



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Гидропневмоавтоматика»

Д. Л. Стасенко

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## ПРАКТИКУМ

по одноименной дисциплине  
для студентов специальности 1-36 01 07  
«Гидропневмосистемы мобильных  
и технологических машин»  
дневной формы обучения

Гомель 2018

УДК 62-52 (075.8)  
ББК 34.447я73  
С75

*Рекомендовано научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 9 от 22.05.2017 г.)*

Рецензенты: заместитель директора ОАО «САЛЕО Гомель» кандидат технических наук  
*Е. П. Борисов;*  
главный конструктор ОАО «ГСКТЬ ГА» *А. А. Гинзбург*

**Стасенко, Д. Л.**

С77 Теория автоматического управления : практикум по одной дисциплине для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» дневной формы обучения / Д. Л. Стасенко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – 43 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Приведены краткие теоретические материалы, задачи и варианты индивидуальных заданий. Рассмотрены примеры решения поставленных задач.

Для студентов специальности 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин».

**УДК 62-52(075.8)  
ББК 34.447я73**

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2018

## Практическая работа №1

Преобразование структурных схем систем, определение передаточных функций замкнутой системы.

**Цель работы:** изучить правила преобразования структурных схем автоматических систем и определения передаточной функции замкнутой системы автоматического управления.

Для оценки точности, устойчивости и качества управления замкнутых систем необходимо знать их уравнения статики и динамики. Уравнение динамики замкнутой системы можно получить на основе совокупности уравнений отдельных элементов, образующих систему, путем последовательного исключения промежуточных переменных. Наиболее удобным для решения этой задачи объединения математических моделей элементов является **метод структурных преобразований**, согласно которому по структуре схемы с помощью нескольких простых правил находят ее общую (эквивалентную) передаточную функцию, а затем – соответствующее уравнение динамики.

**Структурные схемы САУ** – это графическое изображение САУ, где динамика процессов представлена в операторной форме в виде передаточных функций.

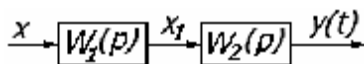
Типовые элементы структурных схем САУ

1.	Звено		$y(p) = W(p) \cdot x(p)$
2.	Узел разветвления		
3.	Сумматор		$x_3 = x_1 + x_2$
4.	Элемент сравнения		$x_3 = x_1 - x_2$

Для упрощения (свертывания) сложных алгоритмических схем применяют три главных правила преобразования, с помощью которых определяют эквивалентные передаточные функции типовых соединений звеньев.

- v Передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение.

Определить передаточную функцию всей системы.



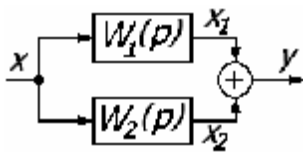
$$W_c(p) = ?$$

$$x_1(p) = W_1(p) \cdot x(p)$$

$$y(p) = W_2(p) \cdot x_1(p) = W_2(p) \cdot W_1(p) \cdot x(p)$$

$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_2(p) \cdot W_1(p) \cdot x(p)}{x(p)} = W_2(p) \cdot W_1(p)$$

- v Передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна алгебраической сумме передаточных функций всех звеньев, входящих в соединение.



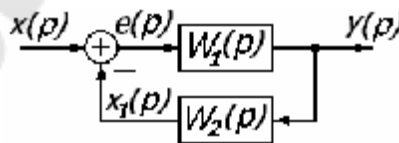
$$W_c(p) = ?$$

$$y(p) = x_1(p) + x_2(p) = W_1(p) \cdot x(p) + W_2(p) \cdot x(p) = (W_1(p) + W_2(p)) \cdot x(p)$$

$$W_c(p) = \frac{(W_1(p) + W_2(p)) \cdot x(p)}{x(p)} = W_1(p) + W_2(p)$$

- v Передаточная функция соединения с отрицательной (положительной) обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (минус) произведение передаточных функций прямой цепи и цепи обратной связи.

Соединение звеньев с отрицательной обратной связью.



$$W_c(p) = ?$$

$$e(p) = x(p) - x_1(p)$$

$$x_1(p) = W_2(p) \cdot y(p)$$

$$y(p) = W_1(p) \cdot e(p) = W_1(p) \cdot (x(p) - W_2(p) \cdot y(p))$$

$$y(p) + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot y(p) = W_1(p) \cdot x(p)$$

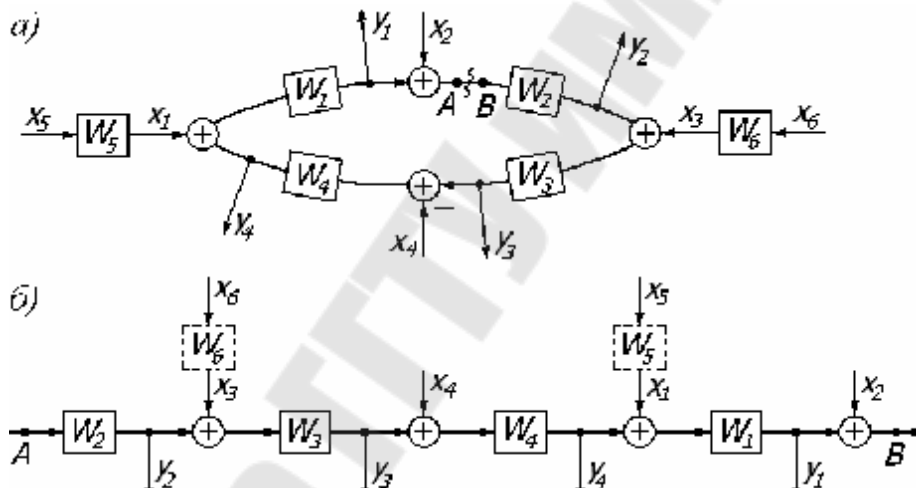
$$y(p) \cdot (1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) = W_1(p) \cdot x(p)$$

$$y(p) = \frac{W_1(p) \cdot x(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

$$W_c(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_1(p) \cdot x(p)}{x(p) \cdot (1 + W_1(p) \cdot W_2(p))} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

Структурная схема звеньев с положительной обратной связью.

$$W_c(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}$$



С помощью этих правил удастся преобразить любую исходную алгоритмическую схему, не содержащую перекрестных связей, к одноконтурной схеме.

Алгоритмическую схему замкнутой системы управления (и саму систему) называют **одноконтурной**, если при ее размыкании в какой либо точке образуется цепь, не содержащая параллельных соединений и обратных связей. Цепь, полученная при размыкании замкнутой системы (см. рис. а) между точками А и В, не содержит параллельных соединений и обратных связей.

Получаемая при размыкании одноконтурной системы цепь последовательно соединенных элементов, стоявших внутри замкнутого контура, называется **разомкнутым контуром системы** (см. рис. б). В соответствии с этим определением

Передаточная функция разомкнутого контура  $W_{p.к.}(p)$  одноконтурной системы равна произведению передаточных функций всех элементов, стоящих внутри контура системы. Передаточные функции элементов, стоящих вне замкнутого контура, никогда не входят в произведение  $W_{p.к.}(p)$ .

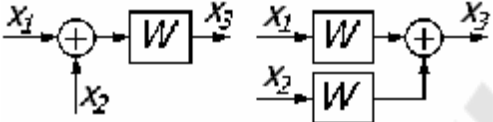
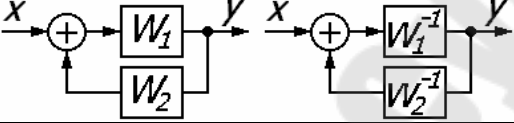

Для нашей системы

$$W_{p.к.}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p),$$

передаточные функции  $W_5(p)$  и  $W_6(p)$  не входят в это произведение, т.к. эти элементы стоят вне замкнутого контура.

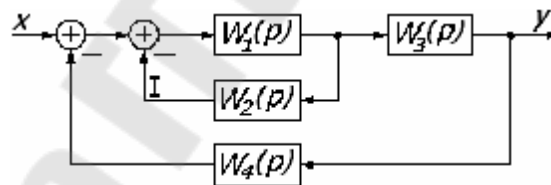
### Правила структурных преобразований

1	Перенос сумматоров	
2	Перестановка звеньев	
3	Перенос узла с выхода сумматора на вход	
4	Перенос узла с входа сумматора на выход	
5	Перенос узла с выхода звена на вход	
6	Перенос узла со входа звена на выход	
7	Перенос сумматора с выхода звена на вход	

8	Перенос сумматора со входа звена на выход	
9	Замена передаточных функций прямой и обратной цепи	
10	Приведение к единичной обратной связи	

### Многоконтурные структурные схемы

При определении передаточной функции многоконтурной системы используется **принцип вложенности**: определяется минимальный вложенный контур и его передаточная функция. А далее переходят к следующему контуру, при этом первый контур заменяется звеном с полученной передаточной функцией.

