МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ КРИТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GIVEN PROPERTIES OF CRITICAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена изучению конечных групп с заданными свойствами критических подгрупп.

Ключевые слова: *группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, группа Шмидта.*

This work is devoted to the study of finite groups with given properties of critical subgroups.

Keywords: *group, formation, coradical, generalized subnormal subgroup, Shmidt group.*

Введение

Важнейшей задачей теории конечных групп является задача изучения строения конечных групп, которые не принадлежат некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, а все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. В настоящее время такие группы называются минимальными не $\mathfrak{F}$-группами (критическими группами).

Начало исследований критических групп восходит к работе Миллера и Морено [1], в которой были изучены минимальные неабелевы группы (группы Миллера-Морено). Следующий важный шаг в данном направлении сделал в 1924 году О.Ю. Шмидт в работе [2], в которой были изучены минимальные ненильпотентные группы (группы Шмидта). Хупперт в [3], а затем Дерк в [4] изучили минимальные несверхразрешимые группы. В работе [5] В.Н. Семенчуком были изучены разрешимые минимальные не $\mathfrak{F}$-группы для произвольных насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$.

Важность изучения критических групп следует из того факта, что любая конечная группа, не принадлежащая некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, содержит минимальную не $\mathfrak{F}$-группу. Как показали исследования многих ведущих математиков мира, минимальные не $\mathfrak{F}$-группы играют важную роль при изучении строения конечных групп.

В частности, в работе [6] В.Н. Семенчуком было начато исследование строения конечных групп, у которых группы Шмидта субнормальны. Следующий важный шаг в данном направлении был сделан В.С. Монаховым и В.Н. Княгиной в работе [7]. Полное описание таких групп было получено В.А. Ведерниковым в работе [8].

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости (обобщенной субнормальности), предложенное Кегелем в работе [9]. Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых минимальные не $\mathfrak{H}$-группы ($\mathfrak{H}$ – насыщенная наследственная формация) обобщенно субнормальны. В частности, было получено детальное описание строения конечных групп, у которых группы Шмидта $\mathfrak{F}$-достижимы ($\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством).

1 Предварительные сведения

Все группы в работе конечны. Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [10] Л.А. Шеметкова. Напомним лишь некоторые из них.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Классом Фиттинга называется класс $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп.

Гомоморф – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \le G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппу H называют $\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля или $\mathfrak{F}$-достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_{n-1} \supseteq H_n = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Очевидно, что любая $\mathfrak{N}$-достижимая ($\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп) группа является субнормальной и наоборот.

Напомним, что некоторое множество подгрупп $\mathfrak{M}$ конечных групп G образует решетку, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $< A, B > \in \mathfrak{M}$ для любых двух подгрупп A и B из $\mathfrak{M}$.

Классический результат Виландта говорит о том, что множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. О. Кегель [9] и Л.А. Шеметков [10] поставили задачу отыскания новых классов групп $\mathfrak{F}$, обладающих тем свойством, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в любой конечной группе образует решетку. В настоящее время такие формации называются формациями с решеточным свойством. Полное решение данной задачи о нахождении насыщенных наследственных формаций с решеточным свойством было получено А.Ф. Васильевым, С.Ф. Каморниковым, В.Н. Семенчуком в работе [11]. В частности, из полученных результатов следует, что формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, всех p-разложимых групп обладают решеточным свойством.

$G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{X}$-радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп ($\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп) группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{\mathrm{G} \mid \mathrm{G}^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп, то группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой (критической группой), если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая её собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначается $M(\mathfrak{F})$.

Минимальная ненильпотентная группа называется группой Шмидта.

Напомним, что группа G называется p-замкнутой (p-нильпотентной), если её силовская p-подгруппа (силовское p-дополнение) нормальна в G. Группа G называется p-разложимой, если она одновременно p-замкнута и p-нильпотентна.

Если фактор-группа $G / F(G)$ нильпотентна, то группа G называется метанильпотентной.

В следующих леммах приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп, которые сыграли важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*:

1) *если H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то HN $\mathfrak{F}$-достижима в G и HN / N $\mathfrak{F}$-достижима в G / N*;

2) *если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-достижима в G тогда и только тогда, когда H / N $\mathfrak{F}$-достижима в G / N.*

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G*;

2) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G*;

3) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K и K – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G*;

4) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.*

При доказательстве основных теорем важную роль сыграли следующие леммы.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация с решеточным свойством, $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых чисел и любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Тогда в любой группе G произвольная минимальная нормальная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Лемма 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф, содержащий все нильпотентные группы, R – подгруппа группы G, порожденная всеми минимальными не $\mathfrak{F}$-подгруппами группы G. Тогда $G / R \in \mathfrak{F}$.*

Напомним также некоторые свойства классов групп с решеточным свойством, которые были получены А.Ф. Васильевым, С.Ф. Каморниковым, В.Н. Семенчуком в работе [11]. Данные свойства сыграли ключевую роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп*;

2) *группа* $G = \langle A_1, A_2 \rangle$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$, *если* A_1, A_2 – $\mathfrak{F}$-*субнормальные* $\mathfrak{F}$-*подгруппы группы* G;

3) $\mathfrak{F}$ – *формация Фиттинга и всякая* $\mathfrak{F}$-*субнормальная* $\mathfrak{F}$-*подгруппа группы* G *содержится в* $\mathfrak{F}$-*радикале этой группы*.

