

УДК 621.396.67

## Ускорение сходимости характеристик излучателей плоских фазированных антенных решеток бесконечных размеров

В.П. Кудин

Исследована применимость  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов для ускорения сходимости характеристик излучателей в составе бесконечной плоской фазированной антенной решетки. Установлено, что  $\rho$ -алгоритм дает расходящиеся результаты как для поэлементного, так и для спектрального методов.  $\varepsilon$ -алгоритм нестабилен для спектрального метода, а для поэлементного позволяет уменьшить число слагаемых в двойных рядах до 25...200 (на порядок и более) в большинстве случаев.

**Ключевые слова:** плоская фазированная антенная решетка, функция Грина, численные методы, сходимость,  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмы.

The applicability of  $\rho$ - and  $\varepsilon$ -algorithms for accelerating the convergence of the characteristics of radiators in an infinite plane phased array is investigated. It is established that the  $\rho$ -algorithm gives divergent results for both element-by-element and spectral methods. The  $\varepsilon$ -algorithm is unstable for the spectral method, and for the element-by-element it allows to reduce the number of terms in double series up to 25...200 (by an order or more) in most cases.

**Keywords:** plane phased array, Green's function, numerical methods, convergence,  $\rho$ - and  $\varepsilon$ -algorithms.

**Введение.** При анализе многоэлементных фазированных антенных решеток (ФАР) как линейных, так и плоских большую роль играет модель бесконечной решетки, позволяющая свести задачу к исследованию характеристик одного излучателя, так называемого «центрального». Фактически речь идет о замене функции Грина, которая теперь выражается в виде однократных или двукратных бесконечных рядов соответственно для линейных и плоских решеток. Подобные бесконечные ряды обычно вычисляются с помощью редукции, т. е. в расчетах удерживается конечное число слагаемых. Это число в зависимости от параметров задачи может варьироваться в достаточно широких пределах и достигать в отдельных случаях десятков тысяч, что ведет в конечном итоге к существенным или даже недопустимым затратам процессорного времени. Не решает проблему и преобразование функции Грина к спектральному виду.

В литературе известны различные попытки ускорения сходимости подобных рядов. Один подход связан с последовательным применением преобразований Куммера и Пуассона [1], [2], с помощью которых удается получить быстросходящиеся ряды для функций Грина бесконечной решетки. Аналогичный метод для двумерной задачи был реализован в работах [3], [4]. Хорошие результаты показывает метод Эвальда [5], который считается наиболее эффективным. Сопоставимым по эффективности можно считать метод Иванишина [6], [7]. Еще один подход основывается на использовании  $\rho$ - или  $\varepsilon$ -алгоритмов [8], [9] и дает очень хорошие результаты для функции Грина. К сожалению, упомянутые методы являются принципиально численными и не позволяют простым путем от функции Грина перейти к полям и получить необходимые уравнения для нахождения искомого решения.

В данной работе исследуется альтернативный подход, когда сначала находится численное решение электродинамической задачи о бесконечной плоской решетке проволочных излучателей при различном числе удерживаемых слагаемых в используемых рядах, а затем к последовательности решений для ускорения сходимости применяется  $\rho$ - или  $\varepsilon$ -алгоритм.

**$\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмы.** Пусть  $g_n, n = 1, 2, \dots$  есть произвольная сходящаяся последовательность. Тогда  $\rho$ -алгоритм нахождения предела последовательности имеет рекуррентную форму [8]:

$$\rho_{n,1} = 0, \quad \rho_{n,2} = g_n,$$

$$\rho_{n,t} = \rho_{n+1,t-2} + \frac{t-2}{\rho_{n+1,t-1} - \rho_{n,t-1}}, \quad t = 3, 4, \dots,$$

где  $t$  есть порядок алгоритма. Характерно, что только четные элементы  $\rho_{n,2t}$  дают оценку для предела последовательности, в то время как нечетные элементы  $\rho_{n,2t-1}$  являются промежуточными величинами и достаточно быстро растут при увеличении порядка  $t$ . В отдельных случаях из-за накопления ошибок округления последнее обстоятельство приводит к ограничениям на порядок алгоритма.

