

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Институт повышения квалификации
и переподготовки

Кафедра «Разработка, эксплуатация нефтяных
месторождений и транспорт нефти»

Д. Н. Андрианов

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

ПОСОБИЕ

**по одноименной дисциплине
для слушателей специальности переподготовки
1-51 02 71 «Разработка и эксплуатация нефтяных
и газовых месторождений»
заочной формы обучения**

Гомель 2018

УДК 621.87.658.345(075.8)
ББК 22.253я73
А65

*Рекомендовано кафедрой «Разработка, эксплуатация
нефтяных месторождений и транспорт нефти» ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 5 от 27.11.2017 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Материаловедение в машиностроении» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *И. Н. Степанкин*

Андрианов, Д. Н.

А65 Подземная гидромеханика : пособие по одной дисциплине для слушателей специальности переподготовки 1-51 02 71 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» заоч. формы обучения / Д. Н. Андрианов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – 109 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Изложена гидродинамическая теория одно- и многофазной фильтрации жидкостей и газов в однородных и неоднородных пористых и трещиноватых средах. Рассмотрены задачи стационарной и нестационарной фильтрации и способы расчета интерференции скважин.

Для слушателей специальности переподготовки 1-51 02 71 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» ИПКиП.

УДК 621.87.658.345(075.8)
ББК 22.253я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2018

Введение

Подземная гидромеханика – наука о движении (фильтрации) жидкостей, газов и их смесей в пористых и трещиноватых горных породах. Она является теоретической основой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

Целью дисциплины «Подземная гидромеханика» является получения знаний о закономерностях фильтрационных течений жидкостей, газов и их смесей в пористых, трещиноватых и трещиновато-пористых горных породах при различных режимах разработки нефтяных и газовых месторождений, а также навыки исследования и расчета фильтрационных процессов пластовых флюидов.

В результате изучения дисциплины слушатель должен приобрести знания, необходимые для усвоения последующих специальных дисциплин, в частности усвоить основные понятия и закономерности фильтрации нефти и газа в нефтегазоносных пластах различной конфигурации, при различных режимах нефтегазоносных пластов, изучить закономерности вытеснения нефти водой и фильтрации многофазных систем.

Основу подземной гидромеханики составляет теория фильтрации, а сама наука является теоретической основой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

Основными задачами подземной гидромеханики являются:

1) создание теории и методов расчета движения реальных жидкостей (газов) в пористых средах в процессе извлечения нефти или газа из недр;

2) получение данных, необходимых для научно обоснованного проектирования разработки месторождений углеводородного сырья.

Этапы развития науки

Начало развитию подземной гидромеханики было положено французским инженером А.Дарси, который в процессе работы над проектом водоснабжения г. Дижона провел многочисленные опыты по изучению фильтрации воды через вертикальные песчаные фильтры. В 1856 г. им была опубликована книга с описанием опытов. В ней же был сформулирован экспериментальный закон, в соответствии с которым скорость фильтрации жидкости прямо пропорциональна градиенту давления.

Основоположниками отечественной школы теории фильтрации являются проф. Н.Е.Жуковский, академики Н.Н.Павловский и Л.С.Лейбензон. Н.Е.Жуковский в 1889 г. опубликовал первую работу по теории фильтрации «Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод». Им впервые были выведены общие дифференциальные уравнения теории фильтрации, указано на математическую аналогию теплопроводности и фильтрации. Им также решен ряд задач о притоке воды к скважинам.

Н.Н.Павловским многие задачи фильтрации воды были сформулированы как краевые задачи математической физики. Он же впервые обосновал и предложил применение метода ЭГДА для решения фильтрационных задач, что в последующем нашло широкое применение для решения задач фильтрации нефти, воды и газа в продуктивных пластах. Н.Н.Павловский впервые предложил использовать параметр Рейнольдса в качестве критерия существования закона Дарси.

Следует отметить, что вплоть до середины 20-х годов XX века подземная гидромеханика развивалась преимущественно в рамках инженерной гидрогеологии (отсюда название). В 20-х и начале 30-х годов этого века прогнозирование разработки нефтяных месторождений производилось в основном путем построения фактических зависимостей показателей разработки от времени, полученных в начальный период разработки, статистической обработки этих показателей и их экстраполяции на будущее. Математические методы теории фильтрации, уже значительно развитые к этому времени Н.Е.Жуковским, Н.Н.Павловским и другими, еще не нашли применения в нефтяном деле.

Развитию и использованию в разработке нефтяных месторождений методов этой теории существенным образом способствовали работы американского ученого Маскета.

Основателем отечественной школы ученых и специалистов в области гидродинамической теории фильтрации нефти и газа является академик Л.С.Лейбензон.

Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли С.А.Христианович, Б.Б.Лапук, И.А.Чарный, В.Н.Щелкачев и многие другие ученые.

Широкие исследования в области подземной гидромеханики ведутся за рубежом. Стали классическими экспериментальные исследования, проведенные в США еще в 30-е годы XX века

Р.Викофом и Г.Ботсетом по изучению фазовых проницаемостей жидкости и газа. Существенное значение имеет классическая теория двухфазной фильтрации, предложенная С.Бакли и М.Левереттом. Значительное влияние на развитие теории фильтрации оказала работа А.Ван-Эвердингена и У.Херста о притоке упругой жидкости к скважине.

В последние годы исследования в области подземной гидромеханики связаны с проблемой увеличения нефтеотдачи пластов. Новые актуальные задачи выдвигаются практикой разработки нефтяных и газовых месторождений, вступивших в позднюю стадию, а также таких, которые характеризуются сложными горно-геологическими и термобарическими условиями залегания и эксплуатации.

В связи с этим интенсивно развиваются:

- теория многофазной многокомпонентной фильтрации флюидов в деформируемых неоднородных пластах;
- физико-химическая гидродинамика и гидродинамика новых методов извлечения нефти и газа из недр;
- теория фильтрации неньютоновских жидкостей и углеводородных дисперсных систем;
- подземная гидротермодинамика;
- теория нелинейной нестационарной фильтрации и др.

Тема 1. Основные понятия и законы фильтрации

Нефть и природные газы находятся в пустотах – порах и трещинах осадочных пород в недрах Земли. Горные породы, которые являются вмещителем нефти и газа, называются породами – коллекторами.

Твердое тело (горная порода), заключающее в себе большое количество соединенных между собой пор и трещин, называется пористой средой.

Движение жидкостей и газов через твердое тело (пористые среды) по связанным между собой порам или трещинам называется фильтрацией.

В подземной гидромеханике движущиеся в горной породе (пласте) жидкости, газы и их смеси называются флюидами.

1.1 Фильтрационные характеристики пористых сред.

Весь совокупный объем взаимосвязанных пор и трещин, который может быть заполнен жидкостью или газом, называется поровым пространством пористого тела (горной породы, пласта).

Если объем пор при изменении давления жидкости в них не изменяется, то такая пористая среда считается недеформируемой. Если при изменении давления жидкости объем порового пространства изменяется, то такая пористая среда называется упругой.

Отношение совокупного объема пор к объему тела называется коэффициентом пористости (или пористостью):

$$m = \frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{т}}}; \quad (0 \leq m \leq 1), \quad (1.1)$$

где $W_{\text{т}}$ – объем тела; $W_{\text{п}}$ – объем порового пространства (совокупный объем пор).

Отношение эффективной площади пор $S_{\text{п}}$ к общей площади сечения тела $S_{\text{т}}$ называется коэффициентом просветности (или просветом):

$$n = \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{т}}} \quad (1.2)$$

Приближенно: $n = m$

Коэффициент пористости m не зависит от размеров частиц, слагающих пласт, т.е. не зависит от размеров пор, но зависит от

формы частиц (зерен), особенностей образования слоя (пласта) и степени его уплотнения. Пористость нефтяных пластов колеблется в диапазоне $0,10 \div 0,20$. Реальные пористые тела имеют поры разных размеров (диаметров). Распределение пор по размерам имеет логарифмически нормальный закон (рис.1.1).

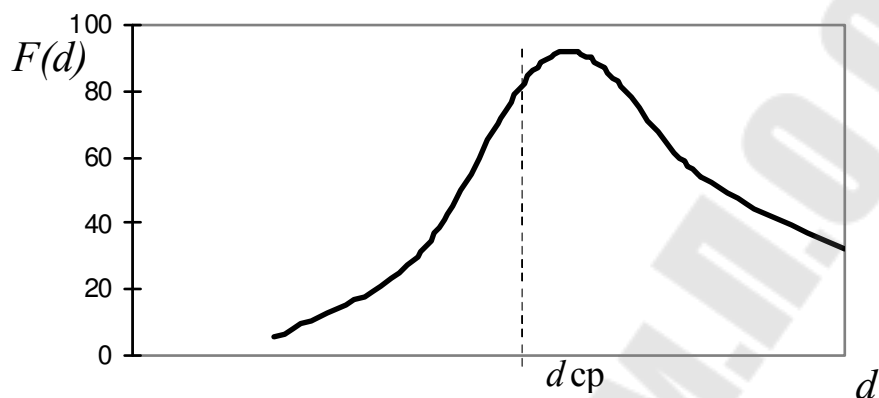


Рис.1.1 - Кривая распределения пор по диаметрам

За характерный размер пор пористого тела принимается средний размер порового канала $d_{ср}$.

Для зернистых пористых сред геометрическим параметром является размер частиц, из которых складывается пористый слой. Распределение частиц по размерам зернистого слоя также имеет логарифмически нормальный закон. Основной характеристикой фильтрационного движения флюида в пористой среде является скорость фильтрации $v_{ф}$. – фиктивная скорость, равная отношению действительного расхода флюида через выделенную площадку к ее площади:

$$v_{ф} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (1.3)$$

где ΔS – полная площадь, а не ее часть, занятая порами $\Delta S_{п}$.

Действительная скорость движения флюида через площадку ΔS :

$$v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S_{п}} \quad (1.4)$$

Так как $\Delta \sum_{\Pi} = m \Delta S$, то фиктивная скорость фильтрации v_{ϕ} и действительная скорость движения флюида v связаны соотношением:

$$v_{\phi} = m v \quad (1.5)$$

1.2. Закон фильтрации Дарси.

Реальная пористая среда оказывает сопротивление фильтрационному потоку флюида. Т.е. для поддержания фильтрационного течения флюида в пористом теле необходимо к нему приложить определенную разность давлений (напоров): $\Delta P = P_1 - P_2$ или $\Delta H = H_1 - H_2$.

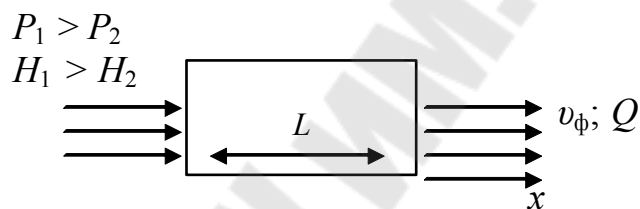


Рис.1.2 Влияние фильтрационного потока на пористую среду

Основное соотношение теории фильтрации – закон фильтрации – устанавливает связь между скоростью фильтрации (расходом) и распределением давлений (напоров), которое вызывает фильтрационное течение.

Простейшим законом фильтрации является линейный закон фильтрации Дарси (1856г.):

$$Q = K_{\phi} \frac{\Delta H}{L} S \quad (1.6)$$

где K_{ϕ} – коэффициент фильтрации; зависит как от структуры пористой среды, так и от свойств флюида (вязкости); его размерность: м/с; S – площадь поперечного сечения слоя

Позднее закон фильтрации был сформулирован в виде:

$$Q = \frac{K}{\mu} \rho g \frac{\Delta H}{L} S = \frac{K}{\mu} \frac{\Delta P}{L} S, \quad (1.7)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости флюида, K – коэффициент проницаемости пористой среды (не зависит от свойств флюида и является фильтрационной характеристикой только пористой среды). $[K] = \text{м}^2$.

Выражение (1.7) можно записать в виде:

$$v_{\phi} = \frac{K \Delta P}{\mu L} \quad (1.8)$$

или в дифференциальной форме:

$$v_{\phi} = -\frac{K dp}{\mu dx}, \quad (1.9)$$

где x – продольная ось фильтрации.

Знак «минус» появился в выражении (1.9) вследствие того, что давление вдоль оси x (т.е. направления фильтрационного движения флюида) уменьшается. Коэффициенты проницаемости: K (м^2): крупнозернистый песчаник: $10^{-12} \div 10^{-13}$; плотные песчаники: $10^{-14} \div 10^{-15}$.

Проницаемость нефтяных и газовых пластов измеряется единицами, называемыми Дарси (Д).

За единицу проницаемости 1Д принимают проницаемость такой пористой среды, при фильтрации через образец которой площадью 1 см^2 длиной 1 см при перепаде давления в 1 атм (98000 Па) расход жидкости вязкостью 1 сП (вода 20 $^{\circ}$ С) составляет 1 $\text{см}^3/\text{с}$.

$$1\text{Д} = 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2.$$

Средние скорости фильтрации в нефтяных пластах:
 $v_{\phi} = 10^{-4} \div 10^{-5}$ м/с.

Течение флюида через пористый слой может быть ламинарным и неламинарным (турбулентным).

Линейный закон фильтрации Дарси удовлетворительно описывает фильтрационные течения нефти, газа, грунтовых вод и т.д. при ламинарном режиме фильтрации, но не слишком малых скоростях фильтрации.

При неламинарной фильтрации, а также при очень малых скоростях фильтрации обнаруживаются существенные отклонения реальных фильтрационных течений от линейного закона Дарси.

1.3. Закономерности неламинарной фильтрации.

При движении жидкости и газа по каналам пористого слоя турбулентность в них развивается значительно раньше, чем при течении по трубам. Режим течения флюида в пористой среде можно определить с помощью фильтрационного критерия Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_{\phi} d}{\nu}, \quad (1.10)$$

где d – некоторый характерный линейный размер пористой среды (размер каналов, пор или частиц в зависимости от используемой модели пористой среды); ν – кинематический коэффициент вязкости флюида.

Н.Н. Павловский (1920 годы), основываясь на модели идеального пористого слоя, предложил следующее выражение фильтрационного числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_{\phi} d_{\text{эф}}}{(0,75m + 0,23)\nu} \quad (1.11)$$

Установлено (Н.Н.Павловский), что при $Re < 7,5 \dots 9$ сохраняется ламинарный режим фильтрации и действует линейный закон фильтрации Дарси. При $Re > 7,5 \dots 9$ ламинарный режим фильтрации нарушается - фильтрация становится неламинарной.

В.Н.Щелкачев предложил в качестве линейного параметра пор использовать следующую величину:

$$d = 10\sqrt{K}m^{-2,3} \quad (1.12)$$

т.е. число Рейнольдса по Щелкачеву:

$$Re = \frac{10v_{\phi}\sqrt{K}\mu}{m^{2,3}\mu}. \quad (1.13)$$

Критические значения числа Рейнольдса по Щелкачеву находятся в пределах $Re^{кр} = 1 \dots 12$.

М.Д. Миллионщиков предложил следующее выражение для числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_{\phi}\sqrt{K}\rho}{m^{1,5}\mu}. \quad (1.14)$$

По Миллионщикову: $Re^{кр} = 0,022 \dots 0,29$.

Для неламинарного режима фильтрации предложен нелинейный закон фильтрации Форхгеймера:

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{K} v_{\phi} + \beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} v_{\phi}^2, \quad (1.15)$$

где β – дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально, либо приближенно по формуле А.И. Ширковского:

$$\beta = \frac{63 \cdot 10^{-6} m^{2/3}}{K}. \quad (1.16)$$

В выражении (1.6):

I слагаемое $\left(\frac{\mu}{K} v_{\phi}\right)$ учитывает потери давления вследствие вязкого трения жидкости в поровых каналах;

II слагаемое $\left(\beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} v_{\phi}^2\right)$ учитывает инерционную составляющую сопротивления движению жидкости, связанную с турбулизацией течения. При малых скоростях фильтрации (точнее при малых числах Рейнольдса): $\frac{\mu}{k} v_{\phi} \gg \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} v_{\phi}^2$ и закон Форхгеймера переходит в закон Дарси:

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{k} v_{\phi}. \quad (1.17)$$

При увеличении числа Рейнольдса значение II слагаемого возрастает. При больших скоростях фильтрации (т.е. числах Рейнольдса) $\left(\frac{\mu}{K} v_{\phi}\right) < \left(\beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} v_{\phi}^2\right)$ наступает турбулентный режим фильтрации с квадратичным законом сопротивления (Краснопольский А.А.):

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\Delta p}{L} = \beta \frac{\rho}{\sqrt{K}} v_{\phi}^2. \quad (1.18)$$

Квадратичный закон фильтрации наблюдается лишь в средах, состоящих из крупных частиц. Для описания закономерностей неламинарной фильтрации используются также нелинейные законы в виде одночленной степенной функции:

$$v_{\phi} = C \left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{1/n}, \quad (1.19)$$

где C и n – опытные параметры: $1 \leq n \leq 2$;

1.4. Особенности фильтрации при малых скоростях.

При очень малых скоростях флюида в пористой среде обнаруживается существенное отклонение от закона Дарси, проявляющееся в более быстром увеличении скорости фильтрации $v_{\text{ф}}$ с ростом градиента давления. Это явление особенно заметно при фильтрации жидкостей (воды, нефти) в тонкозернистых (глинистых) породах.

Объясняется это явление тем, что жидкость (в том числе, нефть) определенным образом физико-химически взаимодействует с поверхностью твердого тела (этим же объясняется модель «прилипания» жидкости). Пористые тела имеют весьма развитую поверхность. В результате тончайшие слои жидкости около твердой поверхности образуют загустевшие студнеобразные структуры, частично или полностью перекрывающие поры. Чтобы началось движение, нужно разрушить эту структуру, приложив некоторый перепад давления.

При весьма малых скоростях жидкости сила вязкого трения мала по сравнению с силами межфазового взаимодействия жидкости с твердой поверхностью. При увеличении скорости жидкости уменьшается вклад межфазового взаимодействия в гидравлическое сопротивление пористой среды, но возрастает вклад обычного гидродинамического вязкого трения. Для фильтрации при малых скоростях предложена следующая упрощенная зависимость:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{K} v_{\text{ф}} + \gamma \quad (1.20)$$

γ – начальный градиент давления, необходимый для начала фильтрации.

Тема 2 Дифференциальные уравнения фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах

Основной кинематической характеристикой движения флюида в пласте является скорость фильтрации $U_{\text{ф}}$, которая может быть различной в разных точках пласта и переменной во времени – т.е. образует физическое поле скоростей фильтрации.

Поле $\vec{v}_\phi(x, y, z, t)$ может быть стационарным и нестационарным. Скорость фильтрации $\vec{v}_\phi(x, y, z, t)$ существенно зависит от распределения давлений в пласте, т.е. от поля давлений $p(x, y, z, t)$; распределения температур в пласте $T(x, y, z, t)$; от пористости пласта $m(x, y, z, t)$; его проницаемости $k(x, y, z, t)$.

Существенны также плотность флюида $\rho(x, y, z, t)$ и его вязкость $\mu(x, y, z, t)$.

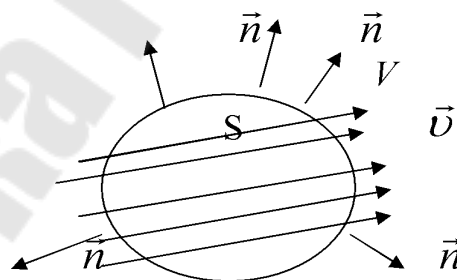
Процесс фильтрации может быть изотермическим, если $T = const$ и одинакова во всем пласте; и неизотермическим (например, при закачке в пласт горячей воды, пара).

Система дифференциальных уравнений фильтрации включает в себя: уравнение неразрывности; дифференциальное уравнение движения; уравнения состояния флюида и пористой среды.

2.1. Уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности является частным случаем закона сохранения массы для движущегося в пористой среде флюида.

Рассмотрим конечный неизменный объем пористой среды V , ограниченный поверхностью S .



В общем случае считаем флюид сжимаемым, т.е. $\rho(x, y, z, t)$, а пористую среду упруго-деформируемой, т.е. $m(x, y, z, t)$.

Масса флюида в данном объеме пористой среды V : $\int_V \rho m dV$

Изменение массы флюида в данном объеме пористой среды связано с изменением плотности ρ или пористости m и может

происходить только за счет разности втекания и вытекания флюида через поверхность S .

Скорость изменения массы флюида в объеме V : $\int_V \frac{d}{dt}(\rho m) dV$

должна быть равна секунднему массовому расходу флюида через поверхность S : $-\iint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS$ (входящий поток отрицателен, т.к. противоположен по направлению нормальному вектору поверхности \vec{n} ; выходящий – положителен; т.о. при положительной скорости изменения массы флюида в объеме V данный интеграл необходимо брать со знаком «минус»).

Итак:

$$\int_V \frac{d}{dt}(\rho m) dV = -\iint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS \quad (2.1)$$

На основании формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS = \int_V \nabla(\rho \vec{v}) dV = \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV \quad (2.2)$$

$$(\nabla(\rho \vec{v}) = \text{div}(\rho \vec{v})) \quad .$$

Из (2.1) и (2.2)

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho m) + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (2.3)$$

Т.к. объем V выбран произвольно, то

$$\frac{d(\rho m)}{dt} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – дифференциальное уравнение неразрывности флюида в пористой среде в самом общем случае движения (нестационарное движение сжимаемого и несжимаемого флюида в упруго-деформируемой пористой среде).

Для недеформируемой пористой среды: $m = \text{const}$, из (2.4) получаем:

$$m \frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Для стационарной фильтрации сжимаемого флюида:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0; \quad \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (2.6)$$

Если сжимаемостью флюида можно пренебречь: $\rho = \text{const}$, то уравнение (2.6) приводится к виду:

$$\text{div}\vec{v} = \frac{dv_x}{dX} + \frac{dv_y}{dY} + \frac{dv_z}{dZ} = 0. \quad (2.7)$$

2.2. Дифференциальное уравнение движения.

Дифференциальное уравнение движения флюида в пористой среде является обобщением закона фильтрации Дарси:

$$v = -\frac{K}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (2.7)$$

$\frac{dp}{dx}$ - пространственная производная давления (в направлении оси x).

Вектор пространственной производной в направлении максимальной скорости изменения функции - это градиент:

$$\left(\text{grad} = \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z} \vec{k} \right).$$

Т.о. в векторной форме закон фильтрации Дарси записывается в виде:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} \text{grad}p = -\frac{K}{\mu} \nabla p. \quad (2.9)$$

В подземной гидромеханике используется специальная функция:

$$\Phi = \frac{K}{\mu} p. \quad (2.10)$$

Функция $\Phi(x, y, z, t)$ называется **потенциалом скорости фильтрации**. Если кроме давления действуют другие силы (например, сила тяжести), то потенциал скорости фильтрации):

$$\Phi = \frac{K}{\mu}(p + \rho gz)$$

Таким образом закон фильтрации Дарси можно записать в обобщенной форме:

$$\vec{v} = -grad\Phi = -\nabla\Phi . \quad (2.11)$$

Из уравнения неразрывности (2.4) и закона фильтрации (2.11) можно получить уравнение движения флюида в пористой среде:

$$\frac{d(m\rho)}{dt} - div(\rho grad\Phi) = 0 ; \quad (2.12)$$

или

$$\frac{d(m\rho)}{dt} - \nabla(\rho\nabla\Phi) = 0 . \quad (2.13)$$

В подробной (координатной) записи уравнение (2.13) имеет вид:

$$\frac{d(m\rho)}{dt} = \frac{d}{dX}\left(\rho\frac{K}{\mu}\frac{dp}{dX}\right) + \frac{d}{dY}\left(\rho\frac{K}{\mu}\frac{dp}{dY}\right) + \frac{d}{dZ}\left(\rho\frac{K}{\mu}\frac{dp}{dZ}\right) \quad (2.14)$$

Для решения дифференциального уравнения движения (2.13) необходимо иметь начальные и граничные условия. Начальные условия заключаются в задании искомой функции во всей области в некоторый начальный момент времени (например, значения давления в пласте до начала разработки). Граничные условия задаются на границах пласта: на внешней границе и на внутренней границе (на забое скважины).

Закон Дарси (2.11) и соответствующее ему дифференциальное уравнение движения (2.13) пригодны для изотропной пористой среды, т.е. среды, проницаемость которой во всех направлениях одинакова.

На практике часто встречаются пористые среды, проницаемость которых различна в разных направлениях (например, осадочные пласты с отчетливой слоистой структурой). Пористые среды, в которых коэффициент проницаемости зависит от направления потока, называются анизотропными.

Для анизотропных пористых сред закон фильтрации (и соответственно, уравнение движения) имеют более сложный вид, чем выражения (2.9) или (2.14), т.к. векторы скорости фильтрации и градиента давления не совпадают по направлению.

Для анизотропных пористых сред закон Дарси и уравнение движения записываются в тензорной форме:

$$\vec{v} = \frac{\overline{\overline{K}}}{\mu} \nabla p \quad (2.15)$$

$\overline{\overline{K}}$ - тензор проницаемости пористой среды:

$$\overline{\overline{K}} \equiv \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = \{K_{ij}\} \quad i(1,2,3), j(1,2,3);$$

$$v_i = \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{dp}{dX_j} \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial X_j}. \quad (2.16)$$

Анизотропия естественных осадочных пород – коллекторов обусловлена их отчетливой слоистой структурой. Фильтрационные свойства таких пород одинаковы в направлениях, лежащих в плоскости слоя, но изменяются в перпендикулярном направлении.

В данном случае систему координат выбирают таким образом, чтобы плоскость XU лежала в плоскости слоя, а ось Z была перпендикулярна слою. Выбранные таким образом оси координат называются главными осями пласта. Закон Дарси в этом случае можно записать в виде:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \frac{dp}{dX}; \quad v_y = -\frac{K}{\mu} \frac{dp}{dY}; \quad v_z = -\frac{K_z}{\mu} \frac{dp}{dZ}. \quad (2.17)$$

где K – коэффициент проницаемости в направлениях, параллельных плоскости XU ; K_z - коэффициент проницаемости в направлении оси Z .

2.3. Уравнения состояния флюида и пористой среды.

Эти уравнения определяют зависимость плотности ρ и вязкости μ флюида, а также пористости m и проницаемости K пористой среды от давления: $\rho(p)$; $\mu(p)$; $m(p)$; $K(p)$.

а) Зависимость плотности от давления.

Жидкости: В наиболее общем виде зависимость плотности жидкостей от давления выражается универсальной экспоненциальной формулой:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_{ж} (P - P_0)} \quad (2.18)$$

где $\beta_{ж}$ - коэффициент объемной сжимаемости жидкости (для нефтей $\beta_{ж} = (7 \dots 30) \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}$, для пластовых вод $\beta_{ж} = (2,7 \dots 5) \cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}$).

Так как при не очень больших перепадах давления

$$\beta_{ж} (P - P_0) \ll 1,$$

то выражение (2.18) можно разложить в ряд Тейлора и записать в виде:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{ж} (P - P_0)]; \quad (2.19)$$

или

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{\chi} \right), \quad (2.20)$$

где $\chi = \frac{1}{\beta_{ж}}$ - модуль объемной упругости жидкости.