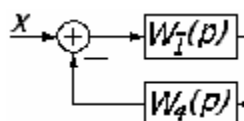


$$W_c(p) = ?$$

$$W_I(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

$$W_c(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 - W_4(p) \cdot W_I(p) \cdot W_3(p)}$$

В итоге получим схему:



**Передаточной функцией  $W(p)$**  называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}$$

Допустим динамика описывается дифференциальным управлением:

$$a_0 \frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dX(t)}{dt} + a_n X(t) = b_0 \frac{d^m Y(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} Y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dY(t)}{dt} + b_m Y(t)$$

Применим к данному уравнению прямое преобразование Лапласа

$$p = \frac{d}{dt}:$$

$$\begin{aligned} a_0 p^n X(p) + a_1 p^{n-1} X(p) + \dots + a_{n-1} p X(p) + a_n X(p) - X(0) &= \\ = b_0 p^m Y(p) + b_1 p^{m-1} Y(p) + \dots + b_{m-1} p Y(p) + b_m Y(p) - Y(0); \\ X(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) &= Y(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m); \\ W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} &= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \end{aligned}$$

**Практическая работа №2** Построение частотных характеристик замкнутой системы автоматического управления.

**Цель работы:** изучить правила построения частотных характеристик систем

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Зная частотную характеристику элемента, можно определить реакцию элемента на гармоническое воздействие любой частоты, а также на сумму гармонических воздействий различной частоты. Частотные характеристики широко используются в теории и практике автоматического управления, так как реальные возмущения, действующие на автоматические системы, могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

1. Амплитудная частотная характеристика (АЧХ).
2. Фазовая частотная характеристика (ФЧХ).
3. Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ).

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигнала от частоты называют **амплитудной частотной характеристикой** (сокращенно - АЧХ) и обозначают  $A(\omega)$  (см. рис.



2.1 а). Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют **фазовой частотной характеристикой** (ФЧХ) и обозначают  $\varphi(\omega)$  (см. рис. 2.1 б). Аналитические выражения  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  называют соответственно амплитудной и фазовой частотными функциями.

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Оценка пропускания производится по отношению амплитуд  $y_m/x_m$  в установившемся режиме. АЧХ имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входной. ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах в установившемся режиме.

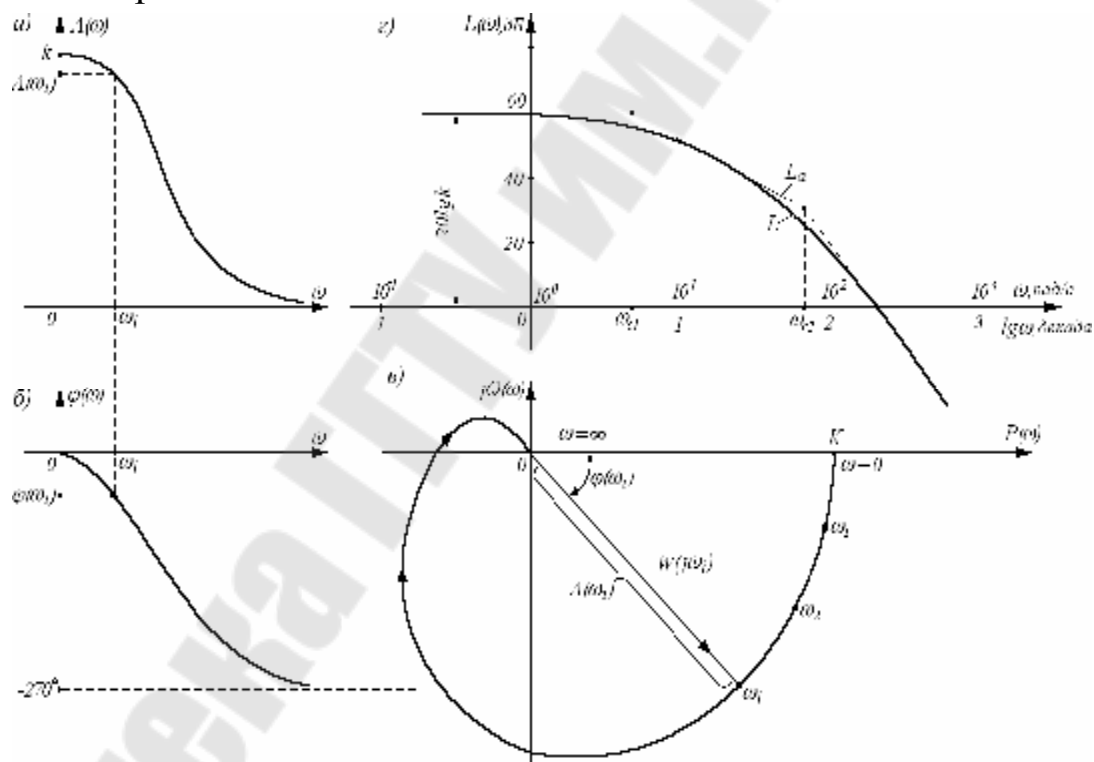


Рисунок 2.1 Частотные характеристики: а) амплитудная, б) фазовая; в) амплитудно-фазовая; г) логарифмическая амплитудная.

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую – амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ или АФХ). **Амплитудно-фазовая частотная характеристика  $W(j\omega)$**  представляет собой функцию комплексного переменного  $j\omega$ , модуль которой равен  $A(\omega)$ , а аргумент

равен  $\varphi(\omega)$ . Каждому фиксированному значению частоты  $\omega_i$  соответствует комплексное число  $W(j\omega_i)$ , которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину  $A(\omega_i)$  и угол поворота  $\varphi(\omega_i)$  (см. рис. 2.1 в).

Отрицательные значения  $\varphi(\omega)$ , соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор  $W(j\omega)$  поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно увеличивается или уменьшается длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, называемая годографом, и есть АФХ.

Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора  $W(j\omega)$  на действительную и мнимую оси называют соответственно действительной и мнимой частотными характеристиками и обозначают

$$P(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega), \quad Q(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega).$$

При этом, действительная частотная характеристика  $P(\omega)$  – всегда четная функция частоты, а мнимая характеристика  $Q(\omega)$  – всегда нечетная функция.

Аналитическое выражение для АФХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки  $p=j\omega$ :

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

АФХ  $W(j\omega)$ , как и любая комплексная величина, может быть представлена в *показательной* форме

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $A(\omega)$  – модуль АФХ, а  $\varphi(\omega)$  – угол сдвига по фазе;  
*алгебраической*

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

или *тригонометрической*

$$W(j\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

Связь между различными частотными функциями следующая:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

Физический смысл замены  $p=j\omega$ : на вход звена мы подаем гармоническое воздействие  $x = X_m \cos\omega t$ , на выходе звена -

$y = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$ , тоже имеем гармонический сигнал, но с другой амплитудой и со сдвигом по фазе.

Понятие о логарифмических частотных характеристиках.

При практических расчетах автоматических систем удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют *логарифмическими*. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем, эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик. Т.е. в логарифмических масштабах кривизна характеристик резко уменьшается, что позволяет в большинстве практических случаев приближенно изображать АЧХ ломанными линиями. В логарифмических масштабах АЧХ цепочки звеньев равна сумме АЧХ отдельных звеньев

$$\lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i.$$

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду. *Декада* – интервал частот, заключенный между произвольным значением  $\omega_i$  и его десятикратным значением  $10\omega_i$ . Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1. Обычно в расчетах используют *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$

ординаты которой измеряют в логарифмических единицах – белах (Б) или децибелах (дБ). АЧХ в логарифмических масштабах строится в координатах  $20 \lg A$  и  $\lg(\omega)$ . Единицей измерения  $20 \lg A$  служит децибел, равная 0.1 бела. Бел - единица измерения десятичного логарифма коэффициента усиления мощности сигнала, т.е. 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз. 2 бела - в 100 раз и т.д. Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды  $A^2$ , то усиление в белах, выраженное через отношение амплитуд  $A$  равно удвоенному значению логарифма амплитуд, т.е.  $\lg A^2 = 2 \cdot \lg A$ , соответственно в децибелах оно равно  $2 \cdot 10 \cdot \lg A = 20 \cdot \lg A$ . По оси

абсцисс откладывается в логарифмическом масштабе частота  $lg(\omega)$  (десятичный логарифм) (изменение частоты в 10 раз - декада), а около отметок указывается само значение частоты. Иногда применяется логарифм частоты при основании 2 (изменение частоты в два раза - октава) одна октава равно 0.303 декады, т.к.  $lg(2) = 0.303$  (рис. 2.2).

