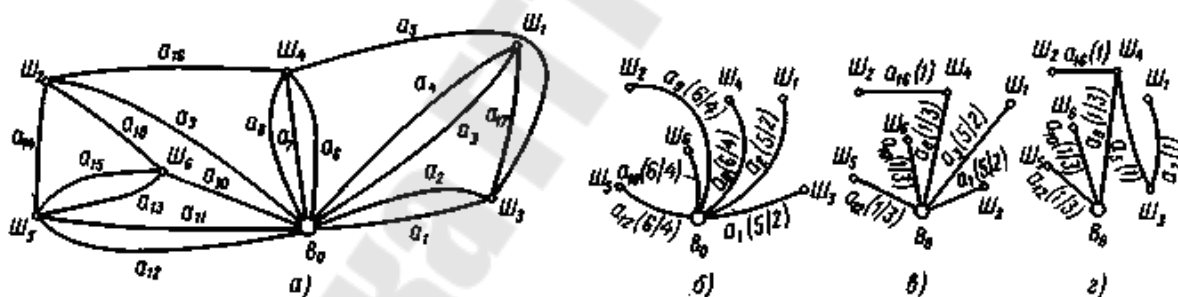


Рис.15.3. Графы вариантов раскатки шестишпиндельной коробки

Шпиндельный граф неориентированный, поэтому для построения матрицы инцидентий будем полагать, что каждое ребро ориентировано от вершины с меньшим индексом к вершине с большим индексом. Строки матрицы  $C$  соответствуют узлам (сверху вниз)  $B_0, Ш_1, Ш_2, \dots, Ш_6$ ; столбцы – дугам  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ . Общее число остовов графа  $n_G$  можно рассчитать по формуле

$$n_G = |C_0 C_0^T|,$$

где  $C_0$  – матрица инцидентий шпиндельного графа  $G$ , у которой

вычеркнута одна строка;  $C_0^T$  – транспонированная матрица  $C$ .

С учетом этого замечания для шпиндельного графа, приведенного на рис.15.3, *a*, матрица инцидентий имеет вид

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Для графа, приведённого на рис.15.3, *a*, получаем (вычёркивая строку  $B_0$  в матрице  $C$ ).

$$n_G = |C_0 C_0^T| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2476$$

Пусть длиной дуг графа будет число промежуточных валов. Так, дуга  $a_5$ , соединяющая шпиндели  $\text{Ш}_4$  и  $\text{Ш}_3$ , (см.рис.15.2), имеет длину 1, т. е. между ними имеется всего один промежуточный вал. При соединении двух или нескольких шпинделей с каким-либо шпинделем или приводным валом через общую кинематическую цепь для каждого из шпинделей указывается дуга дробной длины; числитель дроби равен числу общих промежуточных валов в цепях между шпинделями, а знаменатель — числу этих шпинделей. Например, шпиндели  $\text{Ш}_3$  и  $\text{Ш}_1$  объединяются с приводным валом через общий промежуточный вал, с которым каждый из них соединяют с помощью двух промежуточных валов, поэтому дуги  $a_1$  и  $a_3$ , (рис.15.3, *б*), соответствующие этому случаю, имеют вес каждая по  $5/2$ . Причем длина одной и той же дуги может меняться в зависимости от варианта зацепления.

Варианты шпиндельной коробки могут иметь разное число промежуточных валов, которое будет равно сумме длин дуг основного графа: 11 (рис.15.3, *a*), 9 (рис.15.3, *б, в*) и 6 (рис.15.3, *г*). Более точным является критерий  $\Phi_2$  (суммарный вес валов и зубчатых



колес), причем необходимо иметь в виду, что если движение от приводного вала передается на шпиндели через промежуточный шпиндель, например на Ш<sub>2</sub> через Ш<sub>4</sub> (см. рис.15.3, в), то диаметр промежуточного шпинделя должен быть увеличен.

Даже при небольшом числе шпинделей число вариантов раскатки может быть очень велико, что исключает возможность полного перебора вариантов. Поэтому вводится упорядочивание вариантов, что позволит использовать неполный перебор в алгоритме поиска оптимальных вариантов раскатки. Критерием упорядочивания является число промежуточных шпинделей. Первым уровнем вариантов раскатки, будем считать варианты без промежуточных шпинделей. Число этих вариантов

$$n'_G = n_1 n_2 n_3 \dots n_k = \prod_{i=1}^k n_i$$

где  $n_i$  - число дуг, связывающих  $i$ -й шпиндель с входным валом;  $k$  - число шпинделей. Для графа, приведенного на рис.15.3, а,  $n'_G = 24$ .

Второй уровень вариантов раскатки – с одним промежуточным шпинделем, третий уровень - с двумя промежуточными шпинделями и т. д. В соответствии с таким упорядочиванием вариантов процедура поиска наилучших вариантов раскатки сводится к поиску оптимальных вариантов на каждом уровне. При этом по сравнению с полным перебором число анализируемых вариантов существенно сокращается, так как оптимальный вариант, полученный на предыдущем уровне, является базовым для построения вариантов раскатки на последующем уровне.

На первом уровне граф раскатки сначала строится на основе пучков шпинделей, а затем новые варианты получают заменой дуг полученного графа дугами с минимальным весом. Если критерий качества, соответствующий исходному графу, не уменьшается, процесс построения оптимальной раскатки на первом уровне заканчивают и переходят к поиску оптимального варианта на втором уровне. Из всех ребер, соединяющих шпиндели, выбирается ребро минимального веса и добавляется к графу раскатки, полученному на первом уровне, и т. д. На рис.15.3, б показан оптимальный граф раскатки первого уровня, полученный из общего графа (см. рис.15.3, а). Оптимальный граф второго уровня приведен на рис.15.3, в, а третьего - на рис.15.3, г.

## 16. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Параметрический синтез заключается в определении числовых значений параметров элементов при заданных структуре и условиях работоспособности, влияющих на выходные параметры объекта. При параметрическом синтезе нужно найти точку (область) в пространстве внутренних параметров, в которых выполняются те или иные условия.

Синтез ТО называется *оптимизацией*, если определяются наилучшие в заданном смысле структура ТО и значения его параметров. При расчетах оптимальных значений параметров при заданной структуре говорят о параметрической оптимизации. Задачу выбора оптимальной структуры называют *структурной оптимизацией*.

Постановка задачи оптимизации имеет содержательный смысл только в том случае, когда появляется необходимость выбора одного из конкурирующих вариантов, полученных при ограниченных ресурсах. Окончательный выбор ТО (принятие решения) необходимо проводить с учетом *правил предпочтения* и на основании установленных критериев. Выбор критерия является одним из важных этапов постановки задачи оптимизации, так как все последующие действия направлены на поиск варианта, наиболее близкого к оптимальному по выбранному критерию.

В основе построения правила предпочтения лежит *целевая функция (ЦФ)*, количественно выражающая качество объекта и называемая также *функцией качества*, или *критерием оптимальности*. Целевая функция всегда формируется с учетом различных выходных параметров ТО. В зависимости от содержательного смысла этих параметров и выбранного способа их сочетания в ЦФ качество объекта будет тем выше, чем больше ее значение (максимизация) или чем меньше ее значение (минимизация).

Выбор ЦФ носит субъективный характер, и поэтому объект может быть оптимален только в смысле данного критерия.

В большинстве подходов к оценке ТО принято ориентироваться на эталонные образцы, на экспертные оценки или на технико-экономические показатели, определяемые техническим заданием (ТЗ) на проектирование. При подготовке ТЗ обычно учитываются достижения мировой практики, а также экспертные оценки, более объективной следует считать ориентацию на ТЗ. Наиболее полная

оценка проектных решений выполняется на основе анализа технико-экономических показателей с учетом требований ТЗ.

Качество функционирования любой системы характеризуется вектором выходных параметров  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Некоторые из выходных параметров могут быть измерены количественно, другие представляют собой качественную сторону объекта, поэтому все выходные параметры обычно делят соответственно на количественные и качественные. В дальнейшем под вектором  $\vec{Y}$  будем подразумевать вектор количественных параметров.

Значение ЦФ может возрастать или убывать с увеличением качества выходного параметра, поэтому в первом случае необходимо искать максимум, а во втором – минимум ЦФ.

Каждый из составляющих вектора  $\vec{Y}$  выходных параметров зависит от множества внутренних параметров проектируемого объекта. Следует отметить, что значения некоторых внутренних параметров назначаются и не подлежат изменению. К таким параметрам, например, можно отнести параметры унифицированных элементов, значения которых оговорены в ТЗ на проектирование. Остальные параметры можно выбрать, ориентируясь на прототипы с учетом собственного опыта и оценки возможных перспектив развития конструкций подобных объектов.

Внутренние параметры, значения которых могут меняться в процессе оптимизации и которые являются аргументами ЦФ, называют *управляемыми параметрами*.

Пусть в проектируемом объекте имеется  $n$  управляемых параметров, образующих вектор  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Обозначим ЦФ через  $F(X)$ , а область ее определения – через  $XP$ . Вектор  $\vec{X}$  определяет координаты точки в области определения  $XP$ . Если элементы вектора  $\vec{X}$  принимают только дискретные значения,  $XP$  является *дискретным множеством точек* и задача оптимизации относится к области *дискретного* (в частном случае целочисленного) *программирования*.

Большинство задач параметрической оптимизации ТО формулируется в терминах непрерывных параметров. Если экстремум целевой функции ищется в неограниченной области  $XP$ , его называют *безусловным*, а методы поиска – *методами безусловной оптимизации*. Если экстремум целевой функции ищется в ограниченной области  $XP$ , его называют *условным*. Для решения задач проектирования в машиностроении характерны методы условной оптимизации.

Таким образом, задачу поиска оптимального решения можно в общем случае сформулировать следующим образом:

$$\text{extr}F(\vec{X}), \vec{X} \in XP,$$

где  $\vec{X}$  – вектор управляемых параметров;  $F(\vec{X})$  – целевая функция;  $XP$  – область допустимых значений вектора управляемых параметров.

### 16.1. Постановка задачи оптимизации

Основная проблема постановки задачи оптимизации заключается в выборе целевой функции (ЦФ). Сложность выбора ЦФ состоит в том, что любой ТО первоначально имеет векторный характер критериев оптимальности (многокритериальность), причем улучшение одного из выходных параметров, как правило, приводит к ухудшению другого, так как все выходные параметры являются функциями одних и тех же управляемых параметров и не могут изменяться независимо друг от друга. Такие выходные параметры называют *конфликтными*.

Целевая функция должна быть одна (принцип однозначности). Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной называют *сверткой векторного критерия*. Задача поиска его экстремума сводится к задаче математического программирования.

В зависимости от того, каким образом выбираются и объединяются выходные параметры в скалярной функции качества, различают частные, аддитивные, мультипликативные, минимаксные, статистические критерии и т. д. *Частные критерии* могут применяться в случаях, когда среди выходных параметров можно выделить один основной параметр  $y_i(\vec{X})$ , наиболее полно отражающий эффективность проектируемого объекта; этот параметр принимают за ЦФ. Условия работоспособности объекта по всем остальным выходным параметрам относят при этом к функциональным ограничениям. Оптимизация на основе такой постановки называется *оптимизацией по частному критерию*.

Достоинство такого подхода – его простота, а существенный недостаток – возможность получить высокое качество объекта только по тому параметру, который принят в качестве ЦФ, в то время как остальные выходные параметры будут только приемлемыми.

Выбирается один, наиболее значимый выходной параметр и проводится его оптимизация. Затем взять следующий по значимости параметр и провести его оптимизацию при условии, что значения управляемых параметров, входящие в выражение, как для первого, так и для второго выходных параметров, при оптимизации второго параметра должны быть зафиксированы на уровне, достигнутом при оптимизации первого параметра. Далее по такому же принципу можно оптимизировать и все остальные выходные параметры. Однако это возможно только в тех случаях, когда выходные параметры зависят хотя бы частично от различных наборов управляемых параметров, что на практике бывает далеко не всегда.

*Взвешенный аддитивный критерий* применяют тогда, когда условия работоспособности позволяют выделить две группы выходных параметров. В первую группу входят выходные параметры  $y_i^+(\vec{X})$ , значения которых в процессе оптимизации нужно увеличивать (производительность, вероятность безотказной работы и т. п.), во вторую – выходные параметры  $y_i^-(\vec{X})$ , значения которых следует уменьшать (масса, время разгона и пр.).

В этом случае целевая функция свертки будет иметь вид:

$$F(\vec{X}) = \sum_{i=1}^k [\lambda_i y_i^-(\vec{X}) - y_i^+(\vec{X})], \quad (16.1)$$

где  $\lambda_i > 0$  – весовой коэффициент, определяющий степень важности  $i$ -го выходного параметра (обычно значения  $\lambda_i$  выбираются проектировщиком и в процессе оптимизации остаются постоянными).

Объединение нескольких выходных параметров, имеющих в общем случае различную физическую размерность и величину, в одной скалярной ЦФ требует предварительного нормирования этих параметров.

Способы нормирования параметров могут быть различны. Наиболее простым является отнесение этого параметра к некоторой заранее заданной средней величине, определяемой из опыта предыдущего проектирования, или к допускаемой величине (например, допускаемые напряжения). В этом случае все составляющие выражения (16.1) будут безразмерными величинами одного порядка, что делает удобным манипулирование коэффициентами  $\lambda_i$  в процессе проектирования.

Наиболее типичным случаем параметрической оптимизации ТО является поиск значений вектора управляемых параметров  $\vec{X}$ , определяющих экстремум ЦФ при наличии ограничений. Для дальнейшего изложения будем считать, что в процессе оптимизации ищется минимум ЦФ. Таким образом, задачу в общем случае можно сформулировать следующим образом:

$$\min F(\vec{X}). \quad (16.2)$$

Здесь  $\vec{X} \in XP$  при прямых ограничениях  $x_{hi} \leq x \leq x_{vi}$  для любого  $i \in [1, n]$ , где  $x_{hi}, x_{vi}$  – минимально и максимально допустимые значения  $i$ -го управляемого параметра;  $n$  – размерность пространства управляемых параметров.

*Функциональные ограничения*, как правило, представляют собой условия работоспособности для выходных параметров, не вошедших в ЦФ, и могут быть: типа *равенств*  $\psi(\vec{X}) = 0$  и (или) типа *неравенств*  $\varphi(\vec{X}) > 0$ , где  $\psi(\vec{X})$  и  $\varphi(\vec{X})$  – вектор функции.

Выбор метода решения зависит от способа постановки задачи оптимизации. Любая из точек  $\vec{X} \in XP$  является *допустимым решением задачи*. Часто параметрический синтез ставится как задача определения любого из допустимых решений. Однако гораздо важнее решить задачу оптимизации – найти оптимальное решение среди допустимых.

## 16.2. Методы решения задач оптимизации

Расчет выходных параметров объекта в САПР, как правило, выполняется через численное решение систем алгебраических и дифференциальных уравнений.

Целевая функция и функциональные ограничения определяются неявным образом, что не позволяет оценить их свойства (выпуклость, вогнутость и т. д.) с приемлемыми затратами вычислительных ресурсов. Поэтому решение задач оптимизации в САПР ведется с помощью *поисковых методов* математического программирования, использующих предшествующую информацию для построения улучшенного решения задачи, т. е. эти методы являются итерационными.

По ряду признаков задачи поиска экстремума могут быть отнесены к тому или иному классу.

Большинство постановок задач параметрической оптимизации ТО сводятся к задачам нелинейного программирования, так как ЦФ и ограничения описываются нелинейными зависимостями от вектора управляемых параметров.

В отдельных случаях при проектировании удается так сформулировать задачу, что ЦФ и ограничения являются линейными функциями своих аргументов. Тогда имеет место задача линейного программирования.

В зависимости от типа искомого экстремума различают методы локальной и глобальной, условной и безусловной оптимизации. Практически используемые методы в основном являются методами локального поиска.

Одновременно надежные и экономичные методы поиска глобального экстремума в настоящее время неизвестны. Надежным, но крайне неэкономичным методом глобального поиска, является *метод сканирования*. При его применении область определения  $F(\vec{X})$  в пространстве управляемых параметров разбивается на  $k$  подобластей, в центре каждой из которых вычисляется значение ЦФ.

Если функция зависит от  $n$  параметров, необходимо выполнить  $k^n$  вариантов расчетов. Чтобы получить достоверную картину поведения гиперповерхности отклика ЦФ, необходимо сканировать допустимую область с достаточно малым шагом, поэтому даже для сравнительно несложных задач затраты машинного времени на поиск становятся недопустимо большими. Этот недостаток характерен и для *методов случайного поиска глобального экстремума*.

Однако затраты ресурсов на случайный поиск можно сделать приемлемыми, если не предъявлять высоких требований к надежности определения экстремума.

Наиболее многочисленную группу составляют методы безусловной оптимизации.

Некоторое представление о широко применяемых методах этой группы дает рис. 16.1.

В зависимости от порядка используемых производных ЦФ по управляемым параметрам методы безусловной оптимизации делят на методы нулевого, первого и второго порядков.



Рис. 16.1. Классификация методов оптимизации

В методах нулевого порядка (прямых методах) информация о производных не используется.

Для методов первого порядка необходимо вычислять как значение функции качества, так и ее первые частные производные (градиентные методы).

В методах второго порядка организация поиска экстремума ведется с учетом значений ЦФ, ее первых и вторых производных.

В зависимости от количества управляемых параметров ЦФ различают методы одномерного и многомерного поиска.

Одномерный поиск может рассматриваться как самостоятельная задача, если аргументом ЦФ является один параметр. Такой же поиск используется в качестве части процедуры многомерной оптимизации в тех случаях, когда необходимо найти оптимальный шаг в выбранном направлении.

Задача условной оптимизации может быть сформулирована как задача безусловной оптимизации с помощью методов Лагранжа или



штрафных функций. Тогда для её решения применяются методы безусловной оптимизации.

Задача условной оптимизации может быть решена и методами условной оптимизации (методы проекции градиента, допустимых направлений и др.).

Практически во всех методах оптимизации стремятся построить такую последовательность значений  $\vec{X}_0, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ , при которой  $F(\vec{X}_0) > F(\vec{X}_1) > F(\vec{X}_2) > \dots$ . В этом случае обеспечивается сходимость результатов и можно надеяться, что минимум функции будет найден.

Важной характеристикой методов является их скорость сходимости. Однако оценка сходимости того или иного метода обычно базируется на некоторых предпосылках относительно особенностей ЦФ (например, функция дважды непрерывно дифференцируема или сильно выпукла) и зависит от выбора начальной точки поиска. Теоретические предпосылки относительно реальных ЦФ могут не удовлетворяться, поэтому скорость сходимости в этих случаях можно рассматривать как сравнительную оценку метода.

Численные методы поиска оптимума позволяют построить последовательность шагов от начальной точки  $\vec{X}_0$  через некоторые промежуточные точки  $\vec{X}_k$  к локальному экстремуму  $\vec{X}^*$ .

Схема алгоритма поиска оптимального решения для общего случая показана на рис. 16.2. Как отмечалось выше, выбор исходной точки поиска  $\vec{X}_0$  во многом определяет успех решения всей задачи. Очевидно, что  $\vec{X}_0$  должна принадлежать области определения целевой функции, и чем ближе к экстремуму выбрана  $\vec{X}_0$ , тем быстрее и с большей вероятностью экстремум будет найден.

Сущность метода оптимизации определяется этапами 2 и 3 алгоритма, на которых выбирается направление дальнейшего поиска и вычисляются координаты очередной точки  $\vec{X}_{k+1}$  на траектории поиска. Далее в точке  $\vec{X}_{k+1}$  вычисляются значения ЦФ  $F(\vec{X}_{k+1})$  и функций-ограничений, т. е. определяется информация, позволяющая судить о достигнутом успехе.

Инженер может назначить различные условия прекращения поиска. В зависимости от степени их выполнения поиск будет продолжен или прекратится.

Методы одномерного поиска строятся в предположении унимодальности (одноэкстремальности) функции  $F(x)$  на заданном интервале  $[a,b]$ . К функции не предъявляются требования дифференцируемости или непрерывности. Предполагается, что для любого  $x \in [a,b]$ , значение  $F(x)$  может быть вычислено, т. е. найдено путем вычислительного эксперимента.



Рис. 16.2. Алгоритм поиска оптимального решения

Методы одномерного поиска можно разделить на методы последовательного поиска (методы дихотомии или половинного деления, Фибоначчи и золотого сечения) и методы, использующие аппроксимацию функции (методы квадратичной и кубической интерполяции и др.).

Для большинства задач, связанных с поиском оптимальных решений, методы одномерного поиска практически не применимы, поскольку выходные параметры этих машин, как правило, зависят от множества управляемых параметров. Обычно в этом случае применяются методы многомерного поиска.

В качестве примера многомерного поиска рассмотрим *метод покоординатного спуска* (метод Гаусса–Зейделя). Рассмотрим функцию двух переменных, тогда возможна геометрическая интерпретация рассматриваемого метода. Таким образом, необходимо решить задачу

$$\min F(\vec{X}), \vec{X}(x_1, x_2) \in XP.$$

На рис. 16.3, а изображена поверхность, представляющая собой изображение функции  $F(\vec{X})$  двух переменных (управляемых параметров)  $x_1$  и  $x_2$ . Проекция этой поверхности на плоскость переменных  $x_1$  и  $x_2$  показана на рис. 16.3, б.

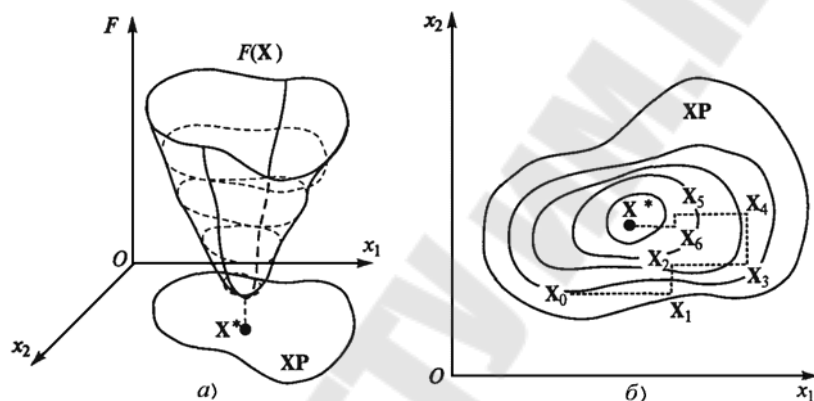


Рис. 16.3. Графическая интерпретация метода покоординатного спуска

В соответствии с алгоритмом, приведенным на рис. 16.2, на плоскости управляемых параметров  $x_1$  и  $x_2$  выберем начальную точку  $\vec{X}_0$  с координатами  $(x_{10}; x_{20})$  и определим для нее значение целевой функции  $F_0$ . В соответствии с указанным алгоритмом выберем направление поиска. Для этого зафиксируем значение управляемого параметра  $x_2 = x_{20} = \text{const}$ , а значение управляемого параметра  $x_1 = x_{10}$  изменим на величину заранее выбранного шага. Для полученной пары значений управляемых параметров вычислим значение ЦФ. Если полученное значение ЦФ будет больше первоначального, необходимо изменить значение  $x_{10}$  на величину шага в противоположном направлении и для этой точки снова вычислить значение ЦФ. Направление выбирается с таким расчетом, чтобы значение ЦФ стало меньше первоначального. Далее в выбранном направлении продолжаем перемещение с выбранным шагом до тех пор, пока

значение ЦФ не уменьшится. При нарушении этого условия зафиксируем достигнутое на предыдущем шаге значение управляемого параметра  $x_1$  (точка  $\vec{X}_1$ ), а затем начинаем перемещение в направлении управляемого параметра  $x_2$  с определенным шагом, пользуясь закономерностями, описанными выше, до точки  $\vec{X}_2$ , в которой достигнут минимум ЦФ.

После этого зафиксируем значение переменной  $x_2$ , снова возвращаемся к параметру  $x_1$ , и цикл повторяется до тех пор, пока изменение любого управляемого параметра на величину выбранного шага будет приводить к увеличению значения ЦФ. Поиск заканчивается достижением локального минимума ЦФ, соответствующего значениям вектора управляемых параметров  $\vec{X}^*$ .

Использование *метода свертки* можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть имеются две ЦФ  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  одного управляемого параметра. Предположим, что для каждой из них необходимо найти минимум, и значимость каждой из них с точки зрения оптимизации выходных параметров конструкции равнозначна.

В этом случае постановка задачи, в общем виде, выраженной формулой (16.1), сводится к следующей:

$$\min F(\vec{X}) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2), x \in XP.$$

Поскольку значимость ЦФ в процессе оптимизации одинакова, весовые коэффициенты равны. Допустим,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ . Графическая интерпретация решения этой задачи представлена на рис. 16.4.

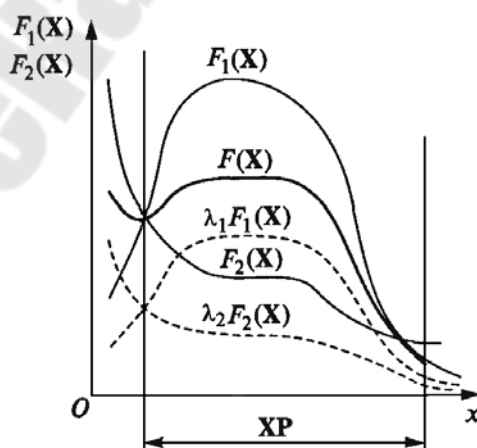


Рис. 16.4. Графическая интерпретация метода свертки

Следует иметь в виду, что на практике решение задач проектирования таких сложных объектов, как станок, связано с нахождением экстремумов ЦФ значительно большего количества управляемых параметров и столь простая графическая интерпретация описанных методов невозможна.

### 16.3 Оптимизация периода стойкости по себестоимости обработки

Себестоимость операции обработки можно представить в виде:

$$C = t_0 \cdot E + \frac{t_{cm}}{Q} \cdot E + \frac{Z_{ин}}{Q} \quad (16.3)$$

где  $E$  – приведенные затраты обработки на станке за 1 минуту;  
 $Q$  – количество деталей, обработанных период за стойкости инструмента;  
 $Z_{ин}$  – затраты на инструмент (стоимость, наладка и т.п.);  
 $t_0$  – основное время

$$t_0 = \frac{L_{px} \cdot i_{np}}{S_z \cdot z \cdot n \cdot i_{ou} \cdot i_{od}} \quad (16.4)$$

где  $i_{np}$  - число проходов;  
 $S_z$  - подача на зуб инструмента;  
 $z$  - число зубьев;  
 $n$  - частота циклов главного движения (частота вращения);  
 $i_{ou}$  - количество одновременно работающих инструментов;  
 $i_{od}$  - количество одновременно обрабатываемых деталей;

$$n = \frac{1000 \cdot V}{\pi \cdot D}, \quad (16.5)$$

здесь  $V$  - скорость главного движения, м/мин;  
 $D$  - диаметр заготовки или инструмента.

Формула Тейлора

$$V \cdot T^m = K \quad (16.6)$$

Тогда основное время с учетом (16.6) и (16.5) примет вид:

$$t_0 = \frac{L_{px} \cdot i_{np} \cdot \pi \cdot D}{S_z \cdot z \cdot i_{ou} \cdot i_{od} \cdot 1000 \cdot K} \cdot T^m$$

Для упрощения обозначим  $\eta = \frac{L_{px} \cdot i_{np} \cdot \pi \cdot D}{S_z \cdot z \cdot i_{ou} \cdot i_{od} \cdot 1000 \cdot K}$

Тогда  $t_o = \eta \cdot T^m$  (16.7)

$Q$  - количество деталей обработанных за период стойкости

$$Q = \frac{T}{t_o} \quad (16.8)$$

И с учетом (16.7)

$$Q = \frac{T}{\eta \cdot T^m} = \frac{1}{\eta \cdot T^{m-1}} \quad (16.9)$$

Уравнения (16.7) и (16.9) поставляем в (16.3), получаем выражение для себестоимости:

$$C = \eta T^m \cdot E + t_{cm} \cdot E \cdot \eta T^{m-1} + 3_{un} \cdot \eta T^{m-1} \quad (16.10)$$

Для получения выражения оптимального значения периода стойкости приравняем к нулю первую производную себестоимости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= m \cdot \eta T^{m-1} \cdot E + (m-1) \cdot t_{cm} \cdot E \cdot \eta T^{m-2} + (m-1) \cdot 3_{un} \cdot \eta T^{m-2} = \\ &= \eta T^{m-1} \cdot E \left( m + (m-1) \cdot t_{cm} \cdot \frac{1}{T} + (m-1) \cdot \frac{3_{un}}{E \cdot T} \right) = 0 \end{aligned}$$

Так как  $\eta T^{m-1} \cdot E$  не равно нулю, то необходимо приравнять к нулю выражение в скобках

$$m + (m-1) \cdot t_{cm} \cdot \frac{1}{T} + (m-1) \cdot \frac{3_{un}}{E} \cdot \frac{1}{T} = 0$$

Получаем формулу оптимизации периода стойкости:

$$T = \frac{1-m}{m} \cdot \left( t_{cm} + \frac{3_{un}}{E} \right) \quad (16.11)$$

Случай 2. Если  $Z$  инструментов в наладке, то выражение (16.3) примет вид:

$$C = t_o \cdot E + \frac{t_{смн}}{Q} \cdot E + \frac{z \cdot 3_{ун}}{Q}, \quad (16.12)$$

где  $z$  - количество одинаковых инструментов в наладке.

Тогда оптимальный период стойкости инструментальной наладки можно определить по выражению

$$T = \frac{1-m}{m} \left( t_{смн} + \frac{z \cdot 3_{ун}}{Q} \right)$$

где  $t_{смн}$  - время смены всей наладки;

Случай 3. Если в инструментальной наладке станка с ЧПУ разнохарактерный инструмент, то

$$t_{oi} = t_o \cdot \lambda_i \quad (16.13)$$

где  $t_{oi}$  - основное время обработки  $i$ -ым инструментом;

$t_o$  - основное время обработки всей детали;

$\lambda_i$  - коэффициент, учитывающий долю основного времени  $i$ -го инструмента.

$$T_i = T_n \cdot \mu_i \quad (16.14)$$

где  $\mu_i$  - коэффициент, учитывающий период стойкости  $i$ -го инструмента.

Уравнения (16.12) и (16.13) подставляем в (16.3). Тогда выражение для себестоимости примет вид:

$$C = \sum_{z=1}^n t_o \cdot \lambda_i \cdot E + \sum_{z=1}^n \frac{t_{смн}}{Q} \cdot \frac{\lambda_i}{\mu_i} \cdot E + \sum_{z=1}^n \frac{3_{ун}}{Q} \cdot \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Применив вышеприведенную методику, можно получить выражение для оптимального периода стойкости

$$T = \sum_{z=1}^n \frac{1-m_i}{m_i} \left( \sum_{z=1}^n t_{смн} \cdot \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \sum_{z=1}^n \frac{3_{ун}}{E} \cdot \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)$$

## 16.4. Оптимизация функции с ограничениями в виде равенств

### 16.4.1 Метод множителей Лагранжа

Метод распространяется на любого вида функцию, имеющую нелинейный характер ( $F$ )  $F = f(x_1, x_2)$  - двух параметрическая функция,  $\alpha = f_1(x_1, x_2) = 0$  - ограничения.

Если функция оптимизации позволяет сократить один параметр, путем выражения его из ограничения, то дальнейшая оптимизация производится одним из приведенных методов.

Если не удастся получить напрямую (с корнями), то выражаем с помощью множителей Лагранжа:  $F_L = F - \sum \lambda_i \cdot h_i$

где  $\lambda_i$  - множитель Лагранжа;

$h$  - (ограничения в виде равенств).

Вычисляем частные производные функции по параметрам:

$$\frac{\partial F_L}{\partial x_1} = 0; \quad (16.15)$$

$$\frac{\partial F_L}{\partial x_2} = 0. \quad (16.16)$$

Из (16.15) и (16.16) выражаем  $x_1 = f_1(\lambda), x_2 = f_2(\lambda)$ .

Находим вторые производные, чтобы определить *max*, *min* или седлообразность точки.

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Составляем матрицу:  $E = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F_L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ , если  $E < 0$ , то функция имеет

максимум, если  $E > 0$  – то минимум.

Если же матрица  $E = \pm 0$ , то функция имеет седлообразный характер.

**Пример.** Пусть требуется определить размеры  $a$ ,  $b$  и  $c$  параллелепипеда заданного объема  $V$ , который имел бы минимальную поверхность  $S$ .

Критерий оптимальности этой задачи

$$S = 2ab + 2ac + 2bc.$$



Ограничение на параметры  $a, b$  и  $c$  согласно условию задачи описывается выражением  $abc = V$  или  $abc - V = 0$ .

Согласно методу множителей Лагранжа составляем функцию

$$F = 2ab + 2ac + 2bc - \lambda(abc - V).$$

Система (16.15), (16.16) для этой функции имеет вид:

$$\partial F / \partial a = 2b + 2c - \lambda bc = 0; \quad \partial F / \partial b = 2a + 2c - \lambda ac = 0;$$

$$\partial F / \partial c = 2a + 2b - \lambda ab = 0; \quad abc - V = 0.$$

Решив эту систему, получим следующие оптимальные значения размеров параллелепипеда объема  $V$ .

$$a = b = c = \sqrt[3]{V}; \quad \lambda = 4 / \sqrt[3]{V^2}.$$

При этих размерах поверхность параллелепипеда  $S = 6\sqrt[3]{V^2}$ .