Газы. Для идеальных газов зависимость плотности от давления выражается уравнением Клапейрона:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (2.21)$$

где R – газовая постоянная для данного газа.

При $T = const$ можно использовать закон Бойля-Мариотта:

$$\rho = \rho_{ат} \frac{P}{P_{ат}}. \quad (2.22)$$

Природные газы можно считать идеальными, если пластовые давления не велики (до 9 МПа), а газ отбирается при депрессии до 1МПа.

В настоящее время встречаются газовые месторождения с высокими пластовыми давлениями (до 60 МПа), которые иногда эксплуатируются с большими депрессиями (15-30МПа). В этих условиях газ нельзя считать идеальным; необходимо использовать уравнение состояния реального газа:

$$\frac{P}{\rho} = zRT; \quad \text{или} \quad \rho = \frac{P}{zRT}, \quad (2.23)$$

где Z – коэффициент, характеризующий степень отклонения состояния реального газа от закона идеальных газов (коэффициент сверхсжимаемости).

б) Зависимость вязкости от давления $\mu(p)$.

Вязкость жидкостей и газов при увеличении давления возрастает. При значительных изменениях давления (до 100 МПа) зависимость вязкости нефтей и природных газов от давления хорошо выражается законом Баруса:

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha(P - P_0)}. \quad (2.24)$$

При малых изменениях давления эта зависимость выражается более простым соотношением:

$$\mu = \mu_0 [1 + \alpha(P - P_0)], \quad (2.25)$$

где α - пьезокоэффициент вязкости.

в) Зависимость пористости от давления $m(p)$.

Масса горных пород, расположенных над кровлей продуктивного пласта, создает так называемое горное давление $P_{\text{горн}}$, которое можно считать неизменным в процессе разработки:

$$P_{\text{горн}} = \rho g H; \quad (2.26)$$

Принято считать, что пласт полностью воспринимает нагрузку вышележащих пород, т.е. горное давление уравнивается напряжением в скелете пласта σ и давлением жидкости P (в порах).

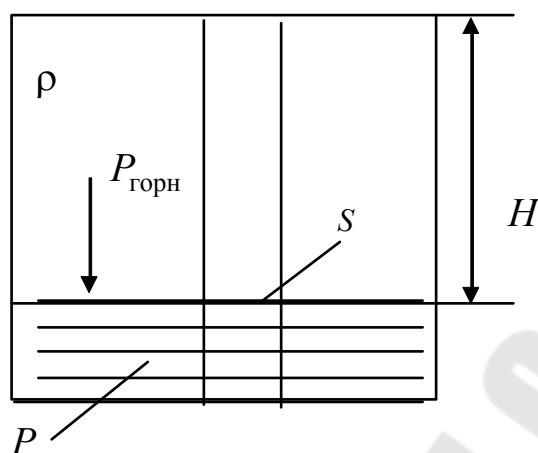
Баланс сил на площадку S :

$$P_{\text{горн}} S = \sigma S (1 - m) + P S m \quad (2.27)$$

где $(1 - m)S$ - доля поверхности пласта, занятая твердым скелетом; mS - доля поверхности пласта, приходящаяся на поры (занятые жидкостью); S - общая поверхность пласта.

Итак

$$P_{\text{горн}} = (1 - m)\sigma + mP = \text{const} \quad (2.28)$$



При разработке залежи пластовое давление P падает и напряжение в скелете σ возрастает.

При падении давления уменьшаются усилия, сжимающие каждое из зерен породы, поэтому увеличивается объем зерен и уменьшается объем пор.

Увеличение напряжения σ приводит к тому, что зерна породы испытывают возрастающую деформацию (вертикальное сжатие) – поверхность контактов между зернами увеличивается, происходит уплотнение упаковки зерен – объем пор дополнительно уменьшается.

Зависимость коэффициента пористости от давления в наиболее общем случае (значительные изменения давления) выражается в виде экспоненциальной функции:

$$m = m_0 e^{\frac{\alpha_m (P - P_0)}{m_0}} \quad (2.29)$$

г) Зависимость проницаемости от давления $K(p)$.

Проницаемость пористой среды весьма существенно зависит от давления жидкости (пластового давления). При уменьшении давления проницаемость уменьшается.

Общая экспоненциальная зависимость:

$$K = K_0 e^{\alpha_k (P - P_0)} \quad (2.30)$$

В трещиноватых пластах проницаемость изменяется в зависимости от давления более интенсивно, чем в пористых (гранулярных).

2.4. Режимы нефтегазоводоносных пластов.

Решение гидродинамических задач разработки месторождений в значительной степени определяется природой движущих сил, обеспечивающих фильтрацию нефти или газа в пласте. В связи с этим важное значение имеет определение режимов нефтегазоводоносных пластов.

Режим продуктивных пластов в процессе их разработки зависит как от естественных факторов, так и от системы разработки.

К естественным факторам относятся:

- геологические особенности строения пласта;
- фильтрационные характеристики пород пласта и насыщающих его жидкостей и газов;
- физические условия в пласте (давление, температура...).

Движение жидкости и газа в пласте в процессе его разработки происходит как за счет использования потенциальной энергии самого пласта, так и за счет дополнительных внешних источников энергии.

Потенциальная энергия пласта выражается в следующих формах:

- энергия напора краевых вод;
- потенциальная энергия сжатия свободного и выделяющегося из жидкости при снижении давления газа;
- потенциальная энергия упругой деформации жидкости и породы пласта;
- энергия, обусловленная силой тяжести пластовых жидкостей.

Дополнительные внешние источники энергии связаны с закачкой в пласт жидкости или газа для поддержания пластового давления.

Режимом нефтегазоводоносного пласта называется проявление доминирующей формы пластовой энергии в процессе разработки залежи нефти или газа.

В зависимости от формы пластовой энергии, за счет которой в основном происходит движение жидкости или газа в пласте, различают следующие режимы нефтегазоводоносных пластов:

- 1) водонапорный режим, когда нефть вытесняется в добывающие скважины под действием напора краевой или подошвенной воды;
- 2) газонапорный режим, если нефть (или вода) вытесняется в скважины в основном под действием напора сжатого газа,

находящегося в виде газовой шапки над нефтью или водой. Этот режим называют режимом газовой шапки.

3) режим растворенного газа, когда давление в нефтяной залежи ниже давления насыщения нефти газом и пузырьки окклюдируемого газа, расширяясь, вытесняют нефть к забоям скважины; такой режим называют «режимом газированной жидкости»;

4) упругий режим, при котором нефть поступает в скважины за счет упругих свойств жидкости и породы пласта;

5) гравитационный режим, когда нефть или вода добываются из пласта только за счет использования силы тяжести самой нефти или воды.

Необходимо отметить, что в промышленной практике нефтяная залежь редко эксплуатируется на одном режиме весь период ее разработки. Часто различные участки одного и того же месторождения могут эксплуатироваться в различных режимах: в приконтурные добывающие скважины нефть поступает за счет напора краевых вод, а в скважины, расположенные ближе к своду – за счет энергии газовой шапки или за счет расширения выделяющегося из нефти газа.

Тема 3. Установившееся движение несжимаемой жидкости в пористой среде

3.1 Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости.

Общее дифференциальное уравнение фильтрации по закону Дарси:

$$\frac{d(m\rho)}{dt} - \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad (3.1)$$

При установившейся фильтрации несжимаемого флюида ($(\frac{d\rho}{dt}) = 0; \rho = \text{const}$) в однородной изотропной недеформируемой пористой среде ($m = \text{const}$) уравнение (3.1) значительно упрощается.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \nabla \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \nabla = \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Уравнение (2.2) - уравнение Лапласа.

$\Phi = \frac{K}{\mu}(P + \varphi)$ — потенциал скорости фильтрации.

Если внешняя сила является силой тяжести: $\Phi = \rho g z$, то

$$\Phi = \frac{K}{\mu}(p + \rho g z) . \quad (3.3)$$

В большинстве случаев слагаемым $\rho g z$ можно пренебречь.

Таким образом, дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости является уравнением Лапласа, хорошо исследованным в современной математике. Это позволяет использовать мощный, хорошо разработанный математический аппарат теории уравнения Лапласа для решения разнообразных задач подземной гидромеханики.

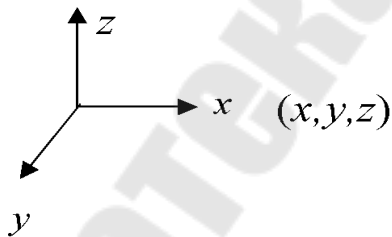
Решения уравнения Лапласа (2.2), как решения однородного линейного дифференциального уравнения, имеют следующие свойства:

- 1) сумма частных решений есть также решение этого уравнения;
- 2) произведение частного решения на произвольную постоянную есть также решение этого уравнения.

Эти свойства приводят к принципу суперпозиции, широко используемому при решении задач подземной гидромеханики.

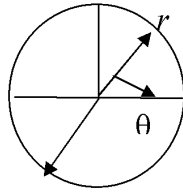
Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости в различных системах координат:

а) в декартовой системе координат:



$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0$$

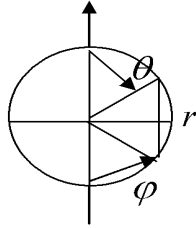
б) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) :



z

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0$$

в) в сферической системе координат (r, θ, φ) :



$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

Наибольшее теоретическое значение в подземной гидромеханике имеют одномерные фильтрационные потоки. Одномерным называется фильтрационный поток, в котором скорость фильтрации и давление являются функциями только одной координаты, отсчитываемой вдоль линии тока. К одномерным относятся следующие потоки: прямолинейно-параллельный фильтрационный поток; плоскорадиальный фильтрационный поток; радиально-сферический фильтрационный поток.

3.2 Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток.

В данном случае траектории всех частиц жидкости – параллельные прямые, а скорости фильтрации во всех точках любого поперечного сечения равны друг другу.

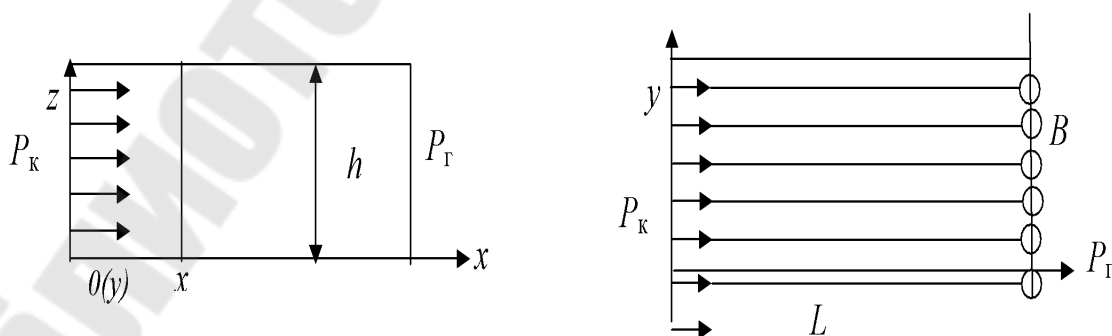


Рис. 3.1. Схема прямолинейно-параллельного фильтрационного потока

Пусть в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B в начальном сечении поддерживается давление $P_{\kappa} = const$, а в сечении II поддерживается $P_{\Gamma} = const$ (здесь расположена добывающая галерея скважин). В данном случае потенциал скорости фильтрации.

$$\Phi = \frac{K}{\mu} P. \quad (3.4)$$

Дифференциальное уравнение Лапласа записывается в виде:

$$\frac{K}{\mu} \frac{d^2 P}{dx^2} = 0 \quad (3.5)$$

или:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = 0. \quad (3.6)$$

Граничные условия

$$P|_{x=0} = P_{\kappa}; P|_{x=L} = P_{\Gamma} \quad (3.7)$$

Проинтегрировав дважды уравнение (3.6), получим:

$$P = C_1 X + C_2; \quad (3.8)$$

$$C_2 = P_{\kappa}; C_1 = -\frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L}$$

$$\text{Таким образом: } P = P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} x. \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что закон изменения давления вдоль x – линейный.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L}. \quad (3.10)$$

В соответствии с законом фильтрации Дарси:

$$v_{\phi} = -\frac{K}{\mu} \frac{dP}{dx} = \frac{K}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} = const \quad (3.11)$$

т.е. скорость фильтрации $v_{\phi} = const$.

Объемный расход жидкости через поперечное сечение пласта:

$$Q = v_{\phi} Bh = \frac{K}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} Bh = const \quad (3.12)$$

Действительная скорость частиц жидкости в порах:

$$v = \frac{v_{\phi}}{m} = \frac{K}{m\mu} \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L}. \quad (3.13)$$

Закон движения частиц жидкости $t = f(x)$:

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad dt = \frac{dx}{v}; \quad (x|_0 = 0), \quad (3.14)$$

откуда :

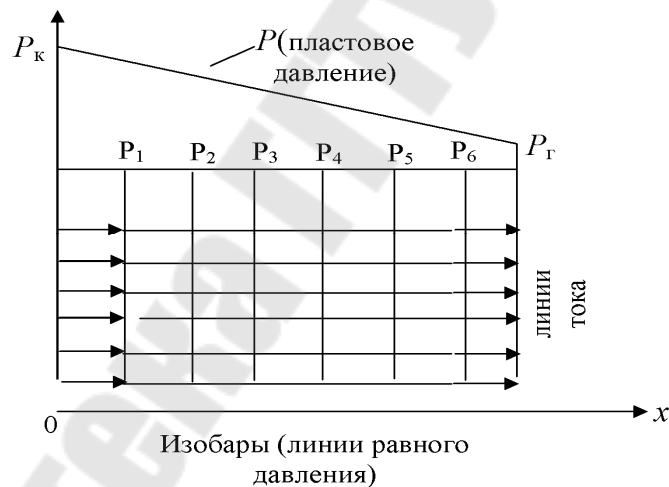
$$t = \frac{x}{v} = \frac{m\mu \cdot L}{K(P_{\kappa} - P_{\Gamma})} x = \frac{mhB}{Q} x. \quad (3.15)$$

Средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление

$$\tilde{P} = \frac{1}{V_{\Pi}} \int_{V_{\Pi}} P dV_{\Pi}. \quad (3.16)$$

$$V_{\Pi} = mBhL; \quad dV_{\Pi} = mBhdx.$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{mBhL} \int_0^L (P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} x) mBhdx = \dots = \frac{P_{\kappa} + P_{\Gamma}}{2}. \quad (3.17)$$



Гидродинамическое поле фильтрационного потока - совокупность изобар и линий тока (траекторий).

3.3 Плоскорадиальный фильтрационный поток.

Этот пример относится к случаю горизонтального круглого пласта постоянной толщины, в центре которого пробурена одна скважина, вскрывшая пласт на всю толщину и имеющая открытый

забой (т.е. вся поверхность забоя является открытой). Такая скважина называется гидродинамически совершенной.

Радиус кругового пласта - R_K . Внешней границей кругового пласта является контур питания K , на котором поддерживается постоянное давление P_K . Радиус скважины - r . Давление на забое скважины P_c . $K = \text{const}$; $\mu = \text{const}$.

В данном случае давление и скорость фильтрации будут зависеть только от r . Дифференциальное уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (3.18)$$

$$\Phi = \frac{K}{\mu} P \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr} \right) = 0 \quad (3.19)$$

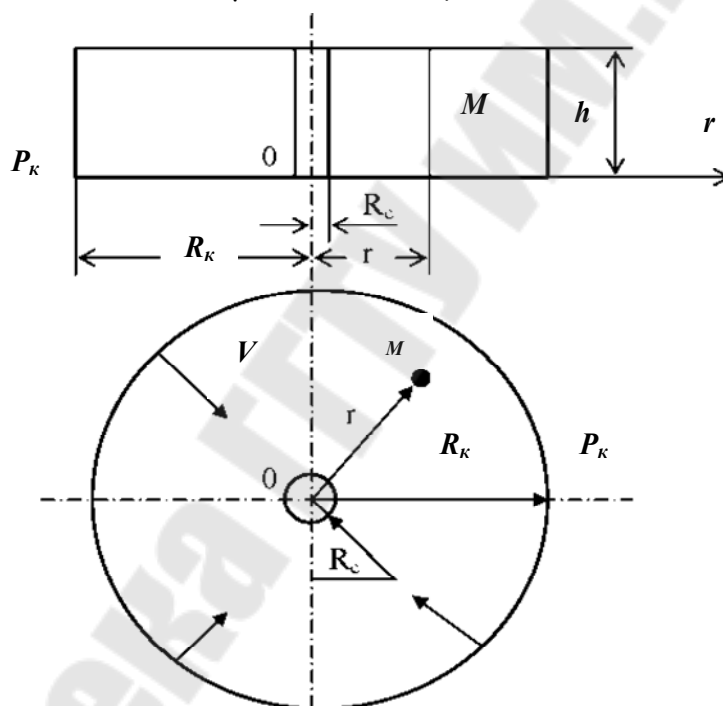


Рис.3.2. Схема плоскорадиального фильтрационного потока

Интегрируя (3.19), получим:

$$r \frac{dP}{dr} = C_1 \quad (3.20)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{C_1}{r}; \quad P = C_1 \ln r + C_2$$

Граничные условия : $P|_{r=R_K} = P_K$; $P|_{r=r_c} = P_c$.

Таким образом: $C_1 = \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}$

$$C_2 = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln R_k = P_c - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln r_c$$

Следовательно:

$$P = P_c + \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} \quad (3.21)$$

Градиент давления: $\frac{dP}{dr} = \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \quad (3.22)$

Скорость фильтрации: $v_\phi = -\frac{K}{\mu} \frac{dP}{dL} = \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr} \quad (3.23)$

Таким образом: $v_\phi = +\frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr} = +\frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \quad (3.24)$

(знак + означает, что U_ϕ противоположно r).

Дебит скважины:

$$Q = \frac{2 \pi K h}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \quad (3.25)$$

Формула (3.25) называется формулой Дюпюи. Определим закон движения частицы жидкости вдоль ее траектории. Действительная скорость частицы жидкости:

$$v = \frac{v_\phi}{m} = -\frac{dr}{dt} \quad (3.26)$$

$$dt = -\frac{m}{v_\phi} dr \quad (3.27)$$

Интегрируя (3.27) в пределах от 0 до t и от R_0 до r , получим

$$t = \frac{m \mu \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}}{K (P_{\kappa} - P_c)} \frac{R_0^2 - r^2}{2} = \frac{\pi m h (R_0^2 - r^2)}{Q} \quad (3.28)$$

Время отбора всей жидкости из кругового пласта радиусом R_{κ} получим, если вместо R_0 подставим радиус контура питания R_{κ} , а вместо - радиус скважины r_c :

$$T = \pi m h (R_{\kappa}^2 - r_c^2) / Q \quad (3.29)$$

Средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{V_{\text{п}}} \int P dV_{\text{п}} \quad (3.30)$$

Таким образом:

$$P_{\text{ср}} = P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_c}{2 \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \quad (3.31)$$

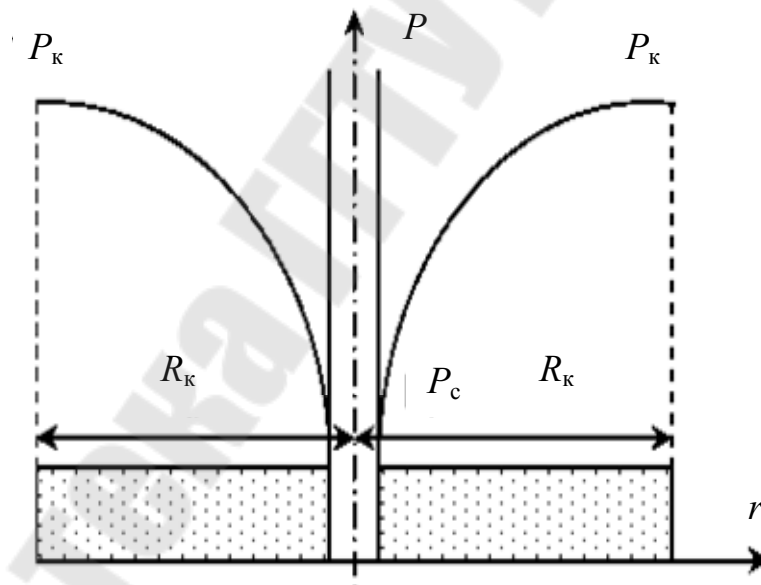


Рис.3.3 График распределения давления в плоскорадиальном фильтрационном потоке.

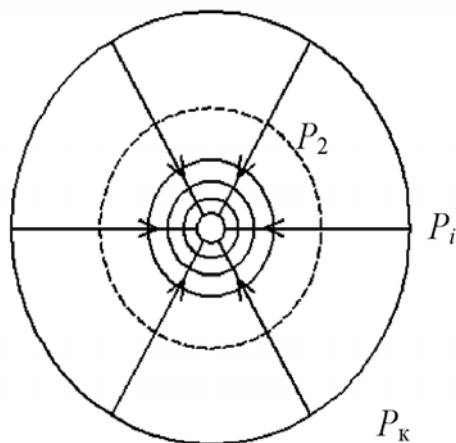


Рис.3.4 Гидродинамическое поле плоскорадиального фильтрационного потока.

Отношение дебита скважины Q к перепаду давления (депрессии) ΔP называется коэффициентом продуктивности скважины:

$$K = \frac{Q}{\Delta P} = \frac{2 \pi k h}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} . \quad (3.32)$$

График зависимости дебита Q от перепада давления $(P_k - P_c) = \Delta P$ называется индикаторной диаграммой. Все выведенные формулы справедливы и для нагнетания жидкости в пласт. В этом случае $P_c > P_k$ и в формулы (3.21), (3.23), (3.24), (3.30) вместо $P_k - P_c$ необходимо поставить $P_c - P_k$.

3.4. Радиально-сферический фильтрационный поток.

В данном случае предполагается пласт неограниченной толщины с плоской горизонтальной непроницаемой кровлей, через которую скважина сообщается с пластом полусферическим забоем. При эксплуатации такой скважины траектории движения всех частиц флюида в пласте будут прямолинейными и радиально-сходящимися к центру забоя.

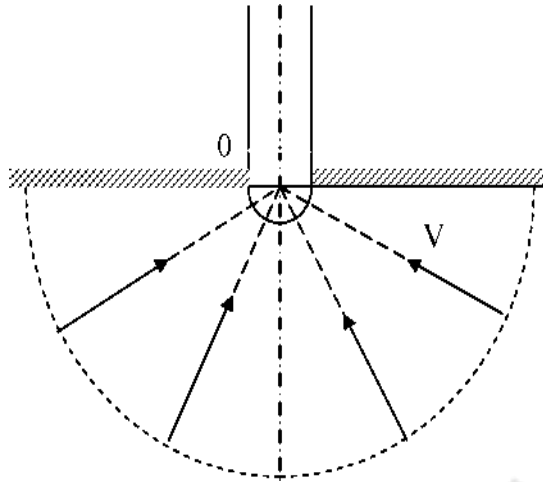


Рис.3.5. Схема радиально-сферического фильтрационного потока

Давление и скорость фильтрации будут функцией только расстояния до центра забоя, т.е. радиуса r .

$$v_{\phi}(r); P(r).$$

На практике такой случай встречается, когда скважина вскрывает только кровлю пласта, а глубина вскрытия значительно меньше толщины пласта.

Уравнение Лапласа для потенциала скорости фильтрации в сферических координат:

$$\frac{d}{dz} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 ; \quad (3.33)$$

$\Phi = \frac{K}{M} P^*$, где $P^* = P + \rho g z$ - приведенное давление; $K = const$; $\mu = const$.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dP^*}{dr} \right) = 0 . \quad (3.34)$$

Интегрируя (3.34) по r дважды, получим:

$$r^2 \frac{dP^*}{dr} = C_1 \quad (3.35)$$

$$P^* = -\frac{C_1}{r} + C_2 . \quad (3.36)$$

Граничные условия: $P^* \Big|_{r = R_k} = P_k^*$ $P^* \Big|_{r_c = R_k} = P_c^*$

Таким образом:

$$C_1 = \frac{P_K^* - P_C^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}}$$

$$C_2 = P_K + \frac{P_K - P_C}{R_K \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K} \right)} = P_C + \frac{P_K - P_C}{r_c \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K} \right)}. \quad (3.37)$$

Подставляя постоянные C_1 и C_2 в (3.37) получим распределение давления в радиально-сферическом фильтрационном потоке несжимаемой жидкости: $P(r)$

При отборе жидкости из пласта: $P_K > P_C$:

$$P = P_K - \frac{P_K - P_C}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}}. \quad (3.38)$$

При нагнетании жидкости в пласт: $P_K > P_C$:

$$P = P_C - \frac{P_C - P_K}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right). \quad (3.39)$$

Градиент давления:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{C_1}{r^2} = \frac{P_K - P_C}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (3.40)$$

Скорость фильтрации $v_\phi(r)$

$$v_\phi = + \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dr} = (+) \frac{K}{\mu} \frac{P_K - P_C}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (3.41)$$

Дебит добывающей скважины (т.е. расход жидкости через полусферическую поверхность радиуса r):

$$Q = v_\phi 2\pi r^2 = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{P_K - P_C}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}}. \quad (3.42)$$

Выражения (3.41) и (3.42) также справедливы и для нагнетательной скважины, если вместо $P_k - P_c$ подставить $P_c - P_k$.

Закон движения частиц жидкости вдоль их траекторий r т.е. $t(r)$ определяется из соотношения:

$$v = \frac{v_\phi}{m} = -\frac{dr}{dt}; \text{ отсюда } dt = -\frac{m}{v_\phi} dr. \quad (3.43)$$

Интегрируя для v_ϕ получим:

$$t = \dots = \frac{2\pi m}{Q} \frac{R_k^3 - r^3}{3}. \quad (3.44)$$

Если влиянием сил тяжести нельзя пренебречь, то во всех выражениях P - это полное (приведенное) давление $P = P' + \rho g z$, где P - истинное давление в данной точке пласта.

Тема 4. Фильтрационные течения несжимаемой жидкости в неоднородных пластах

В природных условиях продуктивные нефтегазосодержащие пласты редко бывают однородными. Пористая среда называется неоднородной, если ее фильтрационные характеристики – проницаемость и пористость – различны в разных областях.

В нефтегазоносных пластах выделяют следующие основные виды неоднородности:

1. Слоистая неоднородность, когда пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых фильтрационные характеристики постоянны, но различны в разных слоях.

2. Зональная неоднородность, при которой пласт по площади состоит из нескольких зон (областей пласта) различной проницаемости и пористости.

3. Неоднородные пласты, в которых проницаемость является известной непрерывной функцией координат точек области фильтрации $K = f(x, y, z)$.

4.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток в слоисто-неоднородном пласте.