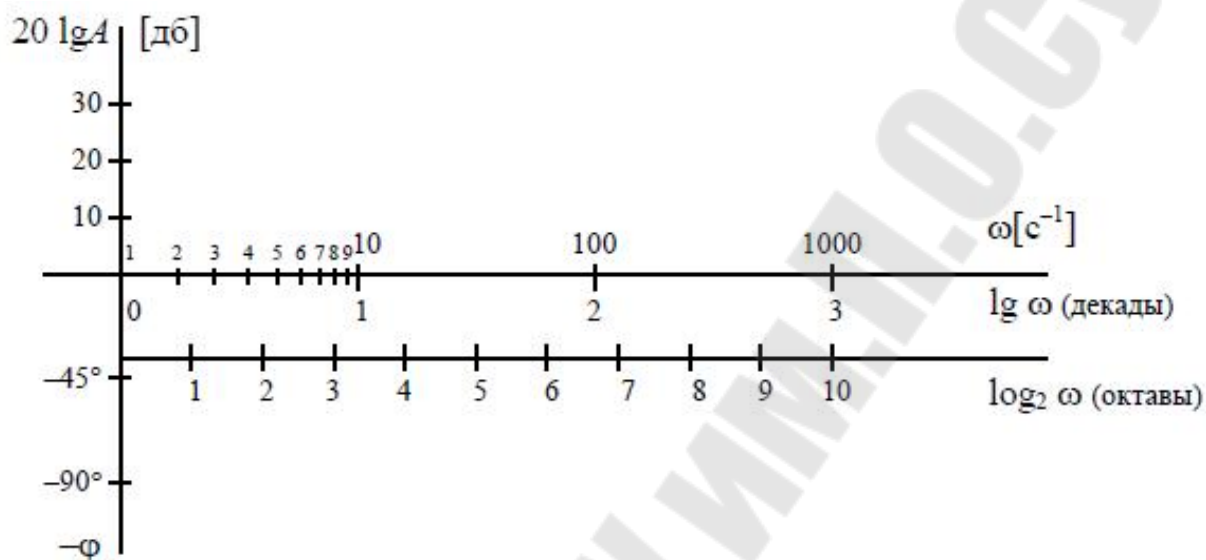


Рисунок 2.2. Шкалы логарифмических характеристик

На рис. 2.1 *г* показаны ЛАЧХ  $L(\omega)$  (толстая линия) и соответствующая ей приближенная (асимптотическая) характеристика  $L_a(\omega)$  в виде прямолинейных отрезков (тонкая линия). Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют *сопрягающими* и обозначают  $\omega_c$ .

Для построения логарифмических фазовых характеристик (ЛФХ) на оси абсцисс используется аналогичная шкала частот  $lg(\omega)$  или  $lg_2(\omega)$ , а по оси ординат (обычно используется нижняя часть плоскости) откладывается фаза  $\varphi$  в градусах (рис. 2.2). При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс.

Необходимо отметить, что точка  $\omega=0$  в логарифмическом масштабе находится слева (в  $-\infty$ ), то ЛАФХ строятся не от  $\omega=0$ , а от достаточно малого, но конечного значения  $\omega$ , которое и откладывается в начале координат.

### Практическая работа №3 Устойчивость систем автоматического управления.

**Цель работы:** изучить методы определения устойчивости автоматических систем

Системы автоматического управления в зависимости от характеристик и параметров входящих в них устройств могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Устойчивость системы – это ее способность сохранять состояние равновесия или возвращаться к состоянию равновесия после устранения возмущения, нарушившего равновесие.

Определение устойчивости системы основано на анализе так называемого характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение можно получить из передаточной функции  $W(S)$ , приняв обратную ее величину нулю и представив в виде степенного многочлена:

$$\frac{1}{W(S)} = D(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 = 0. \quad (13)$$

Алгебраический критерий Гурвица (1895 г, Швейцария).

Критерий Гурвица позволяет судить об устойчивости системы по соотношению коэффициентов характеристического уравнения. «Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы определитель Гурвица, все его главные диагональные миноры, а также коэффициент  $a_n$  были положительны».

Определитель Гурвица составляется из коэффициентов характеристического уравнения в виде:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdot & 0 \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-9} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_0 \end{vmatrix}.$$

Все последующие определители – главные диагональные миноры – получаются вычеркиванием столбцов и строк, начиная, соответственно, с крайнего правого столбца и нижней строки.

Например:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-1} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = a_{n-1}.$$

Таким образом, условие устойчивости Гурвица сводится к следующим неравенствам:

$$a_n > 0; \quad \Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \dots \quad \Delta_n > 0.$$

В случае характеристических уравнений второй, третьей и четвертой степеней условия устойчивости имеют вид:

при  $n=2$ :  $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0;$

при  $n=3$ :  $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3.$

при  $n=4$ :  $a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0;$   
 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_1^2 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_3^2 > 0.$

Частотные критерии устойчивости:

### **1. Критерий Михайлова.**

Если в характеристическом уравнении:

$$D(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_2 S^2 + a_1 S + a_0$$

заменить  $S$  на  $i\omega$ , то получим характеристический вектор:

$$D(i\omega) = a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0 = M(\omega) + iN(\omega)$$

где  $Re = M(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \dots \dots$  ----- вещественная часть комплексного вектора  $D(i\omega)$ ;

$$Im = iN(\omega) = a_1\omega + a_3\omega^3 + \dots \text{-----мнимая часть.}$$

При изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  конец вектора  $D(i\omega)$  в комплексной плоскости  $[M; iN]$  вычертит кривую, называемую характеристической кривой или годографом вектора  $D(i\omega)$ . По виду характеристической кривой можно судить об устойчивости САУ.

**Критерий Михайлова:** «Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая кривая при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , начав свое движение с положительной части вещественной оси, последовательно в направлении против часовой стрелки прошла  $n$  квадрантов в комплексной плоскости, нигде не обращаясь в нуль» ( $n$ -степень характеристического уравнения)».

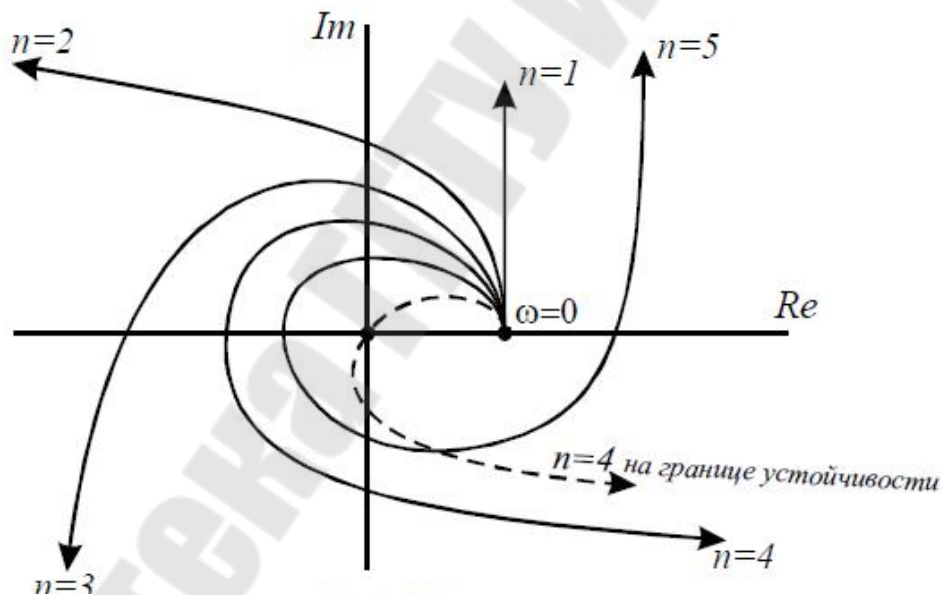


Рисунок 3.1. Годографы Михайлова для устойчивых систем.