$\varepsilon$ -алгоритм основан на рекуррентных соотношениях [9]:

$$\varepsilon_{n,1} = g_n, \quad \varepsilon_{n,2} = \frac{1}{\varepsilon_{n+1,1} - \varepsilon_{n,1}},$$

$$\varepsilon_{n,t} = \varepsilon_{n+1,t-2} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1,t-1} - \varepsilon_{n,t-1}}, \quad t = 3, 4, \dots$$

В работах [8], [9] указано, что применительно к улучшению сходимости частичных сумм  $g_n = \sum_{m=1}^n f(m)$  однократных рядов  $\rho$ -алгоритм для монотонных последовательностей  $f(m)$  дает сходящиеся результаты, в то время как  $\varepsilon$ -алгоритм нестабилен из-за накопления ошибок округления. И, наоборот, для знакопеременных последовательностей  $f(m)$  сходится  $\varepsilon$ -алгоритм, тогда как  $\rho$ -алгоритм дает нестабильные результаты. Там же проведено исследование применимости указанных алгоритмов для улучшения сходимости частичных сумм для двумерной функции Грина, представленной в пространственной и спектральной формах. Основным выводом заключается в том, что применение  $\rho$ -алгоритма ускоряет сходимость рядов для двумерной функции Грина, представленной как в пространственной форме, так и в спектральном виде, причем это происходит значительно лучше, чем при использовании  $\varepsilon$ -алгоритма.

**Плоская косоугольная ФАР.** В настоящей работе исследуется применимость  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов для улучшения сходимости функции Грина плоской ФАР с косоугольной сеткой расположения излучателей, а также решений электродинамической задачи (распределение тока, входной импеданс излучателей и т. п.) для решеток проволочных излучателей. Функция Грина в пространственной и спектральной формах и метод электродинамического анализа двумерно-периодических решеток из проволочных структур представлены в [10].

Хорошо известно, что сходимость двойных рядов для поэлементной функции Грина достаточно медленная и носит осциллирующий характер. В общем случае в зависимости от геометрии при редукции необходимо удерживать примерно  $10^3 \dots 10^4$  или более слагаемых. Несколько иная ситуация имеет место при вычислении спектральной функции Грина. Если точки наблюдения и источника разнесены по вертикали (вертикаль ортогональна плоскости решетки) члены ряда экспоненциально убывают, причем с увеличением разности скорости убывания растет, и в этом случае достаточно небольшого количества слагаемых. Если же точки наблюдения и источника лежат в плоскости решетки, то сходимость монотонная и необходимое число слагаемых сопоставимо с требуемым при вычислении рядов для поэлементной функции Грина.

На рисунке 1 в качестве примера приведено типичное поведение частичных сумм  $G_s = \sum_{m=-s}^s \sum_{n=-s}^s f(m, n)$  поэлементной функции Грина в зависимости от параметра  $s$  (сплошные линии). На рисунках штриховыми и пунктирными линиями показаны также результаты применения  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов к указанным частичным суммам соответственно. Хорошо видно, что  $\varepsilon$ -алгоритм уже при  $s = 5$  дает сходящийся результат, в то время как  $\rho$ -алгоритм расходится. Похожие результаты получаются и для спектральной функции Грина (рисунки 2).