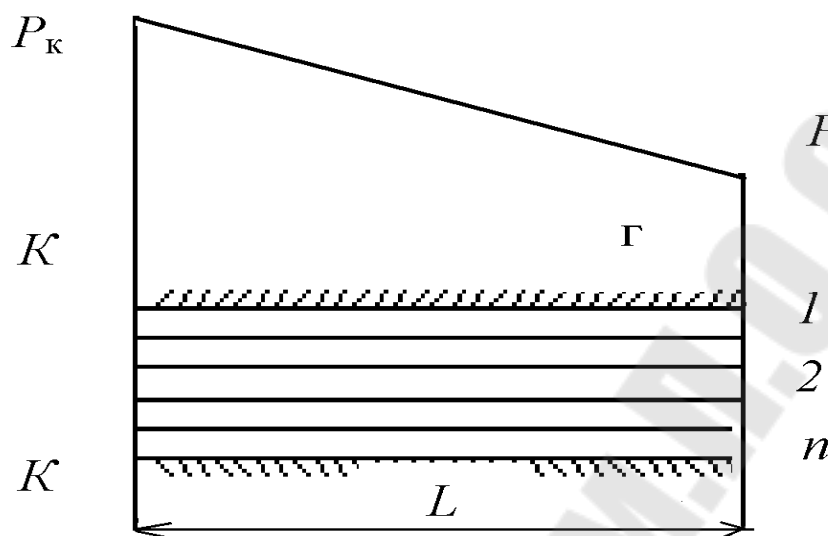


Рис.4.1. Схема слоисто-неоднородного пласта

Пусть горизонтальный пласт толщиной h и шириной B состоит из n пропластков толщиной $h_1 h_2 h_i \dots h_n$. Проницаемости $K_1 K_2 K_i \dots K_n$, пористости $m_1 m_2 m_i \dots m_n$. $P_k = const$ - давление на контуре питания. $P_r = const$ - давление на добывающей галерее. Т.к. $P_k > P_r$, то в каждом пропластке будет иметь место установившийся прямолинейно-параллельный поток жидкости. В пределах каждого сечения пласта давление будет одинаковым, а распределение давления по длине в каждом пропластке будет линейным от P_k до P_r , то и для всего пласта распределение давления будет линейным от P_k до P_r .

$$P = P_k - \frac{P_k - P_r}{L} x. \quad (4.1)$$

Градиент давления в каждом пропластке также будет одинаков:

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{P_k - P_r}{L}. \quad (4.2)$$

Скорость фильтрации жидкости в каждом пропластке будет различной:

$$v_i = - \frac{K_i}{\mu} \frac{dP}{dx} = \frac{K_i}{\mu} \frac{P_k - P_r}{L}. \quad (4.3)$$

Суммарный дебит потока Q можно вычислить как сумму дебитов в отдельных пропластках Q_i :

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n U_i h_i B = \frac{B(P_K - P_\Gamma)}{\mu L} \sum_{i=1}^n K_i h_i . \quad (4.4)$$

4.2. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток в зонально-неоднородном пласте.

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщины h и шириной B состоит из n зон с различными проницаемостями K_i , пористостью m_i и длиной l_i . На границах пласта поддерживаются постоянные давления P_K и P_Γ ; $P_K > P_\Gamma$.

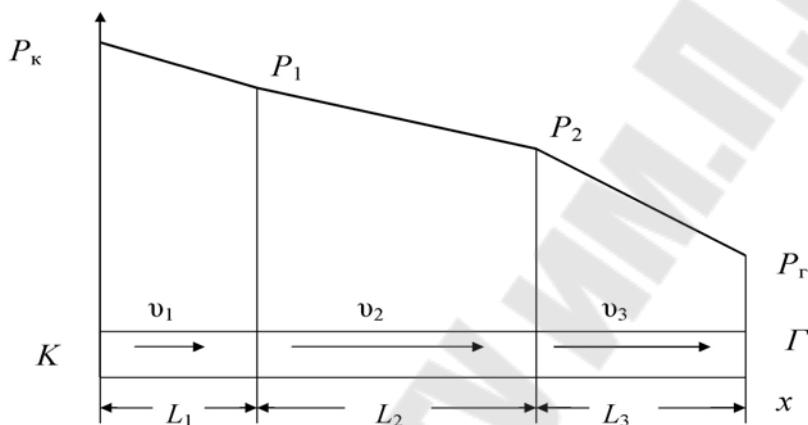


Рис.4.2. Схема прямолинейно-параллельного фильтрационного потока в зонально-неоднородном пласте

Характеристики фильтрационного потока в пределах каждой однородной зоны рассчитывается по соответствующим формулам для однородного пласта.

Распределение давления в каждой зоне, очевидно, линейное:

$$P_i(x) = P_{i-1} - \frac{P_{i-1} - P_i}{l_i} x . \quad (4.5)$$

Градиент давления в пределах каждой зоны постоянный, но различный в разных зонах:

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_i = - \frac{P_{i1} - P_i}{l_i} . \quad (4.6)$$

В силу уравнения неразрывности потока (т.е. закона сохранения массы), расход жидкости (дебит) постоянный и одинаков во всех зонах: $Q_i = Q = const$.

Скорость фильтрации также будет постоянной и одинаковой во всех зонах.

$$U_{\phi} = - \left. \frac{K_i}{\mu} \frac{dP}{dx} \right|_i = \frac{K_i}{\mu} \frac{P_{i-1} - P_i}{l_i} . \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) для каждой зоны запишем в виде:

$$\left. \frac{l_i}{K_i} = \frac{1}{\mu v_{\phi}} (P_{i-1} - P_i) \right\} \quad (4.8)$$

Просуммируем все выражения системы (4.8)

$$\sum_i^n \frac{l_i}{K_i} = \frac{1}{\mu v_{\phi}} \underbrace{\sum_{i=1}^m (P_{i-1} - P_i)}_{P_{\kappa} - P_{\Gamma}} . \quad (4.9)$$

$$v_{\phi} = \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i}} \quad (4.10)$$

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i}} . \quad (4.11)$$

Следует иметь в виду, что действительные скорости движения частиц жидкости в разных зонах пласта будут различными:

$$v_i = \frac{v_{\phi}}{m_i} .$$

4.3. Плоскорадиальный фильтрационный поток в зонально - неоднородном пласте.

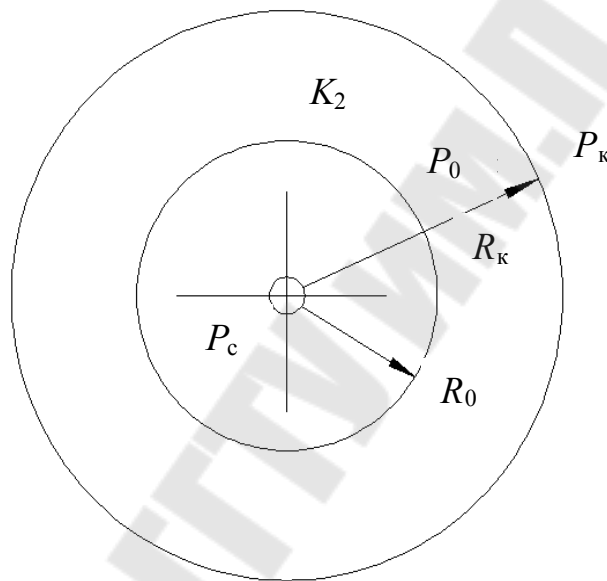
Если при плоскорадиальном притоке жидкости к гидродинамически совершенной скважине по закону Дарси зоны разной проницаемости имеют кольцеобразную форму, то формула дебита скважины для двухзонального пласта имеет вид:

$$Q = \frac{2 \pi h (P_{\kappa} - P_c)}{\mu \left(\frac{1}{K_1} \ln \frac{R_0}{r_c} + \frac{1}{K_2} \ln \frac{R_{\kappa}}{R_0} \right)} \quad (4.12)$$

Распределение давления по зонам:

$$P_1 = P_c + \frac{(P_k - P_c) \ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{R_0}{r_c} + \frac{K_1}{K_2} \ln \frac{R_k}{R_0}} \text{ при } (r_c \leq r \leq R_0) \quad (4.13)$$

$$P_2 = P_k - \frac{\frac{K_1}{K_2} (P_k - P_c) \ln \frac{R_k}{r}}{\ln \frac{R_0}{r_c} + \frac{K_1}{K_2} \ln \frac{R_k}{R_0}} \text{ при } (R_0 \leq r \leq R_k) \quad (4.14)$$



Возможен случай, когда проницаемость пласта в призабойной зоне является функцией r : $K_1=K_1(r)$ возрастает или уменьшается от K_c на забое скважины до K_2 на границе призабойной зоны $r=R_0$. В дальнейшем т.е. при $r > R_0$ $K_2=const$.

Если в призабойной зоне проницаемость изменяются линейно:

$$K_1 = ar + b, \quad (4.15)$$

где $a = \frac{K_2 - K_c}{R_0 - r_c}$, $b = \frac{K_c R_0 - K_2 r_c}{R_0 - r_c}$, то дебит скважины можно

определить по формуле:

$$Q = \frac{2\pi K_2 h (P_k - P_c)}{\mu \left(\ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{R_0 - r_c}{\frac{K_c}{K_2} R_0 - r_c} \ln \frac{K_c R_0}{K_2 r_c} \right)}. \quad (4.16)$$

Тема 5. Одномерные фильтрационные потоки при нелинейных законах фильтрации

5.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток.

Рассмотрим прямолинейно-параллельный фильтрационный поток, фильтрация которого подчиняется нелинейному степенному закону:

$$v_{\phi} = C \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{1/n} \text{ при } (1 \leq n \leq 2) \quad (5.1)$$

где C и n – известные опытные константы.

Степенной нелинейный закон (5.1) описывает турбулентные режимы фильтрации.

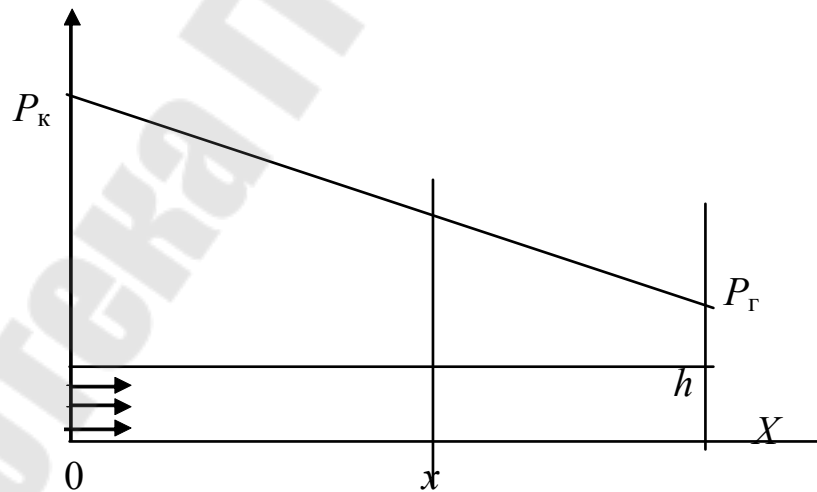
Скорость фильтрации:

$$v_{\phi} = \frac{Q}{Bh} \quad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) получаем:

$$dp = -\left(\frac{Q}{cBh} \right)^n dx \quad (5.3)$$

$$\int_{P_{\kappa}}^{P_{\Gamma}} dP = -\left(\frac{Q}{cBh} \right)^n \int_0^L dx \quad (5.4)$$



Из (5.4) дебит потока:

$$Q = c \left(\frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} \right)^{1/n} Bh \quad (5.5)$$

Проинтегрируем выражение (5.3) следующим образом:

$$\int_{P_k}^P dP = -\left(\frac{Q}{cBh}\right)^n \int_0^x dx. \quad (5.6)$$

$$P = P_k - \left(\frac{Q}{cBh}\right)^n x. \quad (5.7)$$

Подставив в (5.7) Q из (5.5) получим:

$$P = P_k - \frac{P_k - P_\Gamma}{L} x. \quad (5.8)$$

Таким образом распределение давления при нелинейном законе фильтрации линейно и в точности совпадает с распределением давления в аналогичном потоке при фильтрации по линейному закону Дарси.

5.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток.

Рассмотрим плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости, фильтрация которого подчиняется квадратичному закону Краснопольского:

$$v_\phi = \left(\frac{\sqrt{K}}{\beta\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{1/2} \quad (5.9)$$

Обозначим $\frac{\sqrt{K}}{\beta\rho} = C$ и запишем (5.9) в дифференциальной форме:

$$v_\phi = C \left(\frac{dP}{dr}\right)^{1/2} = \frac{Q}{2\pi r h r}. \quad (5.10)$$

Из (5.10) имеем: $dP = \left(\frac{Q}{2\pi h C}\right)^2 \frac{dr}{r^2}. \quad (5.11)$

Интегрируем (5.11): $\int_{P_c}^{P_k} dP = \left(\frac{Q}{2\pi h C}\right)^2 \int_{r_c}^{R_k} \frac{dr}{r^2} \quad (5.12)$

$$P_k - P_c = \left(\frac{Q}{2\pi h C}\right)^2 \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}\right)$$

Откуда:

$$Q = 2\pi h C \left(\frac{P_K - P_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \right)^{1/2} \quad (5.13)$$

Так как $r_c \ll R_K$, то (5.13) можно записать в виде:

$$Q = 2\pi h C \sqrt{r_c (P_K - P_c)} \quad (5.14)$$

Проинтегрируем (5.11) и используя (5.13), получим распределение давления в пласте:

$$P = P_K - \frac{P_c - P_K}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_K} \right) \quad (5.15)$$

Таким образом, в данном случае распределение давления имеет тот же вид, что и для линейного закона Дарси, но для радиально-сферического фильтрационного потока.

Тема 6 Установившаяся плоская фильтрация жидкости. Интерференция скважин

При пуске, остановке или изменении режима работы одной скважины (или группы скважин) изменяются дебиты и забойные давления других скважин, эксплуатирующих тот же пласт. Суммарная добыча нефти из месторождения по мере ввода в эксплуатацию новых скважин растет медленнее, чем число скважин.

6.1. Точечные стоки и источники.

Точечным стоком называется точка, поглощающая жидкость. На плоскости точечный сток можно рассматривать как модель гидродинамически совершенной скважины бесконечно-малого диаметра в пласте единичной толщины. Точечный источник – это точка, выделяющая жидкость (модель нагнетательной скважины).

Определим потенциал точечного стока (источника). На плоскости точечный сток является моделью добывающей скважины и течение вокруг него плоскорадиальное.

$$v_\phi = \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{– обобщенный закон фильтрации Дарси (6.1)}$$

$$v_{\phi} = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r} = \frac{q}{2\pi r}, \quad (6.2)$$

где $q = \frac{Q}{h}$ - дебит скважины-стока, приходящийся на единицу толщины пласта.

Из (6.1) и (6.2) получим: $d\Phi = \frac{q}{2\pi} \frac{dr}{r}$. (6.3)

Интегрируем (6.3):

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + C, \quad (6.4)$$

где C – постоянная интегрирования.

Для точечного источника:

$$\Phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r + C. \quad (6.5)$$

Понятия источников и стоков широко используются для решения многих важных задач подземной гидромеханики.

6.2. Метод суперпозиции.

Метод суперпозиции (метод наложения) основан на свойствах уравнения Лапласа, которое описывает распределение потенциала (т.е. давления) в фильтрующихся потоках флюида в пласте.

Математический смысл метода суперпозиции заключается в том, что если имеется несколько фильтрационных потоков с потенциалами:

$$\Phi_1(x, y, z); \Phi_2(x, y, z); \Phi_n(x, y, z),$$

каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (6.6)$$

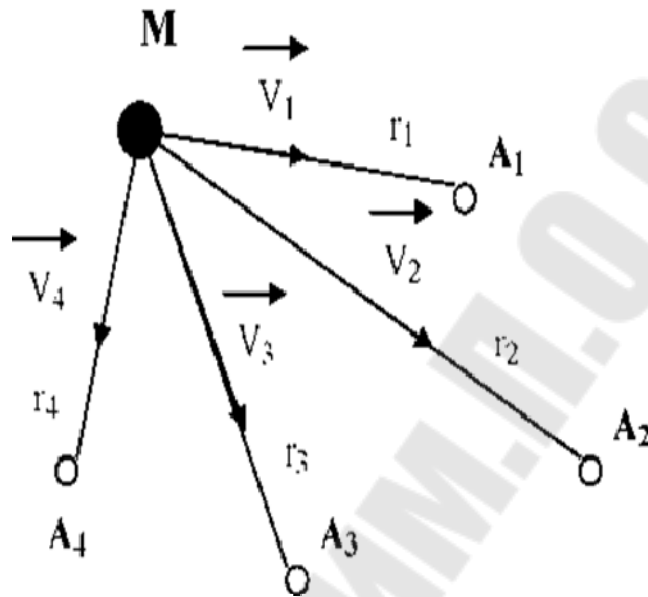
то и сумма: $\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i$

где C_i - произвольные постоянные также удовлетворяет уравнению Лапласа.

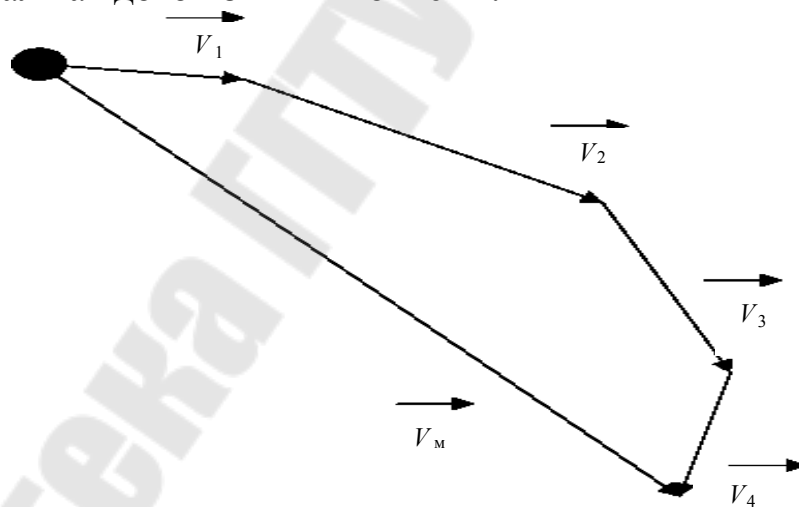
Гидродинамически метод суперпозиции состоит в том, что изменения потенциала и давления в любой точке пласта, вызванные работой каждой скважины (добывающей или нагнетательной), алгебраически суммируются в каждой точке пласта. При этом

суммарная скорость фильтрации находится как сумма векторов скоростей фильтрации, вызванных работой каждой скважины.

Пусть на неограниченной плоскости расположено n источников и стоков:



Потенциал каждого из них в точке M:



$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{q_1}{2\pi} \ln r_1 + C_1 \\ \Phi_2 &= \frac{q_2}{2\pi} \ln r_2 + C_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \Phi_n &= \frac{q_n}{2\pi} \ln r_n + C_n \end{aligned} \right\} (6.7)$$

(для стока $q > 0$; для источника $q < 0$).

Каждая из функций $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Тогда сумма потенциалов:

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln r_i + C, \quad (6.8)$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. определяет суммарный потенциал в точке М.

Это означает, что фильтрационные потоки от каждого источника или стока накладываются друг на друга (складываются как векторы).

Вектор скорости фильтрации $\vec{\mathfrak{G}}_\phi$ в точке М:

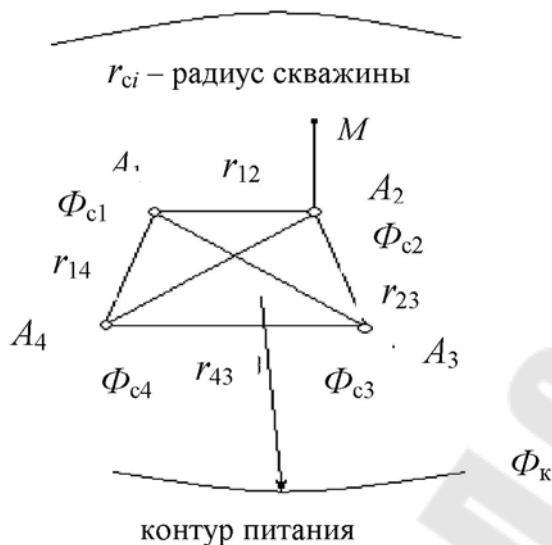
$$\vec{\mathfrak{G}}_{\phi\Sigma} = \vec{\mathfrak{G}}_{\phi 1} + \vec{\mathfrak{G}}_{\phi 2} + \vec{\mathfrak{G}}_{\phi 3} + \dots + \vec{\mathfrak{G}}_{\phi n} \quad (6.9)$$

$$\text{где } \mathfrak{G}_{\phi 1} = \frac{q_1}{2\pi r_1}; \dots; \mathfrak{G}_{\phi n} = \frac{q_n}{2\pi r_n}.$$

Метод суперпозиции можно использовать не только в бесконечных пластах, но и в пластах, имеющих контур питания или непроницаемую границу. В этом случае для выполнения граничных условий приходится вводить фиктивные скважины-стоки или скважины-источники за пределами пласта.

6.3. Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания.

Пусть в горизонтальном пласте толщиной h расположена группа скважин $A_1 \dots A_i \dots A_n$, работающих с различными забойными потенциалами $\Phi_{c1} \dots \Phi_{ci} \dots \Phi_{cn}$. Расстояние между i и j скважинами - r_{ij} . Радиус скважины $\dots r_c$. Потенциал Φ_k на контуре питания считается заданным. Требуется определить дебит каждой скважины и скорость фильтрации в любой точке пласта.



Потенциал в любой точке пласта определяется по формуле (6.9). В частности забойные потенциалы на каждой скважине будут равны.

Если поместим точку M на забой скважины $1 \dots i \dots n$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{c1} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{c1} + q_2 \ln r_{12} + \dots + q_i \ln r_{1i} + q_n \ln r_{1n}) + C \\ \Phi_{c2} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{21} + q_2 \ln r_{c2} + \dots + q_i \ln r_{2i} + q_n \ln r_{2n}) + C \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_{cn} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{n1} + q_2 \ln r_{n2} + \dots + q_i \ln r_{ni} + q_n \ln r_{cn}) + C \end{aligned} \right\} (6.10)$$

Система (6.10) состоит из n уравнений и содержит $n+1$ неизвестных (n дебитов и постоянную C). Дополнительное уравнение получим, определив Φ_k :

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} \cdot (q_1 \cdot \ln R_k + q_2 \cdot \ln R_k + \dots + q_n \cdot \ln R_k) + C \quad (6.11)$$

Вычитая почленно из уравнений системы (6.10) уравнение (6.11), исключим C и получим систему из n уравнений с n неизвестными (q_i).

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\kappa} - \Phi_{c1} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{c1}}) + q_2 \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{12}}) + \dots + q_n \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{1n}})) \\ \Phi_{\kappa} - \Phi_{c2} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{21}}) + q_2 \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{c2}}) + \dots + q_n \ln(\frac{R_{\kappa}}{r_{2n}})) \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (6.12)$$

Решив систему (6.12) можно определить дебиты всех скважин.

Скорость фильтрации $\vec{\mathfrak{G}}_{\phi}$ в любой точке пласта М определяется как векторная сумма скоростей фильтрации, вызванных работой каждой скважины:

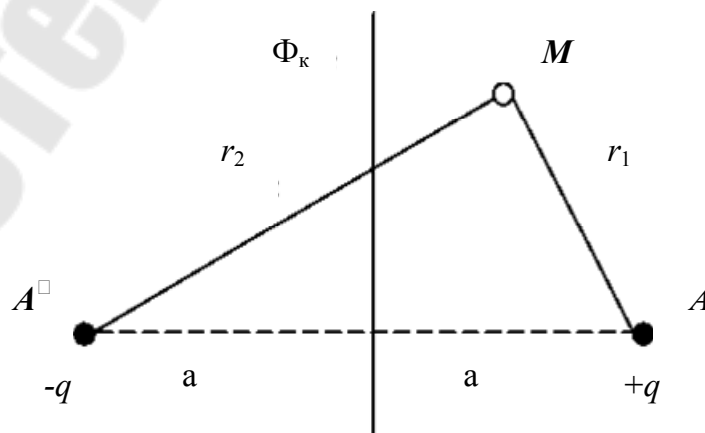
$$\vec{\mathfrak{G}}_{\phi} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathfrak{G}}_{\phi_i} \quad (6.13)$$

где $\mathfrak{G}_{\phi_i} = \frac{q_i}{2\pi r}$, $\vec{\mathfrak{G}}_{\phi_i}$ направлена по радиусу от точки М к данной скважине-стоку.

Тема 7 Метод отображения источников и стоков

7.1. Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания.

Пусть в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания работает одна добывающая скважина А с забойным потенциалом Φ_c . Требуется найти дебит скважины q , потенциал Φ и скорость фильтрации в любой точке пласта.



Для решения данной задачи используется так называемый “метод отображения источников и стоков”. Зеркально отобразим скважину-сток A относительно контура питания скважиной-источником A' с таким же по величине дебитом. В итоге получаем бесконечный пласт, в котором рассмотрим совместную работу двух скважин: стока A и источника A' .

Потенциал в любой точке пласта M :

$$\Phi_M = \frac{+q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{-q}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C \quad (7.1)$$

Если точка M на контуре питания, то $r_1 = r_2$, и потенциал на контуре питания будет равен:

$$\Phi_K = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_1} + C = C \quad (7.2)$$

т.е. потенциал на контуре питания в данном случае остаётся постоянным.

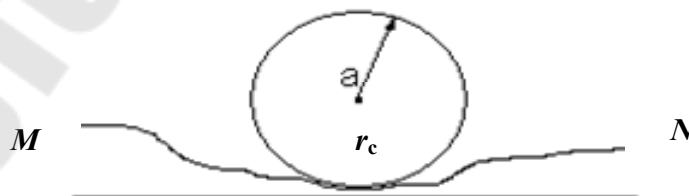
Потенциал на забое скважины A : $r_1 = r_c$; $r_2 = 2a$;

$$\Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_c}{2a} + \Phi_K \quad (7.3)$$

Из (7.3) определяем дебит скважины A :

$$q = \frac{2\pi(\Phi_K - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}} \quad (7.4)$$

Если бы контур питания был окружностью радиуса a , то дебит скважины по формуле Дюпюи был бы равен:



$$q = \frac{2\pi(\Phi_K - \Phi_c)}{\ln \frac{a}{r_c}} \quad (7.5)$$

В реальных условиях форма контура питания MN обычно заключена между окружностью и прямой линией, т.е.:

$$\frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{q}{r_c}} \geq q \geq \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}} \quad (7.6)$$

Потенциал в любой точке M :

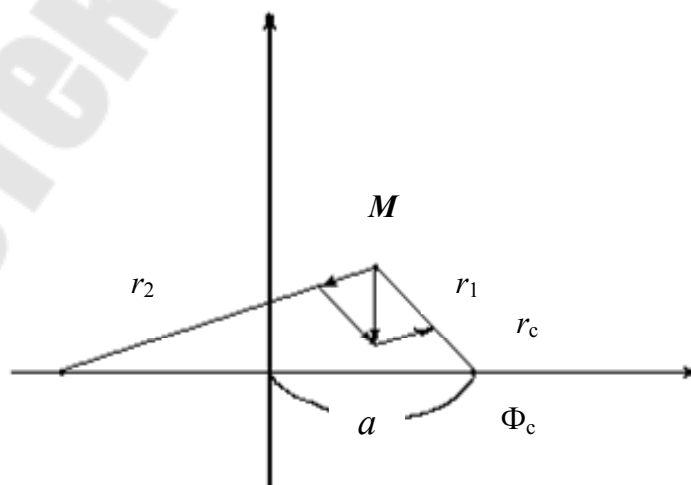
$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \Phi_k \quad (7.7)$$

Скорость фильтрации в любой точке M равна векторной сумме скоростей фильтрации, вызванных работой реальной скважины стока A и фиктивной скважины – источника A' .

$$\vec{v}_\phi = \vec{v}_A + \vec{v}_{A'} \quad (v_A = \frac{q}{2\pi r_i}). \quad (7.8)$$

7.2. Приток жидкости к скважине, расположенной вблизи непроницаемой границы.