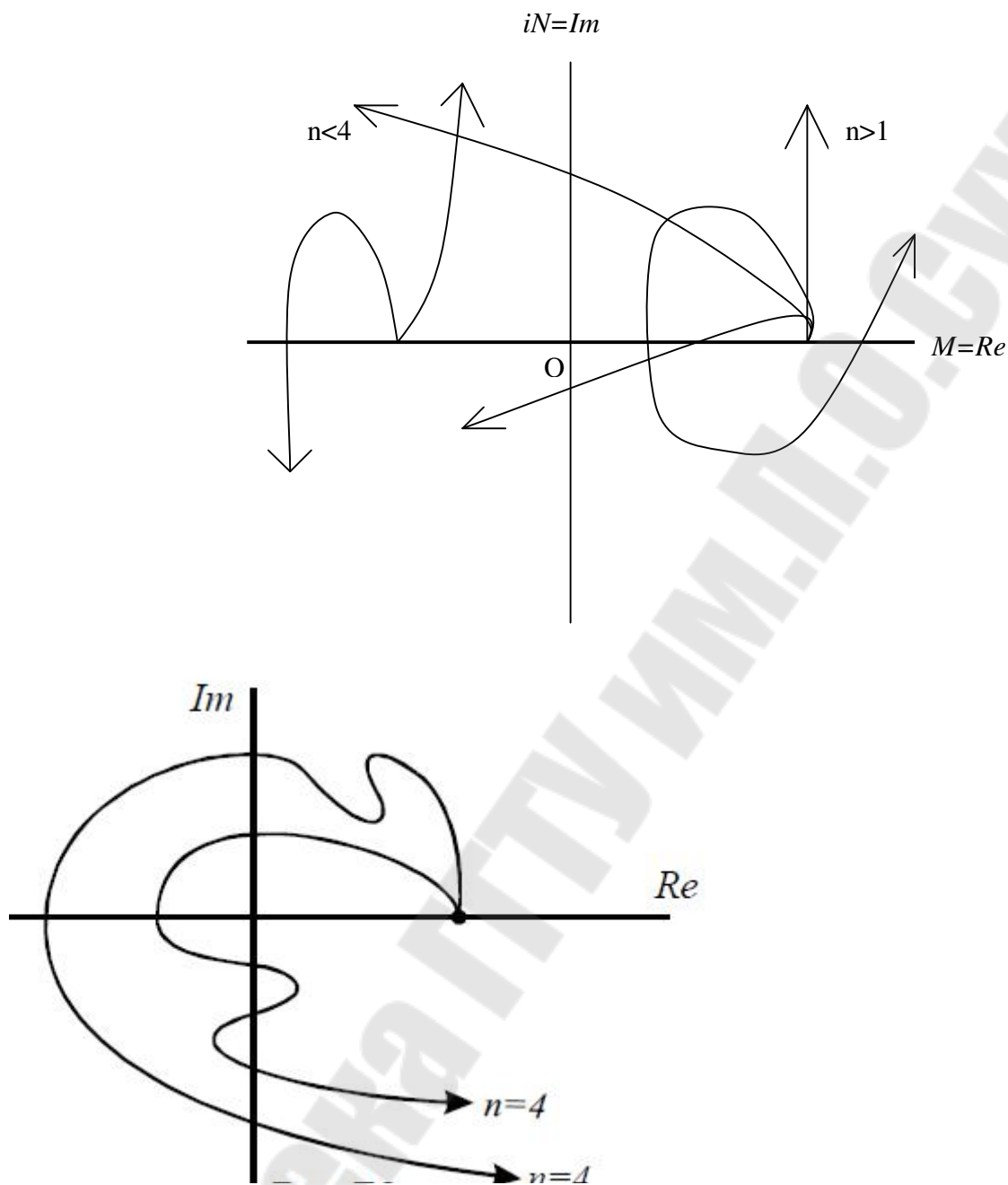


Рисунок 3.2. Годографы Михайлова для неустойчивых систем.

Из критерия Михайлова вытекает, что для устойчивости системы корни уравнений  $M(\omega)=0$  и  $N(\omega)=0$  должны чередоваться.

## 2. Критерий Найквиста.

Критерий Найквиста дает возможность судить об устойчивости замкнутой САУ посредством исследования АФЧХ ее разомкнутой системы.



**Критерий Найквиста:** Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ ее разомкнутой системы не охватывала точку  $(-1; i0)$ ; т.е. чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов АФЧХ разомкнутой системы через ось абсцисс слева от точки  $(-1; i0)$  равна нулю.

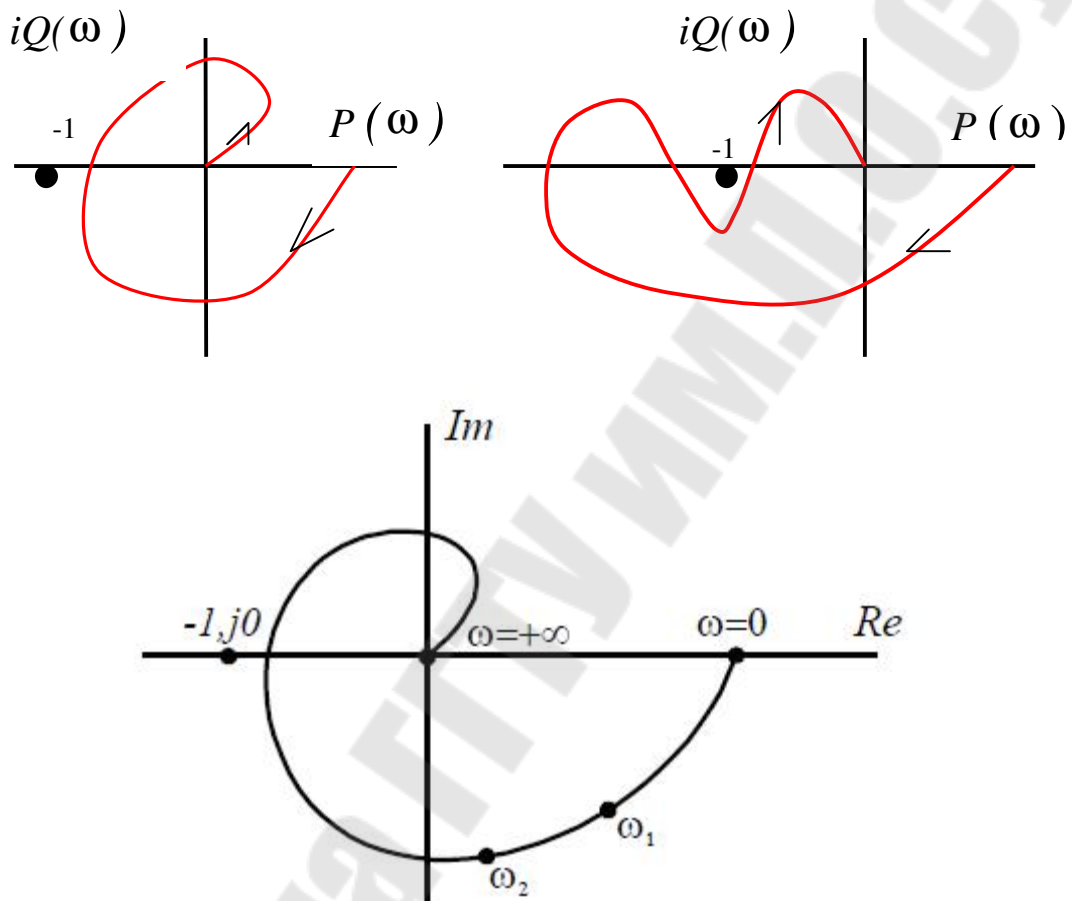


Рисунок 3.3. АФЧХ разомкнутых устойчивых систем.

Рисунок 3.4 АФЧХ неустойчивых систем.

**Практическая работа №4** Определение запаса устойчивости систем автоматического управления.

**Цель работы:** изучить методы определения запаса устойчивости систем автоматического управления

При частотных критериях устойчивости различают два критерия: по амплитуде и по фазе. Запас устойчивости по амплитуде определяется ближайшей точкой по отношению к критической. В численном значении - это длина отрезка  $[0;B]$ , где  $B$  – точка пересечения годографа системы и отрицательной оси (рис. 4.1).

Рисунок 4.1. Определение запаса устойчивости по амплитуде с использованием АФЧХ разомкнутой системы.

Нормированная величина запаса устойчивости:

$$\overline{B}$$

Если >1

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

На практике допустимым запасом устойчивости считается угол:  
 $\gamma_{доп} = 30^\circ \div 45^\circ$ .

Если  $\gamma < \gamma_{доп}$ , то система не обладает запасом устойчивости;

Если  $\gamma \geq \gamma_{доп}$ , то система обладает запасом устойчивости.