Анализом производных 2-го порядка несложно показать, что найденная точка является точкой минимума целевой функции.

### **Алгоритм решения задачи методом множителей Лагранжа**

*Шаг 1.* Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x).$$

*Шаг 2.* Записать необходимые условия экстремума первого рода:

а)  $\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n;$

б)  $g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$

*Шаг 3.* Решить систему для двух случаев:

а)  $\lambda_0^* = 0,$

б)  $\lambda_0^* \neq 0$  (при этом поделить условие «а» на  $\lambda_0^*$  и заменить  $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$  на  $\lambda_j^*$ ).

В результате найти условно стационарные точки  $x^*$ , выделив из них полученные при  $\lambda_0^* \neq 0$  (они могут быть регулярными точками экстремума).

*Шаг 4.* Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке  $(x^*, \lambda^*)$ :

$$d^2L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j;$$

б) записать систему в точке  $x^*$ :

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^n \frac{dg_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \dots, m;$$

в) из предыдущей системы выразить любые  $m$  дифференциалов  $dx_i$  через остальные  $(n - m)$  и подставить  $d^2L(x^*, \lambda^*)$ ;

г) если  $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$  при ненулевых  $dx$ , то в точке  $x^*$  - условный локальный минимум. Если  $d^2L(x^*, \lambda^*) < 0$  при ненулевых  $dx$ , то в точке  $x^*$  - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка, следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке  $x^*$  нет условного экстремума.

*Шаг 5.* Вычислить значения функции в точках экстремума.

Условия экстремума приведены в таблице 16.1.

1. Иногда удается проверить условия линейной независимости градиентов ограничений на множестве  $X$ . Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа, на шаге 2 можно записать сразу систему, а на шаге 3 отсутствует случай  $\lambda_0^* = 0$ .

2. Графическое решение задачи (при  $n = 2, m = 1$ ). Для этого следует:

а) построить множество допустимых решений  $X$ ;

б) построить семейство линий уровня целевой функции и найти точки их касания с кривыми, описывающими ограничения. Эти точки являются «подозрительными» на условиях экстремума;

в) исследовать поведения целевой функции при движении вдоль ограничения к исследуемой точки и от нее. Классифицировать точки, используя определение экстремума.

Таблица 16.1

**Необходимые и достаточные условия в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа равенства**

№ п/п	$\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$	$g_j(x^*),$ $j = 1, \dots, m$	$\lambda_0^* \neq 0$ $d^2 L(x^*, \lambda^*)$	$dg_j(x^*),$ $j = 1, \dots, m$	Тип условно-стационарной точки $x^*$
1	0	0	$\succ 0$	$0, dx \neq 0$	Условный локальный минимум
2	0	0	$\prec 0$	$0, dx \neq 0$	Условный локальный максимум
3	0	0	$\geq 0$	0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	0	0	$\leq 0$	0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	0	0	$= 0$	0	Требуется дополнительное исследование
6	0	0	$\succ 0$	0	Нет экстремума

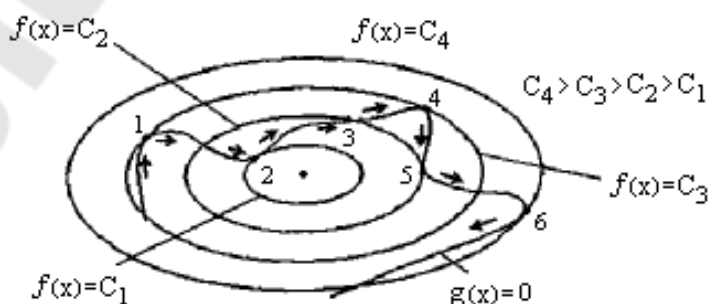


Рис. 16.5. Графическое изображение поиска оптимальных значений

На рис. 16.5 в точках 1 – 6 линии касаются ограничения. Исследование поведения функции в этих точках при движении по стрелкам показывает, что в точках 1, 4, 6 – локальный максимум, так как при приближении к ним функция возрастает, а затем убывает; в точках 2, 5 – локальный минимум, так как при приближении к ним функция убывает, а затем возрастает; в точке 3 нет условного экстремума, так как при приближении к ней и удалении дальше от нее функция возрастает.

3. При решении примеров для упрощения записи на шагах 2 и 3 алгоритма будем опускать знак \*, оставляя его только для значений  $x$  и  $\lambda$ , соответствующих условно-стационарным точкам.

**Пример.** Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

Проверим условие регулярности. Так как  $\nabla g_1(x) = (2x_1 \ 2x_2)^T = 0$  для всех, то условие выполняется. Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\text{а) } \frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2\lambda_1},$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1};$$

$$\text{б) } g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

3. Решением системы являются две условно-стационарные точки:

$$A: x_1^* = 1, x_2^* = 1, \lambda_1^* = -\frac{1}{2}; \quad B: x_1^* = -1, x_2^* = -1, \lambda_1^* = \frac{1}{2}.$$

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а)  $d^2L(x^*, \lambda_1^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$ , так как

$$\frac{\partial^2 L(x, \lambda_1)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 L(x, \lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*,$$

$$\frac{\partial^2 L(x, \lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x, \lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б)  $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$ , так как  $\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1$ ,  $\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2$ .

в) исследуем точку  $A$ . Получим  $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$ , откуда  $dx_1 = -dx_2$ .

С учетом полученного соотношения

$d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$  при  $dx_2 \neq 0$ . Поэтому в точке  $x^* = (1, 1)^T$  - регулярный условный локальный максимум.

Исследуем точку  $B$ . Получаем  $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$ , откуда  $dx_1 = -dx_2$ . С учетом полученного соотношения  $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$  при  $dx_2 \neq 0$ . Поэтому в точке  $x^* = (-1, -1)^T$  - регулярный условный локальный минимум (строка 1 в табл. 16.1).

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума  $f(A) = 2$ ,  $f(B) = -2$ . Графическое решение задачи изображено на рис. 16.6.

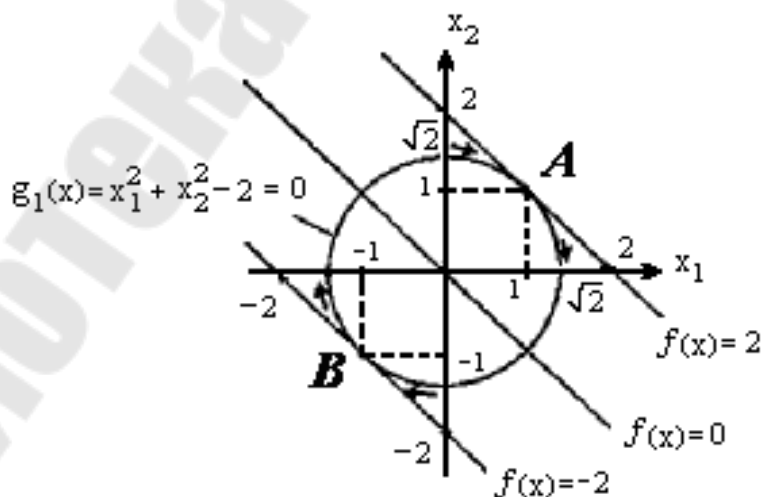


Рис. 16.6. Графическое изображение области экстремума

### 16.4.2 Оптимизация функции по методу Куна - Такера.

Если ограничения в виде системы равенств и неравенств:

$$F = f(x_1, x_2)$$

$$q_i = f_i(x_1, x_2) \lessgtr 0$$

$$h_j = f_j(x_1, x_2) \lessgtr 0 \text{ - ограничения.}$$

Для нахождения оптимума, нужно чтобы все ограничения были больше нуля.

Тогда функция оптимизации будет иметь вид:

$$F_T = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum \lambda_i \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \sum \mu_i \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0 \quad (16.17)$$

и находим параметры:  $x_1$  и  $x_2$ .

**Пример:** Пусть функция оптимизации имеет вид:

$$T = 5 \cdot S^2 + 6 \cdot V^2 - 3S \cdot V \quad (16.18)$$

$$\text{ограничения: } \begin{cases} q_1 \Rightarrow S + V \lessgtr 1 \\ q_2 \Rightarrow 2 \cdot S - 3 \cdot V \lessgtr 2 \\ h_1 \Rightarrow S - 4 \cdot V = 0 \end{cases} \quad (16.19)$$

Используя (16.17) получим:

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 10 \cdot S - 3 \cdot V \quad g_1 \Rightarrow 1 - S - V \lessgtr 0 \quad (16.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = 12 \cdot V - 3 \cdot S \quad g_2 \Rightarrow 2 \cdot S - 3 \cdot V - 2 \lessgtr 0$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial S} = -1 \quad \frac{\partial q_2}{\partial S} = 2 \quad \frac{\partial h_1}{\partial S} = 1$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial V} = -1 \quad \frac{\partial q_2}{\partial V} = -3 \quad \frac{\partial h_1}{\partial V} = -4$$

Запишем функцию оптимизации в виде (16.17):

$$F_{TS} \Rightarrow 10 \cdot S - 3 \cdot V + \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 - \mu = 0 \quad (16.21)$$

$$F_{TV} \Rightarrow 12 \cdot V - 3 \cdot S + \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \mu = 0 \quad (16.22)$$

$$1 - S - V \lessgtr 0; \quad (16.23)$$

$$2 \cdot S - 3 \cdot V - 2 \lessgtr 0; \quad (16.24)$$

$$S - 4 \cdot V = 0. \quad (16.25)$$

Для определения оптимальных параметров уравнения (16.21)-(16.25) решаем совместно.

### 16.4.3. Оптимизация режимов резания

В качестве целевой функции выбираем основное время ( $t_0$ ):

$$t_0 = \frac{L_{p-x} \cdot t_{-p}}{S_z \cdot Z \cdot n \cdot t}, \quad (16.26)$$

где  $L_{p-x}$  - длина рабочего хода  $L_{p-x} = L_p + L_{ep} + L_{nep}$ ;

здесь  $L_{p-x}$ ,  $L_{ep}$ ,  $L_{nep}$  - длины соответственно резания, врезания и перебега;

$t_{cp}$  - толщина срезаемого слоя;

$S_z$  - подача на зуб инструмента;

$Z$  - число зубьев инструмента или число одновременно режущих однозубых инструментов;

$n$  - число циклов главного движения в минуту (для точения - это частота вращения; для строгания и долбления - это частота двойных ходов в минуту);

$t$  - глубина резания

В качестве параметров режима резания выбираем  $S_z$  и  $n$ .

Для учёта влияния оборудования, условий обработки на выбранные параметры введём ограничения [4]:

- на режущие возможности инструмента

$$nS^{y_v} \leq \frac{318 C_v k_v D^{Z_v-1}}{T^m t^{X_v} Z^{C_v} e^{r_v}}, \quad (16.27)$$

где  $C_v$  - коэффициент, учитывающий условия обработки;

$k_v$  - коэффициент, учитывающий изменение нормативных условий обработки;

$D$  - диаметр обрабатываемой детали (или инструмента), мм;

$z_v, x_v, y_v, u_v, r_v$  - показатели степеней при переменных в формуле скорости резания;

$T$  - принятая стойкость инструмента, мин;

$m$  - показатель относительной стойкости;

$B$  - ширина фрезерования (или шлифования), мм.

Формула (16.27) получается путём подстановки в формулу скорости резания для заданного процесса [2] из зависимости между элементами кинематики процесса резания.

Так, например, для процессов резания с главным вращательным движением заготовки или инструмента

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi D n}{1000},$$

а для процессов с главным возвратно-поступательным движением (строгание, долбление и т.п.)

$$\mathfrak{S} = \frac{2Ln}{1000},$$

где  $n$  - частота двойных ходов инструмента в минуту;

$L$  - длина хода ползуна, мм ( $L = \ell + Y$ ;  $\ell$  - длина обрабатываемой поверхности, мм;

$y$  - величина перебега в обе стороны в направлении главного движения.

Мощностью электродвигателя привода главного движения станка

$$n^{nz} S_z^y \leq \frac{N_{эл.дв} \eta k_{cz}}{C_z t^{Xz} D^{Zz} \pi^{nz} Z^{Iz} e^{кя} e_k^{qz} k_z}, \quad (16.28)$$

где  $C_z$  - постоянный коэффициент, характеризующий условия обработки;

$B_k$  - ширина шлифовального круга, мм;

$k_z$  - коэффициент, учитывающий изменённые условия обработки против нормативных;

$k_{cz}$  - коэффициент, учитывающий специфику отдельных видов обработки

Частные формулы для конкретных видов обработки можно получить и используя данные справочника [8].

Например, для точения известны зависимости

$$N_{эл.дв} = \frac{m_z \cdot v}{1020 \cdot 60}; \quad \mathfrak{S} = \frac{\pi D n}{1000};$$

$$P_z = 10 C_p \cdot t^{Xp} \cdot S^{Vp} \cdot U^{np} \cdot K_p;$$

$$N_{рез} = N_{эл.д} \cdot \eta.$$

В результате преобразований получим



$$n^{(1+n_p)} S_{Yp} \leq \frac{1,949045 \cdot 10^6 \cdot 1000^{n_p} N_{эл.дв} \cdot \eta}{C_p t^{Xp} \pi^{n_p} D^{(1+n_p)} K_p};$$

- заданной производительностью станка

$$ns \geq \frac{L_{P.X} R}{60 K_3 i_{o.д} - T_{в.н} R},$$

где  $L_{PX}$  - длина рабочего хода в направлении подачи, мм;

$R$  - заданная производительность станка, шт/ч;

$K_3$  - коэффициент загрузки станка;

$i_{o.д}$  - число деталей, обрабатываемых одновременно на одной позиции.

- допустимым скоростным диапазоном станка или процесса резания

$$\begin{aligned} n &\geq n_{\min} \\ n &\leq n_{\max} \\ n &\leq \frac{318 \vartheta_{техн}}{D}, \end{aligned}$$

где  $\vartheta_{техн}$  - наибольшая, установленная экспериментально, скорость резания. Так, например, известно, что развертывание чаще всего производится при скоростях 8-10 м/мин, а протягивание - 4-12 м/мин.

- наибольшей допустимой подачей.

Максимальная допустимая подача может ограничиваться одним из следующих факторов:

- 1) прочностью и жесткостью инструмента;
- 2) прочностью механизма подачи;
- 3) заданной шероховатостью или точностью формы обработанной поверхности.

Так, например, для точения

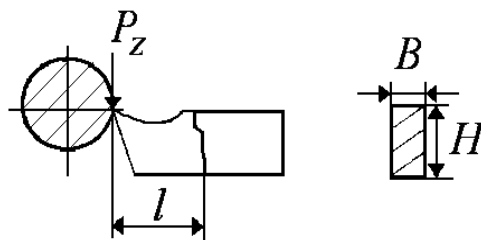


Рис. 16.7. Расчетная схема

Условие обеспечения прочности державки резца в произвольном сечении.

$$P_z \cdot l \leq [\sigma]W, \quad P_z = 10C_p t^{Xp} S^{Yp} v^{n_p} Kp$$

$$v = \frac{\pi DH}{1000}; \quad W = \frac{BH^2}{6}$$

Условие обеспечения допустимого прогиба резца.

$$f = \frac{P_z \ell^3}{3EJ} \leq [f]$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad J = \frac{BH^3}{12}$$

[f] - допустимый прогиб резца (для чернового точения можно принять 0,1 мм, а при чистовом точении 0,05 мм).

Условие обеспечения допустимой шероховатостью.

$$S \leq R_z \frac{tq \varphi + tq \varphi_1}{tq \varphi \cdot tq \varphi_1}$$

(для резца с радиусом скругления вершины равным нулю).

$$S \leq \sqrt{8rR_z} \quad (\text{для резца с радиусом } r \text{ при вершине}),$$

где  $R_z$  - высота допустимых неровностей, мм;

Условие обеспечения допустимых отклонений формы и размеров детали

$$P = \sqrt{P_z^2 + P_y^2};$$

$$P = K' \frac{EJ}{\ell^3} [f],$$

где  $E, J$  - модуль упругости и момент инерции поперечного сечения заготовки.

$E = 2 \dots 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $J \cong 0,05d^4$  ( $d$  - диаметр обработанной поверхности).

$[f] = 1/6 \delta$ , здесь  $\delta$  - допуск на размер обрабатываемой поверхности.

$K'$  - коэффициент, отражающий условия закрепления детали на станке.

$K' = 3$  (закрепление консольное в патроне станка);

$K' = 48$  (закрепление в патроне с поддержкой второго конца заготовки центром).

$K' = 116$  (закрепление в центрах с использованием поводкового патрона).

Условие обеспечения прочности механизма подачи станка

$$S^{Y_x} \leq \frac{P_{дон.см.}}{C_x K_x t^{X_x} D^{Z_x} HB^{n_x} Z^{n_x} B^{r_x}}, \quad (16.29)$$

где  $P_{дон.см.}$  - условие подачи, допускаемое прочностью механизма подачи станка;

$C_x$  - коэффициент, учитывающий свойства обрабатываемого материала;

$K_x$  - коэффициент, учитывающий условия процесса резания;

$HB$  - твердость материала заготовки по Бринеллю.

- допустимым диаметром подачи станка

$$S \geq S_{см. min};$$

$$S \leq S_{см. max};$$

где  $S_{см. min}$  и  $S_{см. max}$  - минимальное и максимальное значения подачи для выбранного станка.

Линеаризацию всех неравенств выполняем путем их логарифмирования. Так как целевая функция должна быть минимизирована, что возможно при максимальном значении знаменателя выражения (16.26).

Обозначим

$$f' = S_z \cdot z \cdot n = S_0 \cdot n$$

$$\text{тогда } \lg f' = \lg S_0 + \lg n$$

Введя обозначения  $\lg f' \equiv F; \lg S_0 \equiv X_1; \lg n \equiv X_2$ . получим первое ограничение в виде

$$Y_v X_1 + X_2 \leq e_1,$$

где  $e_1 = \lg \left( \frac{318 C_V K_V D^{Z_V - 1}}{T^m t^{X_V} Z^{n_V} B^{r_V}} \right)$ , для функции оптимизации

$$F = X_1 + X_2 \rightarrow \max.$$

Преобразовав аналогичным образом остальные неравенства технических ограничений, получим систему линейных неравенств, которые в совокупности представляют собой математическую модель процесса резания. Определить наиболее оптимальные параметры  $S_0$  и

$n$  необходимо графическим и аналитическим (симплекс метод) методами.

#### **16.4.4. Метод градиентного спуска**

Для его реализации должна быть известна функция  $F = f(x_1, x_2)$ , она может описываться полиномом любой степени.

Имеет любое количество параметров:

- 1) Оптимизация начинается с любой точки;
- 2) Вычисляется градиент функции :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, g = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2}$$

Градиент определяет направление вектора нормали поверхности оптимизации выбранной точки.

Если функция имеет разрывы или изломы, то этот метод сложно реализовать, также, если параметры оптимизации имеют численные ограничения.

Шаг оптимизации производится в направлении обратном градиенту ( $\Delta_1$ ). Численное значение выбирают таким, чтобы можно было определить разность значений функции. Он обеспечивает новые координаты и в новой точке функции оптимизации снова рассчитывается градиент и в направлении обратном этому, градиентом задается шаг оптимизации  $\Delta_2$ .

И так пока не дойдем до минимума.

### **16.5. Методы решения задач оптимального проектирования**

В зависимости от вида математической модели при решении задач оптимального проектирования можно использовать следующие методы: исследование функций классического анализа; метод множителей Лагранжа; вариационное исчисление; принцип максимума Понтрягина; динамическое программирование; линейное программирование; нелинейное программирование; методы случайного поиска.

Методы исследования функций классического анализа представляют собой известные методы дифференциального исчисления.

Экстремум целевой функции  $Q(x)$  находят из необходимого условия его существования, состоящего в том, что производная в точке экстремума равна нулю. Тогда оптимальное решение  $x^*$  можно найти из системы

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0; i = 1, 2, \dots, n. \quad (16.30)$$

Для того, чтобы определить, является ли  $x^*$  точкой максимума или минимума, используют достаточные условия существования экстремума, согласно которым: если производная в точке экстремума меняет знак с плюса на минус, то  $Q(x^*)$  есть максимум целевой функции; если производная в точке экстремума меняет знак с минуса на плюс, то  $Q(x^*)$  есть минимум целевой функции; если знак производной в точке  $x^*$  не меняется, то в этой точке нет экстремума.

Если уравнения (16.30) нелинейные, то решить их систему аналитическим путем удается крайне редко. В этих случаях используют ЭВМ и соответствующие численные методы или методы нелинейного программирования. В последнем случае задачу решения системы (16.30) сводят к задаче минимизации функции:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\partial Q / \partial x_i)^2.$$

Рассматриваемые методы исследования функций классического анализа можно использовать для решения относительно несложных задач оптимизации без ограничений.

### **16.5.1. Методы вариационного исчисления.**

Методы вариационного исчисления предназначены для определения экстремалей – функции, реализующих экстремум функционала, который представляет собой некоторый интеграл.

Формальное представление о задачах вариационного исчисления можно получить, рассматривая интеграл

$$I = \int_x^{x_2} F[x, y(x), y_x(x)] dx, \quad (16.31)$$

где подынтегральная функция зависит от  $x$  явно и неявно, так как включает функцию  $y(x)$  и ее первую производную  $y_x(x)$ . Задача состоит в определении такой функции  $y(x)$ , для которой интеграл (16.31) имел бы минимальное (или максимальное) значение.

Основой метода вариационного исчисления является анализ вариаций функционалов (под вариацией функционала понимают его бесконечно малое изменение при данном значении  $y(x)$ ). При этом необходимые условия минимальности функционалов находят из равенства нулю его первой вариации, а достаточные условия - из анализа второй вариации.

Рассмотрим в качестве примера задачу нахождения уравнения линии минимальной длины, соединяющей две точки [6]. Длина линии

$$I = \int_x^{x_2} (1 + y_x^2(x))^{0,5} dx$$

Необходимое условие экстремума для этого функционала:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y_x} = 0$$

где  $F = (1 + y_x^2(x))^{0,5}$ .

Указанное условие называется уравнением Эйлера-Лагранжа. Применяв его, получим

$$(\partial/\partial x) \left[ y_x (1 + y_x^2)^{-0,5} \right] = 0$$

откуда

$$y_x (1 + y_x^2)^{-0,5} = const$$

что означает  $y(x) = const$ . Таким образом, кратчайшей линией, соединяющей две точки, является прямая. Этот вывод подтверждает анализ второй вариации функционала.

### **16.5.2. Принцип максимума Понтрягина.**

Принцип максимума Понтрягина - это необходимое условие оптимальности процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений

$$\partial x_i(t)/\partial t = f_i[x(t), u(t)]; i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $x(t)$  – вектор переменных состояния или фазовых координат,  $u(t)$  - вектор управлений.

С применением принципа максимума решают задачи определения оптимальных управлений, переводящих систему из начального состояния  $x(t_0)$  в конечное  $x(t_1)$  и минимизирующих

$$I = \int_{t_2}^{t_1} f_0[x(t), u(t), t] dt$$

при граничных условиях  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) \in S$  (где  $S$  – целевое множество) и ограничениях на управления  $u(t) \in U$  для всех  $t$ , где  $U$  содержит допустимые управления.

Для решения задачи вводят вектор сопряженных переменных  $\lambda(t)$  и функцию Гамильтона

$$H[x(t), \lambda(t), u(t), t] = f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(x, u, t). \quad (16.32)$$

Согласно принципу максимума, если  $u^*(t)$  – оптимальное управление, а  $x^*(t)$  – оптимальная траектория, то существующий вектор сопряженных переменных  $\lambda^*(t)$ , такой, что на оптимальной траектории

$$dx_i^*(t)/dt = \partial H / \partial \lambda_i^*(t); \quad d\lambda_i^*(t)/dt = -\partial H / \partial x_i^*(t).$$

При этом для  $u \in U$

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \max H(x, u, \lambda, t).$$

Кроме того, в конечной точке траектории должно выполняться условие трансверсальности вектора сопряженных переменных  $\lambda^*(t_1)$  по отношению к множеству  $S$  при  $x^*(t_1)$ , т.е.  $\lambda^*(t_1)$  должен быть ортогонален плоскости, касательной к  $S$  в точке  $x^*(t_1)$ .

Следует отметить, что применение принципа максимума возможно не только для задач управления, но и для оптимального проектирования.

**Пример.** Оптимальное проектирование вала.

При проектировании вала весьма важна задача обеспечения его минимальной массы. Решение этой задачи позволяет уменьшить силы, вызывающие вибрацию, использовать более лёгкие и меньших размеров опоры, подшипники, демпферы, муфты и прочее оборудование.

При оптимальном проектировании вала по критерию массы минимизируют функционал

$$I = \int_0^{\ell} \rho(x) F(x) dx, \quad (16.33)$$

где  $\rho(x)$  - плотность материала вала;  $F(x)$  - площадь поперечного сечения;  $x$  - координата вдоль изогнутой оси вала;  $t$  - длина вала.

Ограничениями на параметры вала могут служить граничные условия и ограничения на некоторые размеры. Необходимо также удовлетворить дифференциальному уравнению поперечного колебания вала относительно комплексной переменной

$$\rho F \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} \right) = 0,$$

где  $W^*$  - комплексное смещение;

$t$  - время;

$I$  - момент инерции поперечного сечения вала;

$E$  - модуль Юнга.

Приняв  $W^* = W(x)e^{i\omega t}$ , получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right] = \rho \omega^2 F W, \quad (16.34)$$

где  $\omega$  - критическая скорость.

Приняв

$$dW/dx = \varphi, \quad d\varphi/dx = M/(EI_0), \quad dM/dx = -u, \quad (16.35)$$

уравнение (16.34) можно записать в виде

$$du/dx = -\omega^2 \rho F W. \quad (16.36)$$

Для решения описанной выше задачи оптимального проектирования вала по критерию минимума массы применяют принцип максимума. При этом оптимальные параметры вала получают минимизацией функции Гамильтона (16.32)

$$H = \rho F + \lambda_w \varphi + \lambda_M M/(EI) - \lambda_M u - \lambda_u \omega^2 \rho F W.$$

Переменные  $\lambda$  определяют из уравнений;

$$d\lambda_w/dx = -\partial H/\partial W; \quad d\lambda_M/dx = -\partial H/\partial M; \quad d\lambda_\varphi/dx = -\partial H/\partial \varphi, \quad d\lambda_u/dx = -\partial H/\partial u.$$

Площадь поперечного сечения  $F$  находят из выражения  $\partial H/\partial F = 0$ .



Рассмотрим сплошной вал с постоянной плотностью и одинаковой температурой во всех точках. Примем безразмерные параметры:

$\bar{I} = I / I_0$ ;  $\bar{M} = M \ell / (I_0 E)$ ;  $\bar{\omega} = \omega \ell^2 (F_0 \rho / I_0 E)^{0,5}$ ;  $\bar{X} = x / \ell$ ;  $\bar{F} = F / F_0$ ;  $\bar{W} = W / \ell$ ;  $\bar{u} = \bar{u} \ell^2 / (E I_0)$ ; здесь  $F_0$  и  $I_0$  - минимальная площадь и минимальный момент инерции сечения вала.

Тогда (16.33), (16.35) и (16.36) можно записать в виде

$$I = \int_0^1 \bar{F} d\bar{x}; \quad (16.37)$$

$$\bar{W}' = \varphi; \quad \bar{M}' = -\bar{u}; \quad \varphi' = \bar{M}; \quad \bar{u}' = -\bar{\omega}^2 \bar{F} \bar{W}. \quad (16.38)$$

Граничные условия записывают в зависимости от способа заделки вала.

С учётом (16.37) и (16.38) функцию Гамильтона можно записать так:

$$H = A + \lambda_{\bar{w}} \varphi + \lambda_{\varphi} \bar{M} - \lambda_{\bar{M}} \bar{u} - \lambda_{\bar{u}} - \bar{\omega}^2 \bar{F} \bar{W}; \quad (16.39)$$

причём площадь сечения вала находят из условия  $\partial H / \partial A = 0$ .

Тогда

$$A^3 = 2 \lambda_{\varphi} \bar{M} / (1 - \bar{\omega}^2 \lambda_{\bar{u}} - \bar{W}), \quad (16.40)$$

причём  $A \geq 1$ .

Для того чтобы определённое таким образом  $F$  минимизировало объём  $I$ , необходимо, чтобы  $\lambda(\lambda_{\bar{w}}; \lambda_{\varphi}; \lambda_{\bar{M}}; \lambda_{\bar{u}})$  было отличной от нуля непрерывной векторной функцией, соответствующей  $F$ ; при этом

$$\begin{aligned} \lambda'_{\bar{w}} &= -\partial H / \partial \bar{W}; & \lambda'_{\bar{M}} &= -\partial H / \partial \bar{M}; \\ \lambda'_{\varphi} &= -\partial H / \partial \varphi; & \lambda'_{\bar{u}} &= -\partial H / \partial \bar{u}. \end{aligned} \quad (16.41)$$

Из (16.39) получают:

$$\lambda'_{\bar{w}} = \bar{\omega}^2 \bar{F} \lambda_{\bar{u}}; \quad \lambda'_{\bar{M}} = -\lambda_{\varphi}; \quad \lambda'_{\varphi} = -\lambda_{\bar{W}}; \quad \lambda'_{\bar{u}} = \lambda_{\bar{M}}. \quad (16.42)$$

Для сопряжённых переменных граничные условия можно получить из условия трансверсальности, в соответствии с которым

$$\left[ \lambda_{\bar{W}} \delta \bar{W} + \lambda_{\varphi} \delta \varphi + \lambda_{\bar{M}} \delta \bar{M} + \lambda_{\bar{u}} \delta \bar{u} \right]_{\bar{W}=0}^{\bar{W}=1} = 0.$$

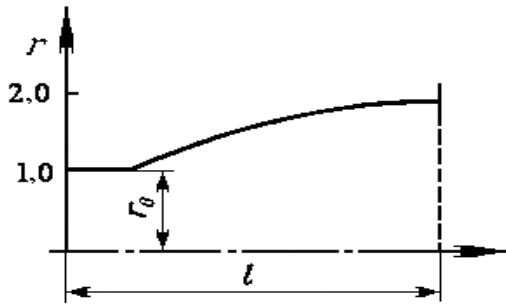


Рис. 16.8. Оптимальный профиль свободно опертого вала ( $r_0$  - радиус вала в точке опоры)

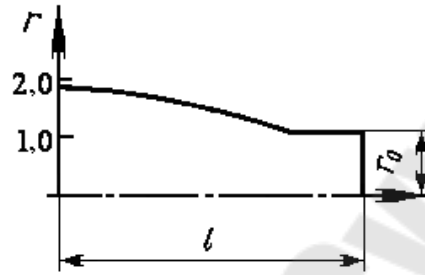


Рис. 16.9. Оптимальный профиль консольного вала для первой критической скорости

Уравнения (16.40) – (16.42) описывают нелинейную многоточечную краевую задачу на собственные значения. Для решения сформулированной, конкретной задачи применён один из вариантов метода пристрелки.

Для свободного опертого вала без диска граничные условия записывают в виде

$$W(0) = W(1) = 0; \lambda_\varphi(0) = \lambda_\varphi(1) = 0; M(0) = M(1) = 0; \lambda_u(0) = \lambda_u(1) = 0.$$

На рис. 16.8, 16.9 и 16.10 показаны оптимальные профили соответственно свободно опертого вала и консольных валов для первой и второй критической скорости.

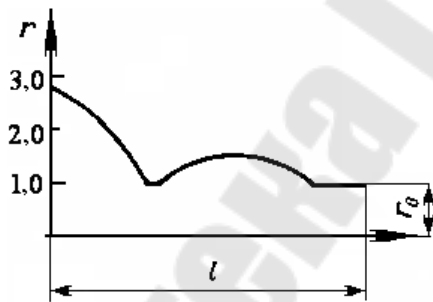


Рис. 16.10. Оптимальный профиль консольного вала для второй критической скорости

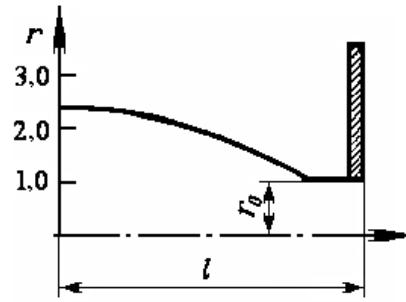


Рис. 16.11. Оптимальный профиль консольного вала с диском на конце для первой критической скорости

Для консольного вала без диска на конце из условия трансверсальности следует:  $\lambda_u(0) = 0; \lambda_s(1) = 0; \lambda_M(0) = 0; \lambda_\varphi(1) = 0$ .