Такая задача может возникнуть при расположении добывающей скважины возле сброса или границы выклинивания продуктивного пласта. В этом случае реальную скважину-сток зеркально отображают относительно непроницаемой границы фиктивной скважиной-источником. Решение аналогично предыдущему случаю. В данном случае скорость фильтрации на непроницаемой границе направлена вдоль границы, т.е. граница является линией тока и фильтрация через неё отсутствует.



$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 r_2 + C \quad (7.9)$$

$M \rightarrow K ; R_K \gg 2a ;$

$$\Phi_K = \frac{q}{2\pi} \ln R_K^2 + C \quad (7.10)$$

$$C = \Phi_K - \frac{q}{2\pi} \ln R_K^2 \quad (7.11)$$

$$M \rightarrow C ; \Phi_C = \frac{q}{2\pi} \ln (r_c 2a) + \Phi_K - \frac{q}{2\pi} \ln R_K^2 \quad (7.12)$$

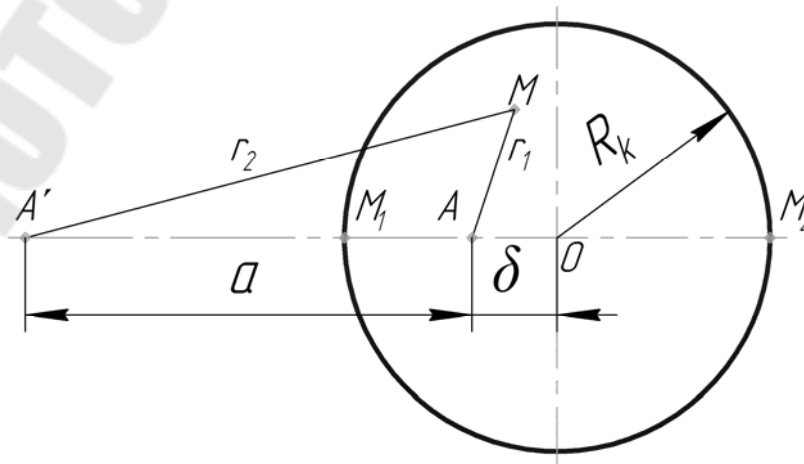
$$\Phi_K - \Phi_C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_K^2}{2ar_c} \quad (7.13)$$

$$q = \frac{2\pi(\Phi_K - \Phi_C)}{\ln \frac{R_K^2}{2ar_c}} \quad (7.14)$$

7.3. Приток жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте.

Пусть в плоском пласте постоянной толщины h с круговым контуром питания радиуса R_K , на котором поддерживается постоянный потенциал Φ_K , эксцентрично расположена скважина-сток A , на которой поддерживается постоянный потенциал Φ_C . Требуется определить дебит скважины и потенциал в любой точке пласта.

Отобразим скважину-сток A фиктивной скважиной-источником A' , расположенной на расстоянии a от скважины A . Расстояние a определим из условия постоянства потенциала на окружности контура питания (в точках M_1 и M_2).



$$\Phi_{M_1} = \Phi_K = \frac{q}{2\pi} \ln(R_K - \delta) - \frac{q}{2\pi} \ln[a - (R_K - \delta)] + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_K - \delta}{a - (R_K - \delta)} + C \quad (7.15)$$

$$\Phi_{M_2} = \Phi_K = \frac{q}{2\pi} \ln(R_K + \delta) - \frac{q}{2\pi} \ln(R_K + a + \delta) + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_K + \delta}{R_K + a + \delta} + C \quad (7.16)$$

Из (7.15) и (7.16) :

$$\frac{R_K - \delta}{a - (R_K - \delta)} = \frac{R_K + \delta}{R_K + a + \delta} \quad (7.17)$$

Откуда

$$a = \frac{(R_K^2 - \delta^2)}{\delta} \quad (7.18)$$

Для того чтобы определить дебит скважины A , запишем выражение потенциала на её забое:

$$\Phi_A = \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln r_c - \frac{q}{2\pi} \ln a + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_c}{a} + C \quad (7.19)$$

Вычитая (7.19) из (7.15), получим:

$$\Phi_K - \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_K - \delta)a}{[a - (R_K - \delta)]r_c} \quad (7.20)$$

Подставляя (7.16) в (7.20), получим :

$$\begin{aligned} \Phi_K - \Phi_c &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_K - \delta) \left(\frac{R_K^2 - \delta^2}{\delta} \right)}{\left[\frac{R_K^2 - \delta^2}{\delta} (R_K - \delta) \right] r_c} = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_K^2 - \delta^2}{R_K r_c} = \frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{R_K}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_K^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.21)$$

Из (7.21) дебит скважины:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_K - \Phi_c)}{\ln \left[\frac{R_K}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_K^2} \right) \right]} \quad (7.22)$$

При эксцентриситете $\delta = 0$ формула (7.22) обращается в формулу Дюпюи. Потенциал в любой точке пласта M :

$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C \quad (7.23)$$

Вычитая из (7.23) (7.19) и учитывая (7.16), получим:

$$\Phi_m = \Phi_c + \frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{r_1 (R_k^2 - \delta^2)}{r_2 r_c^2 \delta} \right] \quad (7.24)$$

Тема 8. Гидродинамика несовершенных скважин

Скважина называется гидродинамически совершенной, если она вскрывает продуктивный пласт на всю толщину и забой скважины открытый, т.е. вся вскрытая поверхность забоя является фильтрующей. Если скважина с открытым забоем вскрывает пласт не на всю толщину h , а только на некоторую глубину b , то ее называют гидродинамически несовершенной по степени вскрытия пласта.

При этом $\bar{h} = b/h$ называется относительным вскрытием пласта.

Если скважина вскрывает пласт до подошвы, но сообщение с пластом происходит только через специальные фильтры или отверстия в обсадной колонне или цементном кольце, то такую скважину называют гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия пласта.

Как правило, реальные скважины имеют оба вида несовершенства, как по степени, так и по характеру вскрытия пласта.

Приток жидкости к несовершенным скважинам даже в горизонтальном однородном пласте перестает быть плоскорадиальным.

а) Если скважина вскрыла пласт неограниченной толщины на глубину b , то ее дебит можно рассчитать по формуле Гиринского Н.К.:

$$Q = \frac{2\pi kb}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{1,6b}{r_c}} \quad (8.1)$$

б) Пласт конечной толщины h .

Для расчета дебита скважины, несовершенной по степени вскрытия пласта, используется формула Н.Козени:

$$Q = \frac{2\pi kh \bar{h}}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \left(1 + 7 \sqrt{\frac{r_c}{2\pi h \bar{h}}} \cos \frac{\pi h}{2} \right) \quad (8.2)$$

Дебит несовершенной скважины удобно изучать, сравнивая ее дебит Q с дебитом совершенной скважины $Q_{\text{сов}}$, находящейся в тех же условиях, что и данная несовершенная скважина. Гидродинамическое несовершенство скважины характеризуется коэффициентом совершенства скважины:

$$\delta = \frac{Q}{Q_{\text{сов}}} \quad (8.3)$$

Для определения дебита гидродинамически несовершенных скважин в пластах конечной толщины предложена также универсальная формула:

$$Q = \frac{2\pi kh(P_k - P_c)}{\mu \left(\ln \frac{R_k}{r_c} + C_1 + C_2 \right)} \quad (8.4)$$

учитывающая как несовершенство по степени вскрытия (C_1), так и по характеру вскрытия (C_2).

C_1 – дополнительное фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины по степени вскрытия;

C_2 - дополнительное фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины по характеру вскрытия.

Для C_1 используется формула А.М.Пирвердяна:

$$C_1 = \left(\frac{1}{h} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{r_c}{b}} \ln \frac{b}{r_c} - 1 \right) \quad (8.5)$$

C_2 зависит от:

- числа перфорационных отверстий на один метр вскрытой породы пласта – n ;
- диаметра перфорационных отверстий d_0 ;
- глубины проникновения пуль в породу – l'
- диаметра скважины D_c ;

$$C_2 = f \left(nD_c; \frac{l'}{D_c}; \frac{d_0}{D_c} \right) \quad (8.6)$$

Параметры C_1 и C_2 можно найти из графиков В.И. Щурова, построенных по данным исследования притока жидкости к скважине.

$$l = \frac{l'}{D_c}; \text{ № кривой соответствует значению } \alpha = \frac{d_0}{D_c};$$

$$\text{№ } 1 - \alpha = 0.03;$$

- № 2 – $\alpha = 0.04$;
- № 3 – $\alpha = 0.05$;
- № 4 – $\alpha = 0.06$;
- № 5 – $\alpha = 0.07$;
- № 6 – $\alpha = 0.08$;
- № 7 – $\alpha = 0.09$.

Для хорошо перфорированного забоя скважины $C_2 \ll C_1$.

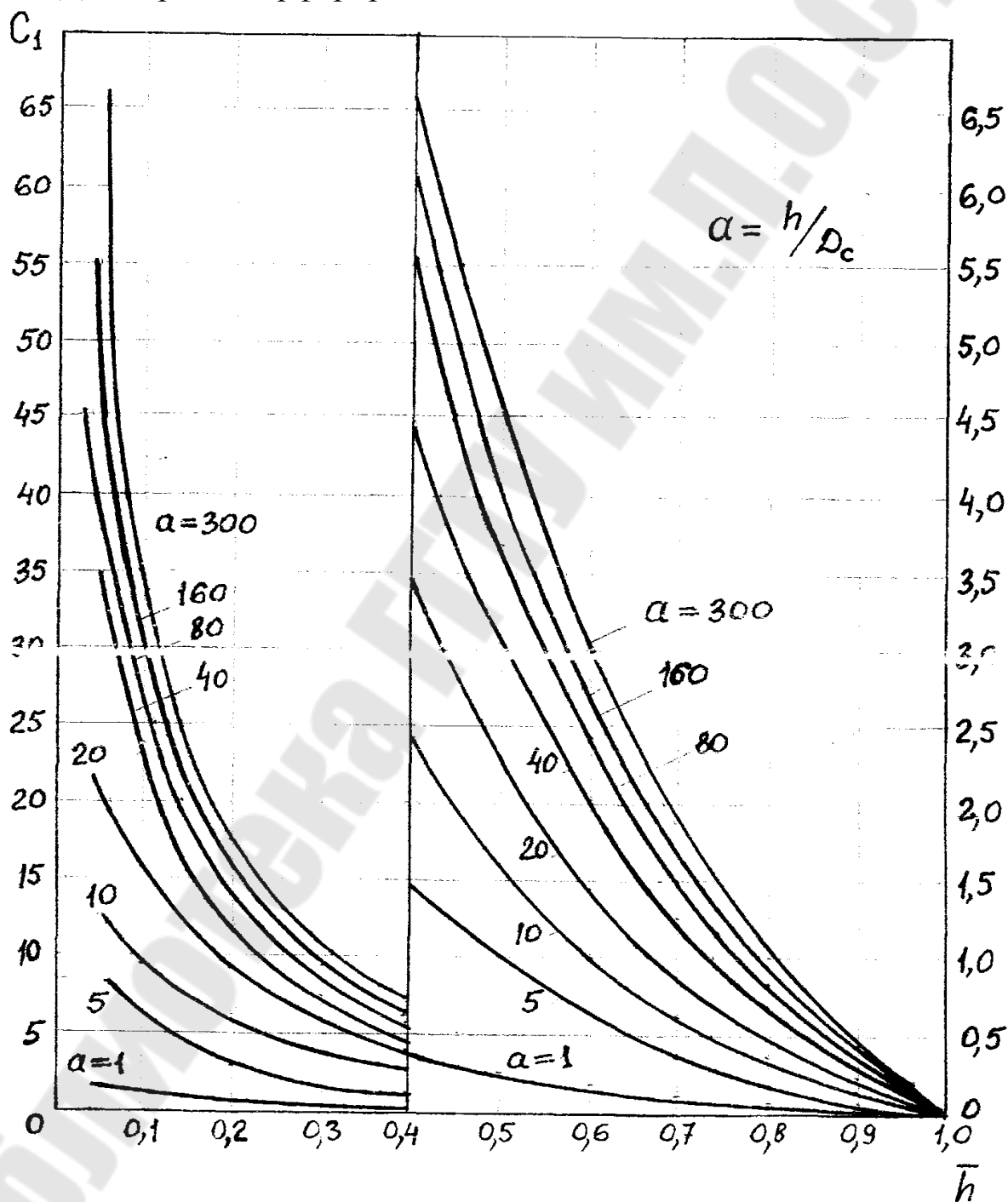


Рис.8.1. График В.И. Щурова для определения C_1

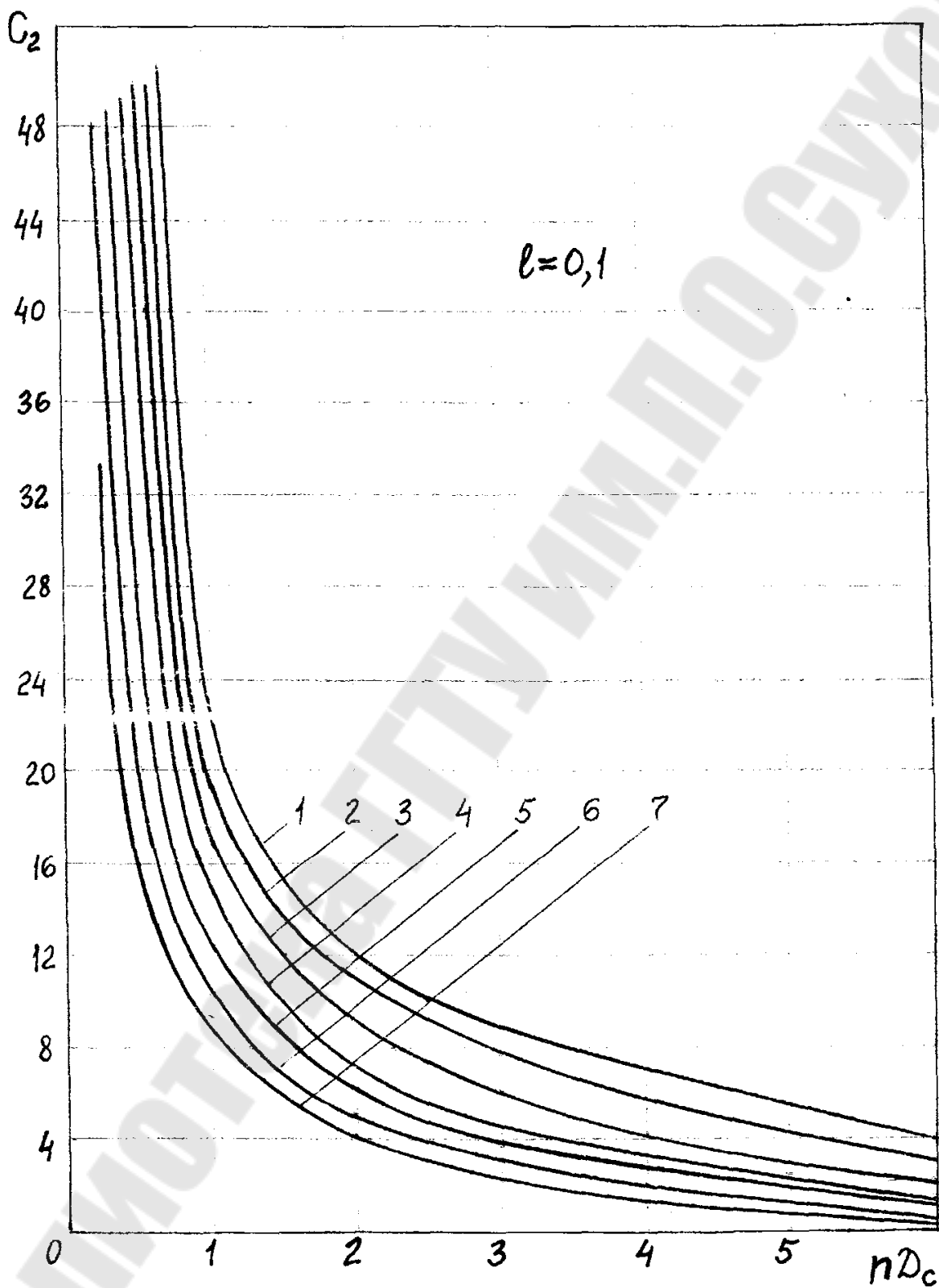


Рис.8.2. График В.И. Щурова для определения C_2

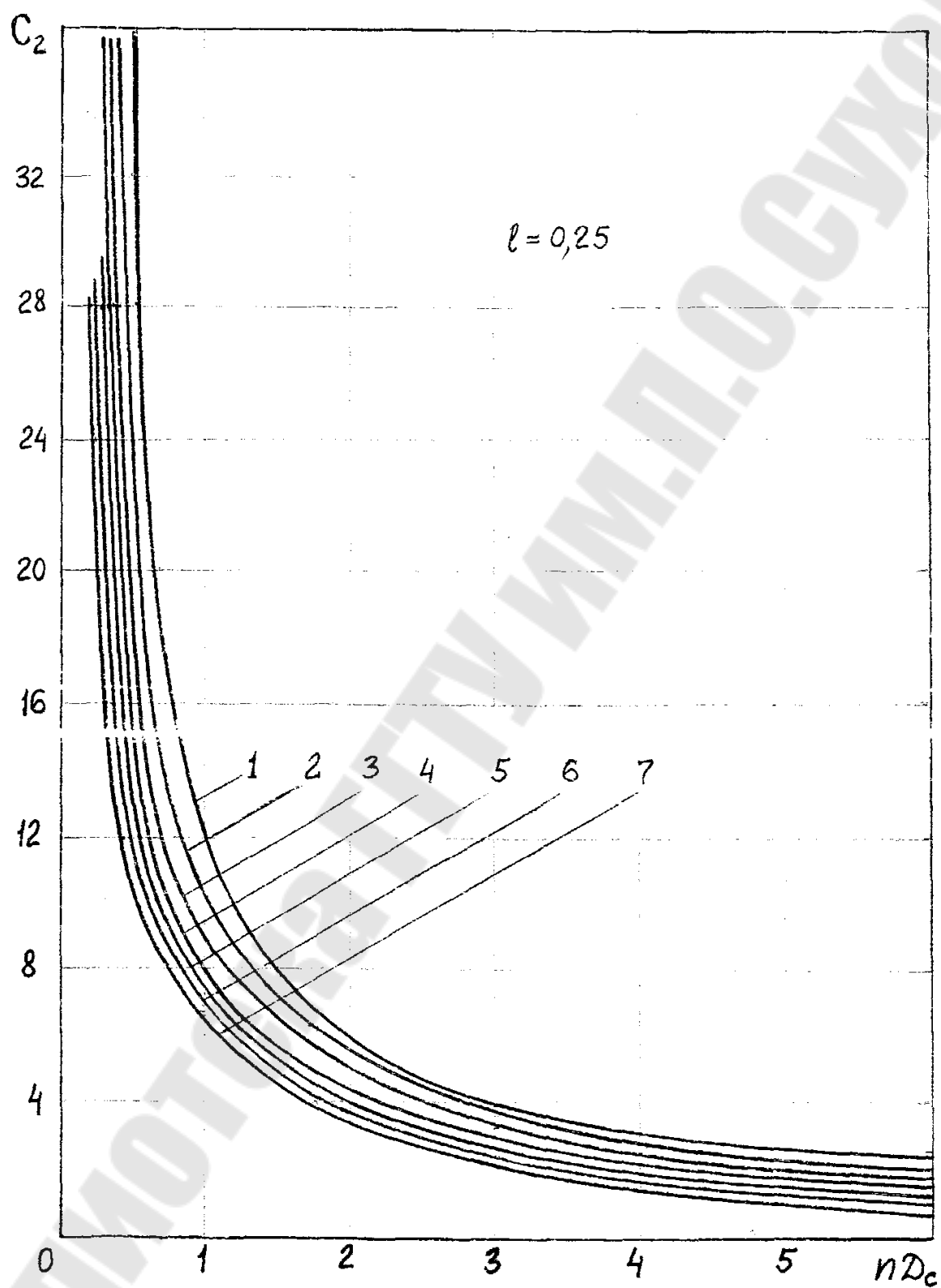


Рис.8.3. График В.И. Щурова для определения C_2

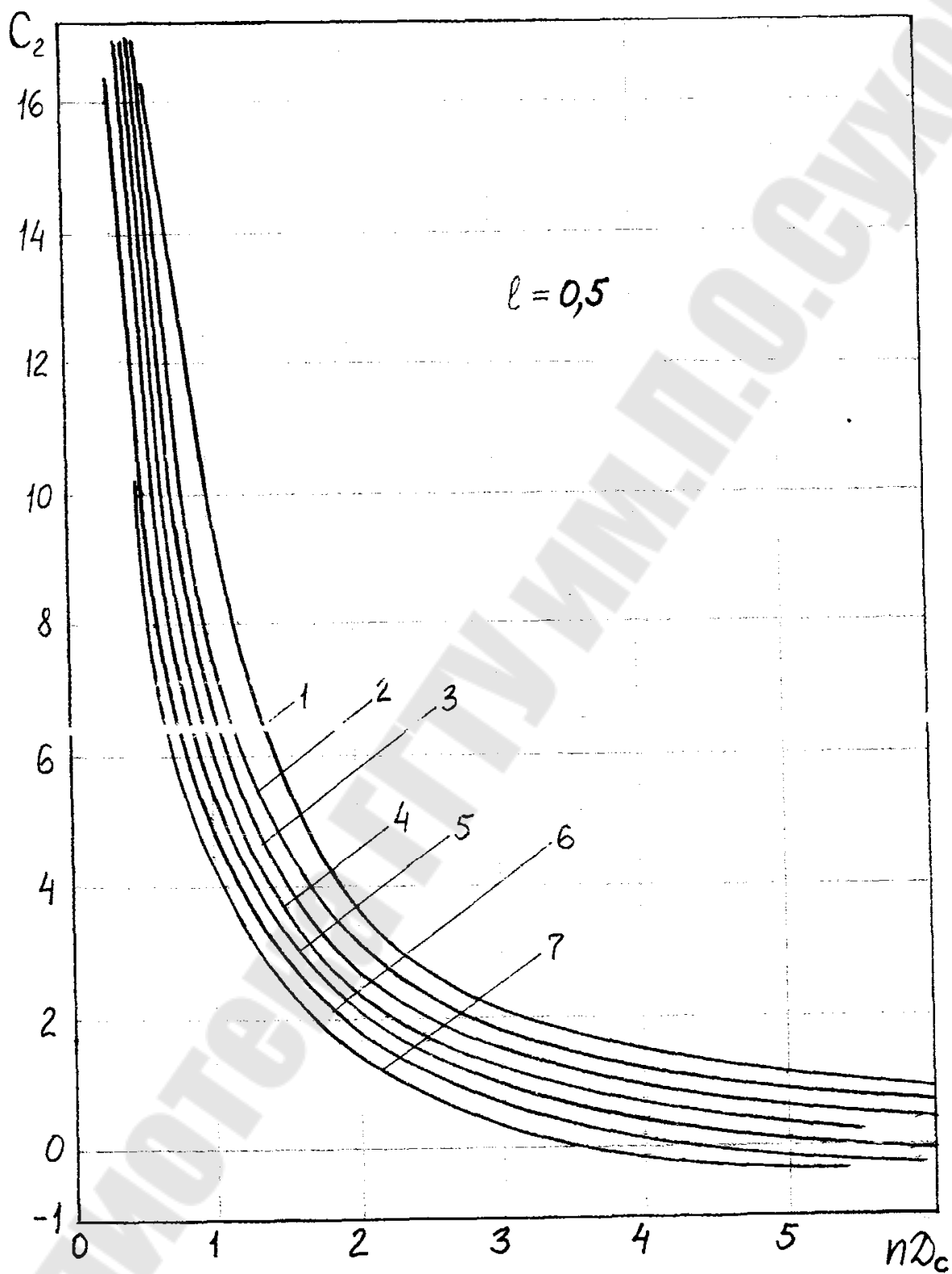


Рис.8.3. График В.И. Щурова для определения C_2

Гидродинамическое несовершенство скважины удобно учитывать при помощи коэффициента совершенства скважины δ , представляющего собой отношение дебита несовершенной скважины Q к дебиту совершенной скважины (формула Дюпюи) в тех же условиях:

$$\delta = \frac{Q}{Q_{\text{сов}}} = \frac{\ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}}{\ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}} + C_1 + C_2} \quad (8.7)$$

Тема 9. Установившееся движение упругой жидкости и газа в пористой среде

9.1. Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации упругого флюида.

Общее дифференциальное уравнение фильтрации флюида в пористой среде по закону Дарси:

$$-\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \frac{K}{\mu} \text{grad} P) = 0 \quad (9.1)$$

$$\text{или } \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (9.2)$$

где в общем случае: $\rho(P)$; $\mu(P)$; $K(P)$; $m(P)$. P – полное давление.

Введем функцию A_L , дифференциал которой:

$$dA_L = \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP \quad (9.3)$$

$$\text{т.е. } A_L = \int \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} dP + C.$$

Функция A_L называется функцией Л.С.Лейбензона. $A_L(P)$; $P(x, y, z, t)$. Полный дифференциал функции Лейбензона:

$$dA_L = c \frac{\partial A_L}{\partial x} dx + \frac{\partial A_L}{\partial y} dy + \frac{\partial A_L}{\partial z} dz + \frac{\partial A_L}{\partial t} dt = \frac{K(P)r(P)}{\mu(P)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right) \quad (9.4)$$

$$\text{из 9.4 } \frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial A_L}{\partial x}; \quad \frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial A_L}{\partial y}; \quad \frac{K\rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial A_L}{\partial z}.$$

Т.о. уравнение 9.2 можно представить в виде:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_L}{\partial z^2} \quad (9.5)$$

$$\text{или } \nabla^2 A_L = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \quad (9.6)$$

Дифференциальное уравнение (9.5) или (9.6) справедливо для движения (в общем случае – неустановившегося) однородного сжимаемого (упругого) флюида в однородной пористой (в общем случае – деформируемой) среде по закону Дарси.

В случае установившейся фильтрации уравнения (9.5) и (9.6) приводятся к виду:

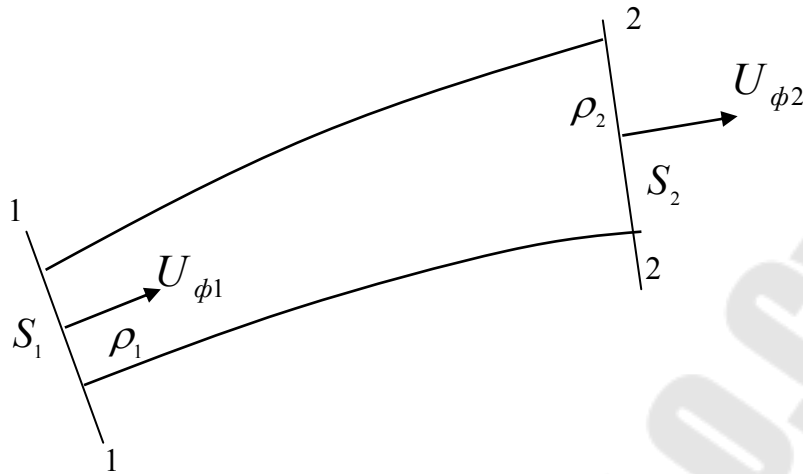
$$\nabla^2 A_L = \frac{\partial^2 A_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_L}{\partial z^2} = 0. \quad (9.7)$$

Из (9.7) следует, что при установившейся фильтрации упругого флюида функция A_L удовлетворяет уравнению Лапласа. Введение функции Лейбензона позволяет установить аналогию между установившейся фильтрацией сжимаемого флюида и несжимаемой жидкости, т.е. использовать хорошо известные закономерности фильтрации несжимаемой жидкости.