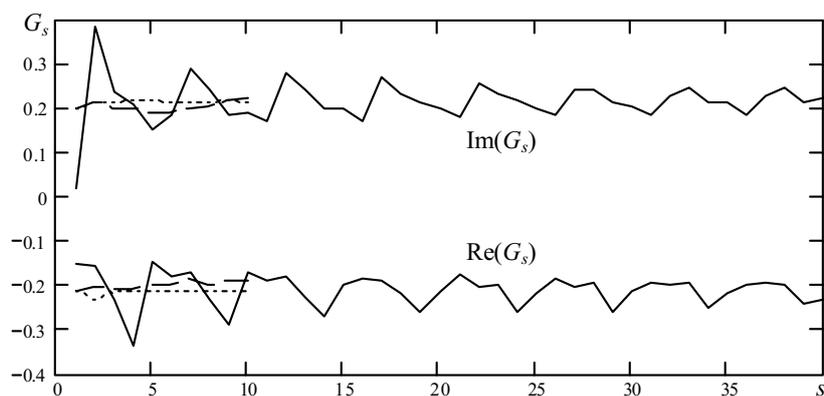


Рисунок 1 – Сходимость поэлементной функции Грина для плоской решетки

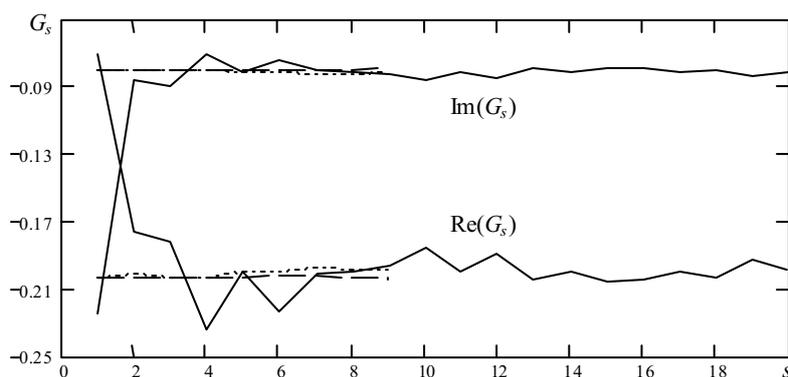


Рисунок 2 – Сходимость спектральной функции Грина для плоской решетки

Расчеты показывают, что применение  $\rho$ - или  $\varepsilon$ -алгоритма приводит к уменьшению необходимого числа слагаемых в двойных рядах до величин порядка 200...600, т. е. на порядок и более. Соответственно уменьшается и затрачиваемое процессорное время. К сожалению, данные процедуры являются сугубо численными и дальнейшая работа с функцией Грина (нахождение полей в виде интегро-дифференциальных выражений от функции Грина, коэффициентов матричных уравнений, выражающимися кратными интегралами от полей, и т. д.) сильно затруднена и должна вестись также численными методами. Поэтому имеет смысл сначала провести необходимые аналитические преобразования, получить требуемые уравнения, найти искомое решение и лишь затем применить процедуру ускорения его сходимости. Ниже подробно исследуется предлагаемый путь.

**Ускорение сходимости решений интегральных уравнений.** Исследование процедуры ускорения сходимости решения проведем на примере бесконечной плоской решетки вибраторов с изогнутыми плечами, подробный электродинамический анализ которой дан в [11] (геометрия вибратора и расположения вибраторов в решетке показаны на рисунке 3).

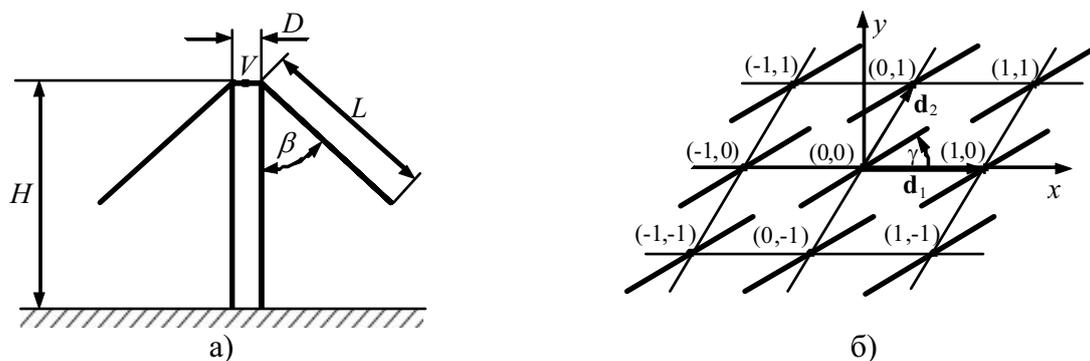


Рисунок 3 – Геометрия: а) – вибратора; б) – расположения вибраторов в решетке

В указанной работе для нахождения распределения токов на проводниках антенны использовалось уравнение типа Поклингтона, для решения которого применялся метод Галеркина. Вклады в общее поле полей соседних излучателей учитывались поэлементным методом. Таким образом, решалась система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn}^{\infty} I_n = V_n, \quad m = 1, 2, \dots, N$$

с матричными элементами вида

$$Z_{mn}^{\infty} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_{mn}^{pq} \exp(-ip\psi_1 - iq\psi_2), \quad (1)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – фазовые сдвиги между соседними излучателями вдоль координатных осей.