Процесс усложняется при рассмотрении консольного вала с диском на конце, так как между переменными состояниями при  $W = 1$

существует связь. Например, при  $W = 1$  усилие среза  $u$  и смещение  $W$  связаны зависимостью

$$u = M_D \omega^2 W / (\rho F_0 \ell) \quad (16.43)$$

а изгибающий момент и угол наклона кривой изгиба – соотношением

$$M = -I_D \omega^2 \varphi / (\rho F_0 \ell^3) \quad (16.44)$$

Уравнение (16.43) выражает центробежную силу, создаваемую диском, а уравнение (16.44) – гироскопический момент. Согласно условию трансверсальности при  $W = 1$

$$\lambda_s = M_D I_2 \lambda_u / (\rho F_0 \ell) \quad \text{и} \quad \lambda_\varphi = I_D \omega^2 \lambda_M / (\rho F_0 \ell^3).$$

Оптимальный профиль консольного вала с диском на конце для первой критической скорости показан на рис. 16.11. Масса диска  $3,2W_0$ , момент инерции относительно диаметра  $0,01W_0 \ell^2$ . Граничные условия:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0; & M(1) &= -\frac{I_D \omega^2}{\rho F_0 \ell^3} \varphi(1), \\ \varphi(0) &= 0; & u(1) &= -\frac{M_D \omega^2}{\rho F_0 \ell} W(1), \\ \lambda_M(0) &= 0; & \lambda_s(1) &= \frac{M_D \omega^2}{\rho F_0 \ell} \lambda_u(1), \\ \lambda_u(0) &= 0; & \lambda_\varphi(1) &= \frac{I_D \omega^2}{\rho F_0 \ell^3} \lambda_M(1). \end{aligned}$$

Если диск расположен в центре на свободно опертом валу, то происходит разрыв усилия среза в сечении диска. Рассмотрим диск, установленный посередине, пролета и не создающий гироскопического эффекта. Изменение усилия среза по толщине диска при  $W = 0,5$

$$\Delta u = M_D \omega^2 W / (\rho F_0 \ell).$$

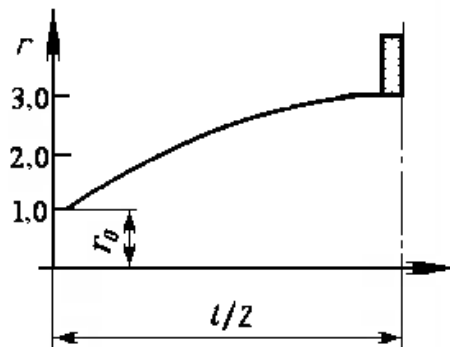


Рис. 16.12. Оптимальный профиль свободно опертого вала с диском массой  $25W_0$

Разрыв переменной состояния приводит к своего рода точечному условию transversальности, которое также, возможно, имеет разрыв.

Свободно опертый вал с диском массой  $25W_0$  в центре показан на рис.16.12 для первой критической скорости. Граничные условия те же, что и для свободно опертого вала, но имеются некоторые условия, вызванные разрывом усилия среза.

### 16.5.3. Метод динамического программирования

Метод динамического программирования является одним из важных методов оптимизации многостадийных процессов и многоступенчатых систем.

Под стадией процесса понимают единичный элемент его разбиения во времени или в пространстве, характеризуемый определенной совокупностью определяющих состояние процесса параметров. Например, в качестве стадий технологического процесса изготовления детали можно рассматривать технологические операции.

Под ступенью системы понимают единичный элемент его разбиения на составные части, каждая из которых также характеризуется определенной совокупностью параметров. В качестве ступеней системы можно рассматривать, например, отдельные узлы или агрегаты оборудования.

Критерии оптимальности многостадийных и многоступенчатых систем обычно представляют в виде аддитивной или мультипликативной функций критериев для отдельных стадий и ступеней. В первом случае значение общего критерия оптимальности равно сумме значений критериев отдельных стадий и ступеней, во втором случае - их произведению. Аддитивными являются, например, критерии, определяющие стоимость процесса, др. Мультипликативным критерием может быть общий КПД машины, равный произведению КПД отдельных последовательно соединенных агрегатов.

Метод динамического программирования основан на принципе оптимальности Беллмана, который формулируют следующим образом: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальные решения, последующие решения следует принимать, исходя из оптимальной стратегии с учетом состояния, вытекающего из первого решения.

Математическую формулировку принципа оптимальности для дискретных процессов можно выразить в виде уравнения

$$f_N(x_1) = \max_{u_1 \in U} [Q_1(x_1, u_1) + f_{N-1}(x_2)]$$

или

$$f_N(x_1) = \max_{u_1 \in U} \{ Q_1(x_1, u_1) + f_{N-1}[\varphi_1(x_1, u_1)] \} \quad (16.45)$$

где  $f_N(x_1)$  - максимальное значение критерия оптимальности для  $N$  стадий процесса;

$x_1$  и  $x_2$  - вектор параметров состояния соответственно на первой и второй стадии;

$u_1$  - вектор управлений на первой стадии;

$U$  - множество допустимых управлений;

$Q_1(x_1, u_1)$  - значение критерия оптимальности для первой стадии;

$f_{N-1}(x_2)$  - максимальное значение критерия оптимальности для  $N-1$  стадий процесса от последней стадии;

$\varphi_1$  - некоторая функция, выражающая зависимость  $x_2$  от  $x_1$  и  $u_1$ .

Уравнение (16.45) представляет собой рекуррентное соотношение, определяющее связь между  $N$ -й и  $N-1$ -й стадиями процесса, считая от последней. Оно позволяет, зная оптимальные

управления для  $N-1$  стадии процесса, считая от последней стадии, и зависимость  $f_{N-1}(x_2)$ , определить оптимальное управление  $u_{1opt}$ .

Сущность метода динамического программирования заключается в том, что решение исходной задачи  $N$ -стадийного процесса сводится к решению последовательности задач: двухстадийной, трехстадийной и т. д. вплоть до  $N$ -стадийной. При этом определение оптимальных уравнений начинают с последней стадии. Задачи указанной последовательности решают с использованием рекуррентного уравнения (16.45). Следует отметить, что существует множество задач, которые можно решить методом динамического программирования; причем, используя этот метод, можно довольно просто решить ряд задач, решение которых другими методами невозможно или чрезвычайно сложно. Так, задачи вариационного исчисления с ограничениями типа неравенств решить методом динамического программирования намного проще, чем классическим методом.

По сравнению с комбинаторными методами динамическое программирование имеет значительные преимущества. Так, для  $N$ -стадийного процесса с числом  $n$  возможных состояний на каждой стадии общее число переборов составляет  $n^N$ , а метод динамического программирования потребует просмотра  $Nn$  вариантов.

Существенный недостаток метода динамического программирования - сложность его применения для задач большой размерности даже при использовании современных электронно-вычислительных машин, так как необходимы значительные объемы используемой памяти и быстродействие. Кроме того, нет универсального алгоритма для решения всех задач, формулируемых в терминах динамического программирования. Это обстоятельство исключает возможность создания универсального программного комплекса для реализации метода на ЭВМ.

#### ***16.5.4. Линейное программирование***

Линейное программирование - это математический аппарат решения задач оптимизации, в которых целевая функция и ограничения линейны.

Задачу линейного программирования в общем виде можно сформулировать следующим образом - найти минимальное (максимальное) значение целевой функции

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

при ограничениях

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m_1;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = b_k, k = 1, 2, \dots, \bar{m}_2;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} x_j \geq b_l, l = 1, 2, \dots, m_3;$$

здесь  $C_j, a_{ij}, a_{kj}, a_{lj}, b_i, b_k, b_l$  - заданные действительные числа;  $x_j$  - оптимизируемые параметры.

Основным методом решения задач линейного программирования является симплекс-метод, позволяющий за конечное число итераций найти оптимальное решение.

**Пример:** Необходимо найти оптимальные параметры обеспечивающие минимум функции  $f = 3 \cdot x_2 - x_1$  при ограничениях

$$x_3 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \leq 100$$

$$x_4 + 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \leq 50$$

где  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  базовые параметры;

Вводим фиктивные параметры, позволяющие ограничения представить в виде равенств, а функция оптимизации примет вид:

$$f = 3 \cdot x_2 - x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4,$$

где  $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  фиктивные параметры.

Тогда  $x_3 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 - 100 = 0; x_4 + 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 50 = 0$

Решение производим по этапам.

1. Приравняем к нулю базовые параметры:  $x_1^1 = 0, x_2^1 = 0$  и находим решение:  $f^1 = 0$ .

2. Приравняем к нулю фиктивные параметры:  $x_3^2 = 0, x_4^2 = 0$  и найдем  $x_1, x_2$ .

$$4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 = 100$$

$$2 \cdot x_1 = 100 + 4 \cdot x_2 + x_3$$

$$x_1 = \frac{(-100 + 4 \cdot x_2)}{2}$$

$$x_2 = 35,7$$

$$x_1 = \frac{(-100 + 4 \cdot 35,7)}{2} = 21,4$$

Тогда численное значение функции  $f^2 = -3 \cdot 35,7 + 21,4 = -85,7$   
 Численное значение функции убывает по сравнению с  $f^1 = 0$

3. Приравняем к нулю один базовый и один фиктивный параметры  $x_1^3 = 0, x_3^3 = 0$  и находим оставшиеся

$$4 \cdot x_2 = 100 \qquad -3 \cdot 25 + x_4 = 50$$

$$x_2 = \frac{100}{4} = 25 \qquad x_4 = 125$$

Тогда численное значение функции  $f^3 = -3 \cdot 25 = -75$ , т.е. численное значение функции, убывает по сравнению с  $f^2$ .

4. Приравняем к нулю еще один базовый и один фиктивный параметры  $x_2^4 = 0, x_4^4 = 0$  и находим оставшиеся

$$-2 \cdot x_1 + x_3 = 100 \qquad 5 \cdot x_1 = 50$$

$$x_3 = 100 + 2 \cdot x_1 \qquad x_1 = 10$$

$$x_3 = 100 + 20 = 120$$

Тогда численное значение функции  $f^4 = 10$ , т.е. численное значение функции, начинает возрастать равнению с  $f^3$ . Это значит, что параметры  $x_1^3, x_2^3$  являются оптимальными.

### **16.5.5. Нелинейное программирование.**

Формально задачу нелинейного программирования (НЛП) формулируют следующим образом – найти минимальное (максимальное) значение целевой функции  $Q(x), x \in R^n$  при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m_1;$$

$$g_k(x) = 0, k = 1, 2, \dots, m_2;$$

$$g_l(x) \geq 0, l = 1, 2, \dots, m_3.$$

Здесь целевая функция и ограничения в общем случае являются нелинейными функциями.



Подавляющая часть реальных задач оптимизации (в том числе задач оптимального проектирования) относится к нелинейному программированию. В отличие от линейного программирования для задачи НЛП нет универсальных методов решения, что объясняется многообразием математических моделей задач оптимизации, относящихся к НЛП, и их сложностью. Вместе с тем для определенных классов моделей, представляющих собой частные случаи НЛП, существуют общие подходы и эффективные алгоритмы решения входящих в эти классы задач.

Совокупность методов НЛП, в зависимости от ограничений в математических моделях оптимизации, делится на две группы: методы безусловной оптимизации и методы условной оптимизации. Первые используют для решения задач без ограничений на оптимизируемые параметры, вторые - для задач с ограничениями. Следует отметить, что методы безусловной оптимизации (см. описание методов штрафных функций) можно использовать и при решении задач с ограничениями, предварительно приведенных к задачам без ограничений.

Методы безусловной оптимизации, в свою очередь, делятся на методы, использующие производные, и методы, не использующие производных (методы поиска). К первым относятся методы: градиентные, Ньютона, сопряженных направлений, переменной метрики (квазиньютоновские методы). Градиентные методы основаны на анализе первой производной функции и реализации движения к оптимуму либо в направлении (при максимизации функции цели) вектора градиента, совпадающего с направлением наискорейшего возрастания целевой функции, либо в обратном направлении (при минимизации функции цели). Компонентами вектора градиента  $\nabla Q(x)$  являются частные производные целевой функции по всем переменным

$$\nabla Q(x) = \begin{bmatrix} \partial Q(x)/\partial x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial Q(x)/\partial x_n \end{bmatrix}.$$

Движение в процессе поиска экстремума целевой функции, реализуемое не только градиентными методами, но и подавляющей

частью других методов НЛП, состоит в многошаговом изменении вектора переменных  $x$ . Каждый шаг или этап поиска заключается в изменении текущего положения  $x$  на величину шага, а также в анализе изменения значения функции цели в новой точке и выработке решения относительно последующих действий (т. е. либо движение в том же направлении, либо изменение направления движения).

Так, на  $k$ -м этапе переход из положения  $x^{(k)}$  в положение  $x^{(k+1)}$  описывается выражением

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

где  $\Delta x^{(k)}$  - величина шага на  $k$ -м этапе.

Стратегия определения  $\Delta x^{(k)}$  является фактором, по которому различают многие методы НЛП.

Одним из классических и наиболее распространенных градиентных методов является метод **наискорейшего спуска**, согласно которому переход из положения  $x^{(k)}$  в положение  $x^{(k+1)}$  соответствует формуле

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \lambda^{(k)} \frac{\partial Q / \partial x_i^{(k)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\partial Q / \partial x_i^{(k)})^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Где  $\lambda^{(k)}$  определяют решением одномерной задачи минимизации функции  $Q(x^{(k+1)})$  относительно  $\lambda^k$ . При этом можно использовать такие метод одномерной оптимизации: золотого сечения, дихотомии, Кифера, Девиса, Свинна, Кэмпби, Пауэлла [6].

Следует отметить, что метод наискорейшего спуска не обеспечивает хорошую сходимость процесса поиска для функций цели овражного характера. В этих случаях его комбинируют с другими методами.

В отличие от градиентных методов, метод Ньютона основан на использовании вторых частных производных целевой функции  $Q(x)$  по независимым переменным. Согласно методу Ньютона переход из положения  $x^{(k)}$  в положение  $x^{(k+1)}$  соответствует формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (H(x^{(k)}))^{-1} \nabla Q(x^{(k)}),$$

где  $H(x^{(k)})$  - матрица Гессе, представляющая собой матрицу вторых частных производных функций  $Q(x)$  в точке  $x^{(k)}$ .

$$H(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q(x^{(k)})}{\partial x_1^2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 Q(x^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q(x^{(k)})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 Q(x^{(k)})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

**Методы сопряженных направлений** основаны на таком выборе векторов направлений поиска, при котором они были бы сопряжены относительно матрицы Гессе. Два вектора направления  $S^{(i)}, S^{(j)}$ , как известно, являются сопряженными относительно положительно определенной матрицы  $M$ , если выполняется соотношение

$$(S^{(i)})^T M S^{(j)} = 0$$

Примером матрицы  $M$  может служить матрица Гессе  $H(x)$  целевой функции.

Методы сопряженных направлений широко распространены, так как обеспечивают хорошую сходимость процесса поиска и вместе с тем достаточно просты для реализации на ЭВМ.

Основная идея **метода штрафных функций** заключается в преобразовании исходной задачи нелинейного программирования к последовательности задач без ограничений [6], что позволяет использовать для их решения методы безусловной минимизации. При указанном преобразовании минимизируемую функцию конструируют таким образом, чтобы в процессе поиска либо препятствовать выходу из допустимой области изменения параметров, либо обеспечить быстрое возвращение в нее

Пусть исходная задача оптимального проектирования сформулирована следующим образом – найти

$$\min_{x \in D} Q(x) \quad (16.46)$$

где  $D = \{x / g_i(x) \geq 0; i = 1, 2, \dots, p\}$ .

Согласно методу штрафных функций эту задачу можно преобразовать в следующую задачу безусловной минимизации функции.

$$\min_{x \in R^n} F(x) = \min_{x \in R^n} \{Q(x) + R[x, r(g_1(x), \dots, g_p(x))]\}, \quad (16.47)$$

где  $R[x, r(g_1(x), \dots, g_p(x))]$  - функция штрафа (барьерная функция, функция нагружения и т.д.);  $r$  - коэффициент штрафа.

Поиск минимума (16.47) выполняют для последовательности значений  $r$  от  $r^0$  до  $r^N$ . При этом  $r^N$  должно быть таким, чтобы  $\min F(x)$  соответствовал  $\min Q(x)$ .

Известны следующие виды функций штрафа:

$$R_1(x, r) = -r \sum_{i=1}^p \ln g_i(x). \quad (16.48)$$

$$R_2(x, r) = r^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{g_i(x)}. \quad (16.49)$$

Анализ этих выражений показывает, что с приближением  $x$  к границе допустимой области  $D$  значения  $R_1$  и  $R_2$  стремятся к бесконечности, а поскольку при использовании методов безусловной минимизации шаги выполняют в сторону уменьшения целевой функции, то, следовательно, функции (16.48) и (16.49) ограничивают пространство  $R^n$  минимизации функции (16.47) областью  $D$ . Таким образом, как бы решается исходная задача (16.46), но с некоторой помехой, вносимой функцией штрафа. Именно для снижения уровня этой помехи задачу (16.47), как отмечено, решают для последовательности уменьшающихся на каждом этапе значений  $r$ .

## 17. ИНФОРМАЦИОННОЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР

### 17.1. Требования к математическим моделям

К математическим моделям предъявляется ряд требований, таких как универсальность, адекватность, точность, экономичность и др.

*Степень универсальности* математической модели оборудования характеризует полноту отображения в модели свойств оборудования.

**Пример.** Математическая модель резистора в виде уравнения закона Ома характеризует свойство резистора пропускать электрический ток, но не отражает габариты резистора, как детали, его цвет, механическую прочность, стоимость и т. п.

*Точность ММ* оценивается степенью совпадения значений параметров реального оборудования и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью оцениваемой ММ. Пусть отражаемые в ММ свойства оцениваются вектором выходных параметров  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , тогда, обозначив истинное и рассчитанное с помощью ММ значения  $j$ -го выходного параметра через  $y_{j\text{ист}}$  и  $y_{j\text{м}}$ , соответственно, определим относительную погрешность  $\varepsilon_j$  расчета параметра  $y_j$  как

$$\varepsilon_j = (y_{j\text{м}} - y_{j\text{ист}}) / y_{j\text{ист}}. \quad (17.1)$$

Получена векторная оценка  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ . При необходимости сведения этой оценки к скалярной используют какую-либо норму вектора  $\varepsilon$ , например

$$\varepsilon_M = |\varepsilon| = \max \varepsilon_j, \quad (17.2)$$
$$j \in [1: m].$$

*Адекватность ММ* (правильное соответствие) – способность отображать заданные свойства оборудования с погрешностью не выше заданной. Поскольку выходные параметры являются функциями векторов параметров внешних  $Q$  и внутренних  $X$ , погрешность  $\varepsilon_j$  зависит от значений  $Q$  и  $X$ . Обычно значения внутренних параметров ММ определяют из условия минимизации погрешности ее в некоторой точке  $Q_{\text{ном}}$  пространства внешних переменных, а используют модель с рассчитанным вектором  $X$  при различных значениях  $Q$ . При этом, как правило, адекватность модели

имеет место лишь в ограниченной области изменения внешних переменных – области адекватности (ОА) математической модели:

$$OA = \{Q \mid \varepsilon_M \leq \delta\},$$

где  $\delta > 0$  – заданная константа, равная предельно допустимой погрешности модели.

При оценке адекватности необходимо:

1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, о их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т. п.

2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится условие 2) или нет, говорят соответственно о *количественных* или *качественных* моделях. Вместо количественной адекватности говорят также о *точности модели*.

*Например*, для колебательной системы с медленным затуханием модель (17.3) адекватна по отношению к частоте колебаний и в определенной степени к характеру колебаний, так как на небольшом интервале времени затуханием колебаний можно пренебречь.

$$\frac{m\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0 \quad (17.3)$$

Однако если нас интересует скорость этого затухания (пусть малая, но все же существующая), то модель (17.3) неадекватна, а в качестве адекватной модели можно взять уравнение (17.4).

$$\frac{m\partial^2 x}{\partial t^2} + f \frac{\partial x}{\partial t} + kx = 0 \quad (17.4)$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу о распространении тепла в твердом теле, материал которого *однороден* (т. е. одинаков во всех точках) и *изотропен* (т.е. одинаков во всех направлениях). Стандартные рассуждения, основанные на законе Фурье, приводят к известному *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right), \quad (17.5)$$

в котором  $\theta$  - температура,  $t$  - время, а  $a$  - коэффициент теплопроводности, характеризующий свойства материала и

содержащийся в справочниках. Оно с хорошей точностью описывает реальную эволюцию температуры, т. е. является в этом смысле адекватным в количественном отношении. Кроме того, из него можно вывести следствия качественного характера, также правильно описывающие реальный процесс: сохранение количества тепла и выравнивание температуры при  $t \rightarrow \infty$  для теплоизолированного тела, невозможность температурных «всплесков» и т. д.

Покажем, например, как из уравнения (17.5) вытекает закон сохранения тепловой энергии для теплоизолированного тела ( $\Omega$ ) с поверхностью ( $S$ ). Так как количество теплоты  $Q = \int_{(\Omega)} cp\theta d\Omega$ , то

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = cp \int_{(\Omega)} \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega = cpa \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta d\Omega = cpa \int_{(S)} (\operatorname{grad} \theta)_n dS$$

(здесь мы сначала применяем правило Лейбница, а затем формулу Остроградского). Но для теплоизолированного тела имеем  $cpa(\operatorname{grad} \theta)_n = q_n = 0$  на ( $S$ ), поэтому  $\partial Q / \partial t = 0$ , т.е.  $Q = \text{const}$ .

Таким образом, относительно этих свойств процесса уравнение (17.5) адекватно и в качественном отношении. С другой стороны, известно, что из уравнения (17.5) вытекает физически абсурдный вывод о бесконечной скорости распространения тепла.

Значит, если в число целей исследования включить скорость распространения тепла (т. е. рассматривать эту скорость как существенную характеристику процесса), то уравнение (17.5) окажется неадекватным как в количественном, так и в качественном отношении и потребуется его видоизменить.

*Требование достаточной простоты.* Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочитать простым. В самом деле, усложняя модель, мы можем учесть большее число факторов, которые могут так или иначе повлиять на изучаемые свойства.

Так, в примере при рассмотрении частоты колебаний модель (17.4) имеет более высокую адекватность, чем (17.3), так как из уравнения (17.4) мы получаем значение частоты с учетом малого трения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{4mk}\right)^{1/2}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{f^2}{8mk}\right)}$$

(при переходе к приближенному равенству применена формула Тейлора).

В данном примере решение усложненного уравнения не вызвало затруднений. Но в иных, особенно в нестандартных, ситуациях чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению.

Таким образом, мы приходим к требованию *достаточной простоты модели* по отношению к исследуемой системе ее свойств.

Модель является достаточно простой, если имеющиеся в нашем распоряжении (в частности, вычислительные) средства исследования дают возможность провести в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный - в зависимости от постановки задачи - анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

Впрочем, нередки случаи, когда усложнение модели может ухудшить ее адекватность: так бывает, например, если при выписывании добавочных уравнений привлекаются параметры, известные с весьма низкой точностью, или если сами эти уравнения сомнительны. Поэтому часто бывает, что, выбрав модель, приходится ее упрощать, т. е. переходить к новой модели. При этом можно упрощать либо содержательную модель объекта, либо ее математическую модель. Опытный специалист обычно идет по первому пути, так как при этом остаются выполненными наиболее существенные физические соотношения и более ясны постулаты модели.

**Пример.** Пусть в (17.3) массой  $m_n$  пружины пренебрегать нельзя; как учесть это обстоятельство? Отметим, прежде всего, что если один конец однородной пружины массы  $m_n$  закреплен, а другой движется вдоль линии ее действия со скоростью  $v$ , то, приняв растяжение равномерным и обозначив  $l_n$  ее длину в ненагруженном состоянии, получаем выражение для кинематической энергии пружины:

$$T_n = \int_0^{l_n} \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l_n} v \right)^2 \left( \frac{m_n}{l_n} dx \right) = \frac{1}{6} m_n v^2.$$

Поэтому закону сохранения энергии в применении к рассматриваемой системе имеет вид

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{6} m_n \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const.$$

После дифференцирования и сокращения на  $\partial x / \partial t$  получаем



$$\left(m + \frac{1}{3}m_n\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = 0.$$

Сравнивая с уравнением (17.3) мы видим, что в приведенных предположениях можно считать массу пружины равной нулю – это, конечно, простит модель, - но к массе груза добавить  $m_n/3$ . Это поправочное слагаемое называется *присоединенной массой* пружины в рассматриваемой задаче.

Существенным является также свойство *полноты* математической модели, состоящее в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересующие нас утверждения. Так, если мы в качестве модели ограничиваемся уравнением (17.3), то для определения частоты колебаний эта модель является полной, а для определения амплитуды - неполной, так как для последнего нужны добавочные данные.

Еще одно важное требование к математической модели можно назвать ее *продуктивностью*. Оно связано с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры.

Отметим, далее, требование *роботности* (от английского слова *robust* «робаст» - крепкий) модели, т. е. ее устойчивости относительно погрешностей в исходных данных.

Всегда надо иметь в виду, что эти данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью и такая неопределенность не должна существенно влиять на результат исследования. Имеется ряд правил, способствующих этой устойчивости. Так, следует избегать вычитания близких друг к другу приближенных значений величины, потому что при таком вычитании относительная погрешность резко возрастает (Пусть, например, даны  $a = 275,1 \pm 0,1$  и  $b = 272,3 \pm 0,1$ ; тогда  $a - b = 2,8 \pm 0,2$ . Здесь  $a$  и  $b$  известны с точностью до 0,04 %, а  $a - b$  - до 7 %; точность ухудшилась в 200 раз!).

Выражения, содержащие такие разности, следует преобразовать. (Например, вычислив на микрокалькуляторе значение  $l = \sqrt{a^2 + \alpha} - a$ ) при  $a = 15721$ ,  $\alpha = 0,3$ , получим, считая значения  $a$  и  $\alpha$  точными,  $l = 9 \cdot 10^{-6}$ ; если же преобразовать эту формулу к виду  $l = \alpha / (\sqrt{a^2 + \alpha} + a)$ , то получим существенно более информативное значение  $l = 9,5413778 \cdot 10^{-6}$ ). Неустойчивость математической модели может получиться из-за включения в нее функций, быстро

изменяющихся на участке, где значения аргумента известно лишь с невысокой точностью, и т.д.

*Экономичность ММ* характеризуется затратами вычислительных ресурсов (затратами машинных времени  $T_M$  и памяти  $P_M$ ) на ее реализацию. Чем меньше  $T_M$  и  $P_M$ , тем модель экономичнее. Вместо значений  $T_M$  и  $P_M$  часто используют другие величины, например: среднее количество операций, выполняемых при одном обращении к модели, размерность системы уравнений, количество используемых в модели внутренних параметров и т. п.

## 17.2. Информационное и техническое обеспечение жизненного цикла технологического оборудования

Структура жизненного цикла ТО условно может быть показана в виде данной на рис.17.4 иерархической схемы.



Рис.17.1. Типовая структура жизненного цикла ТО

На Западе идея создания информационных систем, охватывающих весь жизненный цикл изделия, была сформулирована в департаменте обороны США в середине 1980-х гг. и получила название CALS-технологии.

Первоначально эта аббревиатура расшифровывалась как Computer-Aid Acquisition and Logistic Support (Компьютеризированная поддержка логистических систем). С 1993 г. программа стала называться Continues Acquisition and Lifecycle Support (Непрерывная поддержка поставок и жизненного цикла).

Первая часть термина означает постоянное повышение эффективности, развитие как самого изделия, так и процессов взаимодействия между поставщиком и его потребителем и выражает существо информационных, организационных и производственных процессов в течение жизненного цикла изделия, заключающихся в непрерывном обогащении информационного образа последнего на всех стадиях жизненного цикла.

Вторая часть термина обозначает цель CALS-технологий и путь такого развития: внедрение новых организационных методик разработки изделия (параллельное проектирование, организация междисциплинарных рабочих групп и пр.). Это приведет к увеличению инвестиций на этапах создания и модернизации изделия, но позволит более полно учесть потребности заказчика и условия эксплуатации. Последнее, в свою очередь, приведет к снижению затрат на этапах эксплуатации и обслуживания изделия и, в конечном итоге, к сокращению затрат на весь его жизненный цикл.

Некоторыми авторами замечено, что к концу XX века вообще изменился характер мировой экономики: она приобрела черты корпоративной геоэкономики и перешла к новому - информационному - способу производства.

Можно выделить две основные проблемы, стоящие на пути повышения эффективности управления информацией:

1) с увеличением сложности ТО и применением для их разработки современных компьютерных систем значительно увеличивается объем данных об ТО (при этом прежние методы работы с данными уже не позволяют обеспечивать их точность, целостность и актуальность при сохранении приемлемых временных и материальных затрат);

2) увеличение количества участников проекта по разработке ТО (особенно в случае виртуального предприятия) приводит к возникновению проблем при обмене информацией между участ-

никами из-за наличия коммуникационных барьеров (например, из-за несовместимости компьютерных систем).

Внедрение CALS-технологий - весьма сложная, многоплановая и комплексная проблема, в которой одно из ключевых мест принадлежит стандартизации, то есть созданию комплекса взаимосвязанных нормативных документов - стандартов и методических рекомендаций по их применению в различных прикладных областях промышленности. Этим достигается обеспечение единого информационного пространства на всех этапах жизненного цикла.

Основная концепция CALS-технологии - это создание единой непрерывно обновляемой на протяжении всего жизненного цикла, функционирующей в едином информационном пространстве виртуальной модели ТО или его частей, отражающей все свойства последнего, а также пополняемую сумму знаний о нем при его производстве, эксплуатации, возможном применении и последующей утилизации.

Путь реализации концепции CALS-технологии содержится в ее стратегии, предполагающей создание единого информационного пространства (ЕИП) для всех участников жизненного цикла ТО (в том числе, эксплуатирующих организаций). ЕИП должно обладать следующими свойствами:

- вся информация представляется в электронном виде;
- ЕИП охватывает всю информацию, созданную об ТО;
- ЕИП является единственным источником данных об ТО (прямой обмен данными между участниками жизненного цикла исключен);
- ЕИП строится только на основе международных, государственных и отраслевых информационных стандартов;
- для создания ЕИП используются программно-аппаратные средства, уже имеющиеся у участников жизненного цикла;
- ЕИП постоянно развивается.

Понятие ЕИП весьма наглядно иллюстрируется новым современным направлением развитием информационной поддержки процессов эксплуатации изделий путем создания и использования интерактивных электронных технических руководств.

Традиционно инструкция по эксплуатации ТО предоставлялась (и, в основном, предоставляется сейчас) разработчиком конечному потребителю в виде книг с описаниями, плакатов, схем и пр. В современных условиях выход на рынок с ТО, сопровождаемым большим объемом такой документации, существенно снижает его

конкурентоспособность: потребитель вынужден поддерживать большой архив документации (при вводе в эксплуатацию модификаций одного и того же изделия архив существенно расширяется), становятся затрудненными процедуры сервиса, заказа запасных частей и т. д.

Интерактивное электронное техническое руководство (ИТЭР) по эксплуатации предоставляется заказчику в электронной форме на мобильном носителе или по сети Интернет. Как правило, это руководство состоит из следующих компонентов: спецификация ТУ; техническое описание узлов, систем; инструкция по эксплуатации; инструкция по монтажу; инструкция по техобслуживанию; описание диагностики; средства общения потребителя с поставщиками (например, при помощи Интернет).

В принципе интерактивное электронное техническое руководство - это комплекс интегрированных программных средств, который включает в себя базу данных об ТУ и правилах его эксплуатации и электронную систему отображения, предназначенную для визуализации данных и обеспечения интерактивного взаимодействия с пользователем.

Для описания требований к структуре базы данных интерактивного электронного технического руководства используется терминология языка SGML (ISO 8879). В соответствии с требованиями стандарта ISO 8879 структура базы данных описывается путем декларации (объявления) набора информационных объектов, их атрибутов, связей и иерархии. Совокупность указанных деклараций в терминах SGML называется описанием логической структуры документа – DTD (Document Type Definition).

Применение трехмерной графики и электронных макетов при создании технических руководств позволяет наглядно представить новые технические решения, пояснить внутреннее устройство и принципы работы сложных систем, в доступной форме показать процесс установки и обслуживания сложного оборудования.

Интерактивное электронное техническое руководство (ИЭТР) рассматривается сегодня как элемент интегрированной логистической поддержки (Integrated Logistic Support - ILS) ТУ.

Стратегия CALS предусматривает двухэтапный план создания единого информационного пространства:

1) автоматизация отдельных процессов (или этапов) жизненного цикла ТУ и представление данных на них в электронном виде;

2) интеграция автоматизированных процессов и относящихся к ним данных, уже представленных в электронном виде, в рамках единого информационного пространства.

Единое информационное пространство может быть создано для организационных структур разного уровня: от отдельного подразделения до виртуального предприятия или корпорации. При этом различается и эффект, получаемый от создания единого информационного пространства.

Основными свойствами единого информационного пространства являются:

- обеспечение целостности и сохранности (а при необходимости и надлежащей секретности) данных;
- возможность организации доступа к данным для различных (во времени и пространстве - например, географически разобщенных) лиц, имеющих отношение к реализации жизненного цикла ТУ;
- отсутствие потерь данных при переходе между этапами;
- иерархия доступа к данным для всех разработчиков;
- повышение скорости поиска данных и доступа к ним по сравнению с бумажной документацией;
- возможность использования различных компьютерных систем для работы с данными.