Для несжимаемой однородной изотопной пористой среды $K = \text{const}$. Кроме того, будем считать $\mu = \text{const}$, а $\rho = \rho(P)$. Тогда функция Лейбензона записывается в виде:

$$A_L = \frac{K}{\mu} \int \rho(P) dP + C; \quad dA_L = \frac{K}{\mu} \rho(P) dP \quad (9.8)$$

Рассмотрим фильтрацию флюида вдоль некоторой трубки тока.



Для сжимаемого флюида массовый расход вдоль трубки тока величина постоянная:

$$Q_m = \rho(P)U_\phi S = -\rho(P)\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dl}S = -\frac{dA_L}{dl}S = const. \quad (9.9)$$

Для несжимаемой жидкости:

$$Q = U_\phi S = -\frac{K}{\mu}\frac{dP}{dl}S = -\frac{d\Phi}{dl}S = const \quad (9.10)$$

Из аналогии уравнений Лапласа для фильтрации несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида (9.7) можно сделать вывод, что все формулы, полученные для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости, можно использовать и для фильтрации сжимаемого флюида, если в них заменить потенциал $\Phi = \frac{K}{\mu}P$ на функцию

Лейбензона A_L , вместо объемного расхода использовать массовый расход, а вместо скорости фильтрации использовать массовую скорость.

9.2. Установившаяся фильтрация упругой жидкости.

При установившейся фильтрации упругой жидкости, плотность которой:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_{ж}(P - P_0)} \quad (9.11)$$

Функция Лейбензона записывается в виде:

$$A_L = \frac{K}{\mu} \int \rho dP = C = \frac{K}{\mu} \int \rho_0 e^{\beta_{ж}(P - P_0)} + C = \frac{K\rho_0}{\mu\beta_{ж}} e^{\beta_{ж}(P - P_0)} \quad (9.12)$$

Рассмотрим плоскорадиальный приток сжимаемой жидкости к скважине. Формулу дебита скважины с учетом сжимаемости можно получить из формулы Дюпюи, заменяя объемный расход Q массовым Q_m , а потенциал Φ функцией Лейбензона A_L .

$$Q_m = \frac{2\pi h(A_{LK} - A_{LC})}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \quad (9.13)$$

где $A_L = \frac{K\rho_0}{\mu\beta_{ж}} e^{\beta_{ж}(P - P_0)} + C$

Тогда:

$$A_{LK} - A_{LC} = \frac{K\rho_0}{\mu\beta_{ж}} \left[e^{\beta_{ж}(P - P_0)} - e^{\beta_{ж}(P_c - P_0)} \right] \quad (9.14)$$

Раскладывая e^x в ряд ($e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$) и ограничиваясь тремя первыми членами разложения из (9.14) получим:

$$e^{\beta_{ж}(P_K - P_0)} - e^{\beta_{ж}(P_c - P_0)} = \beta_{ж}(P_K - P_c) \left[1 + \frac{\beta_{ж}}{2}(P_K + P_c - 2P_0) \right] \quad (9.15)$$

Таким образом: $Q_m = \frac{2\pi Kh\rho_0}{\mu \ln \frac{R_K}{r_c}} \left[1 + \frac{\beta_{ж}}{2}(P_K + P_c - 2P_0) \right] (P_K - P_c)$ (9.16)

Давления в предыдущих формулах абсолютные. Если положить $P_0 = P_{ат}$ и перейти к избыточным давлениям P_K и P_c , то :

$$Q_m = \frac{2\pi Kh\rho_{ат}}{\mu \ln \frac{R_K}{r_c}} \left[1 + \frac{\beta_{ж}}{2}(P_K + P_c) \right] (P_K - P_c) \quad (9.17)$$

Разность между объемным дебитом с учетом сжимаемости и дебитом, определенным по формуле Дюпюи, равна:

$$\Delta Q = \frac{\pi Kh\beta_{ж}}{\mu \ln \frac{R_K}{r_c}} (P_K^2 - P_c^2) \quad (9.18)$$

Распределение давления для упругой жидкости можно получить из распределения давления для несжимаемой жидкости при плоскорадиальной фильтрации:

$$P = P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \quad (9.20)$$

Заменим в выражении (9.20) P на A_L :

$$A_L = A_{LK} - \frac{A_{LK} - A_{LC}}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \quad (9.21)$$

Используя (9.12), выражение (9.21) запишем в виде:

$$e^{\beta_{\text{ж}}(P - P_0)} = e^{\beta_{\text{ж}}(P_{\kappa} - P_0)} - \frac{e^{\beta_{\text{ж}}(P_{\kappa} - P_0)} - e^{\beta_{\text{ж}}(P_c - P_0)}}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \quad (9.22)$$

Положив в (9.22) $P_0 = P_{\kappa}$ и прологарифмировав это выражение, получим:

$$P = P_{\kappa} + \frac{1}{\beta_{\text{ж}}} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{\beta_{\text{ж}}(P_{\kappa} - P_c)}}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \right] \quad (9.23)$$

9.3. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток идеального газа.

Функция Лейбенсона для идеального газа $\rho = \rho_{\text{ат}} \frac{P}{P_{\text{ат}}}$ имеет вид:

$$A_L = \frac{K}{\mu} \int \rho dP + C = \frac{K}{\mu} \int \frac{\rho_{\text{ат}}}{P_{\text{ат}}} P dP + C = \frac{K}{\mu^2} \frac{\rho_{\text{ат}}}{P_{\text{ат}}} P^2 + C \quad (9.24)$$

Используем аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и фильтрацией газа.

а) распределение давления (потенциала) в прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке несжимаемой жидкости:

$$P = P_{\kappa} \frac{P_{\kappa} - P_{\Gamma}}{L} x. \quad (9.25)$$

При фильтрации газа аналогичное соотношение справедливо для функции Лейбенсона:

$$A = A_{\kappa} \frac{A_{\kappa} - A_{\Gamma}}{L} x, \quad (9.26)$$

$$A_{\kappa} = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}}{2P_{\text{ат}}} P_{\kappa}^2 + C; \quad A_{\Gamma} = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}}{2P_{\text{ат}}} P_{\Gamma}^2 + C. \quad (9.27)$$

Из (9.26) с учетом (9.25) и (9.27) получим распределение давления при прямолинейно-параллельной фильтрации идеального газа:

$$P = \sqrt{P_k^2 - \frac{P_k^2 - P_\Gamma^2}{L} x} \quad (9.28)$$

б) Объемный расход несжимаемой жидкости в данном одномерном потоке

$$Q = \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_\Gamma}{L} Bh. \quad (9.30)$$

Массовый расход газа получим, заменив $\frac{K}{\mu} P$ на A_L :

$$Q_m = \frac{A_k - A_\Gamma}{L} Bh = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_{ат} (P_k^2 - P_\Gamma^2)}{2P_{ат} L} Bh. \quad (9.31)$$

в) вместо скорости фильтрации для несжимаемой жидкости $\mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_\Gamma}{L}$ при фильтрации газа аналогично определяется массовая скорость фильтрации:

$$\rho \mathfrak{Q}_\phi = \frac{A_k - A_\Gamma}{L} = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_{ат} (P_k^2 - P_\Gamma^2)}{P_{ат} 2L} \quad (9.32)$$

Откуда скорость фильтрации газа:

$$\mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_{ат}}{P_{ат} \rho} \frac{(P_k^2 - P_\Gamma^2)}{2L} = \frac{K}{2\mu} \frac{\rho_{ат}}{P_{ат}} \frac{(P_k^2 - P_\Gamma^2)}{L} \frac{1}{P} \quad (9.33)$$

9.4 Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по закону Дарси.

Плоскорадиальный фильтрационный поток имеет место в круговом пласте радиусом R_k , в центре которого имеется совершенная скважина радиусом r_c . Также используем метод аналогий фильтрационных течений сжимаемого газа и несжимаемой жидкости.

а) Распределение пластового давления в потоке несжимаемой жидкости:

$$P = P_k \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r_c} \quad (9.34)$$

По такому же закону будет распределяться в фильтрационном потоке газа функция Лейбензона:

$$A = A_K \frac{A_K - A_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r_c}. \quad (9.35)$$

Используя выражение функции Лейбензона (9.24) из (9.35) получим распределение пластового давления в плоскорадиальном потоке идеального газа:

$$P = \sqrt{P_K^2 - \frac{P_K^2 - P_\Gamma^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}} \quad (9.36)$$

Сравнение кривых распределения давления в пласте для жидкости и газа показывает, что в газовом потоке происходит более резкое падение давления вблизи скважины.

б) Дебит скважины:

Объемный дебит для несжимаемой жидкости по формуле Дюпюи:

$$Q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \frac{P_K - P_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}. \quad (9.37)$$

В соответствии с методом аналогий массовый дебит газовой скважины:

$$Q_m = 2\pi h \frac{A_K - A_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}}, \quad (9.38)$$

или объемный дебит газовой скважины, приведенный к атмосферному давлению:

$$Q_{ат} = \frac{Q_m}{\rho_{ат}} = \frac{\pi Kh}{\mu P_{ат}} \frac{P_K - P_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \quad (9.39)$$

в) Скорость фильтрации:
несжимаемой жидкости:

$$\vartheta_\phi = \frac{K}{\mu} = \frac{P_K - P_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \frac{1}{r} \quad (9.40)$$

для сжимаемого газа массовая скорость фильтрации:

$$\rho \mathfrak{Q}_\phi = \frac{A_k - A_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \quad (9.41)$$

Подставив выражения для A_k и A_c и $\rho = \rho_{ат} \frac{P}{P_{ат}}$ в (9.41),

получим:

$$\mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu} \frac{P_k^2 - P_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \frac{1}{P} \quad (9.42)$$

9.5. Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа по закону Дарси.

Если пластовое давление выше 10 МПа и депрессия не слишком мала $\frac{P_c}{P_k} < 0,9$, то уравнение состояния газа значительно отличается от уравнения состояния идеального газа.

Плотность реального газа определяется по формуле:

$$\frac{P}{\rho} = ZRT; \quad \frac{P_{ат}}{\rho_{ат}} = Z_{ат}RT; \quad \text{или} \quad \rho = \frac{P_{ат} Z_{ат}}{\rho_{ат} Z} P, \quad (9.43)$$

где Z – коэффициент сверхсжимаемости: $Z = Z_{ат} e^{\alpha_Z (P - P_{ат})}$

Кроме того, для высоких пластовых давлений необходимо учитывать зависимость вязкости от давления $\mu(P)$.

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha_\mu (P - P_{ат})}. \quad (9.44)$$

Функция Лейбензона в данном случае:

$$A_L = A_L = \int \frac{K\rho(P)}{\mu(P)} dP = \frac{K\rho_{ат}}{P_{ат}} \int \frac{PdP}{\mu(P)Z(P)} + C. \quad (9.45)$$

Дебит газовой скважины определим по аналогии с установившейся фильтрацией несжимаемой жидкости, заменяя в формуле Дюпюи объемный дебит массовым, $(\alpha \frac{K}{\mu} P)$ на функцию

Лейбензона (9.45):

$$Q_m = \frac{2\pi h(A_k - A_c)}{\ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{2\pi K h \rho_{ат}}{P_{ат} \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{P_c}^{P_k} \frac{P}{\mu(P)Z(P)} dP. \quad (9.46)$$

Дебит, приведенный к атмосферному давлению:

$$Q_{\text{ат}} = \frac{Q_m}{\rho_{\text{ат}}} = \frac{2\pi Kh}{P_{\text{ат}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}} \int_{P_c}^{P_{\text{к}}} \frac{P}{\mu(P)Z(P)} dP \quad (9.47)$$

Выражение (9.47) содержит трудноопределимый аналитический интеграл, который можно определить численным методом.

Тема 10. Неустановившееся движение упругой жидкости в упругой пористой среде

10.1 Упругий режим пласта и его характерные особенности.

При разработке нефтяных и газовых месторождений в пластах возникают неустановившиеся процессы, связанные с пуском и остановкой скважин, с изменением темпов отбора флюидов из скважин. Характер этих процессов проявляется в перераспределении пластового давления, в изменении скоростей фильтрационных потоков, дебитов скважин и т.д. Эти процессы зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их флюидов.

При пуске скважины в эксплуатацию в условиях упругого режима движение жидкости к скважине начинается за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и жидкости сначала в призабойной зоне, а затем на возрастающих расстояниях от забоя.

При снижении пластового давления объем сжатой жидкости увеличивается, а объем порового пространства сокращается за счет расширения материала пласта. Все это способствует вытеснению жидкости из пласта в скважину.

Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и породы пласта очень малы, но объемы жидкости, извлекаемой из пласта за счет упругости пласта и жидкости могут быть весьма значительными.

В некоторых случаях приток жидкости к забоям скважин поддерживается и напором воды, поступающей в пласт из области питания. Такой режим пласта называют упруговодонапорным.

Характерная особенность проявления упругого режима в процессе разработки нефтяных месторождений – длительность процесса перераспределения пластового давления после начала работы скважины. Это связано с тем, что при фильтрации вязкой

жидкости в пласте возникают очень большие силы сопротивления. Неустановившиеся процессы в пластах протекают тем быстрее, чем больше коэффициент проницаемости пласта K , и тем медленнее, чем больше вязкость жидкости μ и коэффициенты объемной упругости жидкости и пласта.

10.2. Упругий запас жидкости в пласте.

Упругий запас жидкости в пласте – количество жидкости, которое можно извлечь из пласта при снижении давления в нем – за счет упругости пласта и насыщающих его жидкостей. Упругий запас нефти в нефтеносных пластах обычно весьма существенен.

Рассмотрим элемент пласта, объемом V_0 . $V_{0ж}$ – объем жидкости, насыщающей объем V_0 при начальном давлении P_0 . При изменении давления на ΔP объем жидкости в пласте изменится на ΔV_3 :

($V_{0ж} - \Delta V_3$). Это изменение ΔV_3 происходит за счет расширения самой жидкости (ее вытеснения из пласта) $\beta_{ж} V_{0ж} \Delta P$ ($\beta_{ж}$ – коэффициент объемной сжимаемости жидкости); расширения твердой породы (уменьшения пористости) $\beta_c V_0 \Delta P$ (β_c – коэффициент объемной упругости породы пласта); т.е.

$$\Delta V_3 = \beta_{ж} V_{0ж} \Delta P + \beta_c V_0 \Delta P \quad (10.1)$$

Т.к. $V_{0ж} = m V_0$ (m – пористость пласта при P_0),
то: $\Delta V_3 = (m \beta_{ж} + \beta_c) V_0 \Delta P$.

Обозначим $(m \beta_{ж} + \beta_c) = \beta^*$ – коэффициент упругоэластичности пласта. Тогда:

$$\Delta V_3 = \beta^* V_0 \Delta P. \quad (10.2)$$

ΔV_3 – величина упругого запаса жидкости в пласте при снижении давления в нем на ΔP .

Коэффициент упругоэластичности пласта β^* численно равен изменению упругого запаса жидкости в единице объема пласта при изменении давления в нем на единицу.

Рассмотрим нефтяную залежь, разрабатываемую в условиях замкнуто-упругого режима. V_0 – объем пласта; ΔP – изменение давления за время dt . Формулу (10.2) запишем в виде:

$$d(\Delta V_3) = \beta^* d(V_0 \Delta P) \quad (10.3)$$

где $d(\Delta V_3)$ – количество отобранной за время dt нефти;

$$d(\Delta V_3) = Q(t)dt \quad (10.4)$$

где $Q(t)$ – дебит всех скважин на данной залежи. В итоге:

$$Q(t)dt = \beta^* d(V_0 \Delta P) \quad (10.5)$$

Уравнение (10.5) - дифференциальное уравнение истощения нефтяной залежи в условиях замкнуто-упругого режима.

10.3. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации упругой жидкости.

Общее дифференциальное уравнение неустановившегося движения упругого флюида (жидкости и газа) в деформируемой пористой среде по закону Дарси: ($K = const, \mu = const$)

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \nabla^2 A_L. \quad (10.6)$$

Уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды возьмем в виде:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{ж} (P - P_0)]; \quad (10.7)$$

$$m = m_0 + \beta_c (P - P_0). \quad (10.8)$$

Перемножим (10.7) на (10.8):

$$m\rho = m_0\rho_0 + (m_0\rho_0\beta_{ж} + \rho_0\beta_c)(P - P_0). \quad (10.9)$$

Учитывая, что $(m\beta_{ж} + \beta_c) = \beta^*$, из (10.9) получим

$$m\rho = m_0\rho_0 \left[1 + \frac{\beta^*}{m} (P - P_0) \right] \text{ и дифференцируем по } t:$$

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \rho_0\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} \quad (10.10)$$

Функция Лейбензона для упругой жидкости (при умеренных давлениях)

$$\left(A_L = \frac{K}{\mu} \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} e^{\beta_{ж}(P - P_0)} + C \right) \rightarrow A_L = \frac{K}{\mu} \rho_0 P + P_1 \quad (10.11)$$

Дифференцируя (10.10) дважды по координатам и складывая, получим:

$$\nabla^2 A_L = \frac{K}{\mu} \rho_0 \nabla^2 P. \quad (10.11)$$

Подставляя (10.10) и (10.11) в (10.6), получим:

$$\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{K}{\mu} \nabla^2 P. \quad (10.12)$$

Обозначим: $\frac{K}{\mu\beta^*} = \chi$ (10.13)

Тогда (10.12) записывается в виде: $\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)$

или $\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \nabla^2 P$ (10.14)

Уравнение (10.14) является основным дифференциальным уравнением упругого режима фильтрации. По предложению В.Н.Щелкачева оно названо уравнением пьезопроводности и относится к уравнениям Фурье (уравнениям теплопроводности). Коэффициент χ , характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, называется коэффициентом пьезопроводности пласта (по аналогии с коэффициентом температуропроводности в уравнении теплопроводности), $\chi = 0,1-5 \text{ м}^2/\text{с}$.

10.4. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости.

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h имеется добывающая скважина нулевого радиуса (точечный сток). В момент времени $t \leq 0$ во всем пласте давление $P(r,0) = P_k = \text{const}$. В момент $t = 0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом Q_0 . В пласте возникает неустановившийся плоскорадиальный поток упругой жидкости. Необходимо определить распределение давления в пласте в любой момент времени: $P(r, t)$.

Запишем основное уравнение упругого режима фильтрации

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \nabla^2 P \quad (10.15)$$

в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] \quad (10.16)$$

$$\text{или: } \frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) \right].$$

Начальные и граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} P(r, t)|_{t=0} = P_k; P(r, t)|_{r \rightarrow \infty} = P_k \\ Q = 2\pi r h \vartheta_\phi = \frac{2\pi K h}{\mu} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 = \text{const}, \text{ при } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Последнее условие запишем в виде:

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi K h}. \quad (10.18)$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (10.18) необходимо перейти к безразмерным переменным:

безразмерное давление: $P_\Pi = \frac{P}{P_k}$; размерные аргументы r и t

можно объединить в один безразмерный комплекс $\xi = \frac{r}{2\sqrt{\chi t}}$.

Тогда $P_\Pi = P_\Pi(\xi)$

Очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_\Pi}{\partial t} &= \frac{dP_\Pi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{dP_\Pi}{d\xi} \frac{\xi}{2t} \\ \frac{\partial P_\Pi}{\partial r} &= \frac{dP_\Pi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{dP_\Pi}{dr} \frac{1}{2\sqrt{\chi t}}; \frac{\partial^2 P_\Pi}{\partial r^2} = \frac{d^2 P_\Pi}{d\xi^2} \frac{1}{4\chi t} \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Подставляя (10.19) в (10.16) получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 P_\Pi}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \right) \frac{dP_\Pi}{d\xi} = 0. \quad (10.20)$$

Граничные условия: при $\xi \rightarrow \infty$ $P_\Pi = 1$.

Кроме того (10.18) запишем в виде:

$$\left(\eta \frac{dP_\Pi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi K h P_k}. \quad (10.21)$$

Заменяем: $\frac{dP_{\Pi}}{d\xi} = \xi'$; 10.20 запишем в виде:

$$\frac{d\xi'}{d\xi} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \right) \xi' = 0 \text{ или: } \frac{d\xi'}{\xi'} + \frac{d\xi}{\xi} = -2\xi d\xi, \text{ интегрируем}$$

$$\ln \xi' + \ln \xi = -\xi^2 + \ln P_1. \quad (10.22)$$

Из (10.22) $\xi' = \frac{dP_{\Pi}}{d\xi} = P_1 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}$ (10.23), интегрируем в пределах $[\xi; \infty]$:

$$P_{\Pi}(\xi) \int_{\xi}^{\infty} = P_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi. \quad (10.24)$$

т.к. $P_{\Pi}(\xi) \Big|_{\xi=\infty} = 1$, то $1 - P_{\Pi}(\xi) = P_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi$,

откуда $P_{\Pi}(\xi) = 1 - P_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi$.

$$\text{Из (10.24) } \xi \frac{dP_{\Pi}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = P_1 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} \Big|_{\xi=0} = \dots = \frac{Q_0 \mu}{2\pi K h P_K}$$

Таким образом: $P_1 = \frac{Q_0 \mu}{2\pi K h P_K} \left(\text{т.к. } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} = 1 \right)$; т.е.

$$P_{\Pi}(\xi) = 1 - \frac{Q_0 \mu}{2\pi K h P_K} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi \quad (10.25)$$

Сделаем подстановку: $u = \xi^2 = \frac{r^2}{4\chi t}$

Тогда:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{du}{2u} ; \left(\begin{array}{l} du = 2\xi d\xi \quad \xi^2 = u \\ \frac{du}{u} = 2 \frac{d\xi}{\xi} \end{array} \right) \quad (10.26)$$

и перейдем в (10.25) к размерному давлению: $P = P_{\Pi} P_K$:

$$P(r,t) = P_{\kappa} - \frac{Q_0 \mu}{4\pi K h} \int_{\frac{r^2}{4\chi t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (10.27)$$

Интеграл $-\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = Ei(-x)$ называется интегральной показательной функцией, которая табулирована. График функции $Ei(-x)$ приведен на рис.10.1.

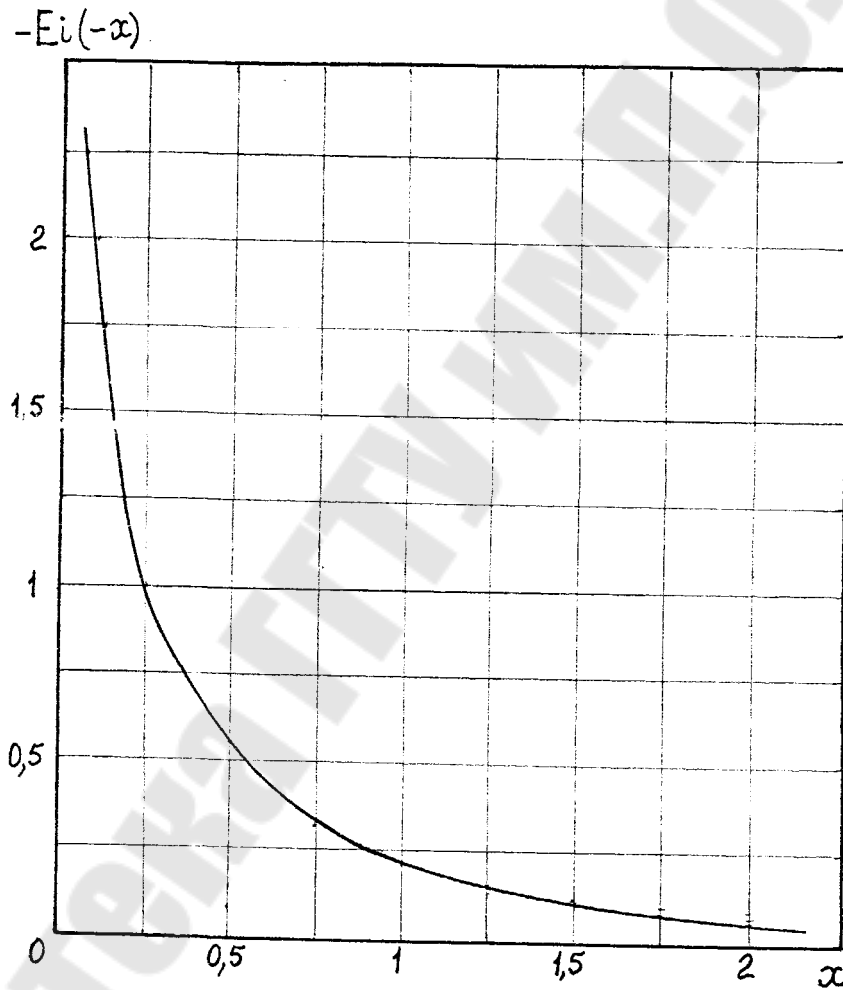


Рис.10.1. График интегральной показательной функции.

Таким образом, давление в любой точке плоскорадиального потока в условиях упругого режима фильтрации определяется по формуле:

$$P(r,t) = P_{\kappa} - \frac{Q_0 \mu}{4\pi K h} \left[-Ei\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right) \right]. \quad (10.28)$$

Формула (10.28) называется основной формулой упругого режима фильтрации. Она имеет широкое практическое применение, и, в частности, используется при интерпретации результатов исследования скважин. Из выражения (10.28) расход жидкости через любую цилиндрическую поверхность радиуса r будет равен:

$$Q(r,t) = \frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r h = Q_0 e^{-\frac{r^2}{4\chi t}} \quad (10.29)$$

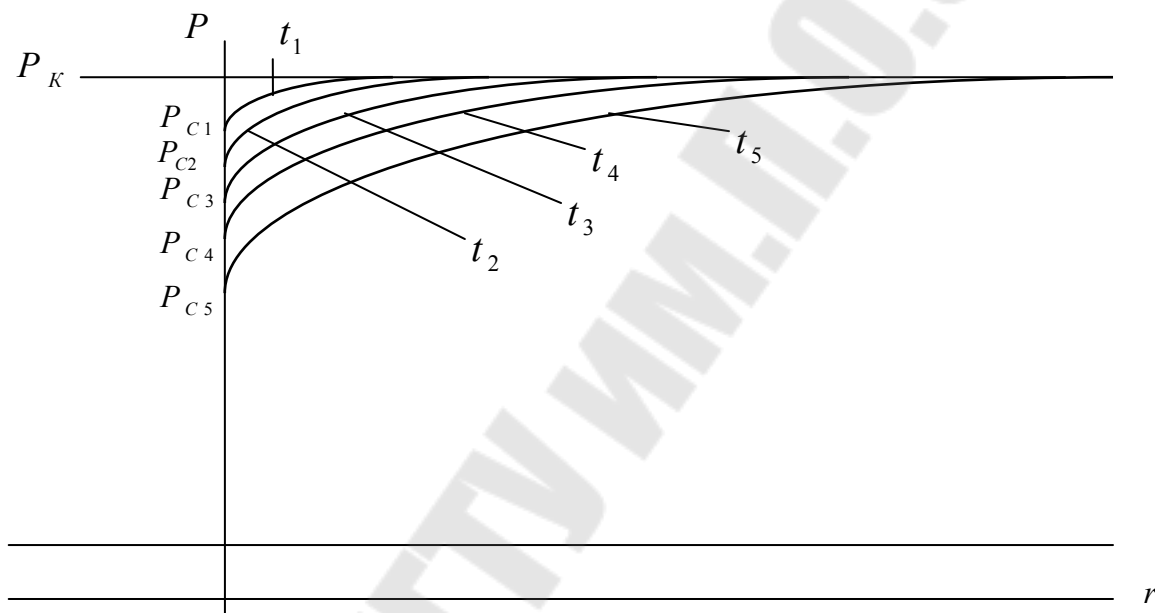


Рис.10.2. Изменение кривых депрессии в призабойной зоне скважины после пуска ее в эксплуатацию с постоянным дебитом Q_0 .

