МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON SUPERSOLUBLE GROUPS

V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена характеризации сверхразрешимых групп с помощью обобщенно субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: *формация, силовская подгруппа, разрешимая группа, критическая подгруппа, подгруппа Фраттини, обобщенно субнормальная подгруппа.*

The characterization of supersolvable groups with generalized subnormal subgroups is given.

Keywords: *formation, Sylow subgroup, soluble group, critical subgroup, Frattini subgroup, generelized subnormal subgroup.*

Введение

Все рассматриваемые группы в работе конечны. Согласно классическому результату Силова в любой конечной группе существуют силовские подгруппы. Данные подгруппы играют важную роль при изучении строения конечных групп. Например, группа, у которой все силовские подгруппы нормальны, нильпотентна. Свойство нильпотентности сохраняется и для групп с субнормальными силовскими подгруппами.

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие обобщенной субнормальности ($\mathfrak{F}$-достижимости), предложенное Кегелем в работе [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппу H называют $\mathfrak{F}$*-субнормальной в смысле Кегеля* или $\mathfrak{F}$*-достижимой*, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq ... \supseteq H_m = H$ такая, что для любого $i = 1, 2, ..., m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В работе [2] рассматривается задача изучения свойств групп, в которых силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы. Важнейший шаг в данном направлении получен в работе [3]. В ней, в частности, были доказаны следующие теоремы.

Теорема **A** [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу G, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

2) *любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G либо $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

Теорема **B** [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу G, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая бипримарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

2) *любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G – группа одного из следующих типов:*

a) $G = G_p \rtimes H$, $|\pi(G)| = 3$ и $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

b) $|\pi(G)| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p-подгруппа, причем $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$;

c) G – группа простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Из данных результатов следуют характеризации метанильпотентных групп и групп с p-длинной ≤ 1.

Пусть $\mathfrak{N}^2$ – формация всех метанильпотентных групп. Разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа $\mathfrak{N}^2$-достижима в G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех разрешимых групп с p-длиной ≤ 1. Разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G.

В данной работе была получена характеризация сверхразрешимых групп ($\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп) с помощью обобщенно субнормальных подгрупп. Доказаны следующие теоремы.

Теорема **C.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в ней любая силовская подгруппа и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа $\mathfrak{U}$-достижимы.*

***Теорема* D.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в фактор-группе $G/\Phi(G)$ любая силовская подгруппа и любая сверхразрешимая подгруппа Шмидта $\mathfrak{U}$-достижимы.*

1 Предварительные сведения

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [4] Л.А. Шеметкова. Напомним лишь некоторые из них.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \subseteq G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

$\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ – класс всех нильпотентных $\pi(\mathfrak{F})$-групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

$\mathfrak{N}^2$ – формация всех метанильпотентных групп.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп, то группа называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой (критической группой), если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая её собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначается $M(\mathfrak{F})$.

Напомним, что минимальная неабелева группа называется группой Миллера-Морено. Минимальная ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

G_p – силовская p-подгруппа группы G.

$\pi(G)$ – множество различных простых делителей порядка группы G.

$|\pi(G)|$ – количество различных простых делителей порядка группы G.

Если $|\pi(G)| = 2$, то группа G называется бипримарной.

В следующей лемме приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп.

***Лемма* 1.1**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

2) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;*

3) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K и K – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

4) *если H_1 и H_2 – $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

5) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-достижима в G для любых $x \in G$.*

Доказательство. 1) Пусть H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то подгруппа $H/G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда согласно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы существует максимальная цепь

$$G/G^{\mathfrak{F}} = H_0/G^{\mathfrak{F}} \supset H_1/G^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H_n/G^{\mathfrak{F}} = H/G^{\mathfrak{F}}$$

такая, что $(H_{i-1}/G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/G^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

А это значит, что H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Поскольку любая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-достижимой в G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

2) Пусть H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Пусть K – некоторая подгруппа из G. Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \ldots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \simeq$$

$$\simeq H_{i-1} \cap K / H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K / (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Итак, для каждого $i = 1, 2, ..., m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K.$$

Отсюда, по определению, $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K.

Утверждение 3) следует непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы.

Утверждение 4) следует теперь из утверждений 2) и 3).

Утверждение 5) следует непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы. Лемма доказана.

Напомним, что группа называется сверхразрешимой, если она имеет нормальный ряд с циклическими факторами.

Дисперсивная группа – конечная группа, обладающая нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре группой называют конечную группу порядка $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_t^{a_t}$, где $p_1 > p_2 > ... > p_t$ – простые числа, обладающую нормальными подгруппами порядков

$$p_1^{a_1}, p_1^{a_1} p_2^{a_2}, ..., p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_i^{a_i}, ..., p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_{t-1}^{a_{t-1}}.$$

Сверхразрешимые группы дисперсивны по Оре.