Эффективность применения CALS-технологий предполагает неукоснительное соблюдение всеми участниками жестко регламентированных стандартов, процедур, правил, технических решений.

Стандарты и методические материалы в области CALS-технологий определяют общий подход, способ представления и интерфейсы доступа к данным различного типа, вопросы защиты информации и ее электронной авторизации (цифровой подписи).

*Например*, в настоящее время в США для этой цели на различных этапах жизненного цикла изделий используются более 150 нормативных документов, включая международные стандарты (ИСО), федеральные стандарты США (FIPS), военные стандарты США (MIL).

Перечислим наиболее важные международные стандарты в области CALS-технологий.

Стандарт обмена данными об изделии ISO 10303 STEP формализует вопросы хранения и обмена данными. Этот стандарт обеспечивает единство описания модели изделия и включает общую концепцию построения модели изделия, методы описания и

реализации, конкретные предметные области (прикладные протоколы, ресурсы и пр.).

Прикладной протокол AP203 предназначен для описания механических изделий сложного состава. Протокол поддерживает передачу:

- геометрической модели детали (протокол AP203 предусматривает наличие семи разновидностей геометрических моделей - от модели, представленной в виде набора точек, пространственных кривых и отдельных поверхностей, до моделей, создаваемых современными САД-системами, реализующими твердотельное моделирование);

- конструкторского графа ТО (описание многоуровневых многовариантных сборок);

- некоторых данных, относящихся к организации производства.

Сюда относится набор объектов, необходимых для представления информации, содержащейся в конструкторской спецификации и штампе (код детали или сборочной единицы, состав сборочных единиц, грифы, фамилии лиц, ответственных за разработку, наименования организаций разработчика и заказчика, дата утверждения и т. д.). Эти объекты относятся к классу, называемому PDM (управляющие данные об изделии). Относящийся также к PDM объект проектирования - это часть проекта изделия, которая может иметь самостоятельное значение.

Таким образом, протокол AP203 описывает предметные области, которые традиционно покрываются:

- САД-системами (автоматизации проектирования);

- PDM-системами (управления проектами).

На базе стандарта STEP в настоящее время разрабатывается серия информационных стандартов (стандарты группы STEP):

- ISO 13584 P\_LIB (интеллектуальная библиотека изделий);

- ISO 14959 PAREX (описание параметризованной модели и представление знаний об изделии);

- ISO 15531 MANDATE (описание производственного процесса).

Внедрение стандартов группы STEP обеспечит более эффективное хранение данных.

Стандарт ISO 13584 - это серия международных стандартов для представления и обмена доступными для компьютерной интерпретации данными моделей изделий, а также обмена данными об изделиях, создания справочных систем, библиотек изделий и

раздельного использования ими вне зависимости от используемого прикладного программного обеспечения.

Стандарт ISO 14959 PAREX, создаваемый изначально как средство передачи параметризованных моделей между системами автоматизации конструирования, может стать также и основой для стандартизации передачи знаний об изделиях, начиная от формулирования требований заказчика к разрабатываемому изделию.

Стандарт ISO 15531 MANDATE, описывающий функционирование предприятия, состоит из трех разделов, которые регламентируют:

- взаимодействие предприятия с внешними партнерами;
- описание ресурсов предприятия;
- описание информационных и материальных потоков внутри предприятия.

В серию ISO 14000 - «Экологическое управление» - входят стандарты по следующим направлениям:

- термины и определения;
- экологический аудит;
- экологическая маркировка;
- оценка характеристик экологичности;
- оценка полного жизненного цикла.

Ряд стандартов регламентируют разработку интерактивных электронных технических руководств. С целью унификации форматов данных способ их представления в интерактивном электронном техническом руководстве определен стандартами ISO 8879 (представление текстовой информации), ISO 10744 (представление мультимедийной информации), структура баз данных определена соответствующими спецификациями европейских стран.

Внедрение CALS-технологии является весьма сложной в организационном плане задачей (рис. 17.2), для решения которой требуются существенные материальные затраты.

Целью анализа существующих бизнес-процессов и информационного обеспечения на предприятии является оценка существующего взаимодействия между этими процессами и их рациональности и эффективности. Для этого разрабатываются функциональные модели, содержащие детальное описание выполняющихся технологических процессов в их взаимосвязи. Формат описания регламентирован стандартом IDEF0.





Рис.17.2. Организационные мероприятия, необходимые при внедрении CALS-технологий

Полученная функциональная модель позволяет решать целый ряд задач, связанных с оптимизацией, оценкой величины и распределения затрат, оценкой производительности, загрузки и сбалансированности составных частей производства.

Весьма ответственным и непростым этапом является выбор и приобретение PDM-системы и технических средств. На российском рынке в настоящее время достаточно широко представлены разнообразные по функциональным возможностям, универсальности и стоимости системы управления данными об изделии. В любом случае предприятие должно приобретать не просто компьютерную программу и соответствующее аппаратное обеспечение, а пакет услуг. В связи с этим необходимо учитывать не только качества самой PDM-системы, но и способность ее производителя (или авторизованного дилера) обеспечить ее сопровождение, модернизацию и адаптацию к потребностям предприятия. Задача выбора и приобретения аппаратных средств (компьютеров и сетевого оборудования для локальных вычислительных сетей) тесно свя-

зана с задачей выбора программного обеспечения PDM-системы. В табл. 17.1 приведены примеры наиболее известных на рынке PDM-систем.

Таблица 17.1

PDM-системы		
PDM-системы	Производитель	Стоимость рабочего места (при покупке 50 рабочих мест), о.е.
iMAN	Unigraphics Solution	6,25
PartY Plus	Лоция-Софт	1,0
PDM STEP Suite	НИЦ CALS «Прикладная логистика»	2,0
Search	Интермех	0,5
T-Flex Docs	Топ Системы	1,0
Windchill	PTC	6,25

Для создания на предприятии единого информационного пространства необходимо интегрировать PDM-систему с уже существующими компьютерными системами. Средствами интеграции и адаптации PDM-системы являются:

- прикладные модули автоматизированных систем управления производством (АСУП) или систем автоматизированного проектирования (САПР), оперирующие данными в PDM-системе;
- прикладные модули PDM-системы, предназначенные для расширения ее функций;
- конверторы, предназначенные для передачи информации из PDM-систем в АСУП, САПР и т. д.

Все функции полноценной PDM-системы можно четко разделить на несколько групп:

1. Управление хранением данных и документов. Все данные и документы в PDM-системе хранятся в специальной подсистеме - хранилище данных, которая обеспечивает их целостность, организует доступ к ним в соответствии с правами доступа и позволяет осуществлять поиск данных разными способами. При этом документы, хранящиеся в системе, являются электронными документами, т. е., например, обладают электронной подписью;
2. Управление процессами. PDM-система выступает в качестве рабочей среды пользователей и отслеживает все их действия, в том числе следит за версиями создаваемых ими данных. Кроме того, PDM-система управляет потоком работ (например, в процессе

проектирования изделия) и занимается протоколированием действий пользователей и изменений данных;

3. Управление составом изделия. PDM-система содержит информацию о составе изделия, его исполнениях и конфигурациях. Важной особенностью является наличие нескольких представлений состава изделия для различных предметных областей (конструкторский состав, технологический состав, маркетинговый состав и т. д.), а также управление применяемостью компонентов изделия;

4. Классификация. PDM-система позволяет распределять изделия и документы в соответствии с различными классификаторами. Это может быть использовано при автоматизации поиска изделий с нужными характеристиками с целью их повторного использования или для автоматизации присваивания обозначений компонентов изделия;

5. Календарное планирование. PDM-система содержит функции формирования календарного плана работ, распределения ресурсов по отдельным задачам и контроля выполнения задач со стороны руководства;

6. Вспомогательные функции, обеспечивающие взаимодействие PDM-системы с другими программными средствами, с пользователями, а также взаимодействие пользователей друг с другом.

Основной выгодой от использования на предприятии PDM-системы является сокращение времени разработки изделия благодаря:

- избавлению конструктора от непроизводительных затрат времени, связанных с поиском, копированием и архивированием данных (при работе с бумажными данными это может занимать 25-30 % его рабочего времени);

- улучшению взаимодействия между конструкторами, технологами и другими участниками жизненного цикла изделия путем организации параллельного проектирования, что приводит к сокращению количества изменений изделия;

- значительному сокращению срока проведения изменения конструкции изделия или технологии его производства за счет улучшения контроля за потоком работ в проекте;

- резкому увеличению доли заимствованных или слегка измененных компонентов в изделии (до 80 %) за счет возможности поиска готового (почти готового) компонента проекта с необходимыми характеристиками.

Пользователями PDM-системы выступают все сотрудники – участники жизненного цикла изделия: конструкторы, технологи, работники технического архива, а также сотрудники, работающие в других предметных областях: сбыт, маркетинг, снабжение, финансы, сервис, эксплуатация и т. п.

Действия по обеспечению информационной безопасности реализуются специализированным программным.

Помимо этого возможно использование интеллектуальных пластиковых карточек (так называемых смарт-карт) и подключаемых к компьютеру средств считывания данных с этих карточек, специальных жетонов и т. д. В особо ответственных случаях могут применяться средства идентификации, основанные на сканировании и последующем распознавании физических характеристик пользователя (отпечатка пальца, радужной оболочки глаза и др.)

Так, например, типовая структура CALS-технологии приведена на рис.17.3.

Более узкими (а также ранее появившимися и более узнаваемыми) понятиями CALS-технологий являются системы:

CAD – Computer Aided Design - компьютерно-ориентированное проектирование;

CAE - Computer Aided Engineering- компьютерно-ориентированная инженерная поддержка;

CAM - Computer Aided Manufacturing - компьютерно-ориентированная технологическая подготовка производства и собственно производство.

Иногда процесс создания ТО весьма коротко представляют как процесс взаимодействия этих трех систем (рис. 17.4): в среде CAD-системы разрабатывается проект ТО (этап разработки, проектирования, конструирования), информация о котором в виде пространственной трехмерной твердотельной модели (3D-модели) далее передается в CAE-модуль. В среде последнего выполняются все необходимые для оценки качества ТО расчеты (например, расчеты прочности по МКЭ). В случае, если определенные расчетом характеристики ТО будут признаны разработчиками неудовлетворительными, модель будет возвращена в среду CAD-системы для внесения соответствующих исправлений.

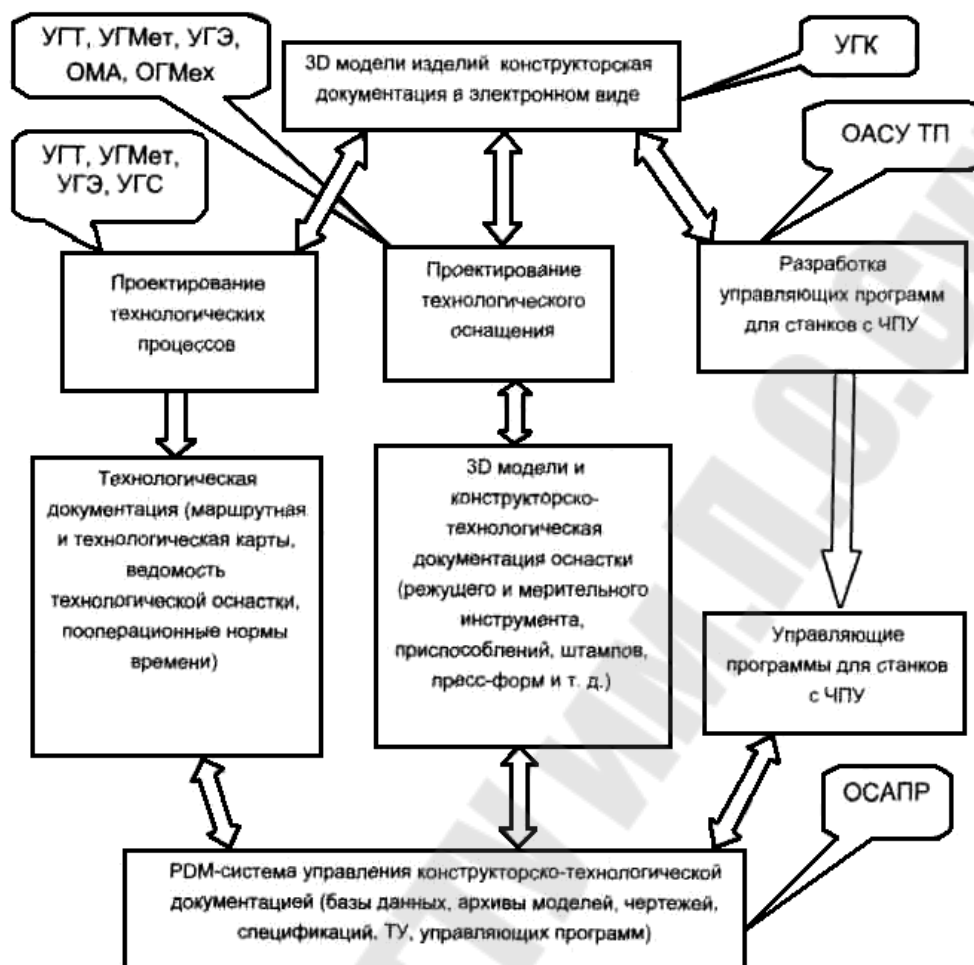


Рис. 17.3. Структура CALS-технологии предприятия:

□ - содержимое составных частей; ☐ - подразделения, ответственные за их наполнение (УГК, УГТ, УГМет, УГЭ, УГС - управления главного конструктора, главного технолога, главного металлурга, главного энергетика, главного сварщика; ОСАПР, ОМА, ОГМех, ОАСУ ТП - отделы систем автоматизированного проектирования, механизации и автоматизации, главного механика, автоматизированной системы управления технологическими процессами)

Таким образом, модель, направляемая далее в САМ-модуль, является оптимизированной. Выходной информацией САМ-модулей могут являться программы для оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ), промышленных роботов (ПР), обрабатывающих центров (ОЦ).

Иногда совокупность этих трех систем называют общим термином СИМ-производство (Computer Integrated Manufacturing - компьютерное интегрированное машиностроение, производство).

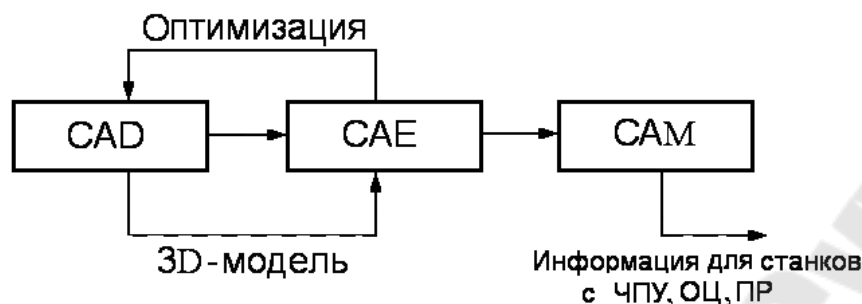


Рис. 17.4. Упрощенная схема процесса создания изделия

В соответствии с ГОСТ 2.103-68 устанавливаются следующие стадии разработки изделия (рис. 17.5): техническое предложение; эскизный проект; технический проект; рабочая конструкторская документация (различают документацию на опытный образец или опытную партию и документацию на изделие массового производства).

Среди стадий процесса разработки изделия по ГОСТ 2.103-68 не значится отделенная штриховой линией на рис. 17.6 стадия составления технического задания. Это задание формируется заказчиком на основании собственных поисковых научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИР и ОКР, НИОКР), хотя, как правило, разработчики активно участвуют в формировании технического задания (ТЗ).



Рис. 17.5. Структура процесса разработки изделия

Каждый этап разработки изделия регламентируется (по видам работ, по глубине конструкторской проработки изделия, объему выпускаемой конструкторской документации и пр.) соответствующими стандартами: ГОСТ 2.118-73 регламентирует работы на стадии технического предложения; ГОСТ 2.119-73 - на стадии

эскизного проекта; 2.120-73 - на стадии выпуска рабочей документации.

На каждом этапе разработки конструктор должен принимать те или иные решения. Начальные стадии процесса проектирования часто протекают в условиях неопределенности, когда многие принимаемые решения не очевидны, а потому не оптимальны; в особенности это касается проектирования ТО, аналогов которому до момента его разработки не было. Вместе с тем, именно от решений, принятых на начальных стадиях проектирования, зачастую зависит качество формируемого ТО. Понятно, что на каждой стадии разработки изделия может быть допущена ошибка, которая будет обнаружена только впоследствии. Известно, что существует обратно пропорциональная зависимость между затратами на принятие конструктором решений и их важностью, а также стоимостью ошибочных решений (рис.17.6).

Оказывается, что приблизительно 10 % первоначально принятых решений более чем на 70% определяют совершенство будущего изделия.

Как правило, эти решения соответствуют концептуальным проработкам изделия. Последующие 15-20% затрат приходятся на создание опытных образцов. При 100% затрат (на НИОКР) принимается решение о начале серийного производства изделия, а последующие 10-20 % затрат относятся уже к стадии конструкторского сопровождения серийно выпускаемого ТО.

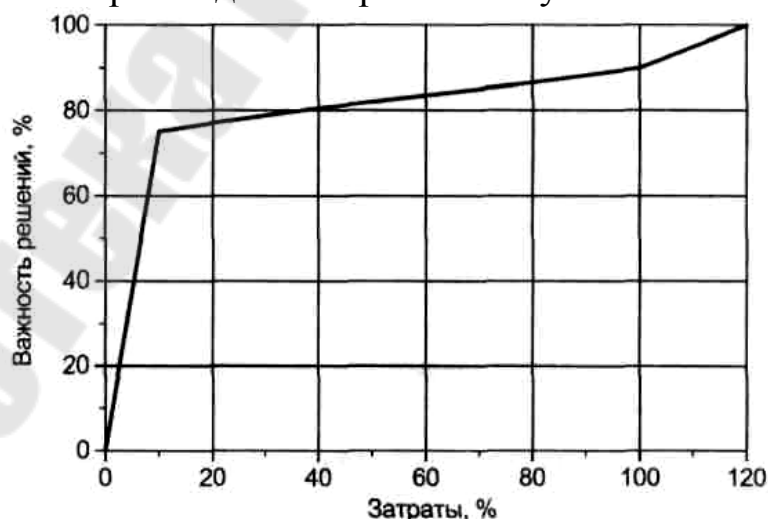


Рис. 17.6. Значимость решений, принимаемых на разных этапах создания машиностроительной конструкции

Известно также, что если на начальной (концептуальные проработки ТО, НИР) стадии разработки допущена ошибка, то ее своевременное устранение на этой же стадии обойдется в 1 единицу дополнительных затрат. Устранение этой же ошибки, но на стадии ОКР, удорожается приблизительно в 10 раз, на стадии опытного производства - в 100 раз, на стадии серийного производства - в 1000 раз (при этом зачастую на стадии серийного производства вообще невозможны какие-либо исправления).

### **17.3. Программное обеспечение CALS-технологий**

В соответствии с содержанием работ на каждом этапе целесообразно применять различные программные средства.

Принято подразделять их на легкие и тяжелые - в зависимости от их возможностей и того, с какими геометрическими образами эти системы работают. Легкие системы базируются на плоском двухкоординатном представлении; в основе тяжелых лежит трехмерная пространственная твердотельная, поверхностная или гибридная модель. Соответственно легкие и тяжелые CAD- и CAM-системы по-разному взаимодействуют между собой: в тяжелых системах это взаимодействие осуществляется на трехмерном уровне, в легких - на уровне двумерных графических примитивов. Как правило, при этом легкие системы в отличие от тяжелых, обладают менее широкими возможностями, являются более легкими в освоении и управлении.

Эффективность применения каждого типа систем различна на разных этапах проектирования (рис. 17.7), поскольку на каждом таком этапе решаются различные задачи: на этапе технического предложения (ТП) разрабатывается концепция последнего, а потому выполняются относительно простые построения; на этапе эскизного проекта (ЭП) выполняются более подробные графические работы, включая трехмерные модели; наиболее сложные построения (включая анимацию механизмов для исследования их динамики и пр.) следуют на стадии технического проекта (ТехнП). Как правило, для разработки рабочей документации (РД) вполне достаточны возможности легких систем (рабочие чертежи деталей являются двумерными).

В последние годы, помимо легких и тяжелых систем, стали различать так называемые средние системы. К их числу относят, в частности, Solid Works, Autodesk Inventor и т. п. Обладая легкостью в



управлении, простотой освоения и рядом других преимуществ, эти системы позволяют работать с достаточно сложными сборками - свыше 13 тыс. составных частей. Этого вполне достаточно, чтобы смоделировать сложное устройство современного машиностроения.

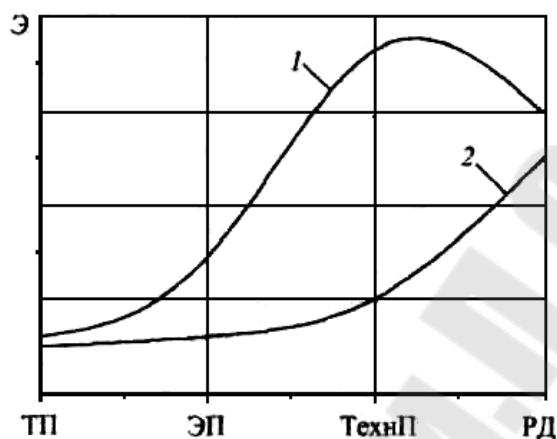


Рис. 17.7. Эффективность (Э) применения тяжелых 1 и легких 2 САД-систем на различных этапах разработки изделия

САМ-системы подразделяются на легкие и тяжелые в зависимости от обеспечиваемой ими сложности обработки деталей. Последняя определяется, в частности, числом координат обработки, которое может быть равно 2; 2,5; 3; 4 и 5. Известно, что для основной массы деталей, входящих даже в очень сложное изделие, с точки зрения получения конечного результата требуется 2- или 2,5-координатная обработка. Это составляет приблизительно 80 % всего объема машиностроительного производства. Примерно 12 % всех деталей приходится на долю 3-координатной обработки, 6 % - 4-координатной и около 2 % - 5-координатной (например, лопатки компрессоров и турбин газотурбинных двигателей). Таким образом, потребности примерно 80 ... 85 % всего машиностроительного производства могут быть удовлетворены легкими САМ-системами (рис. 17.8).

Достаточно сложно дать общее описание различных программных продуктов, используемых на тех или иных стадиях разработки и изготовления изделия. Поэтому перечислим лишь некоторые такие программные средства.

В настоящее время на рынке предлагаются САД/САМ-системы плоского черчения типа AutoCAD LT; системы твердотельного моделирования среднего уровня типа КОМПАС, Solid Edge, Solid

Works, Autodesk Mechanical Desktop и, наконец, «тяжелые» САПР - системы высшего уровня: UNIGRAPHICS, CATIA, Pro/ENGINEER.

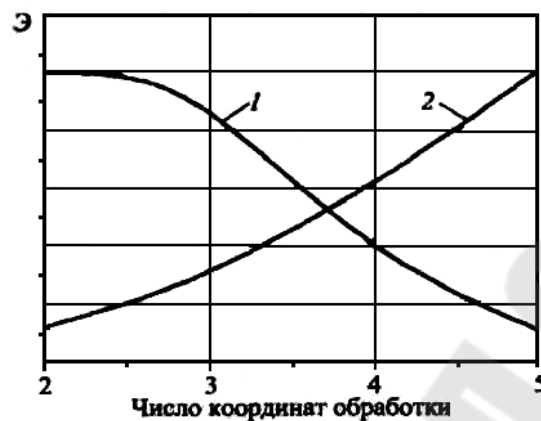


Рис. 17.8. Эффективность (Э) применения легких 1 и тяжелых 2 САМ-систем

Средства инженерного анализа (CAE) включены только в системы высшего уровня, и функциональность их достаточно ограничена. Обычно это интегрированные в базовую систему модули третьих фирм. Так, в UNIGRAPHICS имеются встроенные модули для анализа кинематических схем и определения динамических нагрузок, модуль анализа заливки пластмасс, модуль прочностных расчетов методом конечных элементов. Функциональная ограниченность этих модулей логически обоснована их назначением - дать возможность конструктору самому провести анализ своей детали, не обращаясь к узким специалистам в каждой области инженерного анализа. Однако для полноценного анализа конструкции необходимо воспользоваться специализированными системами типа ANSYS, MARS, NASTRAN, PROCAST, ABAQUS и др. Расчеты гидрогазодинамики выполняются при помощи специализированных систем 3D Flow, Gas Dynamics Tools, Star CD, CFX-TASCflow и пр.

#### 17.4. Анализ форматов растровой графики

Основным форматом растровой графики в среде операционной системы Windows является \*.bmp (windows BitMaP). Он поддерживается всеми графическими редакторами, работающими под управлением этой операционной системы. Применяется для хранения

растровых изображений, способен хранить растровые образы, выполненные с применением разнообразных цветовых палитр, - от 256-цветной до палитры RGB (16 700 000 оттенков). В более поздних версиях этого формата возможно сжатие графической информации по принципу RLE<sup>1</sup>. Несмотря на то что этот формат наиболее распространен, в последние годы отношение к нему как к основному несколько изменилось: в настоящее время не рекомендуется в веб-страницах, в полиграфии, а также и для простого переноса и хранения информации.

Формат \*.jpg - наиболее популярен в сети Internet, так как обладает свойством при некоторой потере качества сжимать размер изображения, что важно для его передачи по сети. Вообще говоря, \*.jpg - не формат, а алгоритм сжатия, при реализации которого первоначально отбрасывается более половины информации о цвете и анализируются блоки размером 838 пикселей. Для каждого блока формируется набор чисел, из которых первые представляют цвет блока в целом, а последующие отражают тонкие детали.

Таким образом, используя формат \*.jpg, можно получить файл размером в 500 раз меньше, чем при использовании формата \*.bmp. В последние годы для нужд Internet созданы новые версии формата - \*.jpg Baseline Optimised.

Практика показывает, что в формате \*.jpg лучше сжимаются растровые фотографии, чем штриховые рисунки. Лучше и с меньшими потерями сжимаются большие изображения или изображения с высоким разрешением (200...300 и более dpi). Не следует сохранять в формате \*.jpg изображения, где важны нюансы цветопередачи, а также промежуточные результаты (каждое новое сохранение информации приводит к новым отбрасываниям данных).

Формат \*.gif (compuserve Graphics Interchange Format) также часто используется в сети Internet. Алгоритм сжатия данных при использовании этого формата предусматривает запись и последующий вывод изображения «через строку», благодаря чему, имея только часть файла, можно представить целое изображение (разумеется, с меньшим разрешением). Таким образом, задолго до окончания загрузки файла пользователь может распознать его содержание и решить, стоит ли ждать окончания этой загрузки.

Файл в формате \*.gif может содержать несколько относительно простых растровых рисунков, которые браузеры могут подгружать один за другим с указанной в файле частотой. Так достигается эффект

анимации, что важно для создания разнообразных оформительских эффектов (всплывающие надписи, рекламные баннеры и пр.).

Основное ограничение формата \*.gif состоит в том, что цветное изображение может быть записано только с использованием 256-цветной палитры, чего явно недостаточно для полиграфии.

В 1995 г. разработанный формат \*.png (Portable Network Graphics) предназначен для последующей замены устаревающего формата \*.gif в сети Internet. Файл, содержащий растровый образ в формате \*.png, как правило, имеет меньший размер по сравнению с файлом, в котором записан тот же образ, но в формате \*.gif.

В файл формата \*.png записывается информация о так называемой гамма-коррекции. Гамма-коррекция представляет собой некое число, характеризующее зависимость яркости свечения экрана монитора от напряжения на электродах кинескопа. Это число, считанное из файла, позволяет ввести поправку яркости при отображении. Таким образом, эта особенность помогает реализации одной из основных идей сети Internet - одинакового отображения графической информации независимо от аппаратуры пользователя.

Аппаратно независимый формат \*.tiff (Tagged Image File Format) сегодня является одним из самых распространенных и надежных, его поддерживают практически все компьютерные программы, так или иначе связанные с графикой. Этот формат является наилучшим при импорте образов растровой графики в программы, реализующие векторную графику, а также в издательские системы. Многие сканирующие устройства по умолчанию запоминают растровые образы именно в этом формате.

В векторной графике изображение создается из так называемых графических примитивов и редакторских действий над ними. Графическим примитивом считается любой геометрический объект, атрибуты (например, координаты начальной и конечной точек, вид линии, соединяющей эти точки, координаты некоторых необходимых для ее построения промежуточных точек, а также цвет, толщина и пр.) которого могут быть вычислены с помощью тех или иных математических операций. В связи с этим объем дискового пространства, необходимого для хранения векторного рисунка, значительно уменьшается по сравнению с таковым для подобного растрового изображения. При выводе изображения на экран координаты точек, принадлежащих этому изображению, пересчитываются в соответствии с тем, какое соотношение имеют

размеры экрана и изображаемого объекта (аналогичные вычисления производятся и при выводе изображения на принтер или плоттер).

Большинство векторных форматов могут также содержать внедренные в файл растровые объекты или ссылки на растровый файл (так называемая технология OPI – Open Prepress Interface – технология разработанная фирмой Aldus, позволяющая не импортировать оригиналы растровых образов и внедрять (embedding-внедрение) их в разрабатываемый документ, а создавать в последнем лишь эскизы этих образов (копии с относительно низким разрешением) и ссылки на оригиналы. В процессе вывода документа на печать эскизы заменяются оригиналами растровых образов. Применение OPI (например, в таких программах, как FreeHand и QuarkXPress) дает возможность экономить ресурсы компьютера и заметно повысить его производительность). Сложность при передаче данных из одного векторного формата в другой заключается в использовании программами векторной графики различных алгоритмов при построении векторных и описании растровых объектов.

Перечислим основные графические примитивы, используемые в большинстве систем векторной графики, и дадим их математические основы.

Учитывая при этом, что подавляющее распространение в инженерной практике получил графический редактор AutoCAD, приведем изображения кнопок пиктограммного меню этого редактора, служащих для активизации команд по отрисовке соответствующих примитивов (рис. 17.9; показаны наиболее употребляемые кнопки).

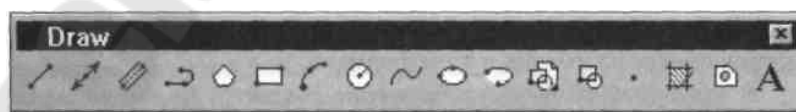


Рис. 17.9. Инструментальная панель средств изображения графических примитивов редактора AutoCAD.

Слева направо: отрезок; луч; мультилиния; полилиния; правильный многоугольник; прямоугольник; дуга; круг; сплайн; эллипс; редактирование блока; создание блока; точка; штриховка; область (регион); текст

Точка задается на плоскости двумя числами  $(x, y)$ , определяющими ее положение относительно начала координат.

Задание прямой линии (как луча - бесконечной прямой, так и отрезка) осуществляется в параметрической форме. Для определения примитива «отрезок» необходимы 4 параметра;  $k, b, x_1$  и  $x_2$ . Два из них ( $k$  и  $b$ ) служат для предварительного определения бесконечной прямой, определяемой уравнением  $y = kx + b$ ; параметры  $x_1$  и  $x_2$  нужны для задания начальной и конечной точек отрезка.

Окружность и эллипс являются частными случаями кривых второго порядка, которые описываются уравнениями, содержащими степени не выше вторых. Отличительной чертой таких кривых является отсутствие точек перегиба. Общая формула для задания кривой 2-го порядка имеет вид

$$x^2 + a_1y + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0$$

и, таким образом, описывается пятью параметрами. Для задания участка такой кривой, как и для описанного выше отрезка прямой, необходимы еще параметры  $x_1$  и  $x_2$ .

Бесконечные кривые 3-го порядка задаются девятью параметрами соответственно тому, что параметрическое уравнение такой кривой имеет вид

$$x^3 + a_1y + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x + a_8y + a_9 = 0$$

Для отрисовки участка кривой 3-го порядка так же, как и в предыдущем случае, необходимо задание еще двух параметров  $x_1$  и  $x_2$  (таким образом, участок кривой 3-го порядка задается уже 11 параметрами). Однако отрисовывать кривую 3-го порядка (или ее участок) по заданным (найденным) параметрам на практике, как правило, не приходится. В современных графических редакторах для упрощения этой процедуры используются так называемые кривые Безье или сплайны - частный случай кривых 3-го порядка, которые задаются всего 8 параметрами. Отрисовка кривых Безье основана на наличии двух касательных, проведенных к конечным точкам кривой. Управляя (с помощью «мыши») длиной и ориентацией этих касательных, можно получить практически любую конфигурацию кривой (рис. 17.10).

Помимо простейших графических примитивов средства машинной векторной графики содержат так называемые сложные примитивы,

которые, в свою очередь, состоят из более простых, но при отрисовке являются неразделимыми.