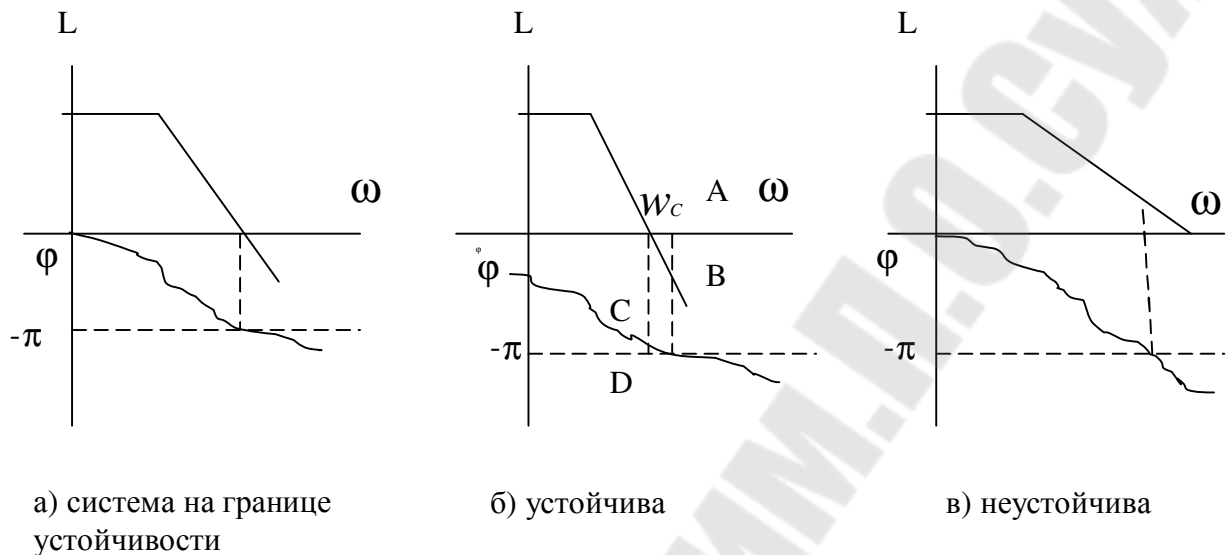


Рисунок 4.3. Определение запасов устойчивости с использованием ЛАЧХ и ЛФЧХ.

При использовании ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы запасы устойчивости определяются согласно рис. 4.3. Если система устойчива, то при  $\varphi = -\pi$  величина  $L(\omega) < 0$ , т.е. ордината ЛАЧХ будет отрицательной.

AB - запас устойчивости по модулю;

CD - запас устойчивости по фазе.

### Практическая работа №5 Анализ показателей качества САУ.

**Цель работы:** изучить методы определения показателей качества систем автоматического управления

Качество САУ определяется следующими показателями (рис.5.1):

1. **Время достижения установившегося режима** – такое время, по истечению которого для управляемой величины выполняется условие:

$$|y - y_{уст}| \leq \delta_p,$$

где  $y$  – управляемая величина;  $\delta_p$  – некоторая величина (для САУ 5% от установившегося режима).

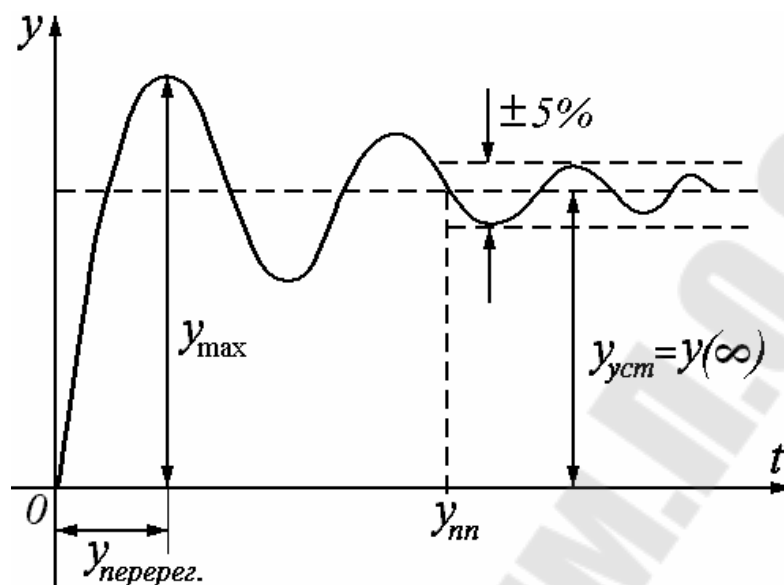


Рисунок 5.1. Переходной процесс САУ.

**Время переходного процесса** – отрицательное время, при котором переходный процесс по выходной координате достигает 5%-ной зоны от устойчивого значения.

2. **Перерегулирование** – это процентное соотношение разницы максимального перерегулирования и установившегося значения:

$$\sigma \% = \frac{|y_{max} - y_{уст}|}{y_{уст}} \cdot 100\% .$$

2. а) **Время максимального перерегулирования** ( $t_{перерег.}$ ), такое время, при котором выходная величина достигает своего максимального по модулю значения:

$$|y(t_{перерег.})| = |y_{max}| .$$

2. б) **Число перерегулирований** – это количество раз, когда управляемая величина превышает по модулю значение:

$$y_{уст} \pm 0,005 \cdot y_{уст} \quad \text{или} \quad |y - y_{уст}| > \delta_p .$$

3. **Колебательность** ( $\eta$ ) – кол-во колебаний, приходящихся на отрезок времени переходного процесса.

4. **Ошибка в установившемся режиме** (точность САУ)

$$e = |y - y_{уст}| .$$

а)

б)

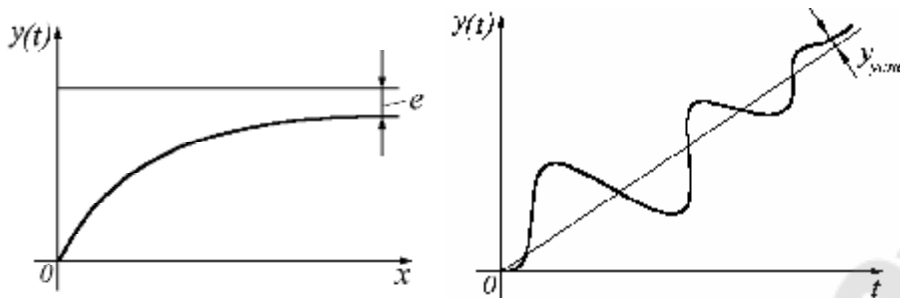


Рисунок 5.2. Ошибка в установившемся режиме а) для статических САУ, б) для астатических систем

Первые два показателя – это показатели качества переходного процесса, а четвертый – показатель качества в установившемся режиме. Вместе они образуют группу показателей качества САУ.

Для анализа показаний качества управления могут быть использованы прямые и косвенные методы оценки. **Прямые методы** определения качества базируются на исследовании переходного процесса, дают наиболее достоверную информацию с последующим определением показаний качества. Но они являются самыми трудоемкими. **Косвенные методы** определения качества позволяют по косвенным признакам, не решая ни дифференциальных, ни характеристических уравнений, получить приближенный переходный процесс с приближенными показателями качества.

**Прямые методы оценки качества:**

классический метод; операторный метод; частотный метод.

**Классический метод определения показателей качества**

Основывается на решении дифференциального уравнения, описывающего динамику процессов в САУ:

$$W(p) = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n}$$

$$a_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{dx}{dt} + a_m x = b_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y \quad (1)$$

Последнее уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка и разрешается одним из известных методов. Решение уравнения  $y(t)=f(t)$ , что и представляет собой переходный процесс.

### Операторный метод.

К исходному дифференциальному уравнению (1) применяется преобразование Лапласа с учетом начальных условий.

$$\begin{aligned} a_0 p^m x - a_0 p^{m-1} x(0) - a_0 p^{m-2} x'(0) + K + a_1 p^{m-1} x - a_1 p^{m-2} x(0) - a_1 p^{m-3} x'(0) + K = \\ b_0 p^n y - b_0 p^{n-1} y(0) - b_0 p^{n-2} y'(0) + K + b_1 p^{n-1} y - b_1 p^{n-2} y(0) - b_1 p^{n-3} y'(0) + K \\ M(p)x(p) - K_x(p) = D(p)y(p) - K_y(p), \end{aligned}$$

где  $K_x$  – это начальное условие по переменной  $x$ ,  $K_y$  – начальное условие по переменной  $y$  (а также их производных).

$$y(p) = \frac{x(p)M(p) - K_x(p) + K_y(p)}{D(p)} = \frac{x(p)M(p) + K(p)}{D(p)}, \quad (2)$$

где  $K(p) = K_y(p) - K_x(p)$ .

1. Применяем прямое преобразование Лапласа к входной величине  $x(t)$  (дает  $x(p)$ ).
2. Получаем в операторном виде переходный процесс по уравнению (2).

Используя таблицы Лапласа, осуществляем обратное преобразование Лапласа переменной  $y(p)$ .