При малых значениях аргумента $\frac{r^2}{4\chi t} \ll 1$ интегральная показательная функция имеет простую асимптотику:

$$- Ei(-x) \approx -\ln \frac{1}{x} - 0,5772 \quad (10.30)$$

Следовательно, в этом случае:

$$P(r,t) = P_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi K h} \left(\ln \frac{4\chi t}{r^2} - 0,5772 \right) \quad (10.31)$$

10.5. Интерференция скважин в условиях упругого режима.

Для анализа взаимовлияния скважин в условиях упругого режима применяется метод суперпозиции.

1. Если в пласте действует группа скважин, то понижение давления в какой-либо точке пласта $\Delta P = P_k - P$ определяется

сложением понижений давления, создаваемых в этой точке отдельными скважинами:

$$\Delta P = \sum_{j=i}^n \Delta P_j = \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{j=i}^n Q_j \left[-Ei \left(-\frac{r_i^2}{4\chi t} \right) \right] \quad (10.32)$$

где n – число скважин; Q_j – дебит j -ой скважины; $Q_j > 0$ – если скважина эксплуатационная; $Q_j < 0$ – если скважина нагнетательная; r_i – расстояние от центра j -ой скважины до рассматриваемой точки.

2. Если скважины начали работать в разное время, то понижение давления в рассматриваемой точке в данный момент времени:

$$\Delta P = \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{j=i}^n Q_j \left[-Ei \left(-\frac{r_i^2}{4\chi t_j} \right) \right] \quad (10.33)$$

где t_j – время, прошедшее с начала работы j -ой скважины.

3. Если скважина была пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом Q и через промежуток времени T остановлена, то давление в любой точке пласта в момент t после остановки можно определить из следующих соображений.

Предположим, что скважина продолжает работать с тем же дебитом; тогда к моменту t после остановки понижения давления в какой-либо точке пласта, вызванное пуском непрерывно работающей скважины, будет равно:

$$\Delta P = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} - Ei \left[-\left(-\frac{r_i^2}{4\chi(T+t)} \right) \right] \quad (10.34)$$

Допустим, что в том же месте, где расположена эксплуатационная скважина, в момент остановки начала работать нагнетательная скважина с тем же дебитом. К моменту t повышение давления в какой-либо точке пласта, вызванное пуском нагнетательной скважины, равно:

$$\Delta P_2 = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left\{ -Ei \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right) \right\} \quad (10.35)$$

Результирующее понижение давления ΔP будет равно:

$$\Delta P = \Delta P_1 - \Delta P_2 = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \left\{ -Ei \left[-\frac{r^2}{4(T+t)} \right] + Ei \left[-\frac{r^2}{4\chi t} \right] \right\} \quad (10.36)$$

Если аргументы функций малы, то можно использовать приближенную формулу:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi Kh} \ln \frac{T+t}{t}. \quad (10.37)$$

10.6. Приближенные методы решений.

В связи со сложностью точных решений были предложены различные приближенные методы решений задач неустановившейся фильтрации упругой жидкости. Одним из наиболее распространенных приближенных методов является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Этот метод заключается в том, что в какой-то момент времени зона пониженного давления (возмущенная зона) считается распространенной на определенное расстояние $l=l(t)$ [приведенный радиус влияния]. Предполагается, что во всей возмущенной зоне давление распределяется так, как будто движение жидкости установившееся.

Закон изменения во времени приведенного радиуса влияния $l(t)$ определяется из условия материального баланса.

При установившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости к галерее: $l(t) = 2\sqrt{\chi t}$, если отбор проводится при постоянной депрессии $P_k - P_r = const$ и $l(t) = \sqrt{2\chi t}$, если задан постоянный дебит $Q(0, t) = const$.

При плоскорадиальном притоке упругой жидкости к скважине $l(t) = 2\sqrt{\chi t}$, как для случая постоянной депрессии, так и для случая постоянного дебита (с точностью до 10÷15% при $l(t) \geq r_c$).

Метод А.М.Пирвердяна: в развитие метода ПССС эпюра давлений задается так, чтобы она не имела угловых точек. Например, при притоке к галерее распределение давления по пласту задается в виде параболы, касательная к которой в точке $x = l(t)$ горизонтальна.

Если отбор жидкости не меняется с течением времени: $Q(0, t) = \mathfrak{G}_1 s = const$, то

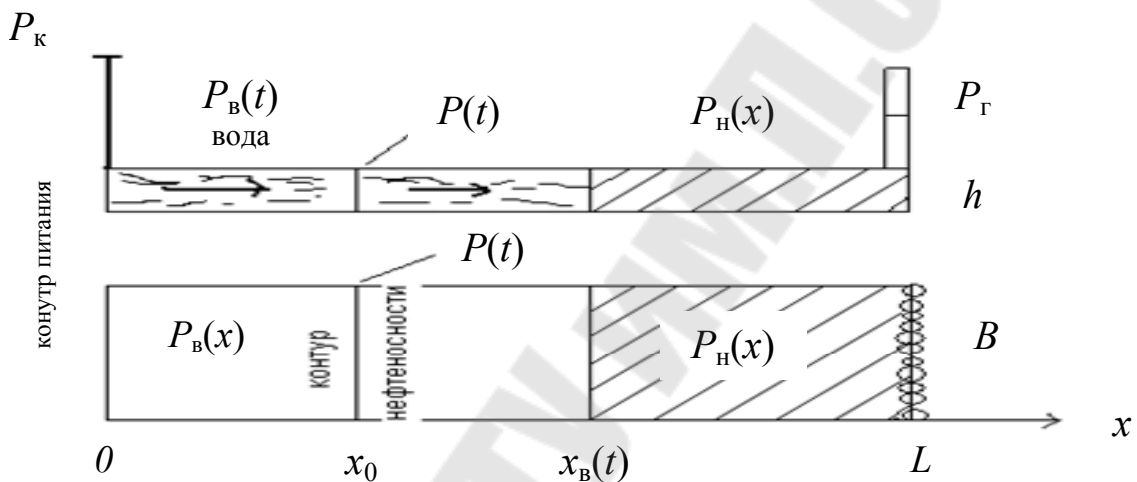
$$P(x, t) = P_k - (P_k - P_r) \left[1 - \frac{x}{l(t)} \right]^2 \quad (10.38)$$

где $P_k - P_r = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mu}{K} \mathfrak{G}_1 \sqrt{\chi t}$, а приведенный радиус влияния, найденный из уравнений материального баланса $l(t) = \sqrt{6\chi t}$.

Тема 11 Взаимное вытеснение несмешивающихся жидкостей

Проблемы вытеснения несмешивающихся жидкостей в пористой среде сводятся к задачам о движении границы раздела двух жидкостей (например, нефти и воды). При разработке нефтяных месторождений в условиях водонапорного режима наблюдается стягивание контура нефтеносности под напором контурных вод.

11.1. Прямолинейно – параллельное вытеснение нефти водой.



Начальное положение контура нефтеносности x_0 ; в момент t - $x_B(t)$;

$P_B(x)$ – давление в любой точке водоносной части пласта;

$P_H(x)$ – давление в любой точке нефтеносной части пласта;

$P(t)$ – давление на границе раздела: вода – нефть.

Для установившегося прямолинейно – параллельного фильтрационного потока жидкости: распределение давления:

$$P = P_K - \frac{P_K - P_G}{L} x = P_G + \frac{P_K - P_G}{L} (L - x) \quad (11.1)$$

$$\text{скорость фильтрации: } \mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu} \frac{P_K - P_G}{L} \quad (11.2)$$

В рассматриваемом случае: в водоносной области:

$$P_B = P_K - \frac{P_B - P(t)}{x_B(t)} x; \quad 0 \leq x \leq x_B(t); \quad (11.3)$$

$$\mathfrak{Q}_B = \frac{K}{\mu_B} \frac{P_K - P(t)}{x_B(t)} \quad (11.4)$$

в нефтеносной области:

$$P_H = P_\Gamma + \frac{P(t) - P_\Gamma}{L - x_B(t)}(L - x); \quad x_B(t) \leq x \leq L; \quad (11.5)$$

$$\mathfrak{Q}_H = \frac{K}{\mu_H} \frac{P(t) - P_\Gamma}{L - x_B(t)}. \quad (11.6)$$

Вследствие неразрывности потока и несжимаемости жидкости ($Q_B = Q_H$), $\square_B = \square_H$. Следовательно:

$$\frac{K(P_K - P(t))}{\mu_B x_B(t)} = \frac{K(P(t) - P_\Gamma)}{\mu_H(L - x_B(t))} \quad (11.7)$$

откуда давление на границе раздела жидкостей:

$$P(t) = \frac{P_K \mu_H (L - x_B(t)) + P_\Gamma \mu_B x_B(t)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))} \quad (11.8)$$

Распределение давления в водоносной области: (подставляем (11.8) в (11.3))

$$P_B(x) = P_K - \frac{\mu_B (P_K - P_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))} x \quad (11.9)$$

Распределение давления в нефтеносной области: ((11.8) в (11.5)):

$$P_H(x) = P_\Gamma + \frac{\mu_H (P_K - P_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))} (L - x) \quad (11.10)$$

Скорость фильтрации (подставляем (11.8) в (11.4) и (11.5)):

$$\mathfrak{Q}_B = \mathfrak{Q}_H = \frac{K(P_K - P_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))} \quad (11.11)$$

Расход жидкости (дебит галереи) Q :

$$Q = \mathfrak{Q}_H hB = \frac{K(P_K - P_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))} Bh \quad (11.12)$$

Закон движения границы раздела $x_B = x_B(t)$ – находим из соотношения скорости фильтрации и средней действительной скорости движения жидкости в пористой среде:

$$\mathfrak{Q}_\phi = \mathfrak{Q}_B = \mathfrak{Q}_H = m \mathfrak{Q}_{\text{действ}} = m \frac{dx_B}{dt} \quad (11.13)$$

$$\text{откуда: } dt = \frac{m}{\mathfrak{Q}_\phi} dx_B = \frac{m}{\frac{K(P_K - P_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L - x_B(t))}} \cdot dx_B \quad (11.14)$$

Проинтегрируем (11.14) в пределах от 0 до t и от x_0 до x_B :

$$t = \frac{m}{K(P_k - P_r)} \left[\mu_n(x_b - x_0) - \frac{1}{2}(\mu_n - \mu_b)(x_b^2 - x_0^2) \right] \quad (11.15)$$

Время полного вытеснения нефти T : (в (11.15) положим: $x_b=L$):

$$T = \frac{m}{2K(P_k - P_r)} \left[\mu_b(L^2 - x_0^2) + \mu_n(L - x_0)^2 \right] \quad (11.16)$$

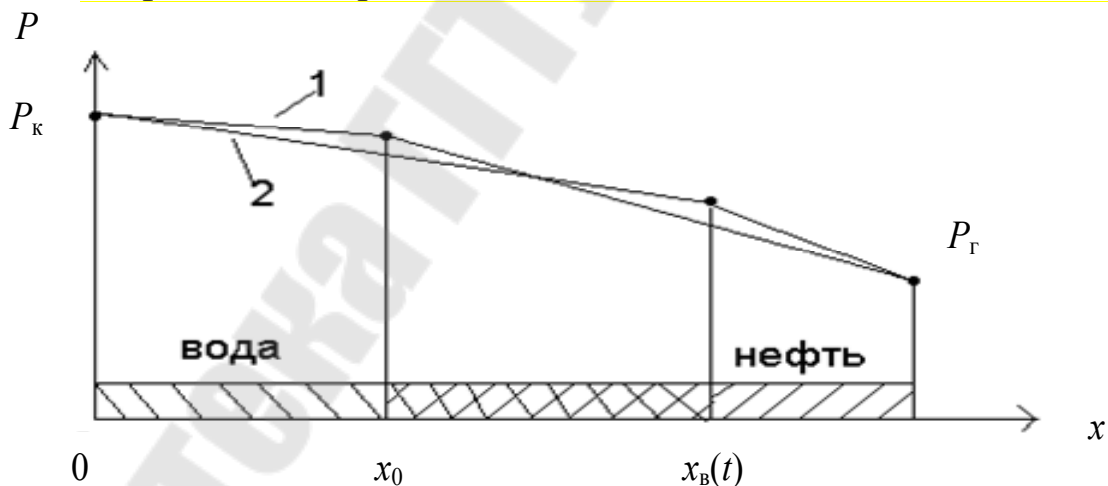
Для определения зависимости $x_b(t)$ решим квадратное уравнение (11.15) относительно x_b :

$$x_b(t) = \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu_b} L - \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{\mu_n - \mu_b} L - x_0 \right)^2 + \frac{2K(P_k - P_r)}{m(\mu_n - \mu_b)} t} \quad (11.17)$$

Подставив (11.16) в (11.12) получим выражение, определяющее изменение дебита во времени:

$$Q = \frac{KBh(P_k - P_r)}{\sqrt{\left[\mu_n L - (\mu_n - \mu_b)x_0 \right]^2 - \frac{2K(P_k - P_r)}{m} \cdot (\mu_n - \mu_b)t}}; \quad (\mathfrak{Q}_\phi = \frac{Q}{Bh}) \quad (11.18)$$

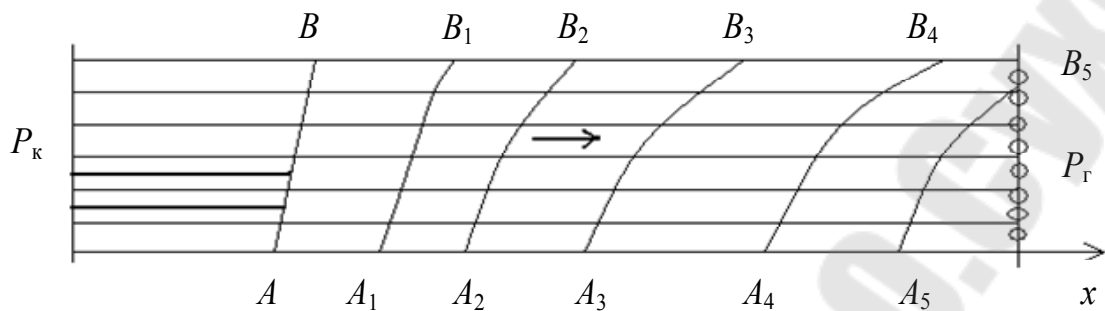
Из (11.9) и (11.10) следует, что давление в пласте зависит не только от координаты x , но и от положения границы раздела $x_b(t)$: среднее пластовое давление в водоносной области со временем падает, а в нефтеносной – растёт.



Скорость фильтрации и расход жидкости Q изменяется во времени, т.е. несмотря на постоянство депрессии ($P_k - P_r$) движение жидкости в пласте будет неустановившимся.

При $\mu_n > \mu_b$, как следует из формулы (11.17), дебит галереи Q (и, соответственно, скорость фильтрации) увеличивается с течением времени, т.е. по мере продвижения контура нефтеносности. Это объясняется тем, что с течением времени увеличивается область водоносности, гидравлическое сопротивление которой меньше, чем области нефтеносности ($\mu_n > \mu_b$).

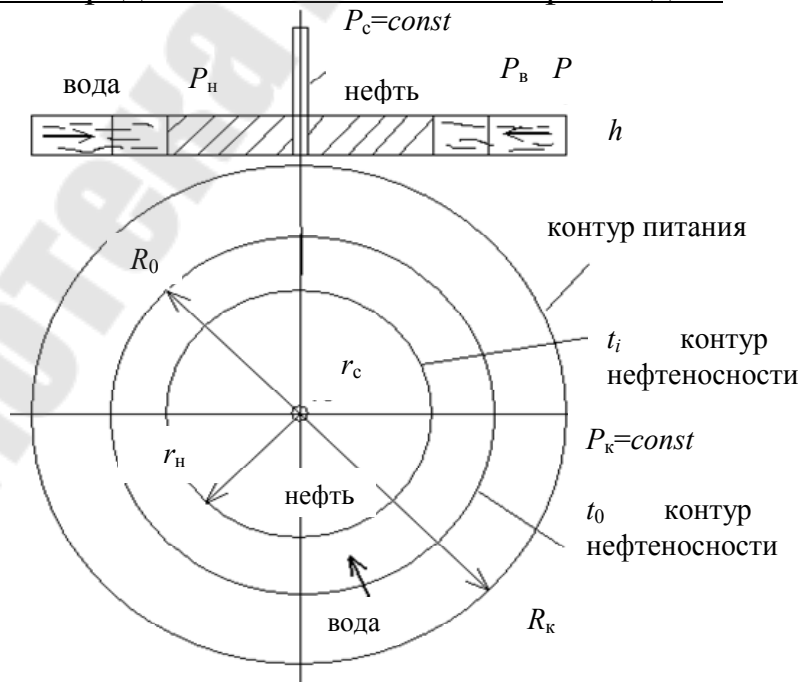
Допустим первоначальное положение водонефтяного контакта АВ в пласте не параллельно галерее (т.е. не перпендикулярно x_0).



Из (11.17) следует, что чем больше x_0 , тем больше скорость фильтрации \square_ϕ . Отсюда можно сделать вывод, что граница раздела в точке В будет двигаться быстрее, чем в точке А, и обводнение галереи начнётся по линии $B...B_1...B_4...$, в то время как контур нефтеносности по другим линиям будет ещё значительно удалён от галереи.

Из этого примера следует важное заключение о характере продвижения контура нефтеносности. Если на границе раздела вода – нефть при разработке нефтяной залежи образовался “нефтяной язык”, то он в дальнейшем не только не исчезнет, а быстро вытягивается, продвигаясь с большей скоростью, чем остальная часть водонефтяного контакта.

11.2. Плоскорадialное вытеснение нефти водой.



$P_k = const; P_c = const; \mu_n > \mu_b$

R_0 – начальное положение контура нефтеносности ($t=0$);

r_n – текущее положение контура нефтеносности (t);

Для установившегося плоскорадиального движения жидкости:
распределение давления:

$$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} = P_c + \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \quad (11.19)$$

$$\text{скорость фильтрации: } \mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \quad (11.20)$$

В рассматриваемом случае:

распределение давления и скорость фильтрации в водоносной области:

$$P_B = P_k - \frac{P_k - P_\Gamma}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \ln \frac{R_k}{r} \quad (11.21)$$

$$\mathfrak{Q}_\phi = \frac{K}{\mu_B} \frac{P_k - P_\Gamma}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \ln \frac{1}{r} \quad (11.22)$$

в нефтеносной области:

$$P_n = P_c + \frac{P_\Gamma - P_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} \quad (11.23)$$

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{K}{\mu_n} \frac{P_\Gamma - P_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \cdot \frac{1}{r} \quad (11.24)$$

Давление на границе раздела жидкостей P определим из условия равенства скоростей фильтрации нефти и воды на этой границе:

$$\frac{K}{\mu_B} \frac{P_k - P}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \frac{1}{r_n} = \frac{K}{\mu_n} \frac{P - P_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r_n} \quad (11.25)$$

$$\text{откуда: } P(t) = \frac{P_{\text{к}} \mu_{\text{н}} \left(\ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}} \right) + P_{\text{с}} \mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}}}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \quad (11.26)$$

Таким образом, распределение давления в водоносной области (подставим (11.25) в (11.20)):

$$P_{\text{в}} = P_{\text{к}} - \frac{\mu_{\text{в}} (P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r} \quad (11.27)$$

Распределение давления в нефтеносной области (подставим (11.25) в (11.22)):

$$P_{\text{н}} = P_{\text{с}} + \frac{\mu_{\text{н}} (P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \ln \frac{r}{r_{\text{с}}} \quad (11.28)$$

Т.о. закон распределения давления вдоль радиус – вектора в обеих зонах логарифмический. Анализ выражений (11.27) и (11.28) показывает, что по мере стягивания контура нефтеносности средневзвешенное давление в водоносной области уменьшается, а в нефтеносной – возрастает.

Скорости фильтрации жидкостей:

$$\text{вода: } \vartheta_{\text{в}} = \frac{K}{\mu_{\text{в}}} \frac{\partial P_{\text{в}}}{\partial r} = \dots = \frac{K(P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \cdot \frac{1}{r} ; (R_{\text{к}} \geq r \geq r_{\text{н}}) \quad (11.29)$$

$$\text{нефть: } \vartheta_{\text{н}} = \frac{K}{\mu_{\text{н}}} \frac{\partial P_{\text{н}}}{\partial r} = \dots = \frac{K(P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \cdot \frac{1}{r} ; (r_{\text{н}} \geq r \geq r_{\text{с}}) \quad (11.30)$$

т.е. скорости фильтрации (как нефти, так и воды) с течением времени растут, т.к. $r_{\text{н}}$ – уменьшается.

Дебит скважины:

$$Q = 2\pi r h \vartheta_{\text{н}} = \frac{2\pi K h (P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu_{\text{в}} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{н}}} + \mu_{\text{н}} \ln \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}}} \quad (11.31)$$

т.е. при постоянной депрессии $\Delta p = P_k - P_c$ дебит скважины с течением времени (т.е. с приближением к ней контура нефтеносности) увеличивается.

Такое самопроизвольное увеличение дебита нефти перед прорывом воды в скважину подтверждается промысловыми наблюдениями.

Закон движения границы раздела жидкостей определим из соотношения:

$$\mathfrak{Q}_\phi = m\mathfrak{Q}_{\text{действ.}} = m \frac{dr_H}{dt} \quad (11.32)$$

откуда:
$$dt = -\frac{m}{\mathfrak{Q}_H} dz_H = -\frac{m}{K(P_k - P_c)} \left(\mu_B \ln \frac{R_k}{r_H} + \mu_H \ln \frac{r_H}{r_c} \right) r_H dr_H$$

(11.33) и интегрируем в пределах от 0 до t и от R_0 до r_H :

$$\begin{aligned} t &= \frac{m}{K(P_k - P_c)} \int_{R_0}^{r_H} [(\mu_H - \mu_B)r_H \ln r_H - (\mu_H \ln r_c - \mu_B \ln R_k)r_H] dr_H = \\ &= \frac{m}{2K(P_k - P_c)} \left[\mu_H \left(R_0^2 \ln \frac{R_0}{r_c} - r_H^2 \ln \frac{r_H}{r_c} \right) + \mu_B \left(R_0^2 \ln \frac{R_k}{R_0} - r_H^2 \ln \frac{R_k}{r_H} \right) - \frac{\mu_H - \mu_B}{2} \cdot (R_0^2 - r_H^2) \right] \end{aligned}$$

Из (11.34) можно определить зависимость $r_H(t)$.

Время вытеснения всей нефти водой: (подставим в (11.34) вместо $r_H \rightarrow r_c$):

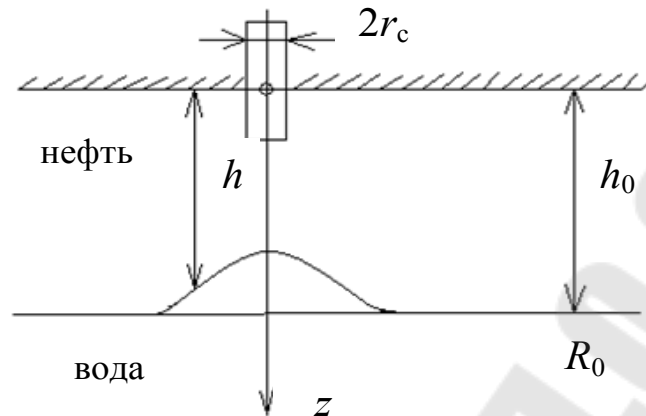
$$T = \frac{m}{2K(P_k - P_c)} \left[\mu_H R_0^2 \left(\ln \frac{R_0}{r_c} - \frac{1}{2} \right) + \mu_B R_0^2 \left(\ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (11.35)$$

При плоскорадиальном вытеснении нефти водой весьма характерным явлением является образование водяных языков, приводящих к потере определенной части запаса нефти (при эксцентричном расположении скважины в круговом пласте; при отклонении от окружности границы нефтеносности, и т.д.).

11.3. Конус подошвенной воды.

При отборе нефти из гидродинамически несовершенной скважины по степени вскрытия в пласте с подошвенной водой происходит деформация водонефтяного контакта. Образующееся повышение уровня воды называется конусом подошвенной воды. При

увеличении дебита конус поднимается, и при некотором предельном значении $Q_{\text{пред.}}$ происходит прорыв подошвенной воды в скважину.



Условием стабильности конуса является равенство градиента давления на вершине конуса удельному весу воды:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=0} = \rho_v g \quad (11.36)$$

Предельный безводный дебит скважины можно приближённо оценить по формуле Н. Ф. Иванова.

$$Q_{\text{пред.}} = \frac{\pi K (\rho_v - \rho_n) g (h_0^2 - b^2)}{\mu \ln \frac{R_0}{r_c}} \quad (11.37)$$

R_0 – радиус контура питания или пласта.

Тема 12. Фильтрация многофазных систем

Добыча нефти в большинстве случаев происходит при замещении её в поровом пространстве продуктивного пласта водой или газом, как при естественных режимах эксплуатации, так и при искусственных методах поддержания пластового давления заводнением или нагнетанием газа. Взаимодействие пластовых флюидов между собой и с пористой средой обуславливает капиллярные явления, неполное и неравномерное вытеснение, образование в продуктивном пласте зон совместного течения флюидов, т. е. многофазной фильтрации. Более того, при определённых условиях залегания и режимах разработки нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений в пласте возникает

многофазное течение сложной многокомпонентной смеси (например, газированной нефти).

12.1 Характеристики многофазной фильтрации.

Фаза – это часть системы, которая является гомогенной (однородной) и отделена от других фаз отчётливыми границами. Смесь воды, нефти и газа – типичный пример многофазной системы.

Главными характеристиками движения многофазной системы является насыщенность и скорость фильтрации каждой фазы.

Насыщенностью σ_i порового пространства i -ой фазой называется доля объёма пор ΔV_i , занятая этой фазой в элементарном объёме:

$$\sigma_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta V_{\Pi}} \quad (12.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1 \quad (12.2)$$

Движение каждой из фаз характеризуется вектором скорости фильтрации каждой фазы:

$$\vec{q}_i = \frac{Q_i}{S} \vec{n} \quad (12.3)$$

Q_i – объёмный расход данной фазы через площадку S пористой среды.