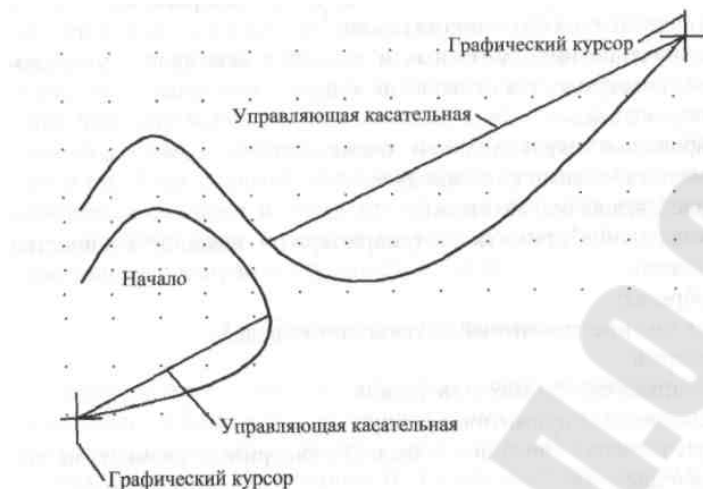


Рис. 17.10. Пример построения из одного и того же начала различных кривых Безье в среде графического редактора AutoCAD

К числу таких примитивов относятся, например, штриховка, текст, размеры и пр.

Редактирование графических примитивов предполагает возможность выполнения следующих операций (нижеследующий перечень соответствует расположению пиктограммных кнопок слева направо на рис. 17.11):

- удаление неправильно построенного примитива;
- копирование;
- зеркальное отражение на плоскости и в пространстве;
- создание подобных примитивов;
- получение прямоугольных и круговых массивов - упорядоченных совокупностей нескольких копий;
- перемещение;
- вращение вокруг заданной точки;
- масштабирование примитивов;
- растяжение примитивов;
- увеличение примитивов (например, на заданное количество процентов);
- обрезка;
- удлинение примитива до указанного предела;
- разрыв;
- сопряжение примитивов фаской;
- сопряжение примитивов радиусной дугой;

расчленение сложного примитива (например, размера) на составляющие и пр



Рис. 17.11. Инструментальная панель средств редактирования примитивов (графический редактор AutoCAD )

К числу наиболее распространенных форматов файлов векторной графики относятся форматы \*.wmf; \*.cdr; \*.dwg, а также универсальный формат обмена данными векторной графики \*.dxf.

Векторный формат \*.wmf использует графический язык операционной системы Windows и служит для передачи векторов через буфер обмена. Он распознается практически всеми программами Windows, связанными с векторной графикой. К недостаткам этого формата относятся искажение в некоторых ситуациях передаваемого цвета, невозможность сохранения параметров, которые могут быть присвоены графическим примитивам рисунков, созданных различными редакторами векторной графики, невозможность включения растровых объектов и ряд других.

Формат \*.cdr был разработан специально для графического редактора Corel Draw. В файлах, записанных в этом формате, применяется раздельное сжатие как векторных, так и растровых образов, могут внедряться все доступные шрифты, в файлы Corel Draw могут быть записаны рисунки с физическим размером 45x45 м (этот параметр важен для изготовления графических объектов наружной рекламы); поддерживается многостраничность, технология OPI и пр. Имея широкое распространение среди дизайнеров, разработчиков рекламы и оформителей,- тем не менее графический редактор Corel Draw (а вместе с ним и формат \*.cdr ) в машиностроении распространен относительно мало.

## **17.5. Программные средства векторной графики. Графический редактор AutoCAD**

Существует достаточно большое число разнообразных программных продуктов векторной графики. Наиболее известным среди них является программный продукт AutoCAD американской фирмы Autodesk. Его популярность объясняется несколькими



изначально положенными в основу его функционирования принципиальными решениями. К числу таковых относятся, в частности: принцип выполнения рисунка на слоях; объектная привязка; формат \*.dwg файла рисунка (стал признанным международным стандартом машинной графики); возможность работы в пространстве модели и пространстве листа и ряд других.

Принцип выполнения рисунка на слоях хорошо иллюстрируется следующим примером. Предположим, что сложный рисунок, содержащий, например, осевые линии, контур детали, размеры, штриховки, надписи и пр., выполняется по частям на отдельных листах прозрачной бумаги: на первом листе наносятся только осевые линии, на втором - только контур детали, на третьем - только штриховки и т. д. Затем пользователь накладывает все листы друг на друга и рассматривает общее изображение на просвет. При этом он видит полное изображение (т. е. и осевые линии, и контур, и штриховки и пр.), но при необходимости отредактировать тот или иной фрагмент нужный лист изымается, на нем производятся нужные редакторские действия, по окончании которых этот лист возвращается в первоначальное положение. Тем самым достигается оперативность и безошибочность редактирования (последнее обеспечивается однозначностью выбора объектов, подлежащих редактированию).

С одной стороны, объектные привязки (т. е. описание взаимного расположения различных графических примитивов) нужны для обеспечения точности создаваемой графической информации, что важно при ее последующей передаче в САЕ- и далее в САМ-системы. С другой стороны, точное изображение позволяет разработчику получить более полное и ясное представление о разрабатываемом изделии. В большинстве программных продуктов имеется возможность использования следующих типов объектных привязок (нижеследующий перечень соответствует расположению слева направо отмеченных символом  $\surd$  пиктограммных кнопок на рис. 17.12):

- к концу графического примитива;
- к середине
- к точке пересечения;
- к центру дуги окружности или целой окружности; к координатной четверти;
- касательная (выстраиваемый отрезок будет проведен по касательной к имеющейся дуге);

перпендикуляр;  
точка;  
отмена активного режима объектной привязки.



Рис.17.12. Инструментальная панель средств объектной привязки (так называемого «прыжка объекта») графического редактора AutoCAD

### Пример работы в AutoCAD

Выполним показанный на рис. 17.13 чертеж стилизованного шатуна поршневого двигателя.

Первоначально следует настроить параметры рабочей среды и выбрать рисунок-прототип. Настройке подлежат: лимиты (предельные размеры чертежа); линейный масштаб; параметры (цвет, тип линий) слоев чертежа; стили написания текста; единицы измерения линейных и угловых размеров и (по желанию пользователя) некоторые другие параметры.

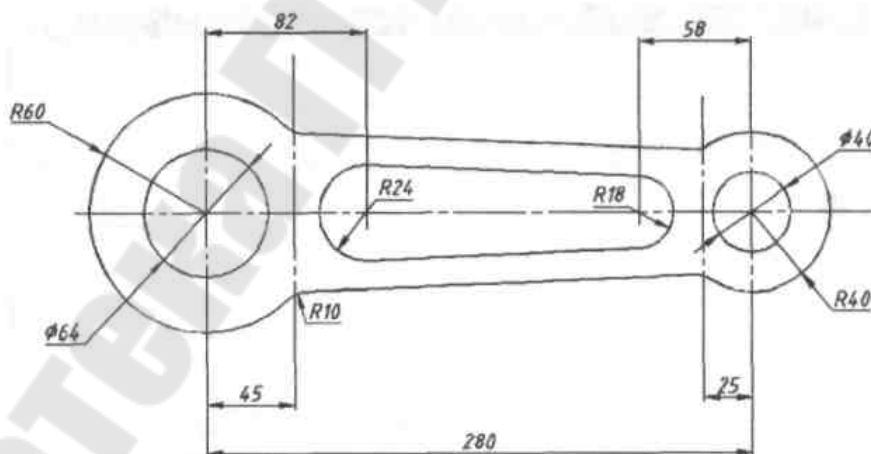


Рис. 17.13. Эскиз шатуна

При необходимости специально могут настраиваться интервал сетки, шаг дискретного перемещения курсора по экрану и др.

Диалог компьютера с пользователем, касающийся настройки параметров рабочей среды, начинается сразу после загрузки программы (рис. 17.14); при этом пользователь может выбрать один

из уже сформированных рисунков-прототипов (в различных версиях AutoCAD вид диалоговых окон может быть различным).

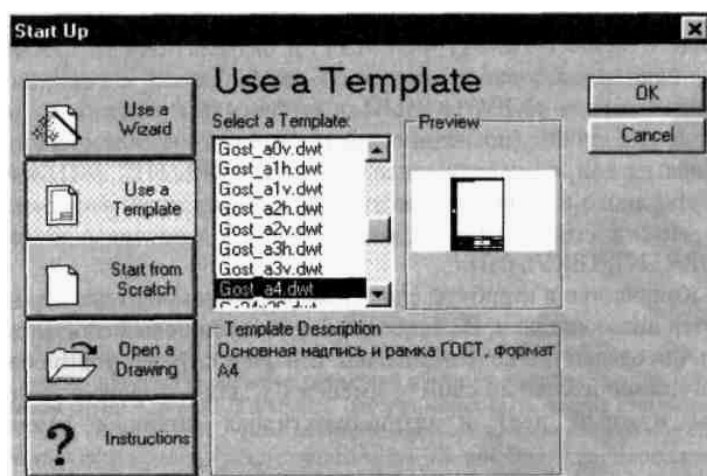


Рис. 17.14. Панель настройки рисунка-прототипа

Для настройки слоев чертежа (рис.17.15) в соответствующем диалоговом окне (активизируется, например, при помощи падающего меню ФОРМАТ/ФОРМАТ и раздела LAYER/СЛОЙ в нем) надо последовательно указать имена новых слоев (после нажатия кнопки «NEW/НОВЫЙ»), выбрать для каждого из них цвет и тип линий (последние предварительно загружаются при выборе на той же панели закладки «LINETYP/ТИП ЛИНИЙ»). Выбор одного из слоев в качестве текущего производится отметкой имени этого слоя и последующим нажатием кнопки «CURRENT/ТЕКУЩИЙ».

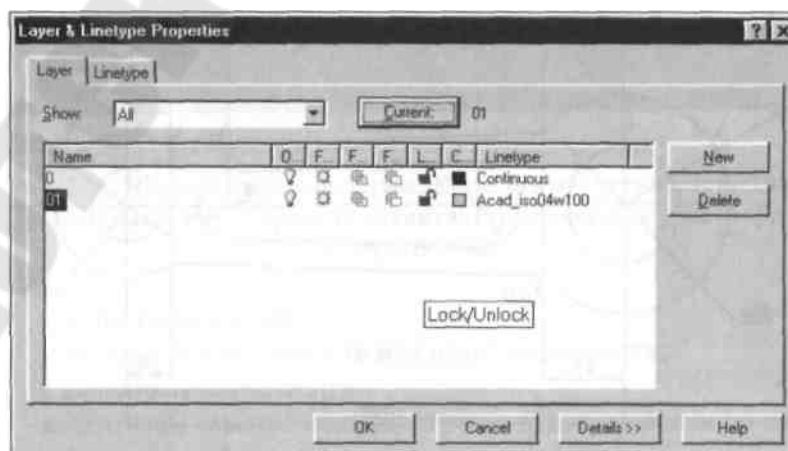


Рис. 17.15. Диалоговое окно настройки параметров слоев чертежа

Количество и атрибуты слоев в выполняемом чертеже определяются пользователем. В случае необходимости новый слой может быть определен и в ходе отрисовки. В нашем случае сформирован один дополнительный слой (с именем 01, для которого установлены нужный цвет и штрихпунктирная линия с именем Acad\_iso04w100 - см. рис. 17.14); слой с именем 0 присутствует в чертеже всегда.

В начале отрисовки шатуна следует перейти на слой, предназначенный для построения осевых линий, и провести продольную осевую линию и вертикальную осевую линию одной из окружностей (например, большего радиуса). При этом удобно пользоваться режимом ортогональных (т. е. прямоугольных) построений, который назначается (либо отменяется) нажатием «мышью» кнопки (ОРТНО/ОРТО в нижней части экрана).

Далее следует построить вертикальную осевую линию второй головки, скопировав для этого предыдущую вертикальную линию.

Схема действий пользователя при выполняемом построении может быть следующей:

подача (любым способом - т. е. с клавиатуры, при помощи падающих меню средств редактирования, нажатием «мышью» соответствующей кнопки пиктограммного меню) команды копирования СОПУ/КОПИРУЙ;

указание в ответ на подсказку компьютера копируемого объекта (в нашем случае вертикальной осевой линии) курсором; при этом изображение выбранного объекта изменяется;

нажатие клавиши Enter, означающее окончание выбора копируемых объектов;

указание базовой точки, от которой будет произведен отсчет при построении копии; чтобы в качестве таковой выбрать именно точку пересечения вертикальной и горизонтальной осевых линий, используем объектную привязку к пересечению; ввод базовой точки необходим для обеспечения последующего ввода расстояния между копией и оригиналом; когда включен режим объектной привязки, курсор приобретает форму прямоугольника («прицела»);

ввод координат точки, в которую должен быть скопирован выбранный объект (при этом удобно ввести не абсолютные координаты этой точки, а приращения координат, отсчитанных от базовой точки; это производится вводом в нашем случае с клавиатуры записи @280, 0 (что означает, что координата X базовой точки

изменяется на 280 мм, а координата  $Y$  не изменяется; при этом символ @ означает, что последующие числа суть приращения координат).

Аналогично могут быть скопированы вспомогательные линии, которые впоследствии будут использованы для построения отрезков, ограничивающих контур стержня шатуна (см. размеры 45 и 25 мм на рис. 17.14). После выполнения этих действий изображение на экране принимает показанный на рис. 17.16 вид.

Далее следует перейти на слой, предназначенный для тонких построений, и провести окружности. После подачи команды CIRCLE/КРУГ необходимо (в ответ на подсказку компьютера) указать центр окружности. Для обеспечения совпадения этого центра с точкой пересечения осевых линий целесообразно после вновь использовать режим привязки к точке пересечения объектов (в этом случае таковыми будут являться осевые линии) и далее в ответ на следующую подсказку компьютера задать радиус окружности. Для построения второй окружности, а также внутренних окружностей с радиусами 32 и 20 мм перечисленные действия нужно повторить (рис. 17.17).



Рис. 17.16. Первый этап построения изображения шатуна - построение необходимых осевых линий

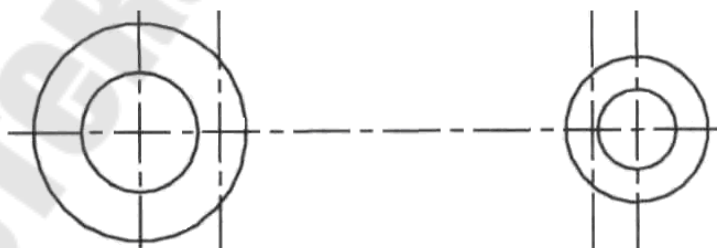


Рис. 17.17. Второй этап построения изображения шатуна

После этого, используя команду LINE/ОТРЕЗОК и режим привязки к точкам пересечения объектов (такowymi являются точки пересечения окружностей и вспомогательных штрихпунктирных

линий), можно построить отрезки, изображающие контур стержня шатуна (рис. 17.18).

Для разрыва линий окружностей между точками сопряжения стержня и головок (см. точки А и В, С и D на рис. 17.18) следует использовать команду BREAK/РАЗОРВИ, которая выполняется в такой последовательности: подача команды (любым из перечисленных выше способов);

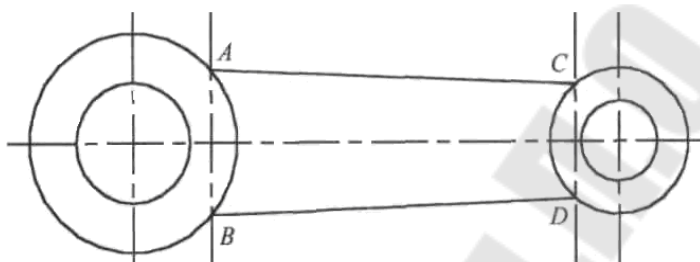


Рис. 17.18. Третий этап построения изображения шатуна

выбор курсором (принимает форму прямоугольного прицела) объектов, подлежащих разрыву (последние после их указания изменяют вид);

ввод литеры F/П (от английского FIRST или русского ПЕРВАЯ) в ответ на подсказку компьютера (это означает, что далее будут указаны первая и затем вторая точки, между которыми произойдет разрыв выбранного объекта);

указание упомянутых первой и второй точек в направлении «против часовой стрелки» (так, для разрыва окружности между точками А и В первой следует указать точку В, поскольку в противном случае исчезнет большая часть окружности); аналогично производится разрыв второй окружности между точками С (первая) и D (вторая).

После выполнения этих действий изображение приобретает показанный на рис. 17.19 вид.

Плавное сопряжение окружностей и отрезков радиусом R10 следует выполнить при помощи команды FILLET/СОПРЯГИ. Действия пользователя при исполнении этой команды могут быть следующими:

подача команды (любым из перечисленных выше способов);

ввод с клавиатуры символа R/P (от RADIUS/РАДИУС) в ответ на подсказку компьютера (это означает, что пользователь будет далее вводить необходимое значение радиуса дуги сопряжения, если

такое, установленное в системе AutoCAD по умолчанию, его не устраивает);

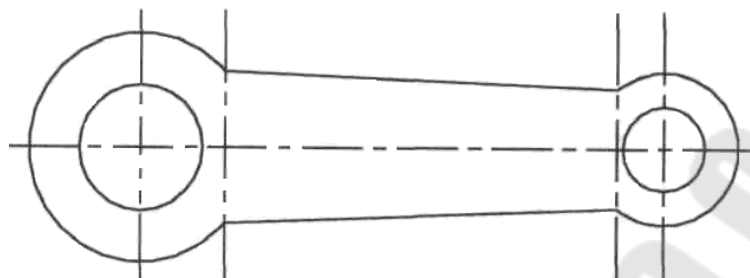


Рис. 17.19. Четвертый этап построения изображения шатуна

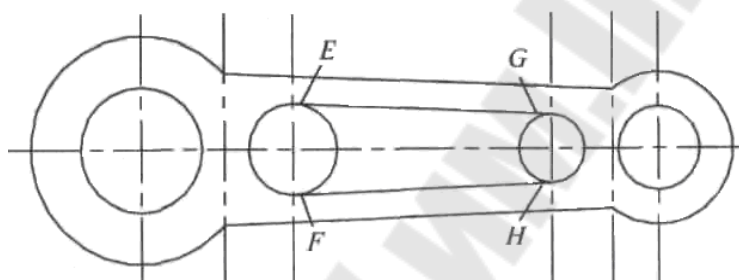


Рис. 17.20. Пятый этап построения изображения шатуна

ввод численного значения радиуса дуги сопряжения;  
последовательное указание курсором (принимает форму прямоугольного прицела) сопрягаемых объектов.

Для отрисовки внутреннего криволинейного замкнутого контура необходимо установить положение центров окружностей с радиусами 24 и 18 мм (это может быть выполнено при копировании вертикальных осевых штрихпунктирных линий, проходящих через центры правой и левой головок, на расстояния 58 и 82 мм при помощи описанной выше команды `COPY/КОПИРУЙ`), отрисовать указанные окружности при помощи команды `CIRCLE/КРУГ`, провести соединяющие две последние окружности отрезки прямых линий с привязками к обеим этим окружностям «по касательной» и выполнить разрыв окружностей между точками F и E, G и H (рис. 17.20).

После этих действий тонкий контур шатуна оказывается отрисованным.

Для простановки размеров следует использовать соответствующие команды падающего меню `DIMENSION/РАЗМЕР` либо кнопки пиктограммного меню (рис. 17.21).

Для простановки линейных размеров (например, расстояния 280 мм между вертикальными осевыми линиями, проходящими через центры правой и левой головок) необходимо активизировать соответствующую команду LINEAR/ЛИНЕЙНЫЙ. На запрос машины об указании начала первой выносной линии следует последовательно указать точки пересечения указанных вертикальных осевых линий и горизонтальной осевой линии, пользуясь при этом привязкой к точкам пересечения (можно, используя соответствующую привязку, указать концы вертикальных осевых линий). Следующей подсказкой машины будет предложение о простановке значения формируемого размера, равного расстоянию между началами выносных линий (это расстояние будет автоматически вычислено и выведено на экран в зоне команд и подсказок в угловых скобках, например, <280>).



*Рис. 17.21.* Пиктограммное меню команд простановки размеров (кнопки соответствуют командам, слева направо: нанесения линейных, параллельных, ординатных размеров; радиусов; диаметров; базовых размеров; размерных цепей; выносок; предельных отклонений; маркировки центров окружностей; редактирования размеров; редактирования размерного текста; установки размерных стилей (длина стрелок, тип размерных линий, высота и расположения надписей размерного текста и пр.); обновления размера

Пользователь может согласиться с предложением машины нажатием клавиши Enter; в случае необходимости написания другого значения размера (например, при вычерчивании рисунка в масштабе) в ответ на последнюю подсказку машины следует ввести латинскую или русскую литеру T (от TEXT/ТЕКСТ) и после следующей подсказки («Введите размерный текст») ввести требуемое значение. Нажатие клавиши Enter завершает формирование размера.

Вполне понятно, что построение этого же рисунка может быть выполнено и при помощи других действий.

Значительным удобством для пользователя являются реализуемые в среде AutoCAD возможности работы с блоками и создание массивов. Рассмотрим эти возможности на примере изображения крышек с несколькими резьбовыми деталями (рис. 17.22). Рутинная работа по вычерчиванию одинаковых резьбовых



деталей (неизбежная при ручном выполнении чертежа) может быть существенно облегчена при использовании приемов работы с блоками.

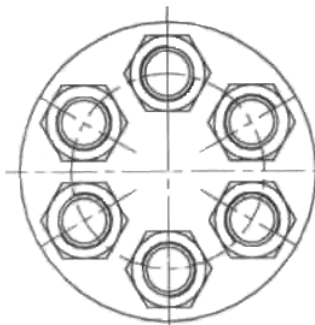


Рис. 17.23. Эскиз крышки

Блоком называется поименованная совокупность графических примитивов, отрисованных в данном чертеже. Блок запоминается в среде текущего чертежа и считается единым графическим примитивом вне зависимости от количества и сложности входящих в него компонентов; таким образом, редактирование блока возможно только «в сборе», т. е. отдельные графические примитивы блока отредактированы по отдельности быть не могут. По мере надобности блок может быть вставлен в любую точку выполняемого чертежа в различных масштабах (в том числе и при использовании разных масштабов вдоль разных координатных осей) и под разными углами. Понятно, что это только один из примеров использования блоков.

В описанном контексте работа с блоками аналогична копированию графических примитивов при помощи команды COPY/КОПИРУЙ. Отличие заключается в том, что содержание блока при выполнении чертежа не изменяется.

Работа с блоками предусматривает создание, запись и вставку блока. Например, при выполнении фрагмента чертежа, показанного на рис. 17.20, пользователь может один раз отрисовать гайку, резьбовой конец болта и пр. Далее может быть подана команда BLOCK/БЛОК. В ответ на подсказки компьютера с клавиатуры вводится имя блока (целесообразно назначение имени блока связывать с его содержанием); точка вставки (та точка, которая при вставке блока будет совмещаться с теми или иными точками чертежа, что создает удобство при использовании здесь объектных привязок); далее последовательно (в ответ на подсказки компьютера SELECT OBJECTS/ВЫБЕРИТЕ ОБЪЕКТЫ) указываются входящие в формируемый блок графические примитивы (при этом выбор

примитивов может осуществляться как поочередным указанием нужного примитива графическим курсором и нажатием клавиши «мыши», так и использовании опций «рамка», «секущая рамка»). Окончание выбора (и, соответственно, формирование блока) указывается нажатием клавиши Enter, после чего выбранные и включенные в состав блока графические примитивы пропадают с экрана. Если это необходимо, их изображение может быть восстановлено на чертеже после подачи команды OOPS/ОЙ.

Предположим, что при выполнении показанного на рис. 17.22 фрагмента чертежа определен блок с именем GAY, включающий гайку, резьбовой конец болта и короткий участок вертикальной осевой линии. В простейшем случае при вставке блока подается команда INTER/ВСТАВЬ; при этом может использоваться соответствующая кнопка пиктограммного меню (левая из показанных на рис. 17.23).

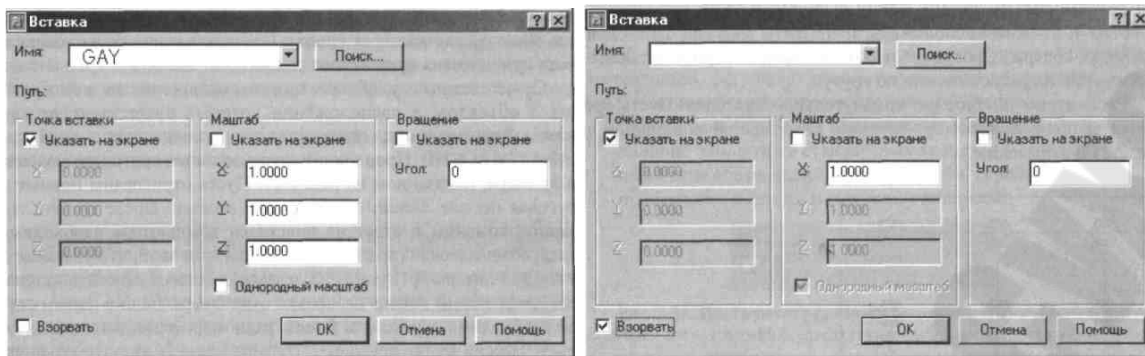
После этого на экране возникает диалоговое окно (рис. 17.24, а), в верхней строке которого следует указать имя вставляемого блока (нажатие на рядом расположенную кнопку «Поиск» позволяет просмотреть список всех блоков, определенных в текущем чертеже и выбрать нужный). Если поля «Указать на экране» отмечены знаком  $\surd$ , то в соответствующих позициях далее следует ввести координаты точки, с которой нужно совместить точку вставки блока, значения масштабов изображения блока вдоль осей (по умолчанию в начале вставки оба этих масштаба равны 1,0) и угла поворота блока по отношению к тому положению, в котором блок был записан (рис. 17.24, б). Следует обратить внимание на возможность простановки (снятия) такого же знака в окне напротив строки



Рис. 17.23. Пиктограммное меню команд различных вставок в чертеж

«Взорвать» (иногда «Расчлененный»), что дает возможность вставить блок (после нажатия кнопки ОК) как разделяемую совокупность графических примитивов.

Существенные удобства при отрисовке часто повторяющихся объектов, в расположении которых существует та или иная закономерность, предоставляет использование команды ARRAY/МАССИВ.



а

б

Рис. 17.24. Диалоговые окна, используемые при вставке блока

Проиллюстрируем создание кругового массива на примере, показанном на рис. 17.22. Пусть отрисованы прямые и круговая осевые линии, а также одна из гаек. После подачи названной команды в ответ на подсказки компьютера необходимо указать тип массива (прямоугольный или круговой, что указывается вводом литеры R/П или С/К); в зависимости от ответа пользователя дальнейший диалог несколько отличается. Если в нашем случае необходимо отрисовать 6 гаек, равномерно расположенных по кругу, массив будет круговым. Далее следует указать графические примитивы, включаемые в массив; число элементов в массиве (6); центр кругового массива (в нашем случае это точка пересечения прямых осевых линий); длину дуги окружности (в градусах), на которой должны расположиться элементы массива. Последняя подсказка содержит вопрос о необходимости поворота элементов массива при их расположении по кругу.

Рассмотрим построение прямоугольного массива. Пусть требуется выполнить фрагмент чертежа, содержащий показанное на рис. 17.25 изображение.

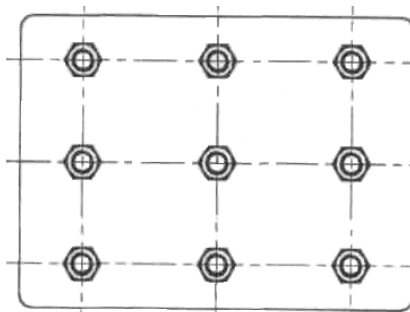


Рис. 17.25. К примеру о построении прямоугольного массива

После подачи команды ARRAY/МАССИВ и выбора типа последнего (в данном случае - прямоугольного) необходимо дать ответы на следующие подсказки: число строк в массиве; число столбцов в массиве; расстояние между строками; расстояние между столбцами.

После выполнения этих действий прямоугольный массив оказывается отрисованным.

## **17.6. 3-D графика**

### ***17.6.1. Общие положения***

При отрисовке трехмерного изображения пользователь создает информацию о принадлежащих объекту точках, линиях, поверхностях и объемах (последнее выполняется далеко не всегда, если речь идет о трехмерном изображении, а не о твердотельной модели). В зависимости от того, на каком этапе создание перечисленной информации будет закончено, различают каркасную трехмерную графику (описываются только линии, ограничивающие изображаемое трехмерное тело); поверхностную графику (создается и запоминается информация о линиях и поверхностях) и собственно объемную графику, в ходе которой создается наиболее полная информация об изображаемом объекте.

Исторически развитие программных средств трехмерной графики шло от каркасной к поверхностной и далее к объемной. Существовали специализированные программные продукты, реализовывавшие эти виды графики (так, достаточно известным был пакет прикладных программ поверхностной графики AutoSURF). В настоящее время практически все программные продукты реализуют объемную (в крайнем случае, поверхностную) графику, но имеют возможность отрисовки и каркасных трехмерных изображений.

Рассмотрим особенности каждого вида трехмерной графики. Как уже сказано, каркасное представление трехмерного тела создается только ограничивающими его линиями. При этом само изображение часто называют каркасной, проволочной моделью (рис. 17.26).

Главным преимуществом каркасной графики является возможность наиболее быстрой перерисовки (регенерации) чертежа после выполнения в нем тех или иных редакторских действий. Другое

преимущество заключается в малом объеме дискового пространства, занимаемым файлом, содержащим каркасную модель изделия.

К недостаткам этого вида графики относят:

неоднозначность восприятия пространственного расположения модели (так, показанная на рис. 17.26 каркасная модель может восприниматься и как вид втулки спереди сверху и как вид спереди снизу);

сложность (в ряде случаев - невозможность) отображения криволинейных границ объекта (рис. 17.27);

некорректность определения инерционных характеристик (положение центра масс, массы, моментов инерции) объекта;

неудобство (иногда невозможность) обнаружения взаимного расположения поверхностей (так, на виде слева показанной на рис.11.31 модели трудно распознать наличие цилиндрического выреза);



Рис. 17.26. Каркасная модель (слева)

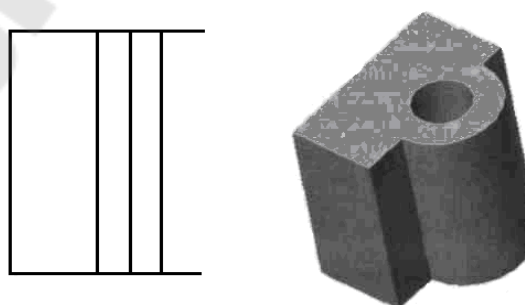


Рис. 17.27. Каркасная модель (слева) не всегда корректно отрисовывает криволинейные границы детали (не видна образующая цилиндрической поверхности)

невозможность формирования сечений (последние выглядят как совокупность точек, образующихся в местах пересечения ребер модели с плоскостью сечения);

невозможность получения тонированного фотореалистического изображения.

Поверхностная графика при создании трехмерного изображения оперирует с различными поверхностями, а также с принадлежащими последним точками и линиями.

Преимуществами поверхностной графики являются:

возможность распознавания всех криволинейных поверхностей модели;

возможность установления взаимного расположения поверхностей;

возможность получения тонированных фотореалистических изображений;

однозначное восприятие пространственной ориентации модели;

возможность (ограниченная) взаимодействия с САМ-системами;

умеренный размер файла, содержащего модель, отрисованную средствами поверхностной графики;

приемлемое время регенерации чертежа.

К недостаткам поверхностной графики относят некорректное определение инерционных характеристик модели.

Разновидности поверхностей, с которыми оперирует поверхностная графика, показаны на рис. 17.28.

Базовые поверхности формируются как след графического примитива (например, отрезка), совершающего поступательное движение.

Регулярные поверхности формируются при непоступательном движении примитива. Как частный случай регулярных поверхностей рассматриваются поверхности вращения, которые формируются как след графического примитива при вращении последнего вокруг неподвижной оси (рис. 17.29).

Математические поверхности описываются тем или иным уравнением  $f(x, y, z) = 0$ , связывающим три координаты произвольной точки, принадлежащей поверхности.

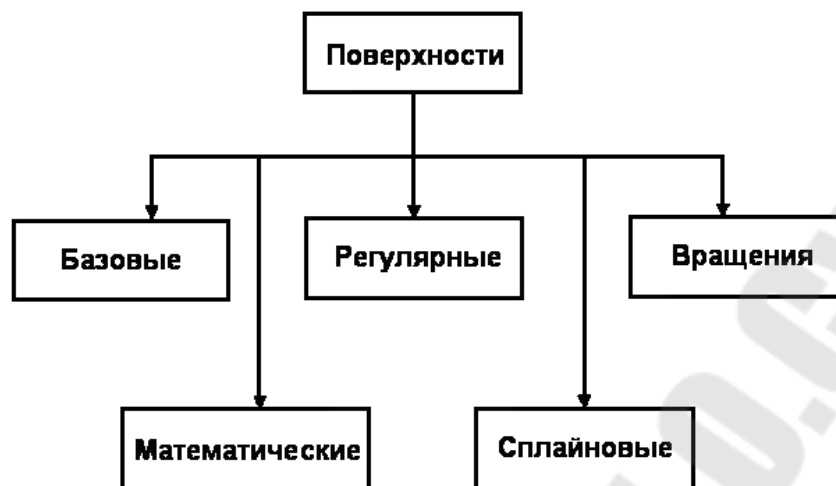


Рис.17.29. Виды поверхностей



Рис. 17.29. Поверхность вращения (справа), сформированная при помощи криволинейной составной образующей и оси вращения

Наиболее сложными являются сплайновые поверхности, которые также называют поверхностями сопряжения, скульптурными поверхностями. Так, если необходимо осуществить плавное сопряжение, например, цилиндра и прямоугольного параллелепипеда (рис. 17.30), будут вычислены координаты точек, принадлежащих сплайновым поверхностям ABCD, BDGE и пр., в результате чего образуются показанные на том же рисунке поверхности переменной кривизны.