**Частотный метод.** Основан на преобразованиях Фурье. Если  $f(t)$  – периодическая функция, то к ней можно применить преобразование:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} F(j\omega K) e^{j\omega K t} \\ F(j\omega) &= \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Если  $f(t)$  непериодическая функция, то ее тоже можно представить с помощью интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \infty \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega \end{aligned}$$

Тогда  $f(t)$  может быть представлена:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{- прямое преобразование Фурье;}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{- обратное преобразование.}$$

Обобщенная частотная передаточная функция представляет собой следующее выражение:

$$y(p) = W(p)x(p) = W_0(p).$$

Обобщенная частотная передаточная функция содержит в себе как частотные характеристики объекта ( $\omega(p)$ ), так и характеристики входного воздействия в операторном виде ( $x(p)$ ).

Если  $p$  придать чисто мнимое значение  $j\omega$ , то обобщенное число

$$W_0(j\omega) = R_0(\omega) + jJ_0(\omega).$$

Определение переходного процесса через вещественную характеристику обобщенной частотной передаточной функции.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (R_0(\omega) + jJ_0(\omega)) \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (R_0(\omega) \cos \omega t - J_0(\omega) \sin \omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (J_0(\omega) \cos \omega t - R_0(\omega) \sin \omega t) d\omega \end{aligned}$$

Здесь действительная часть является функцией четной, а мнимая – нечетной. Поэтому, если интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$ , то для действительной части

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{+\infty} (R_0(\omega) \cos \omega t + J_0(\omega) \sin \omega t) d\omega.$$

Мнимая часть будет равна нулю, т.о.

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (R_0(\omega) \cos \omega t - J_0(\omega) \sin \omega t) d\omega.$$

Все процессы при отрицательном времени равны нулю:

$$y(-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (R_0(\omega) \cos \omega t + J_0(\omega) \sin \omega t) d\omega = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_0(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J_0(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

С учетом этого  $y(t)$  будет иметь вид:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_0(\omega) \cos \omega t d\omega.$$



## Определение показателей качества по типовым характеристикам

Если входное воздействие задано в виде мгновенного единичного воздействия, то  $x(t)=1$  - частный случай, когда входным сигналом является ступенька. Тогда

$$y(t) = h(t) = W(t) \cdot 1(t),$$

или в операторной форме  $H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}$ , тогда

$$h(t) = \int_0^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(W) \cos \omega t d\omega \right] dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}(W)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega,$$

где  $\operatorname{Re}(W)$  – действительная часть передаточной функции.

Любую переходную характеристику можно разбить на трапеции. Исходя из этого, Солодовников и Воронов предложили следующий способ: рассмотреть единичную трапецию и на ее основе описать переходные процессы.

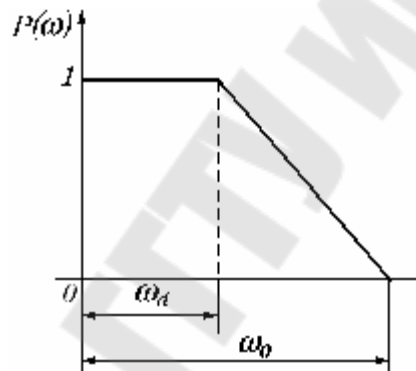


Рисунок 5.3. Единичная трапеция:  $\omega_d$  - частота равномерного пропускания;  $\omega_0$  - частота пропускания.

Функция  $P(\omega)$  может быть описана следующим образом:

$$P(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_0 \leq \omega_d \\ a - b\omega & \omega_d \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \omega \geq \omega_0 \end{cases},$$

где коэффициенты  $a = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_d}$ ,  $b = \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 - \omega_d}$ .

Введем коэффициент  $\lambda = \frac{\omega_d}{\omega_0}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , и выразим

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_d} \frac{1}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_d}^{\omega_0} \frac{a - b\omega}{\omega} \sin \omega t d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{0}{\omega} \sin \omega t d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \cdot \left( Si\tau - \lambda Si\lambda\tau + \frac{\cos\tau - \cos 2\tau}{\tau} \right)$$

где  $\tau = \omega_0 t$ ;  $Si\tau = \int_0^{\tau} \frac{\sin x}{x} dx$  - интегральный синус.

Солодовников создал  $h$ -таблицы ( $h(t) = h_{\lambda}(\tau)$ ), в которых для каждого конкретного  $\lambda$  и по времени  $t$  можно получить переходный процесс, соответствующий данной единичной трапеции. Для неединичной трапеции, когда  $P(0) \neq 1 = K$ , переходный процесс  $h(t) = K \cdot h_{\lambda}(\tau)$  увеличивается в  $K$  раз.

Порядок построения переходного процесса по вещественной частотной характеристике:

1. Получаем выражение для  $P(\omega)$  (Существует два способа получения вещественной части: первый наиболее точный, путем выражения из передаточной функции; второй – по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы).
2. Строится график вещественной частотной характеристики.
3. Характеристика разбивается на трапеции.

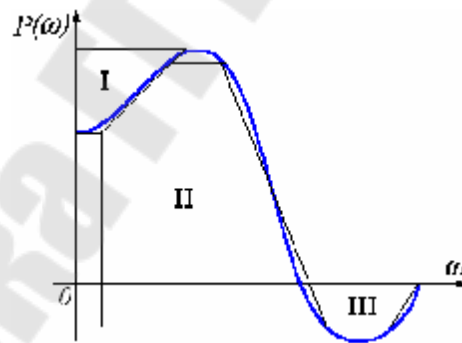


Рисунок 5.4. Разбиение переходной характеристики на трапеции.

4. Для каждой трапеции определяются частоты  $\omega_d$ ,  $\omega_0$  и соответствующий им коэффициент  $\lambda$ .
5. Из таблиц  $h$ -функции для каждой трапеции определяется переходный процесс  $h_{\lambda}(\tau)$ .
6. Каждый из переходных процессов масштабируется в соотношении  $K = P(0)$ .

7. Все переходные процессы суммируются. Полученный результат – есть переходный процесс, соответствующий данной вещественной частотной характеристике.
8. По переходному процессу определяются основные показатели качества.

Частотные методы являются как прямыми, так и косвенными методами оценки показателей качества. Как **прямой метод**, частотные методы позволяют построить кривую переходного процесса в зависимости от  $P(\omega)$  с помощью специальных методов. Как **косвенный метод**, частотный метод позволяет по виду  $P(\omega)$  приближенно вычислить показатели качества.

#### Частотный косвенный метод оценки качества.

1. Близким по виду вещественным характеристикам  $P(\omega)$  соответствуют близкие по виду переходные характеристики  $h(t)$ .

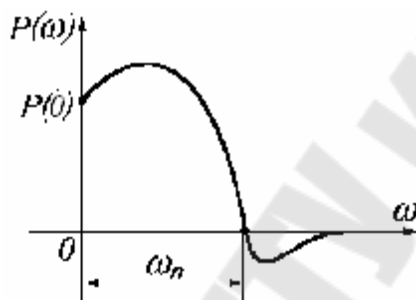


Рисунок 5.5 Вещественная характеристика САУ.

2. При косвенных оценках вещественной характеристики  $P(\omega)$  ограничиваются исследованием спектра частот  $\omega_{\Pi}$ , при которых вещественная действительная характеристика  $P(\omega)$  имеет положительное значение (рис.5.5.).

Отбрасываемая часть при частотах свыше  $\omega_{\Pi}$  влияет на начало переходной характеристики  $h(t)$ .

$$P(\infty) \rightarrow h(0)$$

$$P(0) \rightarrow h(\infty)$$

3. Если  $P_2(\omega) = P_1\left(\frac{\omega}{n}\right)$ , где  $n$  – произвольное число, то  $h_2(t) = h_1(t \cdot n)$ .

Это означает следующее: если рассмотреть две характеристики, то вещественной частотной характеристике с захватом наибольших спектров частот (более широкая переходная характеристика) соответствует менее длительный переходный процесс. Чем шире  $P(\omega)$ , тем быстрее происходит затухание, т.е. тем меньше время переходного процесса (рис.5.6).

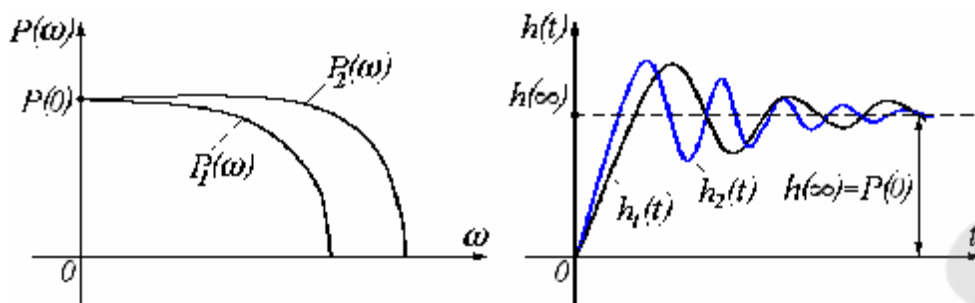


Рисунок 5.6 Сопоставление ВЧХ и переходного процесса САУ.