Опытные данные показывают, что расход каждой фазы растёт с увеличением насыщенности и градиента давления. Закон фильтрации каждой из фаз по аналогии с законом Дарси (с учётом силы тяжести) можно записать в следующем виде:

$$\vec{q}_i = - \frac{K}{\mu_i} K_i(\sigma) \left[\text{grad} P_i - \rho_i \vec{g} \right] \quad (12.4)$$

где K – абсолютная проницаемость пласта (определяемая по данным о фильтрации однородной жидкости); $K_i(\sigma)$ – относительные фазовые проницаемости, определяемые экспериментально; μ_i – коэффициент динамической вязкости фазы;

P_i – давление в фазе (парциальное давление); σ – насыщенность фазой.

Относительные фазовые проницаемости $K_1(\sigma)$ и $K_2(\sigma)$ можно приближенно рассчитать по формулам Чень-Чжун-Сяна:

– для системы вода – нефть (σ – водонасыщенность):

$$K_1(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \leq 0,2 \\ \left(\frac{\sigma - 0,2}{0,85}\right)^{3,5}, & \text{если } 0,2 \leq \sigma \leq 1 \end{cases} \quad (12.5)$$

$$K_2(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{0,85 - \sigma}{0,85}\right)^{2,8} \cdot (1 + 2,4\sigma), & \text{если } 0 \leq \sigma \leq 0,85 \\ 0, & \text{если } 0,85 \leq \sigma \leq 1 \end{cases} \quad (12.6)$$

– для системы газ – вода (σ – газонасыщенность):

$$K_1(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \leq 0,1 \\ \left(\frac{\sigma - 0,8}{0,9}\right)^{3,5} (4 + 3\sigma), & \text{если } 0,1 \leq \sigma \leq 1 \end{cases} \quad (12.7)$$

$$K_2(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{0,8 - \sigma}{0,8}\right)^{3,5}, & \text{если } 0 \leq \sigma \leq 0,8 \\ 0, & \text{если } 0,8 \leq \sigma \leq 1 \end{cases} \quad (12.8)$$

Для каждой фазы существует предельная насыщенность σ_* и $(1 - \sigma^*)$ такая, что при меньших значениях насыщенности эта фаза неподвижна.

Движение воды в нефтяном пласте может происходить только в том случае, если $\sigma > \sigma_*$ (σ_* – насыщенность связанной водой). Для нефти $1 - \sigma^*$ – остаточная нефтенасыщенность. Т.о. совместное течение двух фаз имеет место лишь в интервале водонасыщенности:

$$\sigma_* \leq \sigma \leq \sigma^* ;$$

$$\text{сумма } K_1(\sigma) + K_2(\sigma) < 1.$$

Присутствие связанной смачивающей фазы мало влияет на течение несмачивающей жидкости, тогда как присутствие остаточной

несмачивающей фазы значительно стесняет движение смачивающей фазы.

Присутствие ПАВ может резко повысить относительные проницаемости фаз (или одной из фаз).

При фильтрации двухфазных систем (нефть-газ; нефть-вода; газ-вода) одна из фаз является вытесняющей. При анализе двухфазной фильтрации используется лишь одна из насыщенностей – насыщенность вытесняющей фазы $\sigma = \sigma_1$. Насыщенность вытесняемой фазы: $\sigma_2 = 1 - \sigma$ (т. е. является производной от σ_1).

Характерной особенностью многофазной фильтрации является существенное влияние поверхностного натяжения. Давление в фазах P_1 и P_2 (при двухфазной фильтрации) не равны друг другу из-за капиллярных эффектов, приводящих к скачку давления на границе раздела фаз:

$$P_2 - P_1 = P_k \quad (12.9)$$

где P_k – капиллярное давление (капиллярный скачок).

Большее давление – на стороне жидкости, не смачивающей твёрдые зерна породы.

Капиллярный скачок P_k существенно зависит от насыщенности σ : $P_k = P_k(\sigma)$. Предложена следующая экспериментальная формула:

$$P_k = \alpha_n \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(\sigma) \quad (12.10)$$

где α_n – коэффициент межфазного поверхностного натяжения; θ – краевой угол смачивания между жидкостями и породой; m – пористость; $J(\sigma)$ – безразмерная функция Леверетта. В ряде случаев капиллярными эффектами можно пренебречь.

12.2. Дифференциальные уравнения многофазной фильтрации

Система уравнений, описывающая многофазную фильтрацию, строится на основе: – уравнений неразрывности для каждой фазы;

– уравнения движения (закона фильтрации);

– уравнений состояния флюидов и пористой среды.

Будем рассматривать изотермическую фильтрацию в однородной пористой среде без фазовых переходов и химических реакций.

а) Уравнение неразрывности фаз.

Рассмотрим конечный неизменный объём пористой среды V , ограниченный поверхностью S . Объём порового пространства V_n ; насыщенность порового пространства i -ой фазой - σ_i .

$$\rho_i(x, y, z, t); m(x, y, z, t).$$

Масса i -ой фазы в данном объёме V :

$$\int_V \rho_i \sigma_i m dV.$$

Скорость изменения массы i -ой фазы в рассматриваемом объёме V : $\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \sigma_i m) dV$ должна быть равна секундному массовому

расходу i -ой фазы через поверхность S : $-\iint_S \rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i \vec{n} dS$, т. е.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \sigma_i m) dV = -\iint_S \rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i \vec{n} dS \quad (12.11)$$

На основании формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S \rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i) dV \quad (12.12)$$

(12.11) запишем в виде:

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho_i \sigma_i m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i) \right] dV = 0 \quad (12.13)$$

В силу произвольности объёма V из (12.13) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i \sigma_i m)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{\mathfrak{G}}_i) &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Система (12.14) – система дифференциальных уравнений неразрывности фаз при фильтрации в однородной пористой среде.

Для двухфазной системы уравнения неразрывности записываются в виде:

для вытесняющей фазы: $\frac{\partial}{\partial t} (m \rho_1 \sigma) + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{\mathfrak{G}}_1) = 0 \quad (12.15)$

для вытесняемой фазы: $\frac{\partial}{\partial t} [m \rho_2 (1 - \sigma)] + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{\mathfrak{G}}_2) = 0. \quad (12.16)$

Если вытесняющая и вытесняемая фазы - слабосжимаемые жидкости (вода-нефть), т. е. $\rho_1 \approx const$; $\rho_2 \approx const$, а пористую среду также считать несжимаемой ($m \approx const$), то уравнения (12.15) (12.16) приводятся к виду:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathfrak{D}}_1 = 0 \quad (12.17)$$

$$-m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathfrak{D}}_2 = 0 \quad (12.18)$$

б) Уравнения движения фаз.

Из уравнений неразрывности (12.14) и закона фильтрации фаз (12.4) можно получить дифференциальное уравнение движения фаз:

– для многофазной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i \sigma_i m)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{K}{\mu_i} K_i(\sigma) (\operatorname{grad} P_i - \rho_i \vec{g}) \right] \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

– для двухфазной системы (если жидкости – несжимаемые; пористая среда – несжимаемая):

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{K}{\mu} K_1(\sigma) \nabla^2 P_1 = 0 \quad (12.20)$$

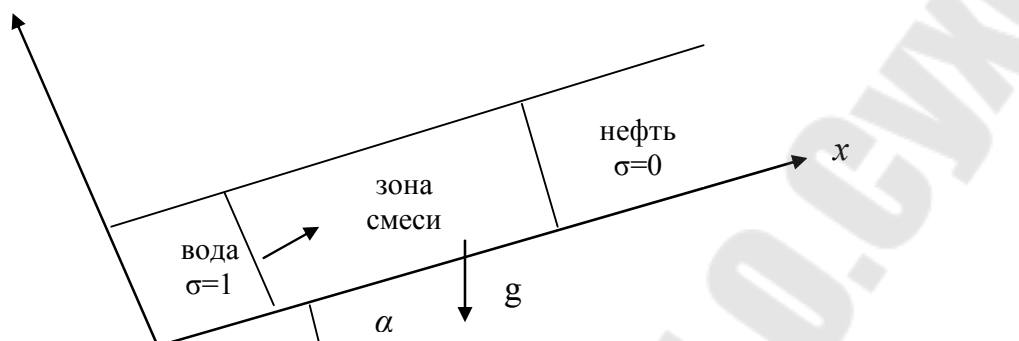
$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{K}{\mu} K_2(\sigma) \nabla^2 P_2 = 0 \quad (12.21)$$

12.3 Одномерная фильтрация двухфазной жидкости.

Наиболее разработана в настоящее время теория одномерного (прямолинейно-параллельного и плоскорадиального) движения двухфазной жидкости в пористой среде. Рассмотрим прямолинейно-параллельное вытеснение нефти водой вдоль оси x .

При этом предполагается: жидкости – взаимно нерастворимы и несжимаемы; пористая среда – недеформируема; фазовые переходы отсутствуют; коэффициенты вязкости фаз постоянны; относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление являются известными функциями насыщенности.

Схема одномерной двухфазной фильтрации с учётом силы тяжести



Уравнения неразрывности для фаз:

$$-m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}, \quad m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \quad (12.22)$$

Закон фильтрации (12.4) сводится к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= -\frac{K}{\mu_1} K_1(\sigma) \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \rho_1 g \sin \alpha \right) \\ \vartheta_2 &= -\frac{K}{\mu_2} K_2(\sigma) \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \rho_2 g \sin \alpha \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

Неизвестные параметры: $\sigma; \vartheta_1; \vartheta_2; P_1; P_2 \rightarrow f(x, t)$.

Давления P_1 и P_2 связаны соотношением:

$$P_2 - P_1 = P_k(\sigma) = \alpha_n \cos \theta \sqrt{\frac{m}{K}} J(\sigma) \quad (12.24)$$

Система уравнений (12.22, 12.23, 12.24) может быть сведена к одному уравнению для насыщенности (1953 г., Л. Рапопорт и В. Лис). Сложив уравнения неразрывности (12.22) для обеих фаз, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0,$$

$$\text{откуда } \vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta(t). \quad (12.25)$$

Равенство (12.25) показывает, что суммарная скорость $\vartheta(t)$ двухфазного потока (а значит и суммарный расход $Q(t) = \vartheta(t) \alpha h$)

не зависят от координаты x , а является либо постоянной, либо известной функцией времени.

(12.22) подставим в (12.25):

$$\vartheta(t) = -K \left[\frac{K_1(\sigma)}{\mu_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{K_2(\sigma)}{\mu_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right] - K \left[\frac{K_1(\sigma)}{\mu_1} \rho_1 + \frac{K_2(\sigma)}{\mu_2} \rho_2 \right] g \sin \alpha \quad (12.26)$$

Из (12.26) исключим $\frac{\partial P_2}{\partial x}$ с помощью равенства (12.24), продифференцированного по x :

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_K(\sigma)}{\partial x} = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{dP_K}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right).$$

После преобразований имеем:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\vartheta(t) + \frac{K}{\mu_2} K_2(\sigma) \frac{dP_K}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{K}{\mu_1} K_1(\sigma) \rho_1 + \frac{K}{\mu_2} K_2(\sigma) \rho_2 \right) g \sin \alpha}{\frac{K}{\mu_1} K_1(\sigma) + \frac{K}{\mu_2} K_2(\sigma)} \quad (12.27)$$

Подставляя (12.27) в 1-е уравнение (12.23) получим:

$$\vartheta_1 = \left[\vartheta(t) + \frac{K}{\mu_2} K_2(\sigma) \left(P'_K(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) \right] f(\sigma) \quad (12.28)$$

$$\text{где: } \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1; \quad P'_K(\sigma) = \frac{dP_K}{d\sigma}; \quad f(\sigma) = \frac{K_1(\sigma)}{K_1(\sigma) + \mu_0 K_2(\sigma)};$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Используя выражение (12.28) и уравнение неразрывности (12.22) для 1 фазы, окончательно получаем дифференциальное уравнение для определения насыщенности:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \vartheta(t) \frac{\partial f(\sigma)}{\partial x} + \frac{K}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_2(\sigma) \left(P'_K \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) f(\sigma) \right] = 0 \quad (12.29)$$

Если суммарная скорость фильтрации $\vartheta(t)$ постоянна: $\vartheta(t) = \vartheta = const$, то уравнение (12.29) можно упростить и перевести в безразмерный вид.

$$\text{Введём безразмерные переменные: } \xi = \frac{x}{L}; \tau = \frac{\vartheta t}{mL}; \quad (12.30)$$

где L – характерный линейный размер (например, расстояние до эксплуатационной галереи).

Тогда с учётом (12.24) уравнение (12.29) принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} + A_g \frac{\partial}{\partial \xi} [K_2(\sigma) f(\sigma)] + A_k \frac{\partial}{\partial \xi} \left[K_2(\sigma) f(\sigma) J^i(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (12.31)$$

где A_g и A_k – безразмерные параметры:

$$A_g = \frac{K \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_2 \vartheta}; \quad A_k = \frac{\alpha_n \cos \theta \sqrt{mK}}{\mu_2 \vartheta L} \quad (12.32)$$

Безразмерный параметр A_g характеризует отношение силы тяжести к силам вязкого трения. Параметр A_k – отношение капиллярных сил к силам вязкого трения.

Если рассматривать вытеснение в пределах всего пласта и темпы вытеснения достаточно велики, то значения параметра A_k будут малы: $A_k \ll 1$ и капиллярными силами можно пренебречь

Силой тяжести можно пренебречь, если $A_g \ll 1$, что имеет место при условии: $Kg \Delta \rho \sin \alpha \ll \mu_2 \vartheta$.

В случае одномерного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей в условиях, когда можно пренебречь капиллярными эффектами, а также влиянием силы тяжести, уравнение (12.31) приводится к виду:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} = 0 \quad (12.33)$$

Т. к. $\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$, то уравнение (12.33)

запишем в виде:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0 \quad (12.34)$$

Функция $f(\sigma)$ называется функцией Баклея-Левретта и характеризует распределение потоков фаз – отношение скорости фильтрации ϑ_1 вытесняющей фазы к суммарной скорости ϑ .

$$f(\sigma) = \frac{K_1(\sigma)}{K_1(\sigma) + \mu_0 K_2(\sigma)}, \quad \vartheta_1 = f(\sigma)\tau(t); \quad \vartheta_2 = [1 - f(\sigma)]\vartheta.$$

Функция Баклея-Левретта определяет полноту вытеснения и характер распределения насыщенности по пласту.

$f'(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma}$ - производная от функции Баклея-Левретта;

$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ - относительный коэффициент вязкости.

Графики функции Баклея-Левретта $f(\sigma)$ и ее производной $f'(\sigma)$ приведены на рис.12.1 и 12.2.

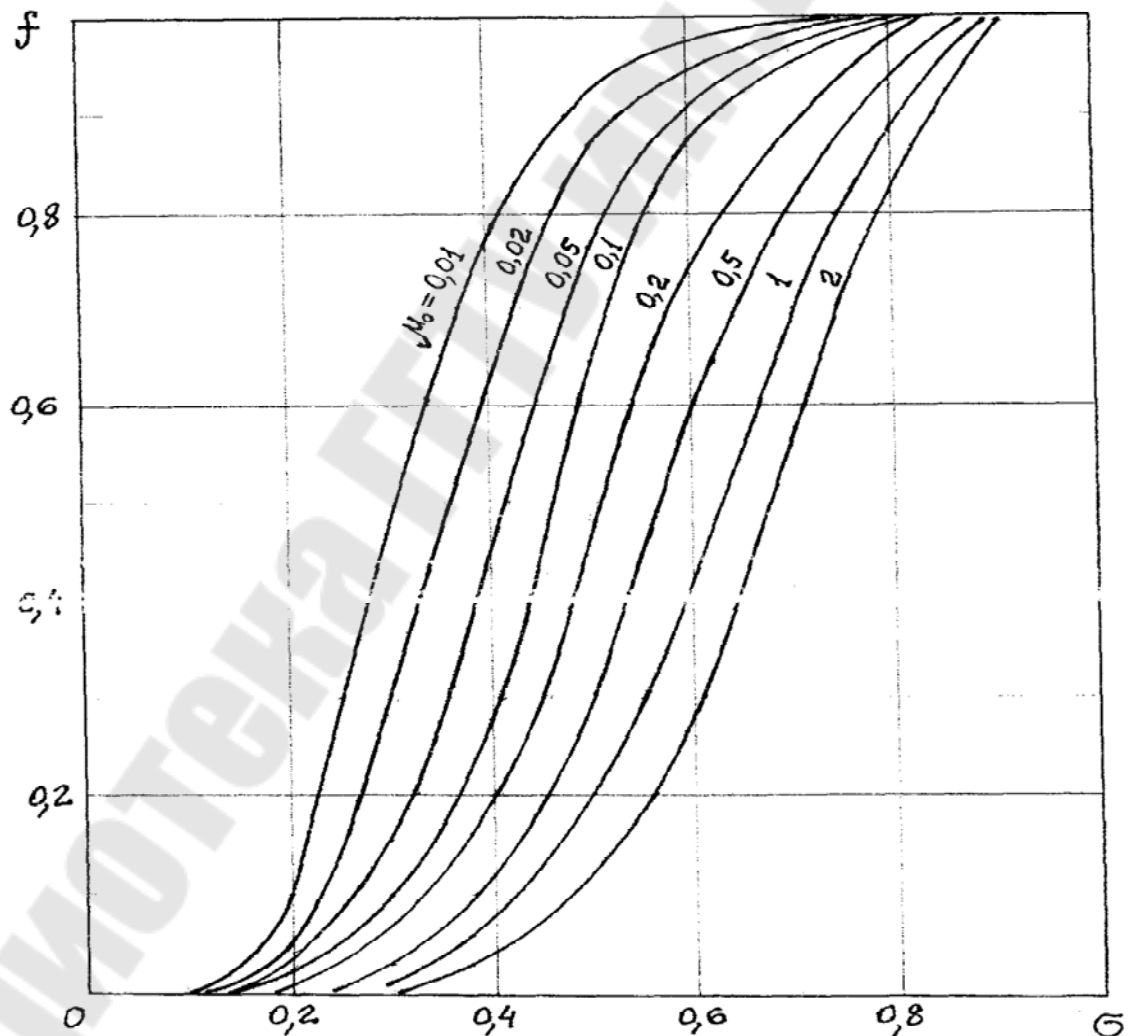


Рис.12.1. График функции Левретта $f(\sigma)$: σ – водонасыщенность порового пространства; μ_0 – относительный коэффициент вязкости.

Задачи повышения нефтеотдачи пласта в значительной степени сводятся к применению таких воздействий на пласт, которые изменяют вид функции $f(\sigma)$ в направлении увеличения полноты вытеснения.

Характерной особенностью функции Баклея-Левретта $f(\sigma)$ является наличие точки перегиба, где вторая производная $f''(\sigma)$ соответственно больше или меньше нуля. Эта особенность определяет специфику фильтрационных задач вытеснения

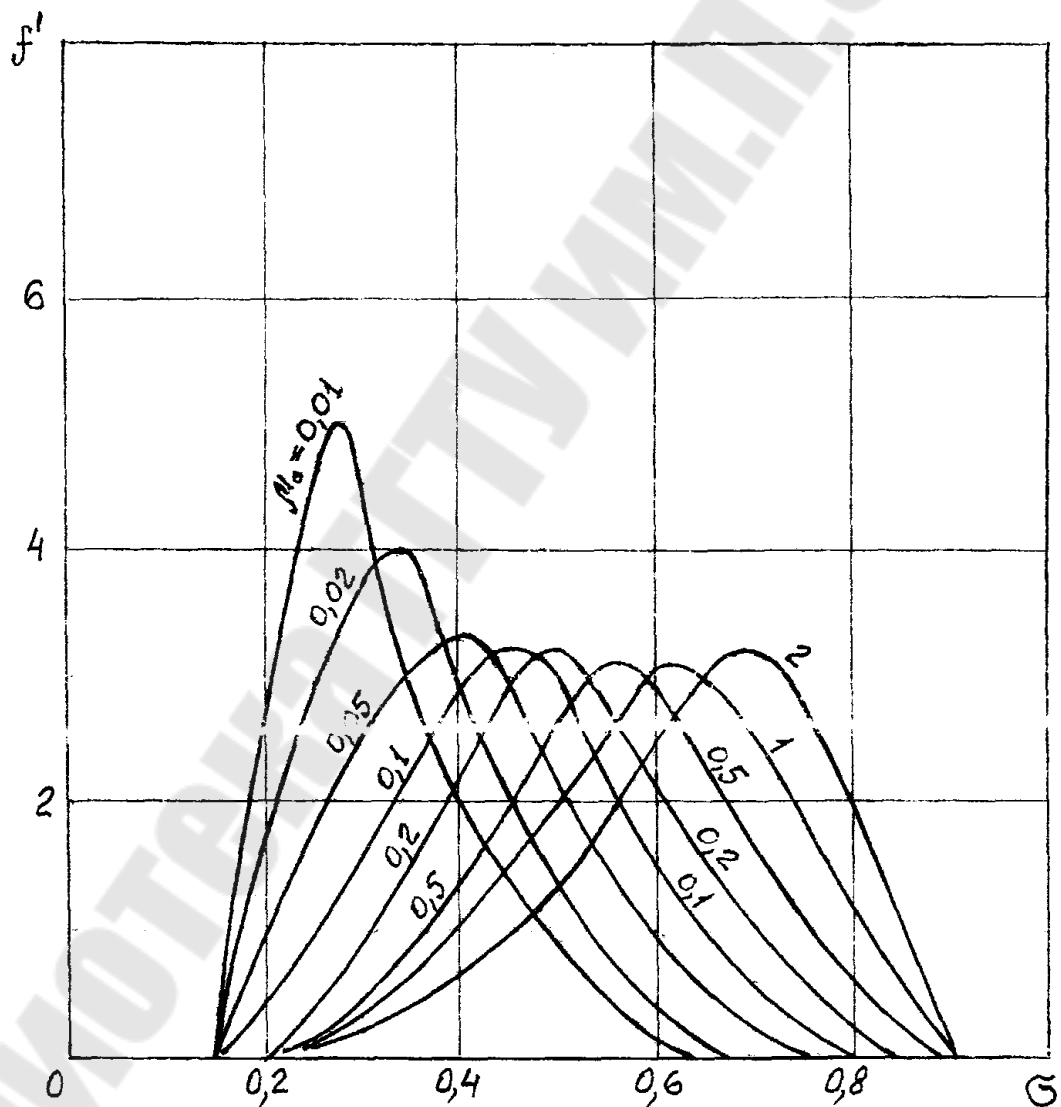


Рис.12.2. График производной функции Баклея- Левретта $f'(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma}$: σ – водонасыщенность порового пространства нефтяного пласта; μ_0 – относительный коэффициент вязкости воды.

Баклей и Леверетт из условия материального баланса получили формулу для определения значения фронтальной насыщенности σ_ϕ (насыщенности на скачке):

$$\sigma_c f'(\sigma_\phi) - f(\sigma_c) = 0 \quad (12.35)$$

На основании выражения (12.35) фронтальную насыщенность легко определить графически, используя графики функции Баклея-Леверетта $f(\sigma)$. Проведя из начала координат касательную к кривой $f(\sigma)$ (рис.12.3) и опустив перпендикуляр из точки касания на ось σ , получим значение фронтальной насыщенности. Можно найти координату скачка насыщенности x_c в момент времени t .

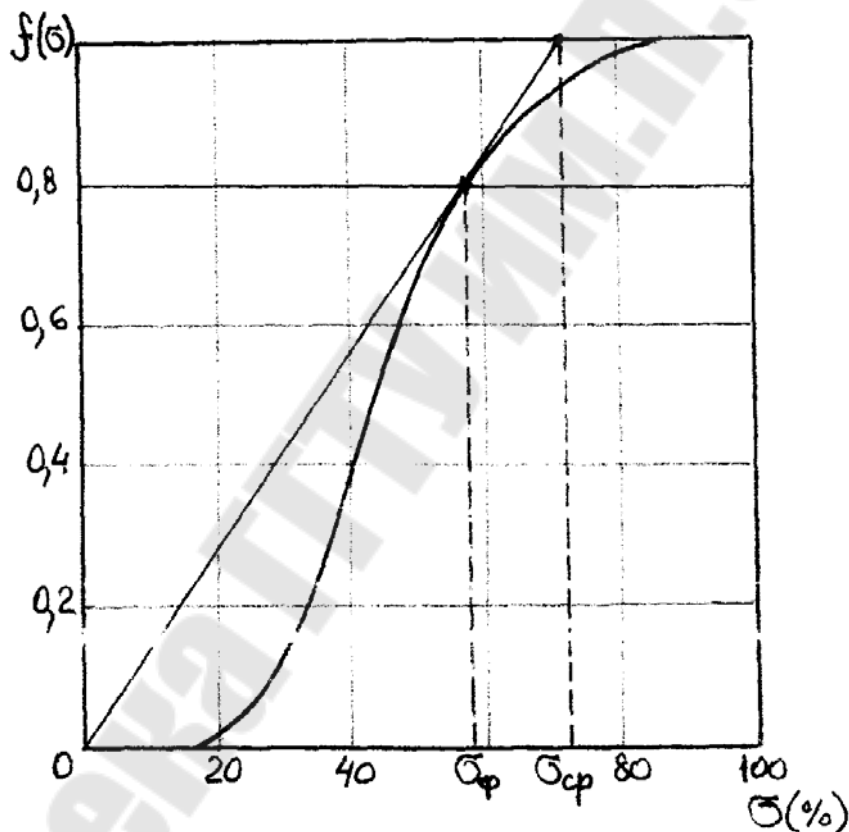


Рис.12.3. График функции Баклея-Леверетта $f(\sigma)$.

Среднюю насыщенность $\sigma_{ср}$ можно определить графически, если продлить касательную к кривой $f(\sigma)$ (рис. 12.3) до пересечения с прямой $f(\sigma) = 1$. Значение σ в точке пересечения и есть средняя насыщенность $\sigma_{ср}$.

Как правило, среднее значение насыщенности порового пространства водой $\sigma_{ср}$ значительно меньше единицы. Поэтому в процессе вытеснения нефти водой для более полного извлечения

нефти из пласта на объем добытой нефти необходимо закачать несколько объемов воды.

Для повышения нефтеотдачи пластов в настоящее время широко используется добавление в вытесняющую воду химических реагентов (поверхностно-активных веществ), улучшающих капиллярные и гидродинамические условия вытеснения и снижающих остаточную нефтенасыщенность пласта.

Тема 13. Движение жидкостей в трещиноватых и в трещиновато-пористых породах

13.1. Особенности фильтрации в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах.

Нефтеносные пласты ряда месторождений имеют своеобразную трещиноватую структуру, т.е. пронизаны сообщающимися между собой трещинами. В трещиноватой породе имеются макро и микротрещины, мелкие и крупные каверны. Сама порода – матрица, может быть абсолютно непроницаемой или представлять собой обычную пористую среду. Толщина макротрещин ≈ 1 мм, микротрещин 1.....100 мкм. Обычно макротрещины не имеют значительной протяженности и соединяются между собой микротрещинами, которые и создают большое гидравлическое сопротивление фильтрующемуся потоку.