Исследовались два варианта использования  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов для ускорения сходимости. В варианте 1 указанные алгоритмы применялись к частичным суммам рядов (1), представляющих матричные элементы,

$$Z_{mn}^s = \sum_{p=-s}^s \sum_{q=-s}^s \tilde{Z}_{mn}^{pq} \exp(-ip\psi_1 - iq\psi_2), \quad (2)$$

а затем находится решение, т. е. фактически применяется стандартная процедура. В варианте 2 сначала находилась последовательность решений СЛАУ для набора матричных элементов (2) при различных индексах суммирования  $s$ , а затем последовательность значений входного импеданса  $Z_{\text{вх}}^s$  (или другой выходной величины), после чего применялась процедура ускорения сходимости.

На рисунке 4 приведены зависимости входного импеданса излучателя в ФАР при фазировании по нормали к плоскости решетки в зависимости от параметра  $s$  для вариантов 1 и 2 соответственно. В данном случае используется поэлементный подход нахождения вкладов соседних излучателей. Сплошными линиями показаны результаты непосредственного нахождения входного импеданса, штриховыми и пунктирными – с применением  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов ускорения сходимости соответственно. При этом величина  $s$  является порядком алгоритма ускорения. Характерно, что оба варианта дают практически одинаковые.

На рисунке 5 показаны аналогичные результаты при отклонении луча на  $50^\circ$  от нормали к плоскости решетки.

Численные эксперименты показывают, что в большинстве случаев  $\rho$ -алгоритм дает расходящиеся результаты и, наоборот,  $\varepsilon$ -алгоритм сходится, причем требуемый порядок алгоритма составляет  $s = 2 \dots 6$ . Это фактически означает, что в частичных суммах (2) достаточно удерживать 25...200 слагаемых. Обратим внимание, что такое количество слагаемых не обеспечивает сходимости исходных рядов (1).

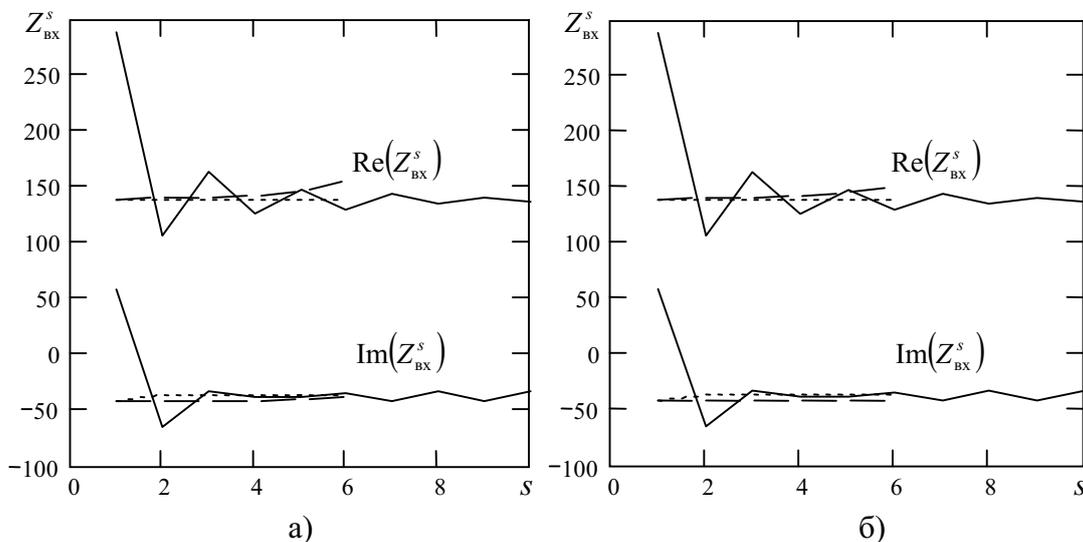


Рисунок 4 – Сходимость входного импеданса излучателя в ФАР при фазировании по нормали к плоскости решетки (поэлементный подход): а) – вариант 1; б) вариант 2