Приведем ниже известные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

***Лемма* 1.2** [5]. *Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие условия:*

1) *G разрешима и $\pi(G) \le 3$;*

2) *если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре;*

3) *G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$;*

4) *если S – дополнение к P в G, то $S / S \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо группа Миллера-Морено.*

2 Доказательство теорем C и D

Доказательство теоремы С. Необходимость. Пусть G – сверхразрешимая группа и $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = 1$. А это значит, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, где H – произвольная подгруппа группы G. По лемме 1.1 H – $\mathfrak{U}$-достижима.

Достаточность. Пусть любая силовская подгруппа группы G и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа группы G $\mathfrak{U}$-достижимы в G. Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема неверна.

Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G. Покажем, что условия теоремы для H выполнимы. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская p-подгруппа из H. По теореме силова H_p содержится в некоторой силовской подгруппе G_p группы G. По условию G_p – $\mathfrak{U}$-достижима в G. Так как $G_p \in \mathfrak{U}$, то $G_p^{\mathfrak{U}} = 1$. Тогда по лемме 1.1 H_p – $\mathfrak{U}$-достижима в G_p. Получаем по той же лемме 1.1, что H_p $\mathfrak{U}$-достижима в G.

Пусть B – произвольная бипримарная сверхразрешимая подгруппа из H. Тогда согласно условию B $\mathfrak{U}$-достижима в G. По лемме 1.1 B – $\mathfrak{U}$-достижима в H. Итак, условия теоремы для подгруппы H выполняются. Следовательно, по индукции H – сверхразрешима. Итак, G – минимальная несверхразрешимая группа.

Согласно лемме 1.2 G – группа одного из следующих типов.

а) Если $|\pi(G)| = 1$, то теорема очевидна.

б) Пусть $|\pi(G)| = 2$. Тогда по лемме 1.2 $G = G_p \rightthreetimes G_q$ и $G_p = G^{\mathfrak{U}}$. Согласно условия G_q – $\mathfrak{U}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда G_q содержится в максимальной подгруппе M группы G, причем M либо $\mathfrak{U}$-нормальна в G, либо нормальна в G. Если M $\mathfrak{U}$-нормальна в G, то $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$. Отсюда следует, что $G \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа G. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}} M$. Очевидно, что $G / G^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U}$ и $G / M \in \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ – формация, то $G / G^{\mathfrak{U}} \cap M \in \mathfrak{U}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq G^{\mathfrak{U}} \cap M$. А это значит, что $G \subseteq M$, что невозможно. Получили противоречие.

в) Пусть $|\pi(G)| = 3$. Тогда согласно лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$ и $G = G_p \rightthreetimes G_q \rightthreetimes G_r$, где $p > q > r$. Так как G – минимальная несверхразрешимая подгруппа, то $G_q G_r$ – сверхразрешима. По условию теоремы $G_q G_r$ – $\mathfrak{U}$-достижима в G. Как и выше, нетрудно показать, что это невозможно. Получили противоречие. Следовательно G – сверхразрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы D. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема не верна. Как и в теореме С, нетрудно показать, что $G / \Phi(G)$ – минимальная несверхразрешимая группа. Поскольку $\Phi(G / \Phi(G)) = 1$, то дальнейшие рассуждения будем проводить для групп, у которых $\Phi(G) = 1$. Для $|\pi(G)| \le 2$ рассуждения проводятся аналогичные доказательству теоремы С.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. По лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$, $G_q G_r$ – группа Миллера-Морено и

$$G = G_p \leftthreetimes G_q \leftthreetimes G_r,$$

где $p > q > r$. Покажем, что $G_q G_r$ – группа Шмидта. Если $G_q G_r$ нильпотента, то $G_q \times G_r$, где G_q, G_r – абелевы, но тогда $G_q G_r$ – абелева, что невозможно. Итак, $G_q G_r$ – сверхразрешимая группа Шмидта. По условию теоремы $G_q G_r$ – $\mathfrak{U}$-достижима в G. Как и выше, нетрудно показать, что такое невозможно. Получили противоречие.

Итак, $G / \Phi(G) \in \mathfrak{U}$. В силу насыщенности класса всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ получаем, что G – сверхразрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

2. *Васильева*, *Т.И.* О конечных группах с $\mathfrak{F}$-достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Гомель, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 4).

3. *Шевчук*, *С.Н.* Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами / С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука. – 1978. – 272 с.

5. *Döerk*, *K.* Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math.Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Поступила в редакцию 14.12.13.