Движение флюидов в трещиноватых пластах отличается некоторыми особенностями по сравнению с движением в пористой среде.

Для анализа особенностей фильтрации в трещиноватых породах рассматривают две модели пород: трещиноватые и трещиновато-пористые.

В чисто трещиноватых породах блоки породы, расположенные между трещинами, практически непроницаемы, движение жидкости происходит только по трещинам, т.е. трещины являются и коллектором и проводником жидкости к скважинам. К таким породам относятся сланцы, кристаллические породы, доломиты, мергели, некоторые известняки.

Трещиновато-пористая среда представляет собой совокупность пористых блоков, отделённых один от другого развитой системой трещин. При этом поперечные размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость

системы трещин k_1 значительно больше, чем проницаемость пористых блоков k_2 . Жидкость насыщает и проницаемые блоки и трещины. Трещины занимают гораздо меньший объём, чем поры, поэтому коэффициент трещиноватости m_T (отношение объёма трещин к общему объёму породы) значительно меньше коэффициента пористости.

Трещиновато-пористые породы – это в основном известняки, иногда песчаники, алевролиты, доломиты.

Характеристиками трещиноватых пород, определяющими их фильтрационные свойства, являются:

- коэффициент трещиноватости m_T ;
- коэффициент проницаемости k_1 ;
- густота трещин Γ ;
- раскрытие трещин δ .

Густота трещин – число трещин n , отнесённое к длине нормали L , проведённой к поверхностям, образующим трещины. Коэффициент трещиноватости m_T связан с густотой и раскрытием трещин соотношением:

$$m_T = \theta \Gamma \delta \quad (13.1)$$

θ - безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии системы трещин в породе $1 \leq \theta \leq 3$.

Движение жидкости в трещине можно представить как движение в узкой щели между двумя параллельными плоскими стенками с зазором δ . Для такого движения справедлива формула Буссинеска:

$$\vartheta = -\frac{\delta^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (13.2)$$

Переходя к скорости фильтрации:

$$\vartheta_\phi = \vartheta m_T = -\frac{m_T \delta^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (13.3)$$

Сопоставив формулу (13.3) с законом Дарси: $\vartheta_\phi = -\frac{k_1}{\mu} \frac{dp}{dx}$ и используя (13.1), получим выражение для коэффициента проницаемости трещиноватой породы:

$$k_1 = \frac{m_T \delta^2}{12} = \frac{\Gamma \delta^3 \theta}{12} \quad (12.4)$$

Зависимость проницаемости трещиноватых пород от пластового давления более существенная, чем аналогичная зависимость для пористых пород.

При снижении пластового давления (горное давление постоянно) увеличивается нагрузка на скелет породы и уменьшается раскрытие трещин. С ростом давления раскрытие трещин увеличивается. Если считать деформации в трещиноватом пласте упругими и малыми, то зависимость раскрытия трещины от давления можно считать линейной:

$$\delta = \delta_0 [1 - \beta(p_0 - p)], \quad (13.5)$$

где: β - параметр трещиноватой среды, зависящий от упругих свойств и геометрии трещин.

Из выражений (13.4) и (13.5) зависимость коэффициента проницаемости трещиноватой породы от давления будет следующей:

$$k_1 = k_1^0 [1 - \beta(p_0 - p)]^3 \quad (13.6)$$

Для пористых сред аналогическая зависимость:

$$k = k^0 [1 - \alpha_k(p_0 - p)]^3 \quad (13.7)$$

При рассмотрении фильтрации в трещиновато-пористом пласте обычно считают, что коэффициент проницаемости трещин k_1 существенно зависит от давления, а коэффициент проницаемости пористых блоков k_2 принимается постоянным (т.е. $k_2 \neq f(p)$).

Соотношения для установившихся фильтрационных потоков в трещиновато-пористой среде получаются суммированием потоков в трещинах и пористых блоках.

Система трещин и система пор (трещиновато-пористой среды) представляют собой две среды с разными масштабами: средний размер пор: 1- 10 (до 100) мкм; протяженность трещин от нескольких сантиметров до десятков метров.

Следует иметь в виду следующие соотношения: $m_2 \gg m_1$; $k_2 \ll k_1$ (2-пористые блоки; 1- трещины); т.е. жидкость в основном содержится в пористых блоках, откуда фильтруясь из них в трещины, движется в скважины в основном по трещинам $P_2 > P_1$; $V_{\phi 2} \ll V_{\phi 1}$.

13.2. Уравнение неразрывности потока в трещиноватых и трещиновато-пористых средах.

Рассмотрим конечный объём трещиновато-пористой среды V , ограниченной поверхностью S . Будем считать что в каждой точке имеются два давления: P_1 – в системе трещин, P_2 – в пористых блоках; и две скорости фильтрации: \mathfrak{Q}_1 - в трещинах, \mathfrak{Q}_2 - в пористых блоках.

Переток жидкости из пористого блока в систему трещин:

$$q = \alpha_0 \frac{\rho}{\mu} (P_2 - P_1) \quad (13.8)$$

Масса жидкости, содержащаяся в системе трещин объёма V :

$$\int_V \rho m_1 dV$$

Скорость изменения массы жидкости в трещинах

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho m_1) dV$$

равна массовому потоку жидкости, проходящему через боковую поверхность S в систему трещин или из неё:

$$\iint_S \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 \vec{n} dS$$

плюс переток жидкости из пористого блока в систему трещин

$$\int_V q dV$$

$$\text{т.е. } \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho m_1) dV = -\iint_S \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 \vec{n} dS + \int_V q dV \quad (13.9)$$

$$\text{Т.к. } \iint_S \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 \vec{n} dS = \int_V \text{div } \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 dV, \quad \text{то выражение (13.9)}$$

приведём к виду:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho m_1) + \text{div } \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 - q \right] dV \quad (13.10)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m_1) = \text{div } \rho \vec{\mathfrak{Q}}_1 + q \quad (13.11)$$

(13.11) – дифференциальное уравнение неразрывности для потока жидкости в системе трещин в трещиновато-пористой среде.

Масса жидкости, содержащаяся в пористых блоках в объеме V :

$$\int_V \rho m_2 dV$$

Скорость изменения массы жидкости в пористых блоках равна массовому потоку жидкости, проходящему через боковую поверхность S в пористые блоки или из них, минус переток жидкости из пористых блоков в систему трещин:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho m_2) dV = - \iint_S \rho \vec{\mathfrak{G}}_2 \vec{n} dS + \int_V q dV \quad (13.12)$$

Выражение (13.12) можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m_2) = \operatorname{div} \rho \vec{\mathfrak{G}}_2 - q \quad (13.13)$$

(13.13) – дифференциальное уравнение неразрывности для потока жидкости в пористых блоках в трещиновато-пористой среде.

Для чисто трещиноватого пласта $q=0$; остаётся только уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m_1) = -\operatorname{div} \rho \vec{\mathfrak{G}}_1 \quad (13.14)$$

13.3. Уравнения движения жидкости в трещиновато-пористой породе.

Принято считать, что при фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде выполняются линейные законы Дарси:

$$\text{в системе трещин: } \vec{\mathfrak{G}}_1 = -\frac{k_1}{\mu} \operatorname{grad} p_1 \quad (13.15)$$

$$\text{в пористых блоках: } \vec{\mathfrak{G}}_2 = -\frac{k_2}{\mu} \operatorname{grad} p_2 \quad (13.16)$$

Подставляя (13.15) и (13.16) в (13.11) и (13.13) и учитывая что в общем случае:

$k_1 = k_1(P_1)$, $k_2 = k_2(P_2)$, $\rho = \rho(P_1)$, $m_1 = m_1(P_1)$, $m_2 = m_2(P_2)$, получим систему дифференциальных уравнений фильтрации флюида в трещиновато-пористой среде в самом общем случае:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \left[\frac{\rho(P_1)k_1(P_1)}{\mu} \operatorname{grad} p_1 \right] &= \frac{\partial}{\partial t} [\rho(P_1)m_1(P_1)] - \alpha_0 \frac{\rho_0}{\mu} (P_2 - P_1) \\ \operatorname{div} \left[\frac{\rho(P_2)k_2(P_2)}{\mu} \operatorname{grad} p_2 \right] &= \frac{\partial}{\partial t} [\rho(P_2)m_1(P_2)] - \alpha_0 \frac{\rho_0}{\mu} (P_2 - P_1) \end{aligned} \right\} (13.17)$$

Для чисто трещиноватой среды остаётся одно уравнение движения:

$$\operatorname{div} \left[\frac{\rho(P_1)k_1(P_1)}{\mu} \operatorname{grad} p_1 \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\rho(P_1)m_1(P_1)] \quad (13.18)$$

13.4. Установившаяся одномерная фильтрация жидкости в трещиноватом пласте

Рассмотрим установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) с постоянной вязкостью ($\mu = \text{const}$) в деформируемом трещиноватом пласте, проницаемость которого зависит от давления по экспоненциальному закону:

$$k_1 = k_1 e^{-\alpha(p_0 - p)} \quad (13.19)$$

В данном случае дифференциальное уравнение движения (13.18) записывается в виде:

$$\operatorname{div} \left[\frac{\rho}{\mu} k_1(p) \operatorname{grad} P_1 \right] = 0 \quad (13.20)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho k_1(P)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho k_1(P)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho k_1(P)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right] = 0 \quad (13.21)$$

Введём функцию Лейбенсона:

$$A = \int \frac{\rho k_1(p)}{\mu} dp + c \quad (13.22)$$

Используя функцию Лейбенсона уравнение (13.21) можно привести к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (13.23)$$

Сравнивая (13.23) и уравнение Лапласа установившегося движения несжимаемой жидкости в пористой среде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \text{ можно сделать вывод об аналогии}$$

установившейся фильтрации жидкости в недеформируемой пористой среде и установившейся фильтрации жидкости в деформируемой трещиноватой среде. Т.е. все полученные закономерности для несжимаемой жидкости при её фильтрации в недеформируемой пористой среде можно использовать для описания течения в деформируемой трещиноватой породе, заменив давление p на функцию Лейбензона A .

Функция Лейбензона при учёте (13.19) приводится к виду:

$$A = \int \frac{\rho}{\mu} k_1 e^{-\alpha(p_0 - p)} dp + c = \frac{\rho k_1^0}{\mu} \frac{e^{-\alpha(p_0 - p)}}{\alpha} + c \quad (13.24)$$

Рассмотрим плоско-радиальную фильтрацию жидкости в круговом пласте к скважине.

Массовый дебит скважины:

-для несжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде (формула Дюпюи):

$$Q_{\tau} = \rho \frac{2 \pi k h}{\mu} \frac{P_{\kappa} - P_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \quad (13.25)$$

-для несжимаемой жидкости в деформируемой трещиноватой породе: $\frac{\rho k}{\mu} p \rightarrow A; (P_0 = P_{\kappa});$

$$Q_{\tau} = 2 \pi h \frac{P_{\kappa} - P_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} = \rho \frac{2 \pi h k_1^0 [1 - e^{-\alpha(P_{\kappa} - P_c)}]}{\mu \alpha \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \quad (13.26)$$

Объёмный дебит:

$$Q = \frac{2 \pi h k_1^0 [1 - e^{-\alpha(P_{\kappa} - P_c)}]}{\mu \alpha \ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \quad (13.27)$$

Аналогично используя формулу для распределения давления для несжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде:

$$P = P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \quad (13.28)$$

для деформируемой трещиноватой породы получим:

$$P = P_{\kappa} - \frac{P_{\kappa} - P_c}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \quad (13.29)$$

Используя (13.24) и принимая $P_0 = P_{\kappa}$, выражение (13.25) после преобразования можно привести к виду:

$$P = P_{\kappa} + \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha(P_{\kappa} - P_c)}}{\ln \frac{R_{\kappa}}{r_c}} \ln \frac{R_{\kappa}}{r} \right] \quad (13.30)$$

Сравнительный анализ выражений (13.15) и (13.13) приводит к выводу, что изменение давления в призабойной зоне при фильтрации жидкости в деформируемом трещиноватом пласте происходит гораздо более круто, чем при фильтрации жидкости в недеформируемой пористой среде (рис.13.1).

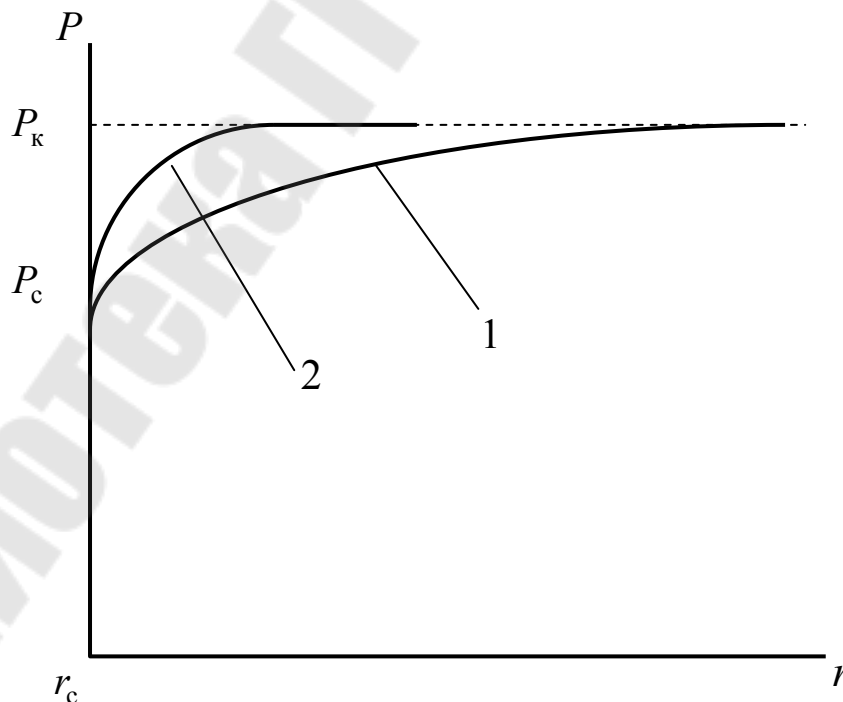


Рис.13.1. Кривые распределения давления в призабойной зоне скважины: 1 – в недеформируемой пористой среде; 2 – в трещиноватом пласте.

В трещиновато-пористом пласте дебит скважины складывается из дебита жидкости, притекающей из трещин, и из дебита жидкости, поступающей из пористых блоков. Суммарный дебит добывающей скважины в круговом трещиновато-пористом пласте:

$$Q = \frac{2\pi hk_2 (P_k - P_c)}{\mu\alpha \ln \frac{R_k}{r_c}} + \frac{2\pi hk_1^0 [1 - e^{-\alpha(P_k - P_c)}]}{\mu\alpha \ln \frac{R_k}{r_c}} \quad (13.31)$$

Первое слагаемое значительно меньше второго и его без существенной погрешности можно отбросить.

Тема 14. Фильтрация неньютоновских жидкостей

Нефти ряда месторождений (Азербайджана, Башкирии, Татарии, Казахстана – Мангышлак и др.) обладают ярко выраженными неньютоновскими свойствами, что связано в основном с повышенным содержанием в них высокомолекулярных компонентов: смол, асфальтенов, парафина. Фильтрация неньютоновских жидкостей обладает рядом особенностей и не подчиняется линейному закону фильтрации Дарси.

14.1. Законы фильтрации неньютоновских жидкостей.

Закон фильтрации неньютоновских жидкостей зависит от типа ее реологической модели. Наиболее широкий класс нефтей с ярко выраженными неньютоновскими свойствами относится к типу вязкопластичных жидкостей, реологическая модель которых – модель Бингама:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \frac{d\vartheta_x}{dy}; \tau > \tau_0 \\ \frac{d\vartheta_x}{dy} &= 0; \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

где τ_0 - начальное напряжение сдвига.

При $\tau \leq \tau_0$ - вязкопластичные жидкости ведут себя как твердое тело; при $\tau > \tau_0$ - текут как обычные вязкие жидкости.

Рассмотрим стационарное течение вязкопластичной жидкости в одной поре – цилиндрической капиллярной трубке постоянного радиуса.

Максимальное касательное напряжение – на стенках капилляра и убывает при приближении к оси. На некотором расстоянии r_0 от оси $\tau = \tau_0$, т.е. при $r = r_0$ $\frac{d\vartheta_x}{dy} = 0$. Из баланса сил для цилиндрического объема длиной l и радиусом r_0 :

$$2\pi r_0 l \tau_0 = \pi r_0^2 \Delta p \quad (14.2)$$

получим: $r_0 = \frac{2l\tau_0}{\Delta p}$. (14.3)

Очевидно, когда $r_0 = \frac{d}{2}$ во всем сечении капилляра $\tau \leq \tau_0$, что отвечает случаю полного прекращения движения в данной поре. Из (14.3) можно определить максимальный перепад давления для этого случая:

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_0 = \frac{4\tau_0}{d} = \gamma \quad (14.4)$$

Величина γ определяет тот градиент давления $\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_0$, по достижении которого начнется движение жидкости в поре. При меньших значениях градиента давления движение отсутствует. Величина γ называется предельным (начальным) градиентом.

Величина γ зависит от предельного напряжения сдвига τ_0 и среднего диаметра пор. Так как характерный размер пор пористой среды $d \approx \sqrt{k}$, где k – проницаемость, то $\gamma = \frac{\alpha\tau_0}{\sqrt{k}}$, где α – безразмерная константа.

Закон фильтрации вязкопластичной жидкости можно сформулировать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta p}{l} &= \frac{\mu_p}{k} \mathfrak{D}_\phi + \gamma, \mathfrak{D}_\phi > 0 \\ \frac{\Delta p}{l} &\leq \gamma, \mathfrak{D}_\phi = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14.5)$$

или в векторной дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathit{grad}P &= -\frac{\mu_p}{k} \bar{\mathfrak{D}}_\phi + \gamma \frac{\bar{\mathfrak{D}}_\phi}{\mathfrak{D}_\phi}, \mathfrak{D}_\phi > 0 \\ |\mathit{grad}P| &\leq \gamma, \mathfrak{D}_\phi = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14.6)$$

В соответствии с (14.5) или (14.6) скорость фильтрации отлична от нуля только в тех областях, где $|\mathit{grad}P| > \gamma$.

В пористой среде, состоящей из множества микрокапилляров различных диаметров, при снижении перепада давления начинается постепенное “закупоривание” капилляров. Вначале движения прекращается в наиболее мелких порах, а по мере снижения давления происходит закупоривание все больших и больших капилляров. В пластах со слоистой неоднородностью наблюдается закупоривание целых пропластков (прекращение движения в них нефти) по мере снижения пластового давления.

При фильтрации псевдопластичных жидкостей, реологическое уравнение которых модель Оствальда – де Вейля:

$$\tau = k \left(\frac{d\mathfrak{D}_x}{dy} \right)^n, \quad n > 1, \quad n > 1 \quad (14.7)$$

используют степенной закон фильтрации:

$$\bar{\mathfrak{D}}_\phi = -C |\mathit{grad}P|^m \mathit{grad}P, \quad (m > 0) \quad (14.8)$$

(C – опытный коэффициент)

Степенной закон (14.8) хорошо описывает движение растворов полимеров в пористой среде и используется при расчете “полимерного” заводнения пластов с целью повышения их нефтеотдачи.

14.2. Одномерная фильтрация вязкопластичной жидкости.

Рассмотрим установившийся плоскорадиальный приток несжимаемой вязкопластичной жидкости (ВПЖ) к совершенной скважине в круговом пласте.

Закон фильтрации в данном случае записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{\mu_p}{k} \mathfrak{S}_\phi + \gamma, \mathfrak{S}_\phi > 0 \\ \frac{dP}{dr} &\leq \gamma, \mathfrak{S}_\phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Выведем формулу дебита скважины. Из (14.9) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_\phi &= \frac{Q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu_p} \left(\frac{dp}{dr} - \gamma \right), \text{если } \frac{dp}{dr} > \gamma \\ \mathfrak{S}_\phi &= 0, \text{если } \frac{dp}{dr} \leq \gamma \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} P(r_c) &= P_c = \text{const} \\ P(R_k) &= P_k = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Запишем (14.11) в виде:

$$dp = \frac{\mu_p}{k} \frac{Q}{2\pi h} \frac{dr}{r} + \gamma dr \quad (14.12)$$

Проинтегрируем (14.12):

$$p = \frac{\mu_p}{k} \frac{Q}{2\pi h} \ln r + \gamma r + C \quad (14.13)$$

$$C = p_c - \frac{\mu_p}{k} \frac{Q}{2\pi h} \ln r_c - \gamma r_c \quad (14.14)$$

Таким образом

$$p = p_c + \gamma \cdot (r - r_c) + \frac{\mu \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot k} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \quad (14.15)$$

(14.15) определяет распределение давления $p(r)$ в пласте при фильтрации ВПЖ. При $r = R_k$ и $p = P_k$ выражение (14.15) запишем в виде:

$$P_{\text{к}} = P_{\text{с}} + \gamma(R_{\text{к}} - r_{\text{с}}) + \frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}} \quad (14.16)$$

Из (14.16) дебит скважины:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{2\pi kh}{\mu_p \ln \left(\frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}} \right)} \cdot (\Delta p_{\text{с}} - \gamma R_{\text{к}}), \text{ при } \Delta p_{\text{с}} > \gamma R_{\text{к}} \\ Q &= 0, \text{ при } \Delta p_{\text{с}} \leq \gamma R_{\text{к}} \end{aligned} \right\} \quad (14.17)$$

Из (14.15) следует, что часть разности давлений в виде линейного слагаемого $\gamma(r - r_{\text{с}})$ теряется на преодоление градиента давления сдвига. При $Q = 0$ давление не постоянно вдоль r (как в случае фильтрации по закону Дарси), а изменяется по линейному закону. Из (14.17) видно, что наличие предельного градиента давления в пласте ведет к уменьшению дебита скважины по сравнению с фильтрацией по закону Дарси (сравн. формулу Дюпюи)

на величину $\frac{2\pi kh \gamma (P_{\text{к}} - P_{\text{с}})}{\mu \ln \frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}}$, а при депрессии

$P_{\text{к}} - P_{\text{с}} < \gamma(R_{\text{к}} - r_{\text{с}})$ обращается в нуль. Важная особенность фильтрации ВПЖ – возможность образования в пласте обширных застойных зон, где движение нефти отсутствует. Эти зоны образуются в тех участках пласта, где градиент давления меньше предельного. Возникновение застойных зон ведет к значительному уменьшению нефтеотдачи пластов.

Величина застойной зоны зависит от параметра:

$$\lambda = \frac{Q\mu}{K\gamma L}$$

где L – характерный размер, например половина расстояния между скважинами.

Литература

1. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». - 2001. - 736 с.
2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. - М.: Недра. - 1993. - 416 с.
3. Подземная гидравлика / К.С.Басниев, А.М.Власов, И.Н.Кочина, В.М.Максимов. - М.: Недра. - 1986. - 303 с.
4. Подземная гидромеханика : курс лекций по одноименному курсу для студентов спец. 1-51 02 02 "Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений" дневной и заочной форм обучения / А. В. Михневич ; кафедра "Гидропневмоавтоматика". - Гомель : ГГТУ, 2005. - 92 с.
5. Ольховская В.А. Подземная гидромеханика: Фильтрация неньютоновской нефти: Учебное пособие. – М.: ОАО «ВНИИО-ЭНГ», 2011. – 224 с.
6. Закиров С.Н. Многомерная и многокомпонентная фильтрация: справочное пособие / С.Н. Закиров, Б.Е. Солов, В.Я. Гордон и др. – М.: Недра, 1988. – 336 с.
7. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.

Содержание

Введение	3
Тема 1. Основные понятия и законы фильтрации	6
1.1 Фильтрационные характеристики пористых сред	6
1.2. Закон фильтрации Дарси	8
1.3. Закономерности неламинарной фильтрации	9
1.4. Особенности фильтрации при малых скоростях	12
Тема 2 Дифференциальные уравнения фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах	12
2.1. Уравнение неразрывности	13
2.2. Дифференциальное уравнение движения.	15
2.3. Уравнения состояния флюида и пористой среды	17
2.4. Режимы нефтегазоводоносных пластов	21
Тема 3. Установившееся движения несжимаемой жидкости в пористой среде	22
3.1 Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости	22
3.2 Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток	24
3.3 Плоскорадиальный фильтрационный поток	26
3.4. Радиально-сферический фильтрационный поток	30
Тема 4. Фильтрационные течения несжимаемой жидкости в неоднородных пластах	33
4.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток в слоисто-неоднородном пласте	34
4.2. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток в зонально-неоднородном пласте	35
4.3. Плоскорадиальный фильтрационный поток в зонально - неоднородном пласте	36
Тема 5. Одномерные фильтрационные потоки при нелинейных законах фильтрации	38
5.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток	38
5.2 Плоскорадиальный фильтрационный поток	39
Тема 6 Установившаяся плоская фильтрация жидкости. Интерференция скважин	40
6.1. Точечные стоки и источники	40
6.2. Метод суперпозиции	41

6.3. Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания	43
Тема 7 Метод отображения источников и стоков	45
7.1. Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания	45
7.2. Приток жидкости к скважине, расположенной вблизи непроницаемой границы	47
7.3. Приток жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте	48
Тема 8. Гидродинамика несовершенных скважин	50
Тема 9. Установившееся движение упругой жидкости и газа в пористой среде	56
9.1. Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации упругого флюида	56
9.2. Установившаяся фильтрация упругой жидкости	58
9.3. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток идеального газа	60
9.4. Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по закону Дарси	61
9.5. Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа по закону Дарси	63
Тема 10. Неустановившееся движение упругой жидкости в упругой пористой среде	64
10.1 Упругий режим пласта и его характерные особенности	64
10.2. Упругий запас жидкости в пласте	65
10.3. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации упругой жидкости	66
10.4. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости	67
10.5. Интерференция скважин в условиях упругого режима	71
10.6. Приближенные методы решений	73
Тема 11 Взаимное вытеснение несмешивающихся жидкостей	74
11.1. Прямолинейно – параллельное вытеснение нефти водой	74
11.2. Плоскорадиальное вытеснение нефти водой	77
11.3. Конус подошвенной воды	80

Тема 12. Фильтрация многофазных систем	81
12.1 Характеристики многофазной фильтрации	82
12.2. Дифференциальные уравнения многофазной фильтрации	84
12.3 Одномерная фильтрация двухфазной жидкости	86
Тема 13. Движение жидкостей в трещиноватых и в трещиновато-пористых породах	93
13.1. Особенности фильтрации в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах	93
13.2. Уравнение неразрывности потока в трещиноватых и трещиновато-пористых средах	96
13.3. Уравнения движения жидкости в трещиновато-пористой породе	97
13.4. Установившаяся одномерная фильтрация жидкости в трещиноватом пласте	98
Тема 14. Фильтрация неньютоновских жидкостей	101
14.1. Законы фильтрации неньютоновских жидкостей	101
14.2. Одномерная фильтрация вязкопластичной жидкости	104
Литература	106

Андрианов Дмитрий Николаевич

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Пособие

**по одноименной дисциплине
для слушателей специальности переподготовки
1-51 02 71 «Разработка и эксплуатация нефтяных
и газовых месторождений»
заочной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 02.11.18.

Рег. № 15Е.

<http://www.gstu.by>