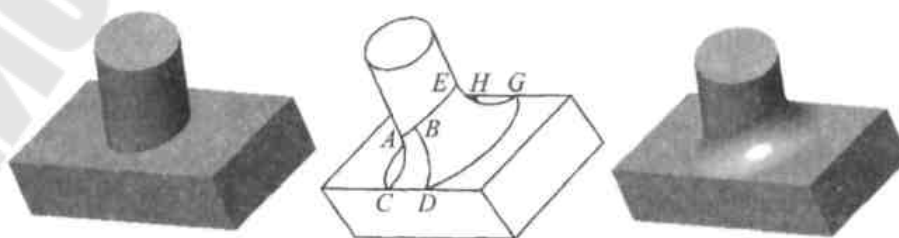


Рис. 17.30. Пример применения онлайн-поверхностей сопряжения

Сплайн-функции относятся к типу интерполирующих. Как правило, в САПР используются кубические сплайны, составленные из кусков кубических полиномов  $y_1 = f(x), y_2 = f(x)$  и т.д., обладающих равенством значений, а также значений 1-й и 2-й производных ( $y_1', y_2', y_1'', y_2''$ ) в граничных узлах. Основанием для нахождения сплайна является условие минимизации на области определения  $x \in [x_1, x_2]$  некоторого функционала  $\int_{x_1}^{x_2} [y''(x)]^2 dx \rightarrow \min$ .

К настоящему времени различными фирмами разработано достаточно большое количество программных продуктов, реализующих трехмерную графику. В связи с этим перед пользователями часто встает проблема выбора, который должен осуществляться с учетом того, какие задачи предполагается впоследствии решать. В любом случае система должна обеспечивать: максимальную автоматизацию работы; возможность обеспечения стандартного формата хранения данных; возможность обучения персонала, квалифицированной технической и информационной поддержки со стороны разработчика или дилера; преемственность (поддержку информации, созданной более ранними версиями системы, постоянство математического ядра); долговечность; универсальность; окупаемость и пр.

Многие современные системы удовлетворяют этим требованиям, а потому выбор того или иного программного обеспечения в значительной степени базируется пока, в том числе, и на субъективных оценках пользователя. Немаловажным фактором является стоимость программных продуктов.

Многие современные программные продукты имеют возможность отрисовки различных поверхностей (табл. 17.1). Так, на рис. 17.31 показана соответствующая инструментальная панель графического редактора AutoCAD, пиктограммные кнопки на которой (слева направо) активизируют команды отрисовки плоской многоугольной поверхности;



Рис. 17.31. Инструментальная панель графического редактора для отрисовки поверхностей



Таблица 17.1

## Сравнение некоторых современных САД-систем

Показатели	Au to-desk Inventor	T- Flex CAD 3D	Ко мпас 3D
Дружественный интерфейс	5	3	4
Быстрота создания простых деталей	4	5	4
Быстрота создания сложных деталей	5	2	4
Возможность создания документации в соответствии с ГОСТ	3	5	4
Быстрота создания чертежей по готовой модели	5	1	2
Возможность экспорта-импорта	Равноценные		
Параметризация	4	5	3
Организация процесса моделирования	5	1	2
Наличие сбоев при разработке сложных моделей	4	2	3
Размер файла сохраненной модели	3	2	3

Примечание: 5 – отлично; 4 – хорошо; 3 – посредственно; 2 – плохо; 1 – очень плохо.

плоской грани; пустотелых параллелепипеда (ящика), призмы (клина), пирамиды, конуса, сферы, купола (полусфера выпуклостью вверх), чаши (полусфера выпуклостью вниз), тора (рис. 17.32); кромки; трехмерной сети; поверхностей вращения, сдвига; разновидностей поверхностей сопряжения - поверхности соединения и поверхности Кунса (рис. 17.33), строящейся на четырех заранее отрисованных линиях любого типа, которая широко применяется при наглядном изображении разнообразных поверхностей равного уровня, например, в задачах оптимизации.

Наиболее сложным (и одновременно достоверным) видом трехмерной графики является объемная. По способу создания и последующего хранения информации об объемном теле этот вид графики подразделяется на C-гер<sup>1</sup> и B-гер графику.

В C-гер графике трехмерное объемное изображение строится из трехмерных графических примитивов и редакторских действий над ними (к числу последних, помимо перечисленных выше средств редактирования плоских изображений, добавляются специфические действия на основе булевой алгебры).

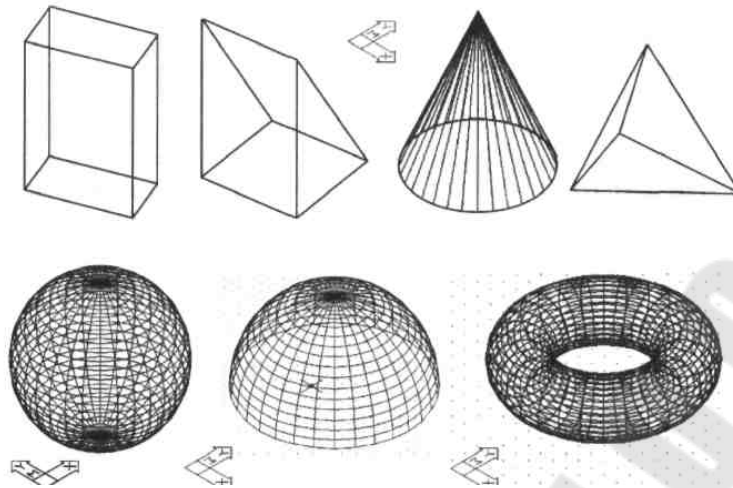


Рис. 17.32. Примеры отрисованных поверхностей ящика, клина, конуса, пирамиды, сферы, купола, тора

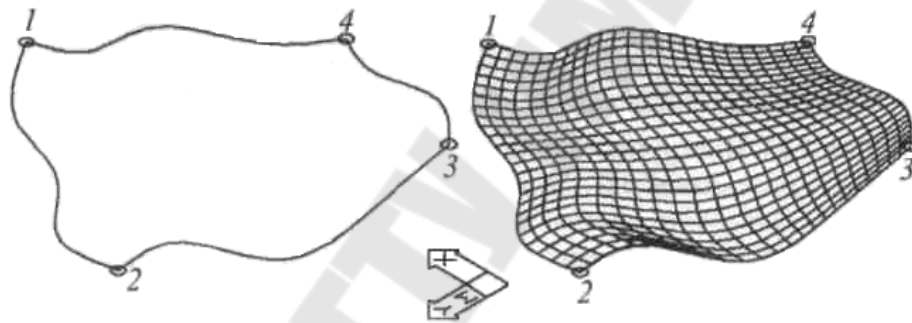


Рис. 17.33. Поверхность Кунса, построенная на четырех сплайновых линиях

Изображение объемного тела средствами В-гер графики происходит на основе так называемых твердотельных операций над плоскими замкнутыми контурами, или эскизами (Sketch), что, впрочем, не исключает последующего редактирования модели с применением операций булевой алгебры.

Эти две разновидности объемной графики привели, в конечном счете, к развитию двух основных платформ твердотельного моделирования, основывающихся на ядре ACIS или ядре Parasolid.

ACIS - это объектно-ориентированный пакет геометрического моделирования, разработанный фирмой Spatial Technology для использования в качестве геометрической основы в приложениях для трехмерного моделирования. ACIS предоставляет средство с открытой архитектурой для каркасного, поверхностного и твердотельного моделирования с общей, унифицированной структурой данных. ACIS

является объектно-ориентированной C++ библиотекой, состоящей из 35 DDL-компонентов (динамических библиотек).

Полный набор компонентов геометрического ядра включает:

сглаживание;

операции для локального изменения геометрии грани по предписанному пути с минимальными изменениями в топологии модели;

определение и удаление скрытых линий в твердотельных, поверхностных и каркасных моделях при точном отображении модели;

создание тонкостенных тел-оболочек путем переноса граней или построения из листов или на основе твердого тела;

динамическое изменение модели путем деформации пространства (с помощью охватывающей тело рамки, содержащей ручки, которые могут перемещаться мышью для динамического изгиба тела; подобное действие доступно в среде графического редактора AutoCAD - рис. 17.34);

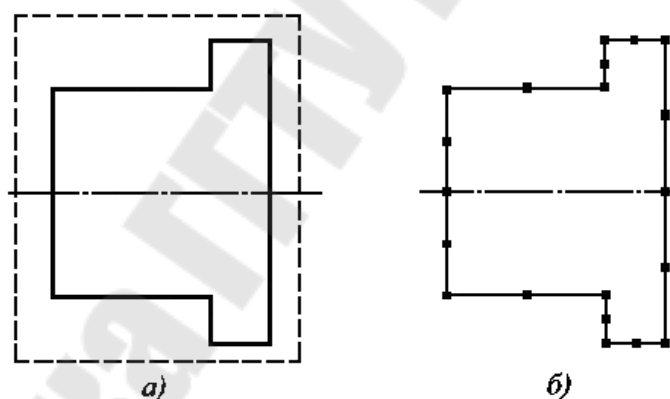


Рис. 17.34. Начало динамического изменения изображения

расширенное поверхностное моделирование при использовании «натягивания оболочек», лофтинга, сетевых поверхностей;

так называемая «клеточная топология», позволяющая разбить модель на маленькие подобласти, что помогает вносить изменения во фрагменты модели (например, изменение свойств материала части модели и пр.).

Если необходимо выполнить динамическое изменение модели в среде AutoCAD, то после отрисовки первоначального изображения фрагмент последнего, подлежащий динамическому изменению, обводится рамкой (на рис. 17.34, а последняя показана штриховой

линией), после чего попавшие в рамку графические примитивы считаются «выбранными», т. е. доступными для последующих редакторских действий (рис.17.34, б). Динамическое изменение производится при захвате «мышью» одной из так называемых «ручек» и перетаскивании последних в нужное место чертежа (рис. 17.34, а, 17.35, б).

Рассмотрим основные трехмерные графические примитивы.

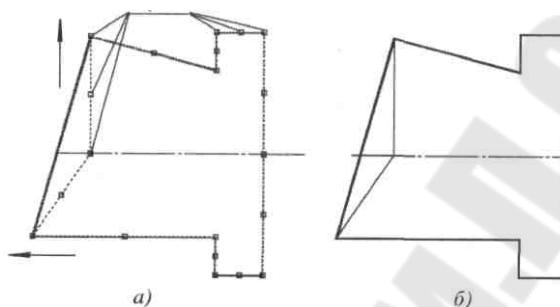


Рис. 17.35. Окончание динамического изменения изображения

### 17.6.2. 3-D графика в среде AutoCAD

На рис. 17.36 показана инструментальная панель, служащая для активизации команд построения (слева направо) параллелепипеда, шара, цилиндра (в том числе, полого), конуса (в том числе, усеченного), призмы (клина), тора. На эту же панель вынесены также пиктограммные кнопки команд выдавливания и вращения плоского контура (что относится уже к действиям В-гер графики).



Рис. 17.36. Панель команд для твердотельного моделирования

В С-гер графике каждый трехмерный графический примитив рассматривается и как множество. Совокупность графических примитивов и единое сплошное тело образуются в результате выполнения логических операций булевой алгебры.

Над совокупностями множеств (например, двух -  $A$  и  $B$ , рис. 17.37) выполняются операции булевой алгебры:

объединения (при этом образуется третье множество  $C1 = A \cup B$ , содержащее только уникальные элементы обоих исходных множеств);

вычитания (при этом результирующее множество  $C2 = A - B$  содержит уникальные элементы одного из множеств за исключением общих элементов);

пересечения (при этом результирующее множество  $C3 = A \cap B$  содержит только общие элементы обоих исходных множеств).

Рассмотрим сценарий построения способом С-гер показанной на рис. 17.38 детали. Первоначально следует построить два цилиндра диаметрами  $\varnothing 140$  мм и  $\varnothing 280$  мм и длинами соответственно 230 и 50 мм (на рис. 17.39 они условно показаны отдельно

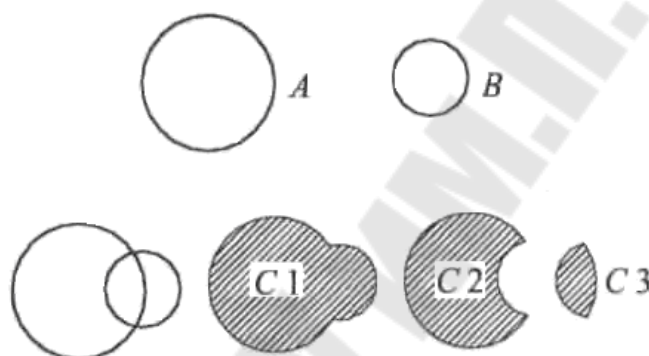


Рис.17.37. Логические действия булевой алгебры над множествами

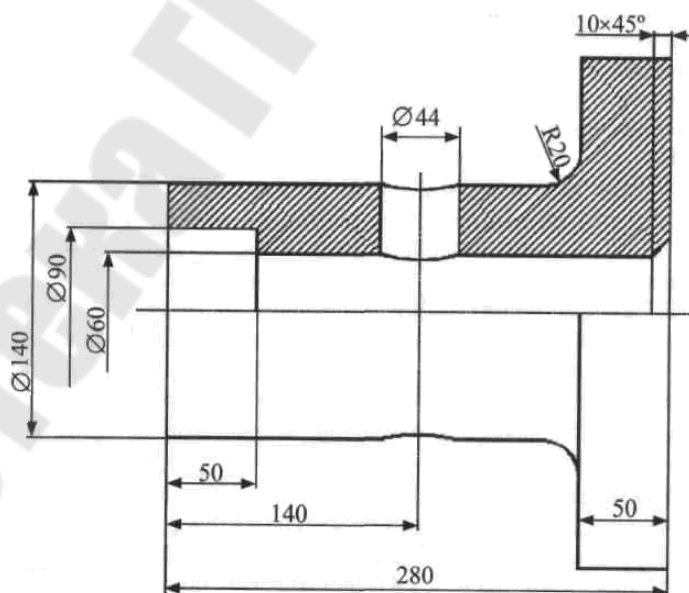


Рис.17.38. К примеру построения

друг от друга и обозначены номерами 1 и 2; в действительности эти два цилиндра должны иметь одну общую плоскость - плоскость

одного из оснований). Построение цилиндров осуществляется командой CYLINDER/ЦИЛИНДР с последующим указанием центра, радиуса основания и высоты.

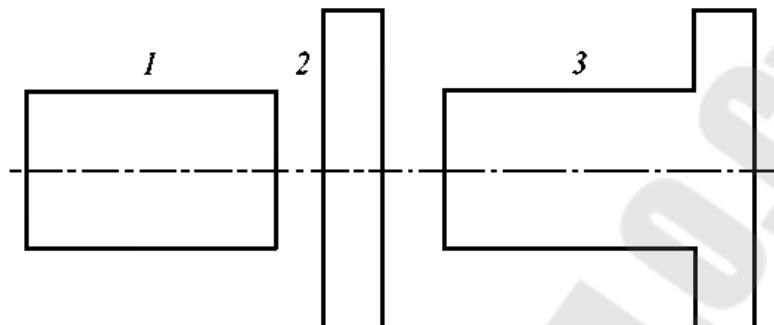


Рис.17.39. Первый этап построения детали

Логическая операция  $3 = 1 \cup 2$  приводит к образованию единого объема  $3$  (рис. 17.40). Объединение производится командой UNION/ОБЪЕДИНИ с последующим указанием объединяемых объектов. Полученный объем  $3$  является новым графическим примитивом, а входящие в него исходные объемы не могут быть отредактированы по отдельности друг от друга.

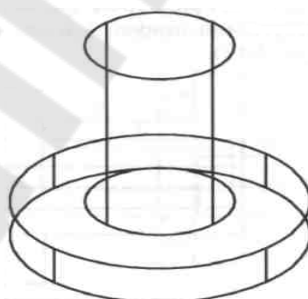


Рис.17.40. Каркасное изображение детали после выполнения первого этапа построения

Далее следует построить объем  $4$  в виде соосного с построенным объемом  $3$  цилиндра диаметром  $\varnothing 60$  мм. Поскольку этот объем впоследствии будет вычитаться из объема  $3$ , его длина не имеет значения (разумеется, длина цилиндра  $4$  должна быть больше длины объема  $3$ ). Упомянутое вычитание объемов (для этого используется команда SUBTRACT/ВЫЧТИ) приводит к получению нового объема  $5 = 3 - 4$  (рис. 17.41).

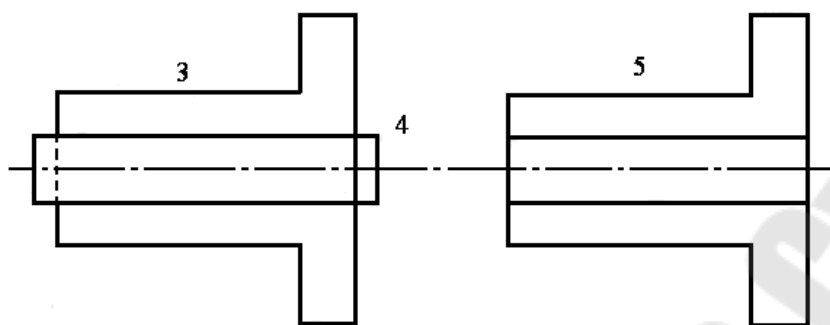


Рис. 17.41. Второй этап построения детали

Впоследствии аналогично формируется объем 6. Однако в отличие от предыдущего построения его высота должна быть задана такой, чтобы его заглубление в объем 5 со стороны левого торца было равно 50 мм. Вычитание объемов 5 и 6 приводит к построению нового объема 7 (рис.17.42).

Фаска размером  $10 \times 45^\circ$  справа может быть сформирована при построении конуса 8 и его последующем вычитании из объема 7 (рис. 17.43).

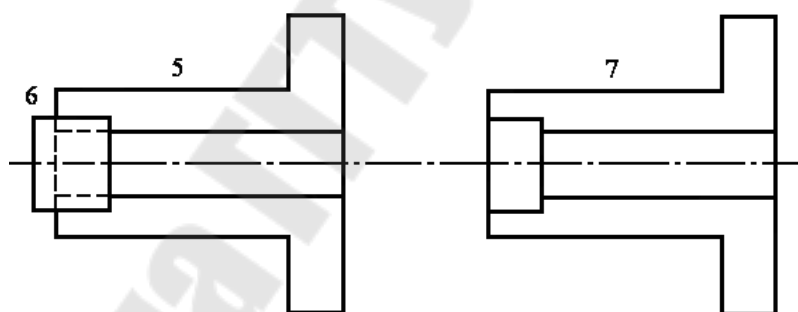


Рис. 17.42. Эскиз детали третьего этапа построения

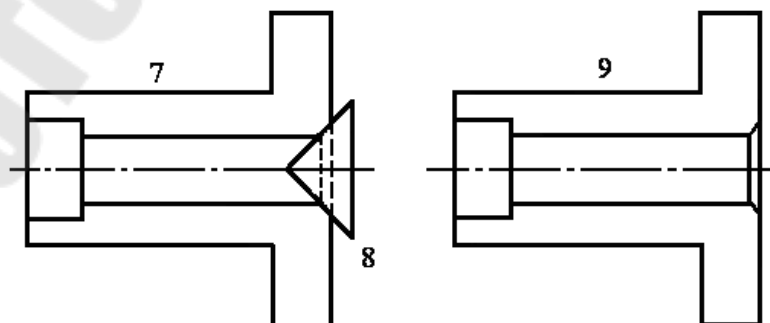


Рис. 17.43. Эскиз детали четвертого этапа построения

Наиболее сложным в построении рассматриваемой детали является формирование сопряжения двух цилиндров радиусом R20 мм. Для этого первоначально может быть построен полый цилиндр 10, внутренний диаметр которого равен наружному диаметру цилиндра 1 (т.е.  $\varnothing 140$  мм - см. рис.17.39), наружный диаметр равен  $\varnothing 220$  мм, а высота равна 40 мм. Эти размеры выбраны в связи с тем, что далее следует сформировать объем в виде тора 11, боковая поверхность которого касалась бы цилиндрической поверхности цилиндра 1 и торцевой поверхности цилиндра 2 (рис.17.44).

Тор формируется при помощи команды TORUS/TOP с последующим указанием центра тора, основного радиуса и радиуса трубы. Заметим, что сформированные цилиндр 10 и тор 11 пока не объединяются с объемом 9. Напротив, следует вычитание тора из объема цилиндра 10, в результате чего образуются объемы 13 (на рис. 17.45 слева они заштрихованы).

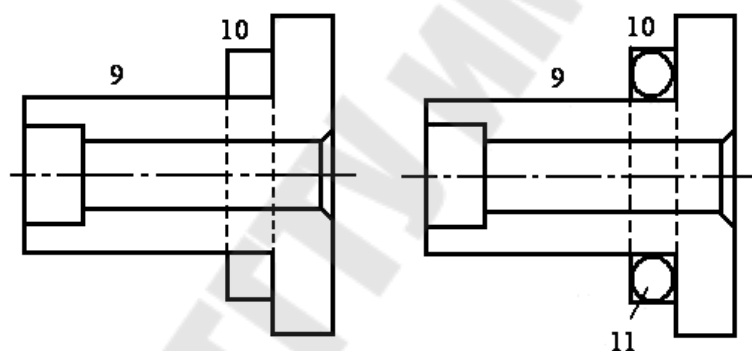


Рис. 17.44. Эскиз детали пятого этапа построения

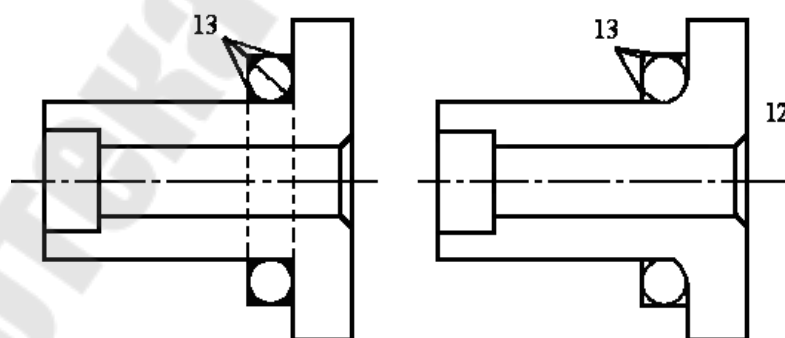


Рис. 17.45. Эскиз детали шестого этапа построения

Один из них (примыкающий к боковой поверхности цилиндра 1 и торцевой поверхности цилиндра 2) объединяется далее с объемом 9, а остальные объемы - результат вычитания тора - удаляются. В итоге этих действий получаем объем 12.



На последнем этапе построения детали формируется объем 14 в форме цилиндра диаметром  $\varnothing 44$  мм, который вычитается из объема 12 (рис. 17.46).

Разумеется, этот способ построения отличается громоздкостью и для деталей, подобных рассмотренной, по-видимому, менее целесообразен по сравнению с построением методом В-гер графики. В последнем случае необходимо сформировать поперечное сечение тела (без отверстия диаметром  $\varnothing 44$  мм) и осуществить операцию вращения этого сечения вокруг горизонтальной оси (рис. 17.47) на угол  $360^\circ$ . Завершение построения аналогично рассмотренному выше.

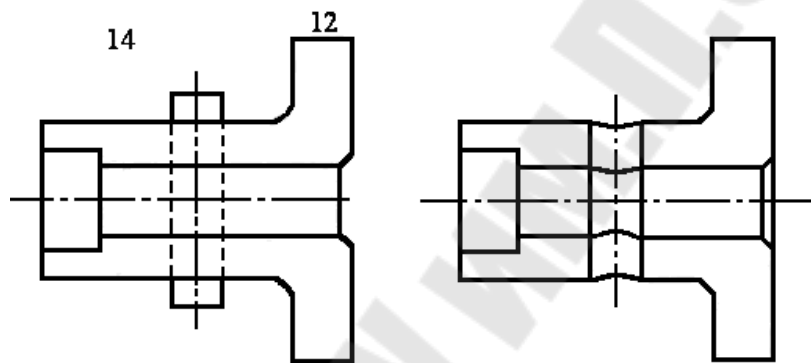


Рис. 17.46. Эскиз детали седьмого этапа построения

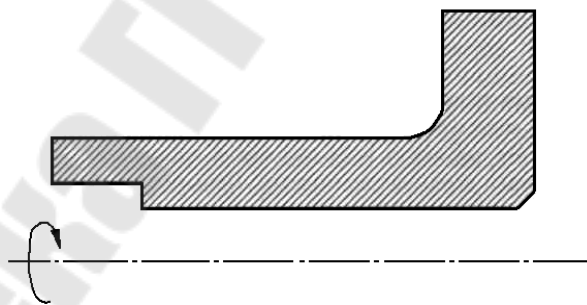


Рис. 17.47. Эскиз детали начала построения способом В-гер графики

Следует обратить внимание на то, что контуры, подвергаемые вращению и выдавливанию в В-гер графике, обязательно должны быть замкнутыми и не иметь самопересечений (рис. 17.48). Кроме того, эти контуры должны быть образованы едиными полилиниями (для их получения из предварительно отрисованных отдельных графических примитивов в среде AutoCAD может быть использована команда PEDIT/ПОЛПРЕД).

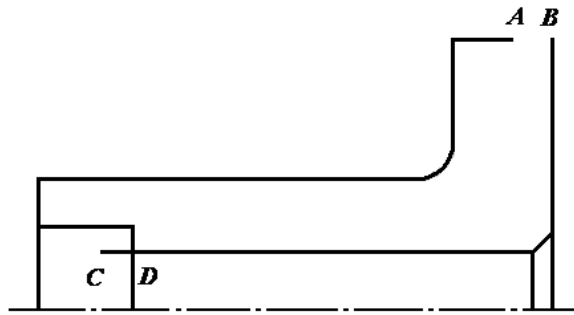


Рис. 17.48. Причины невыполнения команд вращения и выдавливания:  
открытость контура А-В и самопересечение С-Д

### 17.6.3. 3-D моделирование в среде КОМПАС

Создание трехмерной модели тел вращения предполагает выполнение ряда этапов.

*Первый этап – переход в режим создания трехмерной модели:*

щелкните в главном меню системы КОМПАС-3D по пункту **Файл**. Появится выпадающее меню;

щелкните в выпадающем меню по пункту **Создать**, или нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+N**, или щелкните по кнопке – **Создать** – первой кнопке в панели инструментов **Стандартная**. Появится диалоговое окно **Новый документ**;

щелкните в диалоговом окне **Новый документ** на вкладке **Новые документы** по пункту **Деталь**, появится главное окно системы КОМПАС-3D, настроенное на создание трехмерной детали.

Допустим, что нам надо построить трехмерную модель вал-шестерня (см. рис. 17.49).

*Второй этап – построение элементов внешнего контура трехмерной модели.*

К основным элементам внешнего контура относятся:

- цилиндрическая ступень;
- коническая ступень;
- шестигранник;
- многогранник;
- квадрат;
- шестерни цилиндрической зубчатой передачи.

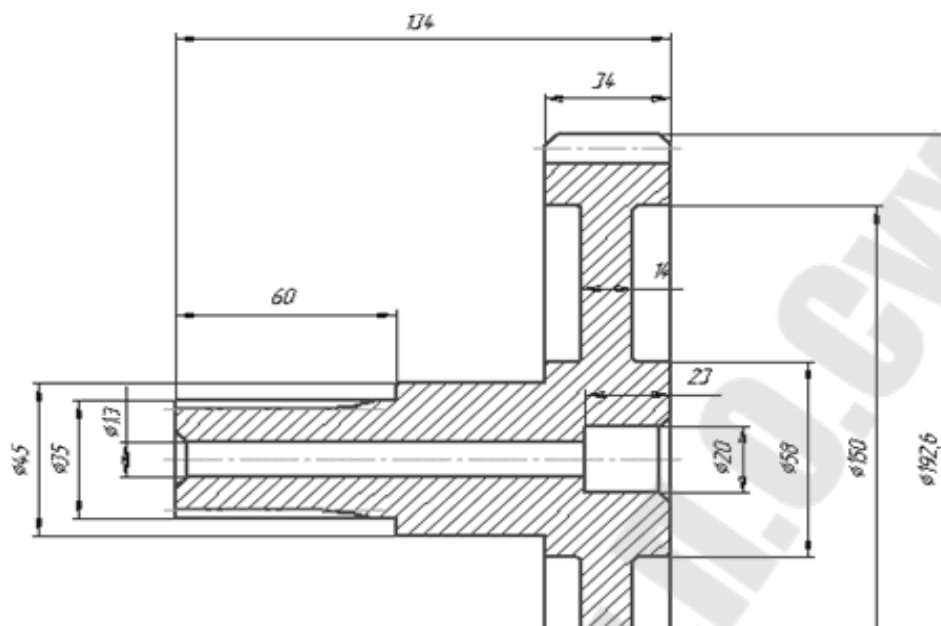


Рис. 17.49. Модель вал-шестерня, предлагаемая для построения

Этот этап включает несколько шагов.

*Первый шаг – построение внешнего контура первой цилиндрической ступени трехмерной модели:*

щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 11.43) по пункту **Внешняя цилиндрическая ступень**. В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка: **Укажите плоскость и плоскую грань**;

щелкните в **Дереве построения** по нужной вам плоскости, например по плоскости **ZY**. Появится диалоговое окно **Цилиндрическая ступень**, см.рис. 17.50.

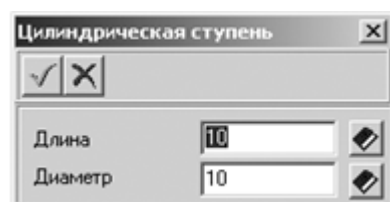


Рис. 17.50. Диалоговое окно Цилиндрическая ступень

Диалоговое окно **Цилиндрическая ступень** имеет панель инструментов, которая включает ряд кнопок управления:

– **ОК**;

– **Отмена**;

введите в поле **Длина** длину первой ступени (см. рис. 17.49), равную 60. Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

введите в поле **Диаметр** диаметр первой ступени, равный 35;

щелкните на панели инструментов по кнопке  – **ОК**. Появится внешний контур первой цилиндрической ступени трехмерной модели, см. рис. 17.51.

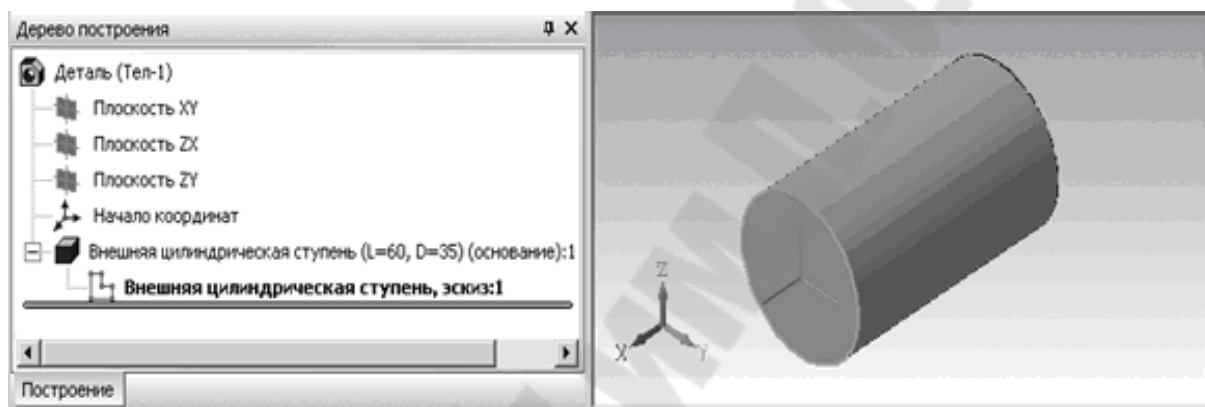


Рис. 17.51. Дерево построения и внешний контур первой цилиндрической ступени трехмерной модели

Одновременно в **Дереве построения** появятся соответствующие ветви первого построенного элемента.

*Второй шаг – подготовка к построению внешнего контура второй цилиндрической ступени трехмерной модели.*

Вторая цилиндрическая ступень модели должна начинаться от торца только что созданной первой ступени модели, но этот торец, эта грань пока не видна.