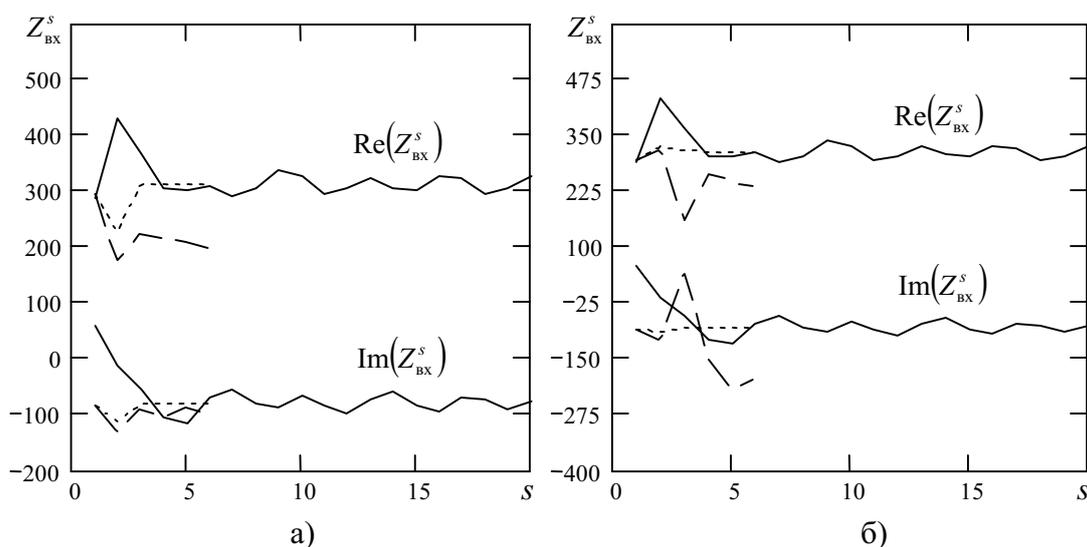


Рисунок 5 – Сходимость входного импеданса излучателя в ФАР при отклонении луча на  $50^\circ$  от нормали к плоскости решетки (поэлементный подход): а) – вариант 1; б) вариант 2

Рассмотрим далее улучшение сходимости результатов, полученных основанными на спектральной функции Грина методами [10]. Для примера на рисунке 6 приведены такие результаты. Подробный анализ показывает, что вариант 1 улучшения сходимости для спектрального подхода дает нестабильные результаты и лишь ухудшает ситуацию. В варианте 2  $\varepsilon$ -алгоритм дает несколько лучшие результаты, чем  $\rho$ -алгоритм, однако говорить о полной сходимости в обоих случаях нельзя.