4. Установившееся значение  $h(\infty)$  соответствует значению вещественной частотной характеристики при частоте  $\omega=0$   

$$h(\infty) = P(0).$$
5. Если вещественная частотная характеристика  $P(\omega)$  является монотонно убывающей функцией и  $P(\infty)=0$ , то переходная характеристика имеет апериодический характер. Для апериодического процесса

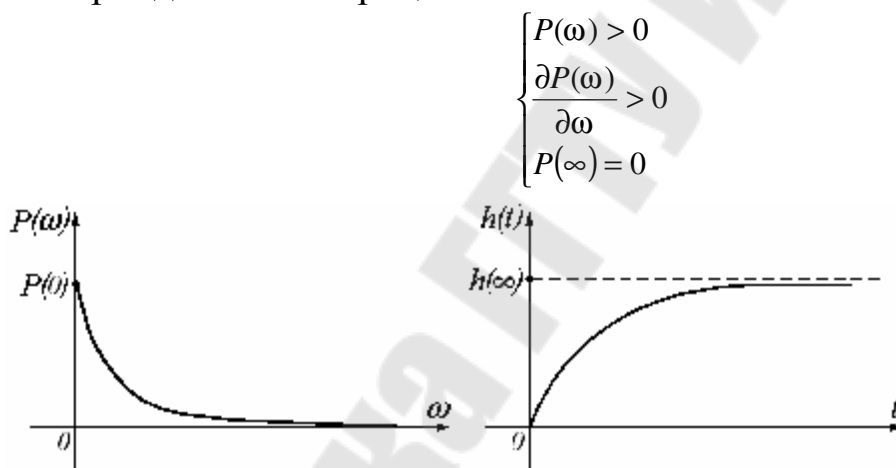


Рисунок 5.7. Монотонно убывающая ВЧХ и соответствующий ей переходной процесса САУ

В этом случае перерегулирование  $\sigma \% = 0$ .

6. Если  $P(\omega)$  - является положительной невозрастающей функцией, то переходная характеристика имеет вид затухающих колебаний:

$$\begin{cases} P(\omega) > 0 \\ \frac{\partial P(\omega)}{\partial \omega} \geq 0 \end{cases}$$

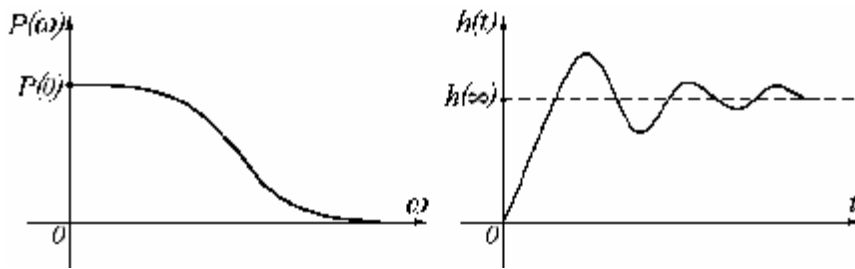


Рисунок 5.8. Положительная невозрастающая ВЧХ и соответствующий ей переходной процессу САУ.

Перерегулирование составляет  $\sigma\% \leq 18\%$ .

7. Если вещественная характеристика  $P(\omega)$  имеет явно выраженный *max* (максимум)

$$P_{\max}(\omega) > P(0),$$

то переходная характеристика будет иметь вид затухающих колебаний и перерегулирование определяется

$$\sigma\% = \frac{1.18(P_{\max} - P(0))}{P(0)} \cdot 100\%.$$

8. Общим условием для немонотонности переходной характеристики (колебательности) является: частотная характеристика  $P(\omega)$  на каком-то этапе должна быть меньше  $G(\omega)$ , которая определяется как

$$P(\omega) > G(\omega), \text{ где } G(\omega) = \cos \left( \frac{\pi}{\left[ \frac{\omega_{\Pi}}{\omega} \right] - 1} \right).$$

Здесь  $\left[ \frac{\omega_{\Pi}}{\omega} \right]$  - наибольшее целое число от деления.

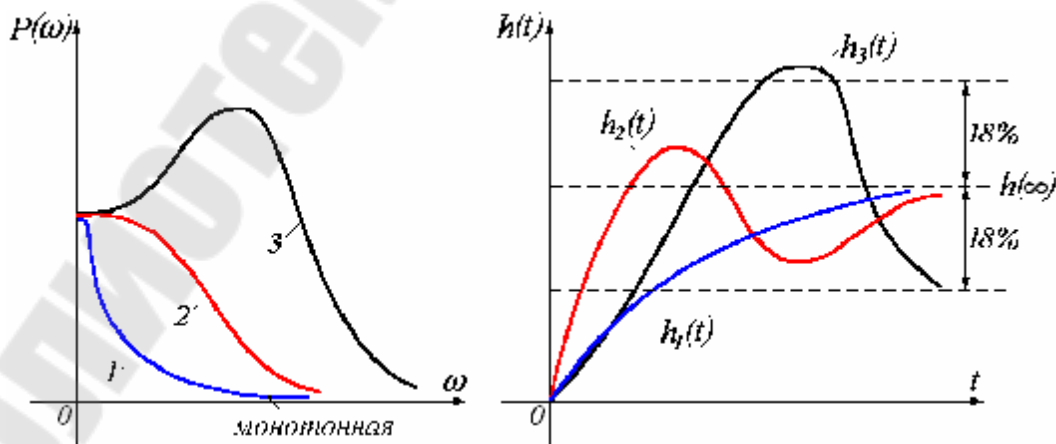


Рисунок 5.9 Сопоставление ВЧХ и переходного процесса САУ

9. Если  $P(\omega)$  претерпевает разрыв, то система находится на границе устойчивости (рис. 5.10).

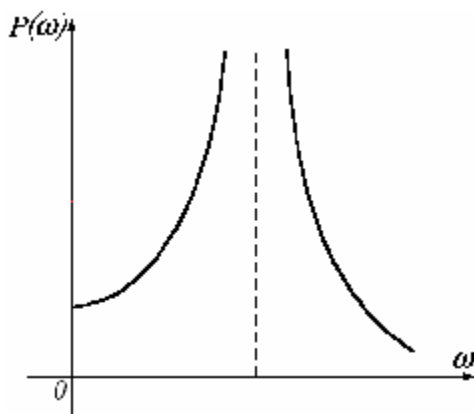
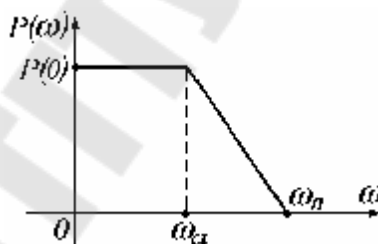


Рисунок 5.10 ВЧХ с разрывом

10. Склонность к колебаниям ( $h_{max}$ ) тем выше, чем больше пик  $P_{max}$ .  
 11. Для монотонного (апериодического переходного процесса) время переходного процесса составляет

$$t_{III} > \frac{\pi}{\omega_{II}}.$$

12. Если  $P(\omega)$  может быть аппроксимирована трапецией вида



то длительность переходного процесса определяется неравенством:

$$\frac{\pi}{\omega_{II}} < t_{III} < \frac{4\pi}{\omega_{II}}.$$

13. Если вещественную характеристику  $P(\omega)$  можно разложить на ряд трапеций, то по параметрам трапеций можно определить перерегулирование  $\sigma$  по ординатам этих трапеций (рис. 5.11). Все трапеции должны быть прямоугольные.

$$\sigma \% = \frac{\sum_{k=1}^n P_k(\omega) + \sum_{i=1}^m P_i(\omega)}{\sum_{k=1}^n P_k(\omega) - \sum_{i=1}^m P_i(\omega)} \cdot 100\% ,$$

где  $P_k(\omega)$  - значение высоты трапеции, имеющей на осях  $P(\omega)$ ,  $\omega$  - положительное значение,  $P_i(\omega)$  - значение высоты трапеции, имеющей на осях  $P(\omega)$ ,  $\omega$  - отрицательное значение.