*Для обеспечения видимости нужного нам торца (грани) первой ступени:*

щелкните на панели инструментов системы КОМПАС-3D по кнопке – **Повернуть**. Указатель мыши преобразуется в знак поворота;

переместите указатель мыши к грани, которая нужна, но не видна;

нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, перемещайте указатель

мыши так, чтобы стала видна нужная нам грань торца первой ступени. Возможное состояние первой цилиндрической ступени после поворота показано на рис. 17.52.

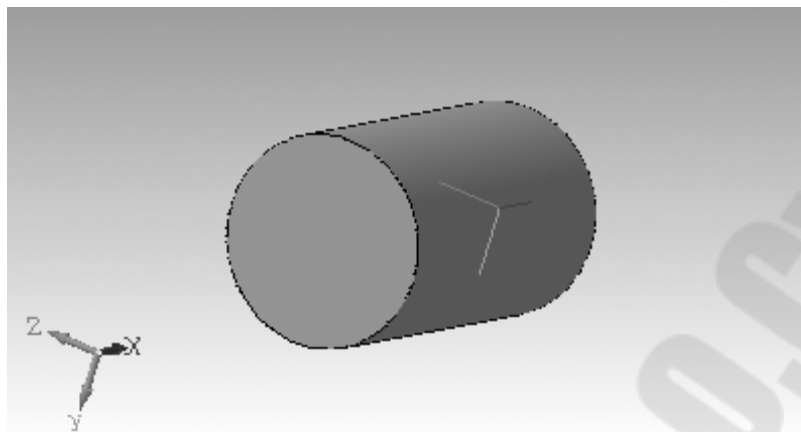


Рис. 17.52. Возможное состояние первой цилиндрической ступени после поворота

*Третий шаг – построение внешнего контура второй цилиндрической ступени трехмерной модели:*

щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 17.49) по пункту **Внешняя цилиндрическая ступень**. В строке сообщений системы КОМПАС\_3D появится подсказка: **Укажите плоскость и плоскую грань**;

переместите указатель мыши на торец, от которого должна начинаться вторая цилиндрическая ступень. Внешний контур торца первой трехмерной цилиндрической ступени выделится;

щелкните по выделенному торцу мышью. Торцы будут выделены зеленым цветом. Появится диалоговое окно **Цилиндрическая ступень** (см.рис. 17.50);

введите в поле **Длина** длину второй ступени (см. рис. 17.49), равную 40. Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

Система проектирования трехмерных тел вращения – КОМПАС-SHAFT 3D

введите в поле **Диаметр** диаметр второй ступени, равный 45;

щелкните на панели инструментов по кнопке  – **ОК**. Появится внешний контур трехмерной модели второй ступени, см. рис. 17.53. Одновременно в **Дереве построения** появятся соответствующие ветви второго построенного элемента.

*Четвертый шаг – построение внешнего контура цилиндрической шестерни трехмерной модели:*

щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 17.49) по пункту **Шестерня цилиндрической зубчатой передачи**. В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка:

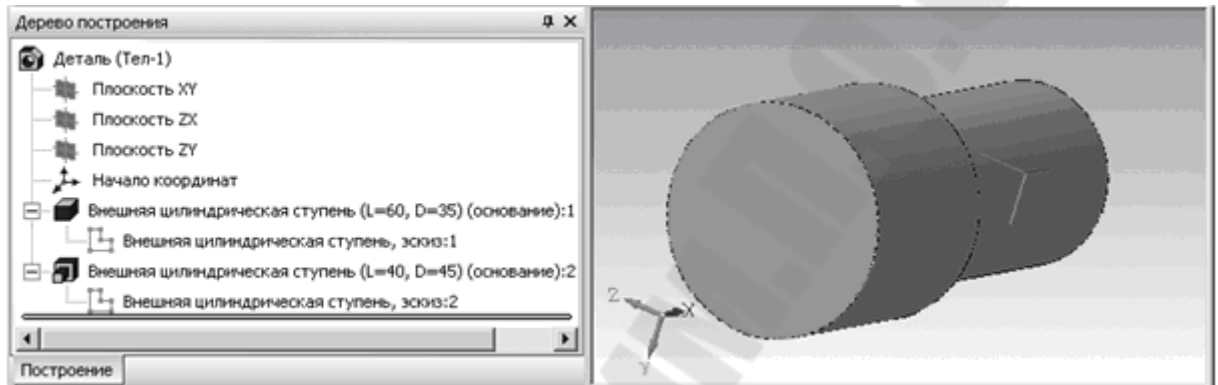


Рис. 17.53. Дерево построения и внешний контур первой и второй ступеней трехмерной модели

**Укажите плоскость и плоскую грань;**

переместите указатель мыши на торец, к которому должна быть пристыкована шестерня. Внешний контур торца второй ступени модели выделится;

щелкните по выделенному торцу мышью. Торце будет выделен зеленым цветом.

Появится главное окно системы **Цилиндрическая шестерня с внешними зубьями**, см. рис. 17.54.

В верхней части окна находится панель инструментов. Она включает в себя две кнопки:

– **ОК**;

– **Отмена**.

Для перемещения между полями ввода значений параметров можно пользоваться клавишей **Tab**.

Если расчет выполняется в первый раз, то поля, содержащие параметры шестерни, неактивны и содержат нулевые значения.

*Для ввода параметров шестерни:*

введите в разделе **Количество расчетных точек** в поле **Рабочей поверхности зуба** количество расчетных точек на рабочей поверхности зубьев, например 10;

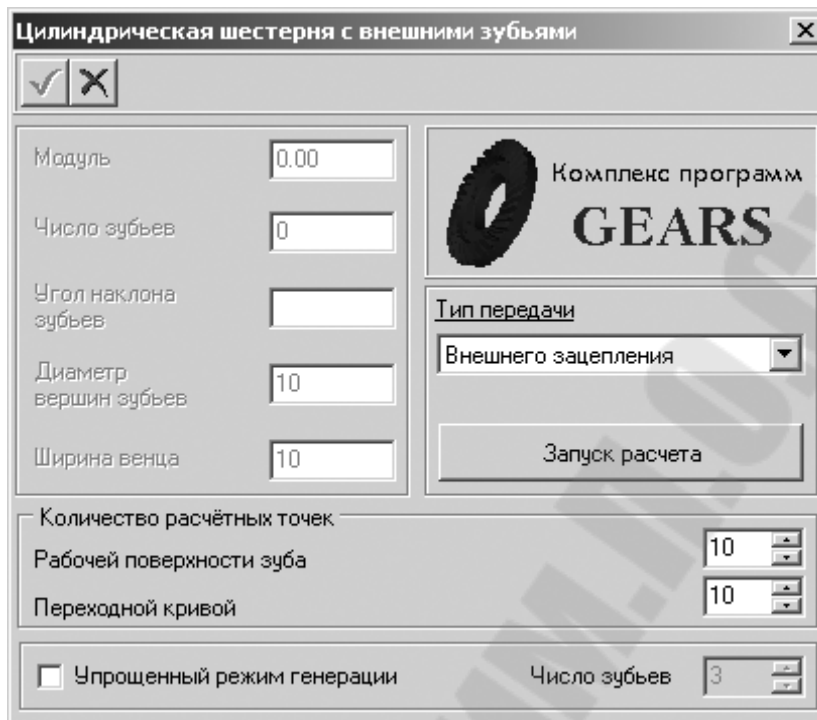


Рис. 17.54. Главное окно системы **Цилиндрическая шестерня с внешними зубьями**

введите в разделе **Количество расчетных точек** в поле **Переходной кривой зуба** количество расчетных точек на переходной кривой, например 10. Эти параметры будут влиять на точность отрисовки линии эвольвенты при построении профиля зуба модели. Чем больше размер зуба, тем большее количество точек нужно задать, чтобы построить плавную линию профиля зуба.

Если отсутствует необходимость генерации всех зубьев модели шестерни,

включите флажок **Упрощенный режим генерации** и задайте число зубьев, например 3, которые будут построены на модели;

щелкните по кнопке **Запуск расчета**. Появится начальное окно системы **Расчеты цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления**, см. рис. 17.55;

Система проектирования трехмерных тел вращения – КОМПАС\_SHAFT 3D

щелкните в начальном окне системы **Расчеты цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления** по кнопке **Геометрический расчет**. Появится диалоговое окно **Варианты расчета**, см. рис. 17.56;

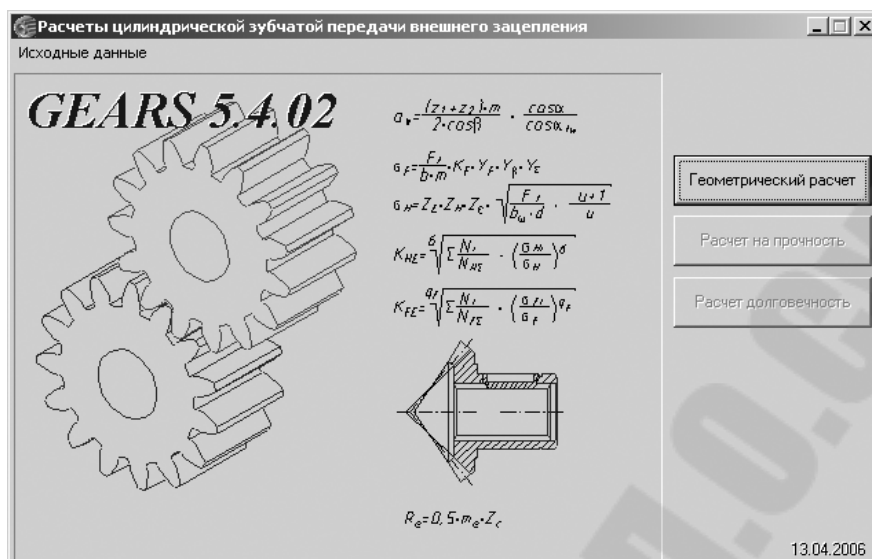


Рис.17.55. Начальное окно системы **Расчеты цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления**

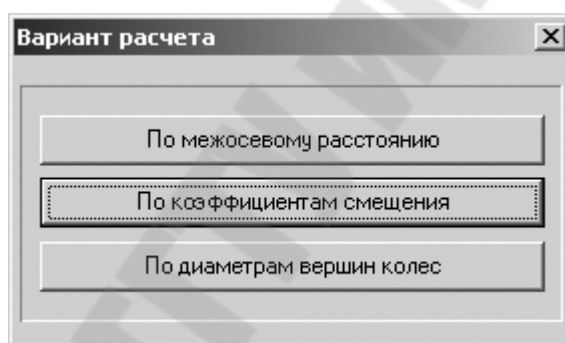


Рис.17.56. Начальное окно системы **Расчеты цилиндрической зубчатой передачи внешнего зацепления**

- щелкните по варианту **По межосевому расстоянию**. Появится диалоговое окно **Геометрический расчет** с раскрытой вкладкой **Страница 1**, см. рис. 17.57;
- введите на вкладке **Страница 1**, например, те параметры, которые приведены на рис. 17.57. Появится вкладка **Страница 2**;
- щелкните по вкладке **Страница 2** для ее открытия;
- введите на вкладке **Страница 2**, например, те параметры, которые приведены на рис. 17.58;
- щелкните в диалоговом окне **Геометрический расчет** с раскрытой вкладкой **Страница 2** на панели инструментов по кнопке – **Расчет**. В нижней части вкладки в разделе **Ход расчета** появится сообщение: **Контролируемые, измерительные параметры и параметры качества зацепления в норме**;



Геометрический расчет		
Страница 1   Страница 2   Предмет расчета		
Параметры	Ведущее колесо	Ведомое колесо
1. Число зубьев	25	50
2. Модуль, мм	2.000	
3. Угол наклона зубьев, °	0 ° 0 ' 0 "	
4. Угол профиля зубьев, °	20 ° 0 ' 0 "	
5. Коэффициент высоты головки зуба	1	
6. Коэффициент радиального зазора	0.25	
7. Коэффициент радиуса кривизны переходной кривой в граничной точке профиля зуба	0.38	
8. Ширина зубчатого венца, мм	15	20
9. Межосевое расстояние, мм	75	
10. Диаметр ролика, мм	3.464	3.464
11. Вид обработки	рейка	рейка
12. Характеристика инструмента		
13. Направление спирали зуба ведущего колеса	прямое	

Рис. 17.57. Диалоговое окно **Геометрический расчет** с раскрытой вкладкой **Страница 1**

□ щелкните на панели инструментов окна **Геометрический расчет** по кнопке **Закончить расчеты**. Откроется диалоговое окно **Выбор объекта построения**, см. рис. 17.59;

Геометрический расчет		
Страница 1   Страница 2   Предмет расчета		
Параметры	Ведущее колесо	Ведомое колесо
Степень точности	7-C	7-C
Суммарный коэффициент смещения	0	
Коэффициент смещения исходного контура	0.541	-0.541
Внешний диаметр вершин зубьев, мм	56.164	101.836
Диаметр вершин зубьев со срезом, мм	56.164	101.836
Ход расчета		

Рис. 17.58. Диалоговое окно **Геометрический расчет** с раскрытой вкладкой

Страница 2 и введенными исходными значениями рассчитываемой передачи

выберите объект для построения. Включите переключатель **Колесо  $Z = 50$** ;

щелкните по кнопке **ОК**. Откроется система **Цилиндрическая шестерня с внешними зубьями**, в левой части которой будут приведены геометрические параметры объекта, выбранного для построения (рис. 17.60);

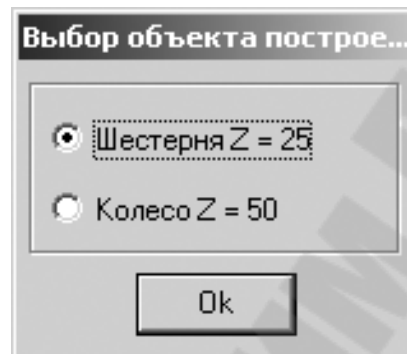


Рис. 17.59. Диалоговое окно **Выбор объекта построения**

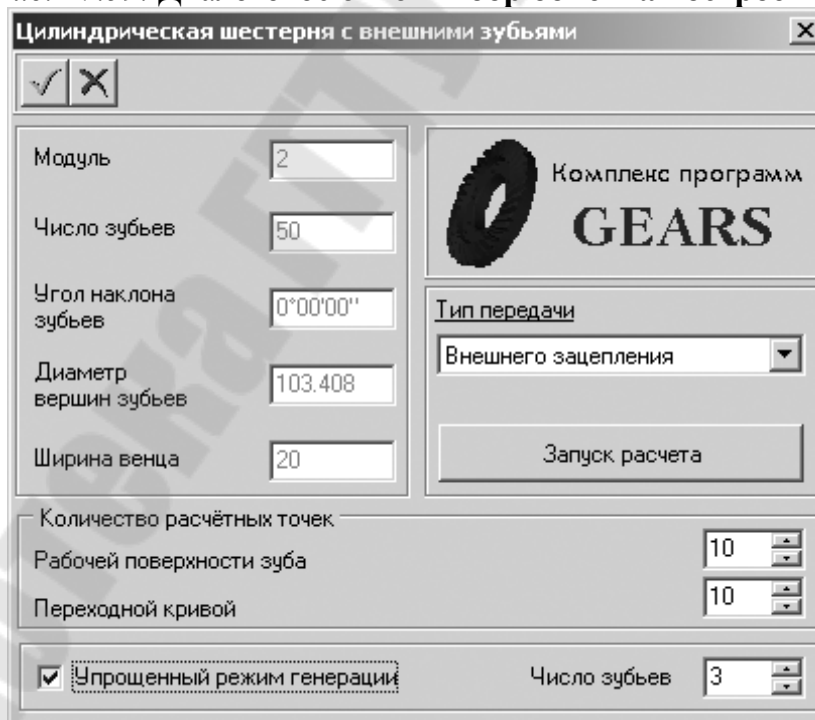


Рис. 17.60. Система **Цилиндрическая шестерня с внешними зубьями**

щелкните на панели инструментов по кнопке **ОК**, чтобы построить модель шестерни с рассчитанными параметрами. Для

отказа от построения щелкните по кнопке **Отмена**. Появится трехмерная модель элемента – зубчатое колесо, см. рис. 17.61.

Для цилиндрической и конической шестерни могут быть построены дополнительные элементы – кольцевые пазы.

*Пятый шаг – построение кольцевых пазов на шестерне:*

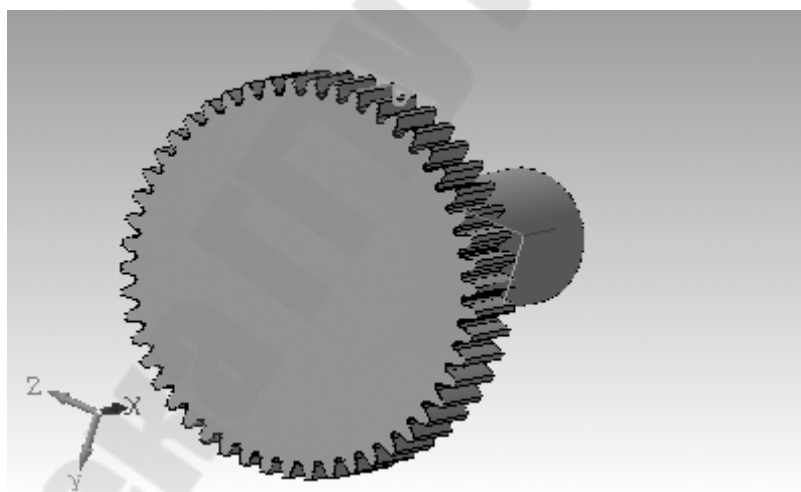
- щелкните дважды в окне системы управления библиотеками

### **Менеджер**

**библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 17.49) по пункту **Кольцевой паз, тип 1**. В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка: **Укажите плоскую грань;**

- переместите указатель мыши на грань, на которой должен быть создан кольцевой паз. Внешний контур торца шестерни выделится;

- щелкните по грани шестерни. Указанная грань будет выделена зеленым цветом.



*Рис. 17.61.* Трехмерная модель элемента – зубчатое колесо

Появится диалоговое окно **Кольцевой паз, тип 1**, см. рис. 17.62;

- установите флажок **Создать симметричный паз;**
- щелкните по кнопке **ОК**. Появятся искомые кольцевые пазы, см. рис. 17.63;

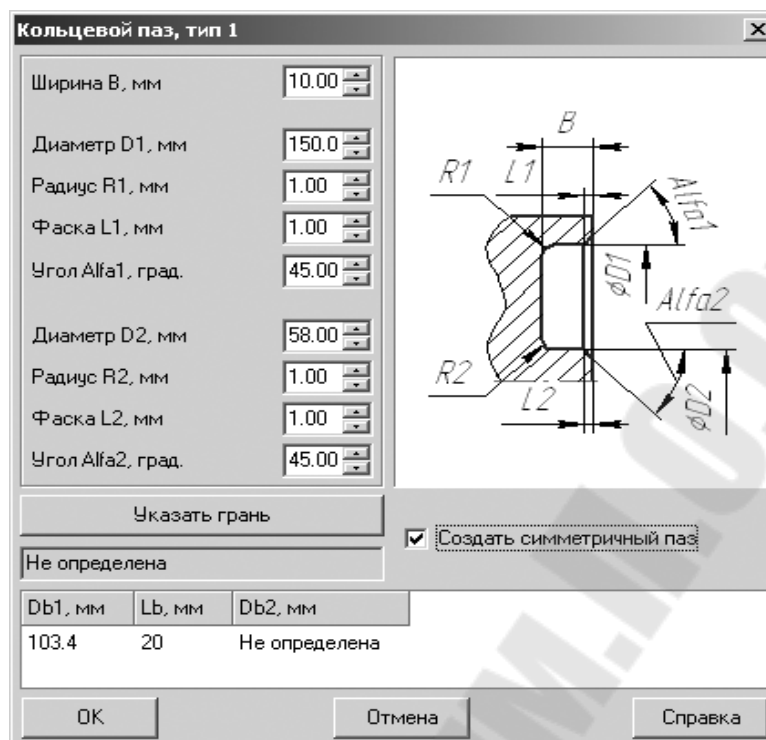


Рис. 17.62. Диалоговое окно **Кольцевой паз, тип 1**

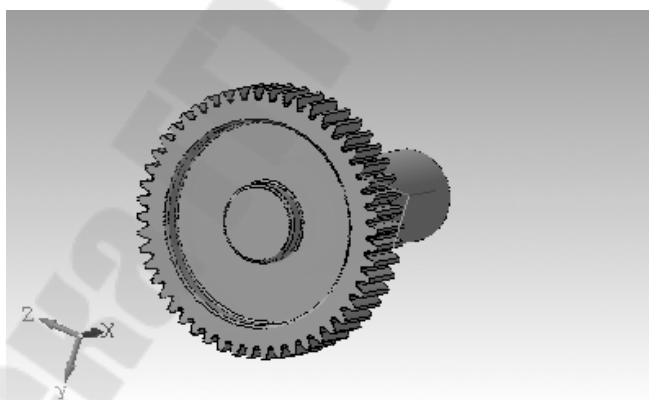


Рис. 17.63. Результат построения кольцевых пазов на цилиндрической шестерне

*Шестой шаг – построение первого внутреннего контура цилиндрической ступени трехмерной модели в торце шестерни:*

□ щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой **КОМПАС\_SHAFT 3D** (см. рис. 17.49) по пункту **Внутренняя**

**цилиндрическая ступень.** В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка: **Укажите плоскую грань;**

переместите указатель мыши на плоскую грань торца шестерни. Внешний контур торца шестерни выделится;

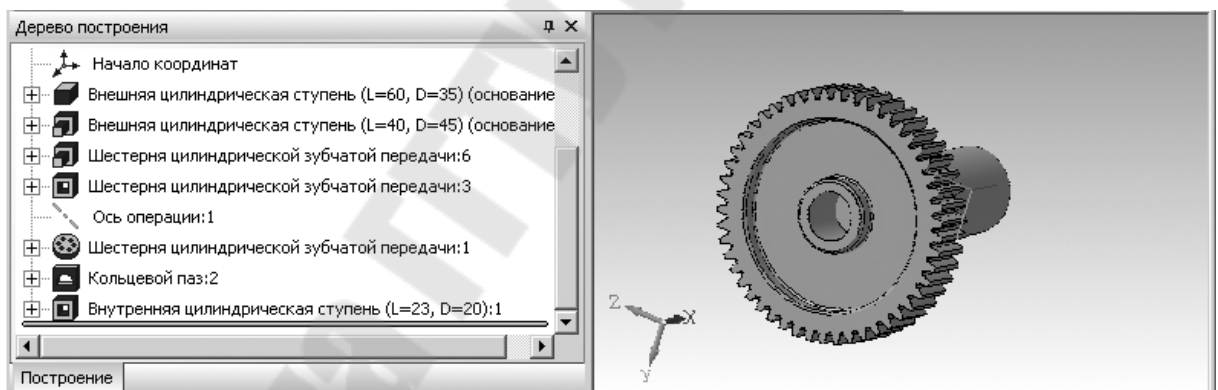
Система проектирования трехмерных тел вращения – КОМПАС-SHAFT 3D

щелкните по внутренней плоской грани торца шестерни. Появится диалоговое окно **Цилиндрическая ступень** (см. рис. 17.50);

введите в поле **Длина** длину первой внутренней цилиндрической ступени (см. рис. 17.49), равную 23. Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

введите в поле **Диаметр** диаметр первой внутренней ступени, равный 20;

щелкните на панели инструментов по кнопке – **ОК**. Появится внутренний контур первой цилиндрической ступени трехмерной модели, см. рис. 17.64. Одновременно в **Дереве построения** появятся соответствующие ветви построенного элемента.



*Рис. 17.64. Дерево построения и внутренний контур первой цилиндрической ступени трехмерной модели*

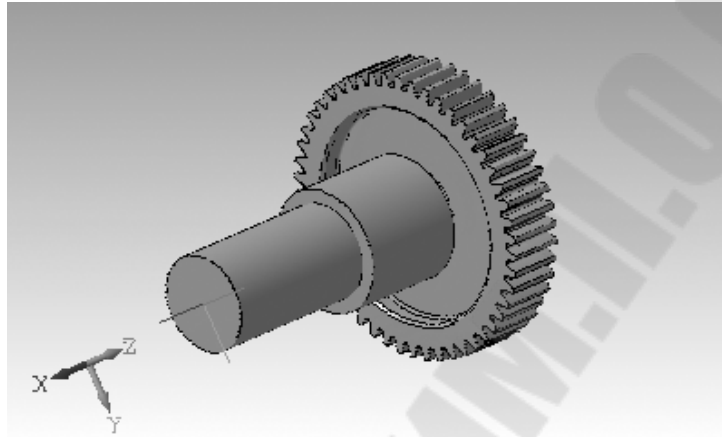
*Седьмой шаг – построение второй внутренней цилиндрической ступени трехмерной модели в торце первой ступени.*

Вторая внутренняя цилиндрическая ступень модели должна начинаться от торца первой цилиндрической ступени модели, но этот торец – эта грань пока не видна.

*Для обеспечения видимости торца (грани) первой ступени:*

щелкните на панели инструментов системы КОМПАС-3D по кнопке – **Повернуть**. Указатель мыши преобразуется в знак поворота;

- переметите указатель мыши к грани, которая нужна, но не видна;
- нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, перемещайте указатель мыши так, что стала видна нужная нам грань торца первой ступени. Возможное состояние первой цилиндрической ступени после поворота показано на рис. 17.65;



*Рис. 17.65.* Возможное состояние создаваемой трехмерной модели после ее поворота

- щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 17.49) по пункту **Внутренняя цилиндрическая ступень**. В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка: **Укажите плоскую грань**;
- переместите указатель мыши на плоскую грань торца шестерни. Внешний контур торца шестерни выделится;
- щелкните по внутренней плоской грани торца шестерни. Появится диалоговое окно **Цилиндрическая ступень** (см. рис. 17.50);
- введите в поле **Длина** длину второй внутренней цилиндрической ступени (см. рис. 17.49), равную 23. Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;
- введите в поле **Диаметр** диаметр второй внутренней ступени, равный 20;
- щелкните на панели инструментов по кнопке – **ОК**. Появится второй внутренний контур цилиндрической ступени трехмерной модели (рис. 17.66).

Одновременно в **Дереве построения** появятся соответствующие ветви построенного элемента.

Для цилиндрической и конической ступени внешнего контура могут быть построены дополнительные элементы:

- Канавки;
- Шлицы;

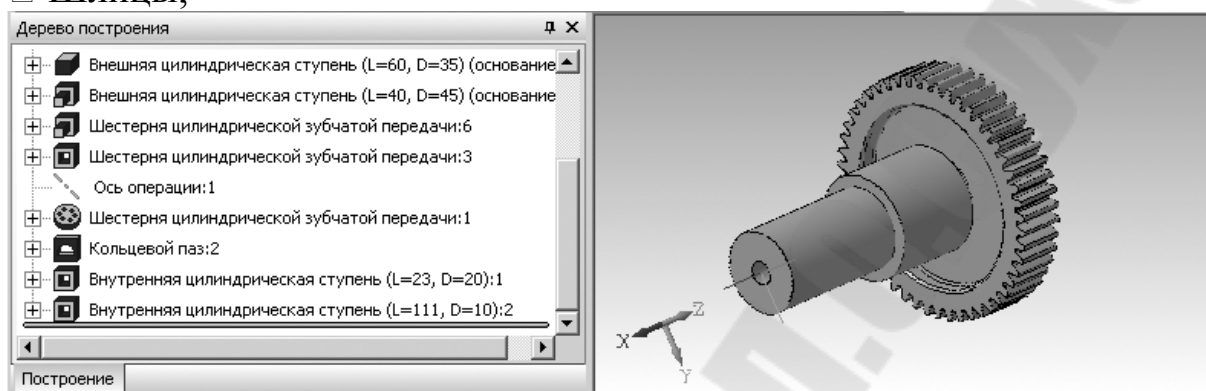


Рис. 17.66. Дерево построения и внутренняя цилиндрическая ступень трехмерной модели со стороны первой ступени

- Шпоночные пазы;
- Кольцевые пазы;
- Лыска (только для цилиндрической ступени).

Система проектирования трехмерных тел вращения – КОМПАС-SHAFT 3D

Дополнительные элементы ступени могут иметь разновидности. Например, шлицы: прямобочные, эвольвентные, треугольные.

*Восьмой шаг – ввод дополнительного элемента на первой ступени вала – Шлицы прямобочные:*

щелкните дважды в окне системы управления библиотеками **Менеджер библиотек** с добавленной и раскрытой системой КОМПАС-SHAFT 3D (см. рис. 17.49) по пункту **Шлицы прямобочные**. В строке сообщений системы КОМПАС-3D появится подсказка: **Укажите цилиндрическую поверхность;**

переместите указатель мыши на цилиндрическую поверхность первой ступени вала. Контур ее выделится;

щелкните по цилиндрической поверхности первой ступени вала. Появится диалоговое окно **Шлицы прямобочные** (рис. 17.67);

выберите из раскрывающегося списка **Шлицы** обозначения шлицев –6 . 28 . 34;

щелкните, а затем введите в поле **Длина шлицев L**, мм значение, равное 45.

Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

- введите в поле **Диаметр фрезы D1**, мм значение, равное 24.

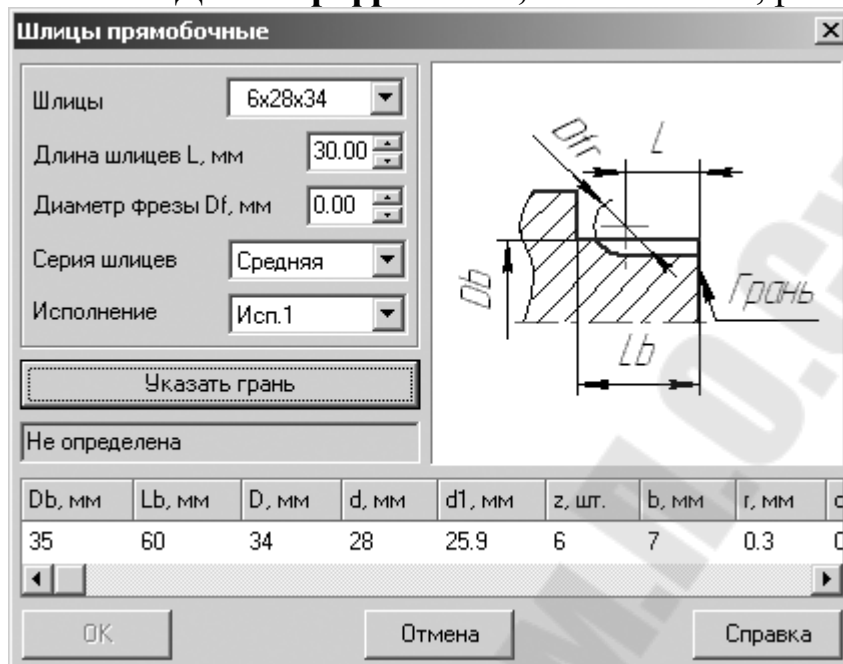


Рис. 17.67. Диалоговое окно **Шлицы прямоугольные**

Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

- выберите из раскрывающегося списка **Серия шлицев** нужную вам серию шлицев (Легкая, Средняя, Тяжелая), например **Средняя**. Нажмите клавишу **Tab**. Курсор переместится в следующее поле;

- выберите из раскрывающегося списка **Исполнение** нужное вам исполнение (Исп.1, Исп.2, Исп.3), например **Исп.2**. Нажмите клавишу **Tab**. Выделится кнопка **Указать грань**;

- щелкните по кнопке **Указать грань**. Диалоговое окно **Шлицы прямоугольные** свернется. В строке сообщений появится подсказка: **Укажите плоскую грань**;

- щелкните мышью по плоской торцевой грани первой ступени. Диалоговое окно **Шлицы прямоугольные** восстановится. При этом активизируется кнопка **ОК**, см. рис. 17.68;

- щелкните в диалоговом окне **Шлицы прямоугольные** по кнопке – **ОК** для завершения ввода данных шлицев на первой ступени вала. Появятся шлицы на первой ступени вала, см. рис. 17.69. Одновременно в **Дереве построения** появятся соответствующие ветви построенного дополнительного элемента.