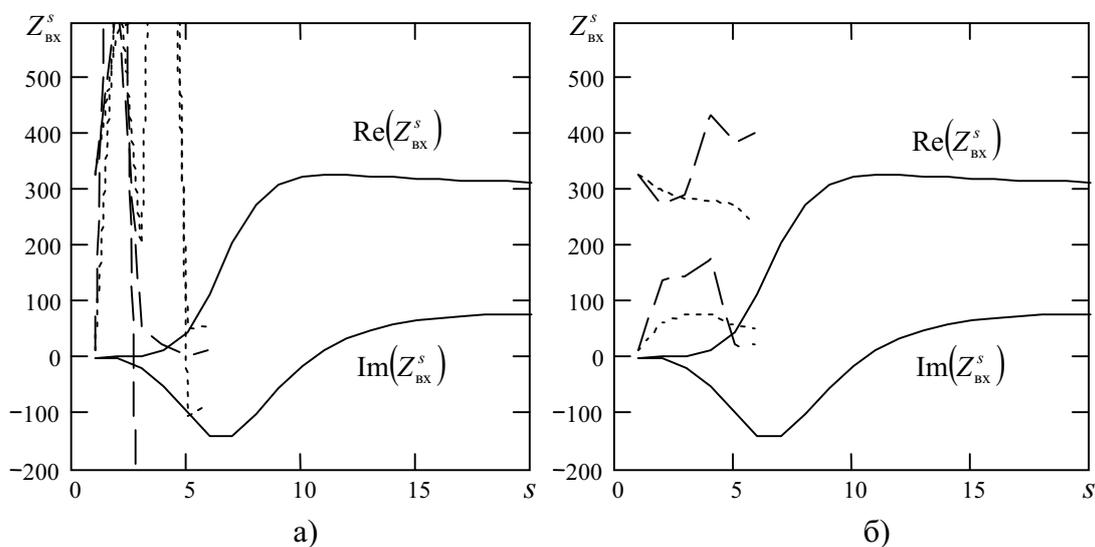


Рисунок 6 – Сходимость входного импеданса излучателя в ФАР при отклонении луча на  $50^\circ$  от нормали к плоскости решетки (спектральный подход): а) – вариант 1; б) вариант 2

**Заключение.** В работе исследована применимость  $\rho$ - и  $\varepsilon$ -алгоритмов для ускорения сходимости характеристик излучателей в составе плоской ФАР. Показано, что в большинстве случаев  $\varepsilon$ -алгоритм для поэлементного метода позволяет уменьшить число слагаемых в двойных рядах до 25...200 (на порядок и более), в то время как для спектрального метода дает нестабильные результаты.  $\rho$ -алгоритм дает расходящиеся результаты как для поэлементного, так и для спектрального методов и не может быть рекомендован для применения.

**Литература**

1. Lampe, R. Integral transforms useful for the accelerated summation of periodic, free-space Green's functions / R. Lampe, P. Klock, P. Mayes // IEEE Transactions. – 1985. – Vol. MTT-33, № 8. – P. 734–736.
2. Singh, S. Accelerating the convergence of series representing the free space periodic Green's function / S. Singh, W.F. Richards, J.R. Zinecker [et al.] // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. AP-38. – № 12. – P. 1958–1962.
3. Jorgenson, R.E. Oblique scattering from lossy strip structures with one-dimensional periodicity / R.E. Jorgenson, R. Mittra // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. AP-38, № 2. – P. 212–219.
4. Jorgenson, R.E. Efficient calculation of the free-space periodic Green's function / R.E. Jorgenson, R. Mittra // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. AP-38, № 5. – P. 633–642.
5. Ewald, P.P. Die berechnung optischer und elektrostatischen gitterpotentiale / P.P. Ewald // Ann. der Phys. – 1921. – Vol. 64. – P. 253–287. Translated by A. Cornell, Atomic International Library, 1964.
6. Иванишин, М.М. Модификация метода Куммера для эффективного вычисления функции Грина двумерно-периодических структур / М.М. Иванишин, С.П. Скобелев // Радиотехника. – 2008. – № 10. – С. 31–36.
7. Ivanishin, M.M. A modification of the Kummer's method for efficient computation of the Green's function for doubly periodic structures / M.M. Ivanishin, S.P. Skobelev // IEEE Transactions. – 2009. – Vol. AP-57. – № 9. – P. 2794–2798.
8. Singh, S. On the use of  $\rho$ -algorithm in series acceleration / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1991. – Vol. AP-39, № 10. – P. 1514–1517.
9. Singh, S. Application of transforms to accelerate the summation of periodic free-space Green's functions / S. Singh, R. Singh // IEEE Transactions. – 1990. – Vol. MTT-38, № 11. – P. 1746–1748.
10. Кудин, В.П. Электродинамический анализ двумерно-периодических решеток из проволочных структур / В.П. Кудин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 69–75.
11. Кудин, В.П. Плоская фазированная антенная решетка из вибраторов V-типа / В.П. Кудин // Доклады БГУИР. – 2007. – № 1 (17). – С. 42–48.

Гомельский государственный технический  
университет им. П. О. Сухого

Поступила в редакцию 23.04.2018