***Лемма* 1.6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Тогда любая минимальная не* $\mathfrak{F}$-*группа* G *является группой одного из следующих типов*:

1) $|G| = p$ – *простое число*, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) G – *группа Шмидта*;

3) $G/\Phi(G)$ – *такая монолитическая группа с неабелевым монолитом* $N/\Phi(G)$, *что* G/N – *циклическая примарная группа и* $N/\Phi(G) = (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}$.

Далее приведем ряд вспомогательных результатов, полученных авторами при доказательстве основных теорем.

***Лемма* 1.7.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и* $\pi(\mathfrak{F})$ – *множество всех простых чисел, и любая минимальная не* $\mathfrak{F}$-*группа разрешима. Если в группе* G *все подгруппы Шмидта* $\mathfrak{F}$-*достижимы, то* $G/G_{\mathfrak{F}}$ *нильпотентна*.

***Лемма* 1.8.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если в группе* G *выполняется* $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, *то для любых подгрупп* H, *содержащих* $G_{\mathfrak{F}}$, *следует* $H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$.

***Лемма* 1.9.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *наследственная формация с решеточным свойством*, $\mathfrak{X}$ – *насыщенная наследственная формация такая, что* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, *а также в группе* G *все минимальные не* $\mathfrak{X}$-*подгруппы* $\mathfrak{F}$-*достижимы. Если* N – *нормальная подгруппа группы* G, *то в факторгруппе* G/N *все минимальные не* $\mathfrak{X}$-*подгруппы* $\mathfrak{F}$-*достижимы*.

2 Основные результаты

В ходе исследования строения конечных групп с обобщенно субнормальными критическими подгруппами были получены следующие результаты.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{H}$ – *наследственная насыщенная формация*, $\mathfrak{F}$ – *наследственная насыщенная формация с решеточным свойством, причем* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. *Если все минимальные не* $\mathfrak{H}$-*подгруппы группы* G *разрешимы и* $\mathfrak{F}$-*достижимы в* G, *то* $G/F(G) \in \mathfrak{H}$.

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и* $\pi(\mathfrak{F})$ – *множество всех простых чисел. Если в группе* G *все подгруппы Шмидта* $\mathfrak{F}$-*достижимы, то* $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.1.2.** *Если в группе* G *все минимальные не* $\mathfrak{F}$-*подгруппы* $\mathfrak{F}$-*достижимы* ($\mathfrak{F}$ – *класс всех p-разложимых групп*), *то* $G/F(G)$ – *p-разложима*.

***Следствие* 2.1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством. Если все минимальные не* $\mathfrak{F}$-*подгруппы группы* G *разрешимы и* $\mathfrak{F}$-*достижимы* в G, *то* $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Из этой теоремы также следуют известные результаты В.Н. Семенчука, полученные в работе [6].

***Следствие* 2.1.4.** *Если в группе* G *все минимальные несверхразрешимые группы субнормальны, то* $G/F(G)$ *сверхразрешима*.

***Следствие* 2.1.5.** *Если в группе* G *все подгруппы Шмидта субнормальны, то* G – *метанильпотентна*.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *насыщенная наследственная формация с решеточным свойством и* $\pi(\mathfrak{F})$ – *множество всех простых чисел. Если в группе* G *все подгруппы Шмидта* $\mathfrak{F}$-*достижимы*, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ *абелева*.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *формация всех p-разложимых групп. Если в группе* G *все подгруппы Шмидта* $\mathfrak{F}$-*достижимы*, *то* $G/G_{\mathfrak{F}}$ *абелева*.

Из данной теоремы следует известный результат В.С. Монахова и В.Н. Княгиной из работы [7].

***Следствие* 2.2.2.** *Если в группе* G *все подгруппы Шмидта субнормальны, то факторгруппа* $G/F(G)$ *абелева.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miller, G.A.* Nonabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – Vol. 4. – P. 398–404.

2. *Шмидт, О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31, № 3. – С. 366–372.

3. *Huppert, B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlichen Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. –Vol. 60. – P. 409–434.

4. *Doerk, K.* Minimal nicht Uberauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – P. 198–205.

5. *Семенчук, В.Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

6. *Семенчук, В.Н.* Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных

групп. – Минск : Наука и техника. – 1981. – С. 138–149.

7. *Княгина, В.Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

8. *Ведерников, В.А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

9. *Kegel, O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

10. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука. – 1978. – 272 с.

11. *Васильев, А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. Украины; редкол. : Н.С. Черников [и др.]. – Киев, 1993. – С. 27–54.

Поступила в редакцию 23.04.13.