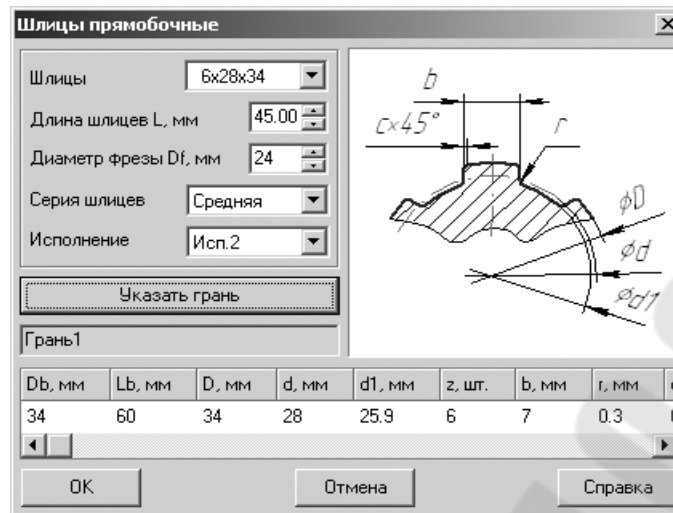


Рис. 17.68. Диалоговое окно Шлицы прямобоочные

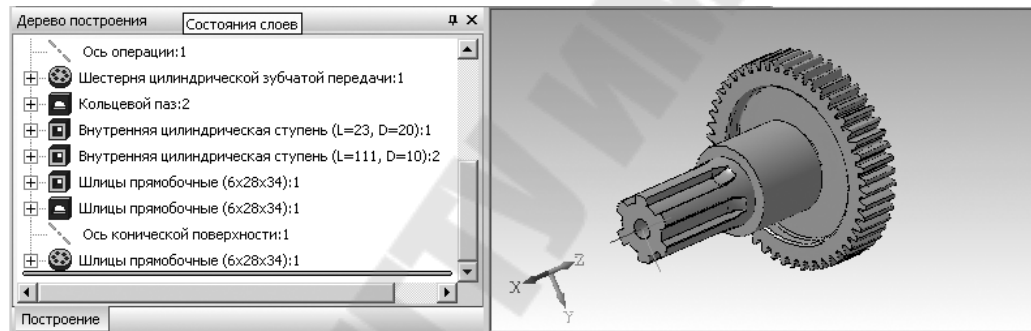


Рис. 17.69. Дерево построения и внутренняя цилиндрическая ступень трехмерной модели со стороны первой ступени вала

## 17.7. Программные продукты для исследования динамики механических систем

При анализе механизмов сложных структур необходимо знать многие параметры движения звеньев (перемещения, скорости, ускорения и пр.) и силы, приложенные к тем или иным точкам механизма. Последние иногда не могут быть определены, особенно, если механизм имеет избыточные связи.

Зачастую бывает недостаточно для понимания способа работы того или иного устройства наличия лишь плоского чертежа или даже неживленного изображения твердотельной объемной модели механизма. Понимание наступает лишь при просмотре оживленного («анимированного») изображения.

Некоторые динамические процессы в механизмах зависят одновременно от многих факторов (размеры звеньев, положение их центров масс, величина и направление приложенных сил и пр.). Учесть эти изменения при использовании аналитических уравнений иногда сложно или невозможно. Может отличаться трудоемкостью интерпретация результатов расчетов.

Многие из таких сложностей могут быть преодолены при использовании специализированных пакетов прикладных программ для исследования динамики механических систем. К числу таких пакетов относятся ADAMS (разработка фирмы MDI - Mechanical Dynamics Incorporated<sup>1</sup>), WORKING MODEL 2D (сокращенное наименование WM 2D) и WORKING MODEL 3D (WM 3D), разработанные фирмой Knowledge Revolution (WM 2D предназначен для исследования плоских, а WM 3D - пространственных механизмов), MSC.visual Nastran Desktop; существуют отечественные аналоги таких программных продуктов (EULER).

На сегодняшний день мировой рынок программного обеспечения данного направления примерно на 60 % представлен продуктами фирмы MDI ADAMS.

Этот продукт используется практически во всех отраслях промышленности: автомобилестроение; авиастроение и космонавтика; железнодорожный транспорт; общее машиностроение; судостроение; робототехника и приборостроение; биомеханика и т. д.

Основными направлениями использования ADAMS в промышленности являются создание и всесторонний анализ виртуальных компьютерных моделей разрабатываемого изделия на ранних стадиях проектирования и поверочный расчет и анализ работы уже спроектированных изделий, что позволяет избежать натурального моделирования, испытания реальных образцов и существенно сокращает как время, так и стоимость разработок.

Программный комплекс, ставший фактическим стандартом в области исследования динамики механических систем, позволяет:

- создавать компьютерную модель системы из жестких и деформируемых элементов, соединенных между собой различными связями и шарнирами;

- создавать параметризованную модель на базе ядра твердотельного моделирования Parasolid;

- визуализировать модель конструкции средствами трехмерной графики;

задавать вынужденные перемещения и движения элементов системы и прикладывать активные внешние силы и моменты;

проводить статический, динамический и кинематический анализы системы;

визуализировать движение системы и фиксировать заданные события;

анализировать влияние вариаций конструкции на ее поведение;

оптимизировать модель по заданному критерию;

получать результаты анализа в удобном для оценки и интерпретации виде: графики, таблицы, анимация;

проводить обмен информацией с системами автоматизированного проектирования, конечно-элементного анализа, анимации и пр.

Программный комплекс имеет блочную структуру и в соответствии с этим может быть сформирован в различных комплектациях, соответствующих всему спектру задач пользователя. Базовый пакет ADAMS именуется Full Simulation Package (FSP) и состоит из двух частей: View (Prepostprocessor) и Solver (решатель).

## **17.8. Интерфейсный программный продукт CADfix**

Развитие рынка CAD/CAE/CAM-систем привело к необходимости передачи геометрического представления созданных твердотельных моделей из одной системы автоматизированного проектирования в другие (в том числе и для выполнения различного вида анализов).

Существующие сегодня САПР используют для построения твердотельных параметризованных моделей различные принципы. Эти принципы были заложены при создании CAD-программ 20-30 лет назад, когда о передаче геометрических данных между различными CAD/CAE-программами никто не задумывался.

Основной подход при работе с твердотельными моделями современных CAD-систем заключается в использовании дерева модели, причем различные производители применяют в своих программах различные ядра для реализации геометрического модельного представления

Все это привело к тому, что передача геометрических данных между описываемыми программами без потерь стала практически невозможной. Исключение сегодня составляют лишь разные продукты

одного производителя, например, Unigraphics и Solid Edge компании Unigraphics Solutions.

Необходимость передачи моделей между системами привела к созданию множества форматов экспортирования/импортирования геометрии. В большинстве своем они основаны на принципе поверхностного представления твердых тел. К числу самых распространенных форматов относятся: IGES, ACIS (SAT), STEP, STL, Parasolid и др. Все они обладают определенными преимуществами и недостатками. Кроме того, существуют различные версии в пределах одного формата представления данных. Современные программы, как правило, поддерживают все распространенные форматы передачи данных, но даже в этом случае конечный результат при экспорте/импорте моделей не свободен от ошибок.

Все вышеперечисленное привело к созданию специализированных пакетов для передачи геометрических данных между системами автоматизированного проектирования и анализа. Одним из таких инструментов является программа CADfix ([www.cadfix.com](http://www.cadfix.com)), разработанная компанией Finite Element Graphical Systems Ltd (FEGS Ltd).

CADfix имеет в своем арсенале не только средства для передачи геометрии, но и инструменты для исправления некачественного представления моделей, их диагностики, восстановления и подготовки для использования в системах CAE. Программа способна работать на всех основных платформах, включая UNIX (рабочие станции SUN, SGI, HP, IBM) и Windows NT/2000/XP (компьютеры на базе Intel-совместимых процессоров).

Основными возможностями программы являются:

экспорт и импорт геометрических данных в наиболее распространенных форматах (IGES, Parasolid, STEP, SAT и др.);

использование автоматической пошаговой процедуры восстановления модели;

преобразование каркасной геометрии модели в поверхностную или твердотельную;

исправление топологического и геометрического представления моделей;

диагностика геометрии модели, отображение ее некачественных элементов и предложение путей решения найденных проблем;

упрощение геометрического представления модели путем изменения или удаления желаемых элементов в пределах заданного допуска;

разбиение поверхностей и твердых тел на более простые элементы;

использование оригинального генератора сеток для создания конечно-элементного представления и передача созданных КЭ-моделей в наиболее распространенные расчетные системы, например, ANSYS, Patran;

наличие средств для приложения граничных условий к модели с целью передачи ее в системы конечно-элементного анализа.

Интерфейс программы представлен на рис. 17.70.

Перечислим основные инструменты программы - табл. 17.2.

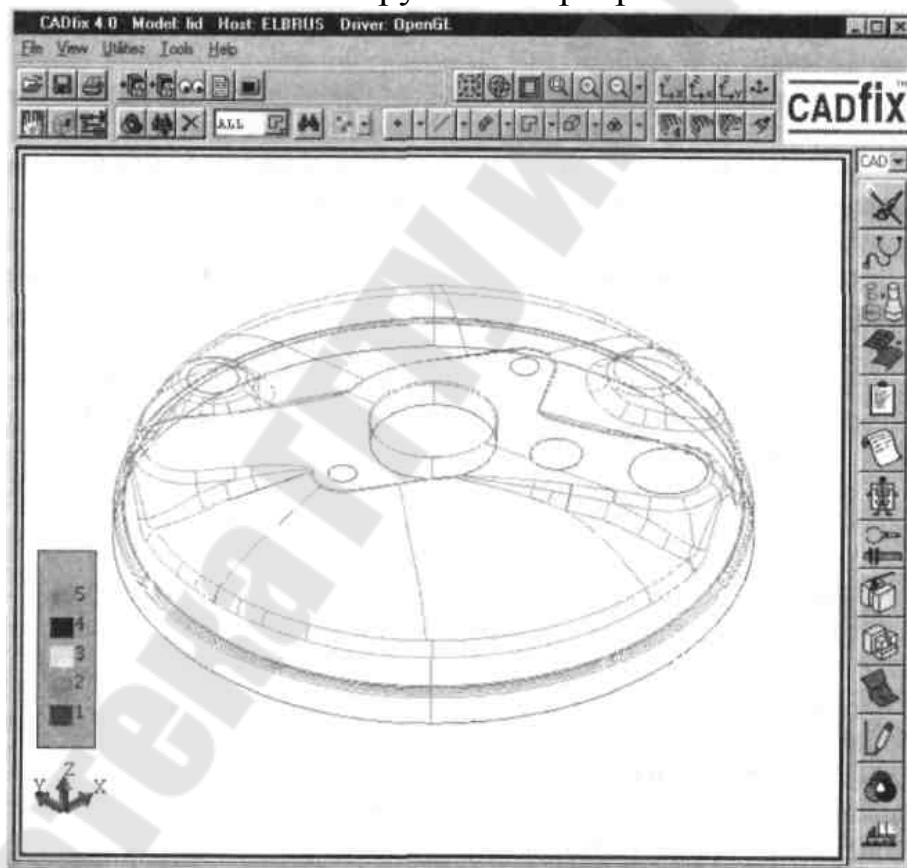


Рис. 17.70. Интерфейс программы

Одним из наиболее удобных инструментов CADfix является Wizard (Мастер), с помощью которого последовательно (рис. 17.71) в автоматическом режиме может быть выполнен весь процесс обработки модели, включающий в себя следующие стадии.

1. Стадия **Start (Старт)** (см. рис. 17.71) позволяет сконфигурировать Wizard (Мастер) CADfix для работы в пакетном режиме. Полезна при обработке множества файлов.

2. Стадия **Import (Импорт)** - предназначена для передачи геометрии модели в среду CADfix. В диалоговом окне необходимо определить формат импортирования, выбрать каталог и файл для чтения, указать их количество (один или несколько файлов для обработки). На этом этапе может быть выполнен ряд некоторых элементарных операций по геометрическому исправлению, например, слияние двойных точек и кромок в соответствии с заданным допуском.

3. На стадии **Repair (Восстановление)** выполняется попытка «сшивки» модели в геометрически корректное твердое тело или оболочечную конструкцию путем исправления ее топологии. Может быть выбран тип геометрической модели - только твердое тело, твердое тело и грани, только грани.

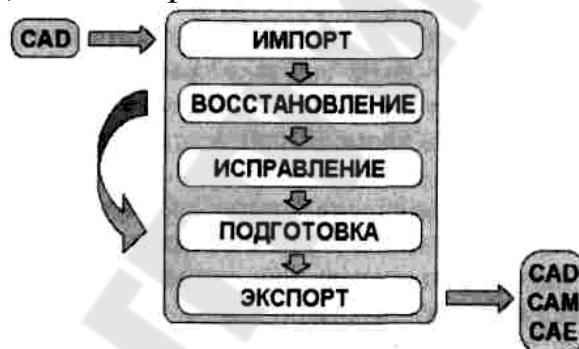


Рис. 17.71. Схема обработки модели

4. Стадия **Transform (Исправление)** следует за восстановлением топологии модели и заключается в изменении ее геометрического представления, например, удалении коротких кромок и узких клиновидных областей (поверхностей и твердых тел).

5. Стадия **Prepare (Подготовка к операции экспорта)**. На данной операции модель меняется таким образом, чтобы получить возможность передачи геометрических данных в CAD/CAE/CAM-системы. Изменение модели заключается в корректировке модели по сложности и точности представления геометрических данных, степени сглаживания поверхностей.

6. Стадия **Export (Экспорт)** предназначена для записи файла модели в одном из экспортных форматов. Доступными форматами являются: IGES, STEP, STL, ACIS (SAT), Parasolid, CADDs, CATIA, VDAFS, ANSYS и CADfix

## Основные инструменты CADfix

Пиктограмма и название инструмента		Описание
	Wizard (Мастер)	Осуществляет в автоматическом режиме восстановление, изменение и подготовку к экспортированию модели в различных форматах
	Diagnostics (Диагностика)	Обеспечивает доступ к информации о модели с визуализацией тех элементов, импортирование которых выполнено с ошибками
	Geometry Fixer (Ручной поиск ошибок и исправление геометрии)	Запускает инструмент Geometry Fixer (Ручной поиск ошибок и исправление геометрии)
	Geometry Transformer (Изменение геометрии)	Запускает инструмент Geometry Transformer (Изменение геометрии)
	Model History (История модели)	Представляет информацию о действиях над моделью и об изменениях ее по отношению к первоначальному варианту
	Prode (Что это?)	Обеспечивает получение информации об отдельных элементах модели
	Measure (Изменения)	Вычисляет расстояние между элементами и выполняет их измерения
	Planar Splitter (Разделение плоскостей)	Позволяет разделять плоскостью элементы моделей
	Body Splitter (Разделение твердого тела)	Позволяет разделять твердое тело произвольной поверхностью
	Face Splitter (Разделение поверхности)	Позволяет разделять поверхность кривой
	Geometry Builder (Создание геометрии)	Обеспечивает создание новой и редактирование существующей геометрии модели
	Set Manager (Менеджер группы)	Позволяет объединять элементы группы с использованием различных методов выбора
	Export (Экспорт)	Экспортирует модель в различных форматах

7. Стадия **Finish (Финиш)** используется для управления поведением Wizard (Мастера) после того, как все остальные операции будут завершены. Программа дает возможность выполнить диагностику преобразованной модели, вывести отчет по обработке геометрических данных и установить возможность сохранения модели в формате базы данных CADfix.

Перед выполнением все перечисленные операции можно настроить необходимым образом. Кроме того, CADfix предоставляет возможность исключить некоторые стадии из сквозного процесса работы (например, на рис. 17.72 исключена стадия **Transform - Исправление модели**). Запуск процесса работы с моделью выполняется нажатием на кнопку **Finish** в окне Wizard (Мастера).

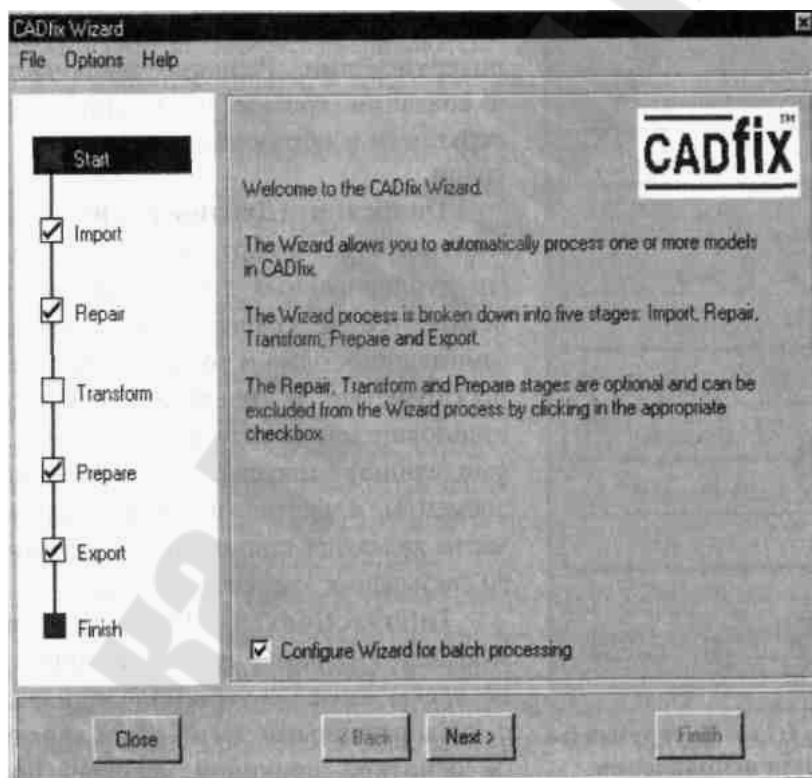


Рис. 17.72. Окно Wizard (Мастер)

В неавтоматическом режиме CAD-fix также предоставляет возможность поиска и исправления некачественной геометрии. Наиболее интересным средством для этого является Geometry fixer (Ручной поиск ошибок и исправление геометрии). Внешний вид его представлен на рис. 17.73. Данное средство позволяет решать следующие геометрические проблемы.



**Unbounded (Отсутствующие границы или необрезанные поверхности).** В этом классе проблем имеют дело со специфическими сплайн-поверхностями. Решение заключается в создании кромок по границам поверхности и образовании из них новой грани.

**Duplicates (Дублированные элементы).** Здесь имеют дело с проблемами дублированных точек, кромок, поверхностей и граней, т. е. элементов, занимающих одно и то же положение в пространстве в пределах заданного пользователем (или установленного по умолчанию) допуска. Дублированные элементы, в частности точки и кромки, часто являются причиной некорректного связывания элементов модели.

**Intersections (Пересечения).** Кромки, Т-образно или крестообразно пересекающиеся внутри модели, наряду с дублированными элементами являются основной причиной некорректного связывания элементов модели.

**Unused (Неиспользуемые элементы).** С помощью этого инструмента могут быть исключены из модели элементы, не используемые для определения формы других объектов. Типичным примером таких элементов является центровая линия отверстия. Она не используется для создания граней, которые определяют отверстие, а является лишь ссылочным элементом по отношению к ним.

**Integrity (Целостность).** Существует четырнадцать типов проблем целостности, которые применимы к кромкам, поверхностям, граням, телам и всей модели. Примером проблемы целостности для грани может служить *Unclosed loops - Незамкнутая кривая*.

**Topology (Топология).** Топология модели определяет способ и порядок соединения различных ее элементов друг с другом. При решении этой задачи рассматриваются вопросы создания граней и тел из элементов модели, а также связывания существующих граней и тел между собой.

**Complexity (Сложность модели).** Примером такой проблемы может служить задача поиска и преобразования цилиндрической сплайн-поверхности в простую, но эквивалентную поверхность, описываемую аналитическим способом. Большинство проблем, связанных со сложностью модели, может быть решено с помощью упрощения математического представления модельных элементов.

**Sloppiness (Нестабильность).** При рассмотрении задачи неустойчивости имеют дело со специфической проблемой точности

взаимодействующих элементов: «грань к поверхности» и «кромка к вершине». Средство для устранения нестабильности является одним из самых важных инструментов при подготовке модели для экспортирования в другие системы.

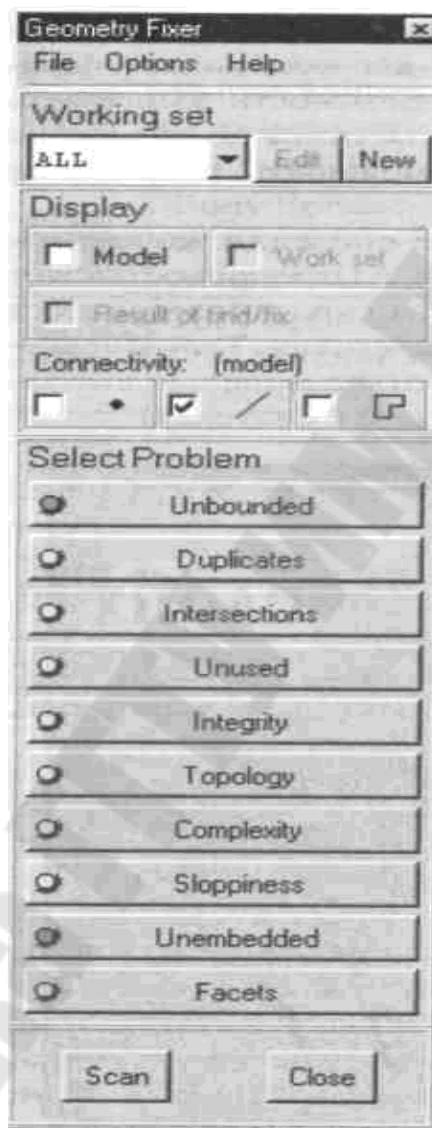


Рис.17.73. Окно исправления геометрии модели

**Unembedded (Невнедренные элементы).** Инструмент для решения данной проблемы позволяет находить и исправлять грани, не имеющие базовой поверхности.

**Facets (Фасеточные элементы).** В данной задаче используется инструмент для поиска цепочки кромок и замены ее одной кромкой.

## 17.9. Технология быстрого прототипирования (Rapid prototyping)

Одним из направлений в реализации CALS-технологии стало развитие систем быстрого прототипирования (Rapid prototyping), в основе которых лежит идея получения инструмента для изготовления детали до ее мастер-моделей. Первые такие системы появились в конце 80-х гг. XX века.

Технология быстрого прототипирования наиболее необходима разработчикам на стадии концептуального проектирования. По оценкам специалистов, более одной трети всех моделей-прототипов используются для визуальной оценки при концептуальном проектировании как первое физическое представление о CAD-модели. Другие две трети моделей-прототипов используются при технологической подготовке производства (в частности, для изготовления оснастки, литейных форм и пр.). Однако последующее развитие таких систем привело к тому, что технология прототипирования стала использоваться и для получения ряда деталей, являющихся конечной продукцией: пластмассовые облицовки панелей салона автомобиля, обтекатели и пр.

В настоящее время существуют различные системы быстрого прототипирования. К наиболее дорогим таким системам относятся: стереолитография; послойное наложение расплавленной полимерной нити; лазерное спекание порошковых материалов.

Идея процесса стереолитографии заключается в том, что разработчик средствами той или иной CAD-системы создает трехмерную твердотельную модель в специальном стереолитографическом формате \*.stl. Далее эта трехмерная модель программно разделяется на значительное число слоев, толщина каждого из которых менее 0,1 мм (таким образом, для реализации процесса стереолитографии необходимы компьютеры со значительными объемами дискового пространства).

Указанное разделение модели изделия на слои производится в каком-либо одном направлении (например, снизу вверх). Информация о геометрии каждого слоя со всеми пустотами и пр. передается далее на установку, включающую лазерную пушку. Последняя облучает расплав жидкого фотополимера, причем траектория лазерного луча соответствует геометрии слоя, информация о котором находится в данный момент времени в лазерной установке. Под действием

поляризованного света поверхностный слой расплава фотополимера отвердевает и при помощи подвижной платформы погружается под поверхность. Тем временем на лазерную установку поступает информация о следующем слое и т. д. По окончании процесса облучения расплава в соответствии с информацией о последнем слое отвердевшая модель изделия извлекается из расплава, высушивается и далее используется по назначению (рис. 17.74).

Первые установки, работающие по описанному способу, были разработаны специалистами канадской фирмы ВироШ. Они позволяли получать стереолитографические модели размером 500x500x600 мм. Уже первый опыт их использования в автомобильной промышленности дал экономию в 100 ... 150 тыс. долларов.

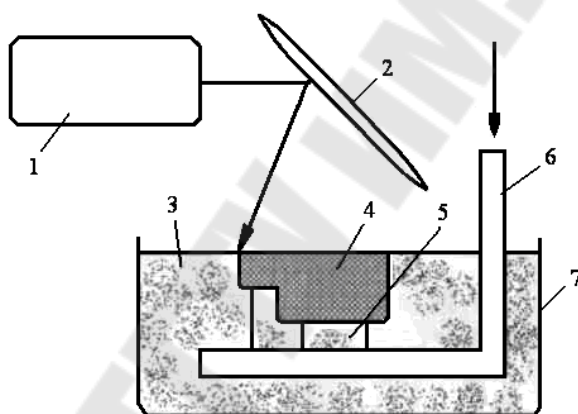


Рис.17.74. Схема установки стереолитографии:

1- лазер; 2- управляемая отклоняющая система; 3- расплав фотополимера; 4- получаемая модель; 5- поддержки; 6- осаждающая платформа; 7- ванна

В другой разновидности процесса стереолитографии модель получается при помощи ультрафиолетовой лампы, производящей облучение поверхности расплава полимера через предварительно подготовленную маску.

Одним из неудобств, возникающих при стереолитографии, является необходимость в отдельных случаях предусматривать в формируемой детали так называемые поддержки: выше было отмечено, что очередной слой наносится на предшествующий. Однако, когда у текущего слоя нет предшествующего, он создается искусственно посредством выращивания поддержек. Так, при выращивании стереолитографической модели показанного на рис. 17.75 патрубка в направлении Б —► А для получения впоследствии цельной

детали необходима поддержка профиля трубки малого сечения, которая может быть реализована, например, выполнением ребра между ней и трубкой большего сечения (после получения готовой детали это ребро должно быть удалено). При выращивании модели той же детали, но в направлении А —► Б какие-либо поддержки становятся ненужными.

Процесс прототипирования способом послойного наложения расплавленной полимерной нити (так называемый FDM-процесс – Fused Deposition Modeling) по своей последовательности весьма

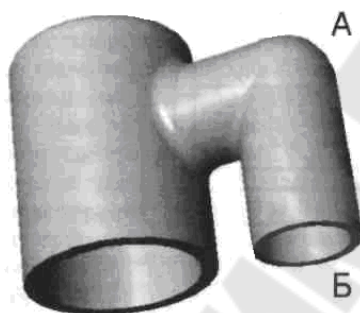


Рис. 17.75. Эскиз детали полученной стереолитографией

схож со стереолитографией. Отличие заключается в том, что вместо облучения расплава полимера в данном случае очередной слой модели формируется выдавливанием из специальной головки с контролируемой температурой термопластичного материала (ABS-пластик), который укладывается слой за слоем. Спроектированный объект получается в виде твердотельной трехмерной детали, не требующей для ее создания специальной инструментальной оснастки (рис. 17.76).

FDM-процесс также начинается с проектирования концептуальной геометрической модели на рабочей станции CAD-системы. Затем модель передается в программное обеспечение QuickSlice, которое математически разбивает концептуальную модель на горизонтальные слои. С помощью программного обеспечения SupportWorks в случае необходимости автоматически формируются поддержки. Траектория перемещения инструмента задается оператором простым нажатием соответствующей кнопки, и эти данные в цифровой форме вводятся затем в FDM-установку. Установка обеспечивает перемещение по осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  (при помощи двухосевых шаговых линейных электродвигателей); при этом за один проход создается один слой модели.

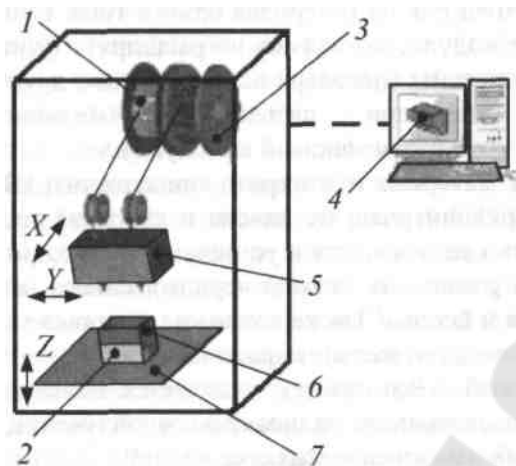


Рис. 17.76. Схема FDM-процесса:

- 1 - катушка с материалом поддержек (BS-пластик); 2 - удаляемая поддержка; 3 - катушка с основным материалом (ABS-пластик); 4 - исходная CAD-модель в STL-формате; 5 - нагревающая головка с фильерами (движение вдоль осей X, Y); 6 - готовый прототип; 7 - основание на столе (движение вдоль оси Z)

Термопластичный моделирующий материал в форме тонкой нити диаметром 0,178 см подается в экструзионную головку с системой регулировки температуры, где он разогревается до полужидкого состояния. Материал выдавливается из головки и осаждается в виде сверхтонких слоев (толщина каждого слоя составляет 0,36 мм) на основание, на котором нет специальных приспособлений для крепления модели. Затвердевая, материал образует новый слой на ранее сформированном слое.

Системы FDM имеют модульную конструкцию, что позволяет пользователям наращивать возможности системы по мере роста сложности изготавливаемых прототипов. Базовая система (любой модели) включает все необходимые компоненты для изготовления моделей и прототипов из материала одного типа. Существуют дополнительные модули, позволяющие расширять функциональные возможности системы благодаря использованию других типов моделирующих материалов - литьевой воск, медицинский ABSi пластик, полиэстер (полиэфирный компаунд).

Основной материал и материал поддержки (ABS-пластик - сополимер акрилонитрила, бутадиена и стирола) поставляются в кассетах и легко загружаются в установку. Возможно применение ABS-пластика различных цветов: черного, синего, желтого, зеленого,

красного и белого. Также возможна поставка материала любого другого цвета (по желанию заказчика).

Специальный ABSi-пластик отличается повышенной ударопрочностью, выдерживает радиоактивное облучение, устойчив к воздействию многих химических соединений.

Термопластичный эластомер E-20 на основе полиэфира был разработан для применения в ряде отраслей промышленности, где требуется механическая прочность и износостойкость для гибких компонентов. Он имеет предел прочности при изгибе 140 МПа, что обуславливает его успешное применение для изготовления уплотнений, втулок, защитных чехлов, шлангов, трубок, виброизолирующих элементов в автомобильной, электронной промышленности, приборостроении, при производстве инструмента с электроприводом, спортивных товаров, обуви и пр.

Литьевой воск имеет очень низкую зольность (образование золы в результате сжигания модели в керамической корке) и обеспечивает наивысшую чистоту поверхности модели, что делает его весьма перспективным материалом для литейного производства с использованием выплавляемых моделей.

Устройства, реализующие описанные выше разновидности быстрого прототипирования, являются весьма дорогостоящими. Пока довольно высокой является также и стоимость применения этой технологии.

Это повлекло за собой разработку и последующее внедрение устройств, получивших название трехмерных принтеров (или концептуальных моделеров). Они предназначены для тех потребителей, для которых прототипы необходимы прежде всего для визуальной оценки степени совершенства принятых конструктивных решений. Первые модели трехмерных принтеров были разработаны специалистами Массачусетского технологического института.

Трехмерные принтеры для получения модели-прототипа используют различные материалы: воскообразный полимер; затвердевающий при помощи связывающего вещества на водной основе порошок; бумагу, обрезаемую по контуру детали лучом лазера и пр. При всем этом модель-прототип, изготовленная на трехмерном принтере, является более экономичной, чем при ее выполнении на прочих устройствах. Как правило, трехмерные принтеры работают с меньшей точностью, чем прочие устройства прототипирования - до

0,127-0,330 мм. Скорость печатания в монохромном режиме равна 6 слоев/мин; в полноцветном режиме - 2 слоя/мин.

Моделирование при помощи склейки (Laminated Object Modeling - LOM) представляет собой процесс изготовления слоев из твердых материалов (бумага, листовая пластик, дерево и пр.) и их склейки.

Рулонный расходный материал поступает в рабочую зону и приклеивается к поверхности получаемой детали. Затем лазерный луч обрезает этот материал по контуру очередного слоя. LOM-прототипирование - наиболее дешевая технология по расходуемым материалам и ресурсу лазера, она очень эффективна для массивных деталей, поскольку в отличие от других технологий производит обработку не площади, а контура слоя. Основными недостатками этого способа являются плохое качество поверхности детали, сложность ее обработки, относительно низкая прочность получаемых моделей.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Г.Н. Автоматизация проектирования металлорежущих станков / Г.Н. Васильев. – М.: Машиностроение, 1987.-280 с.
2. Михайлов М.И. Математическое моделирование и САПР процессов резания, станков и инструментов / М.И. Михайлов, Гомель, ГГТУ им.П.О.Сухого, 2004.-274 с.
3. САПР. Математическое моделирование технических объектов. 4 кн./ В.А. Трудошин, И.В. Пивоварова. - Мн.: Выш.шк., 1988.-159 с.
4. Дьячко, А.Г. ЭВМ кн.8. Решение прикладных задач / А.Г.Дьячко, Н.М. Когдов. – М.: Высш.шк., 1987.-146 с.
5. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем / В.П. Тарасик. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997.-640 с.
6. Корн, Г Справочник по математике: для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн, Москва: Наука, 1974. – 831 с.
7. Детали и механизмы металлорежущих станков : в 2 т. Т. 2 /Д. Н. Решетов [и др.]; под общ ред. Д. Н. Решетова. – Москва: Машиностроение, 1972. – 520 с.
8. Справочник технолога-машиностроителя : в 2 т. Т. 2 /Ю. А. Абрамов [и др.]; под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова. - Москва: Машиностроение, 1986. – 495 с.