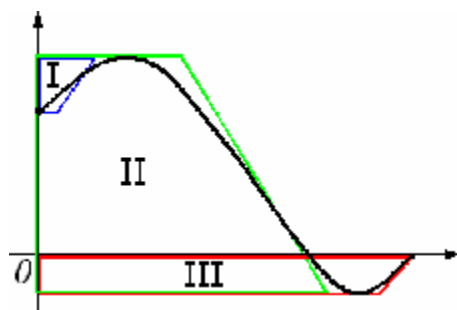


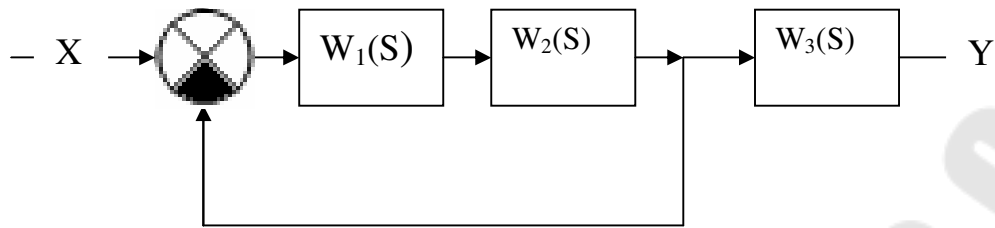
Рисунок 5.11 Разложение ВЧХ на ряд трапеций

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бессекерский, Е. П. Попов Теория систем автоматического управления.— СПб : Профессия, 2004 .— 749 с.
2. В. А. Лукас Теория управления техническими системами: Учеб. пособие для вузов.— Екатеринбург : Изд-во УГГУ, 2005 .— 676 с.
3. Р. Дорф, Р. Бишоп Современные системы управления: Учеб. для вузов— Изд-во «Лаборатория Базовых Знаний», М.: 2004- 832 с.
4. В. Я. Ротач Теория автоматического управления : Учеб. для вузов— М. : Изд-во МЭИ, 2004 .— 399 с.

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ.**

**Схема 1.**



$$W_1(S) = \frac{K_1}{T_1^n S^n};$$

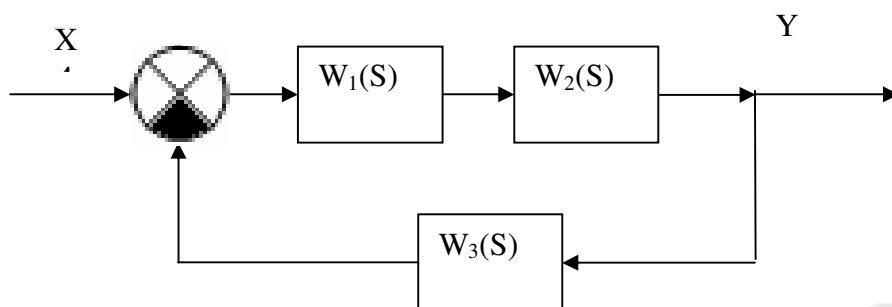
$$W_2(S) = \frac{K_2 (T_2 S + 1)^m}{(T_3 S + 1)^p};$$

$$W_3(S) = \frac{K_3}{(T_4 S + 1)^q}.$$

№ варианта	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	n	m	p	q
1	10	0,2	3	0,1	0,2	0,01	1	0	1	2	1
2	5	0,1	4	0,3	1	0,1	0,2	1	0	1	2
3	2	0,1	5	0,2	2	0,02	0,1	1	1	0	1
4	1	0,3	2	0,4	0,1	0,03	0,3	2	1	1	0
5	6	0,4	1	0,5	3	0,04	0,4	2	1	0	1
6	7	0,5	6	0,6	0,3	0,05	1,5	0	2	1	1
7	3	0,6	7	0,1	0,1	0,06	0,5	1	2	2	1
8	4	0,2	2	0,3	4	0,2	0,6	1	1	1	1
9	8	0,3	1	0,2	0,2	0,07	0,7	1	1	2	0
10	9	0,4	3	0,4	0,5	0,08	1,2	1	1	0	2
11	2	0,5	4	0,5	0,6	0,09	0,8	1	2	1	0
12	4	0,7	5	0,6	5	0,15	0,9	2	0	1	1
13	6	0,1	6	0,7	0,4	0,3	2	1	1	2	1
14	8	0,2	8	0,5	0,5	0,02	3	2	2	0	1



Схема 2.

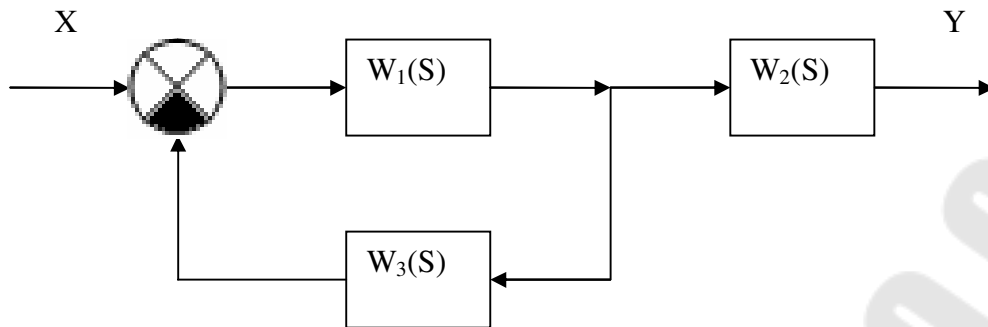


$$W_1(S) = \frac{K_1 (T_1 S + 1)^n}{T_2^m S^m} \quad W_2(S) = \frac{K_2}{(T_3 S + 1)^p}$$

$$W_3(S) = \frac{K_3}{(T_4 S + 1)^q}$$

№ Варианта	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	n	m	p	q
1	0,1	1	10	1	10	0,2	2	0	1	1	1
2	0,2	2	9	2	5	0,1	1	0	1	2	1
3	0,3	3	8	3	2	0,2	0,5	1	1	1	1
4	0,4	4	7	6	1	0,3	0,2	1	1	2	1
5	0,5	5	6	5	3	0,4	0,1	1	1	1	2
6	0,6	6	5	4	4	0,5	0,6	2	1	1	1
7	0,7	7	4	7	6	0,6	0,1	2	1	0	1
8	0,8	8	3	8	9	0,7	3	2	2	1	0
9	0,9	9	2	2	3	0,8	1,5	2	2	0	1
10	1	2	3	4	5	0,9	1	1	2	1	1
11	0,3	4	1	2	6	0,3	0,4	1	2	2	1
12	0,5	5	6	3	7	0,4	0,2	1	2	0	1
13	0,1	2	4	5	2	0,7	0,6	2	2	1	1
14	0,4	1	6	7	1	0,1	0,2	2	0	1	1

Схема 3.

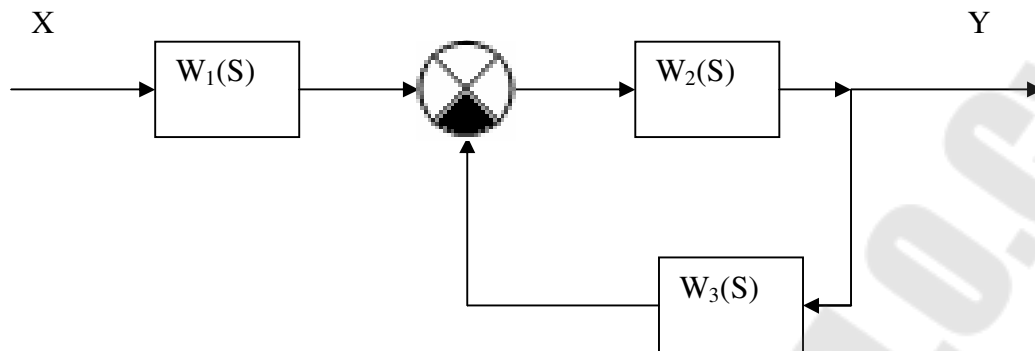


$$W_1(S) = \frac{K_1 (T_1 S + 1)^n}{T_2^m S^m} \quad W_2(S) = \frac{K_2 (T_3 S + 1)^p}{(T_4 S + 1)^q}$$

$$W_3 = K_3$$

№ Варианта	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	n	m	p	q
1	0,01	1	5	0,1	0,5	1	4	1	1	1	1
2	0,02	1	4	0,2	0,6	2	3	1	0	0	1
3	0,03	2	5	0,3	0,7	1	1	1	1	0	1
4	0,04	2	4	0,4	0,8	2	2	2	2	0	1
5	0,05	3	3	0,5	0,9	3	5	1	2	2	1
6	0,06	3	6	0,6	0,8	4	6	1	2	1	2
7	0,07	4	5	0,7	0,3	3	5	1	2	0	1
8	0,08	4	2	0,8	0,4	1	7	1	3	2	0
9	0,09	5	3	0,9	0,5	2	3	1	3	0	1
10	0,1	5	2	1	0,6	5	4	2	3	0	1
11	0,12	6	1	2	0,7	4	2	1	3	1	1
12	0,14	6	2	1	0,8	2	5	1	2	1	0
13	0,16	7	5	0,5	0,6	4	3	2	2	1	1
14	0,18	7	4	0,3	0,2	6	7	1	3	1	2

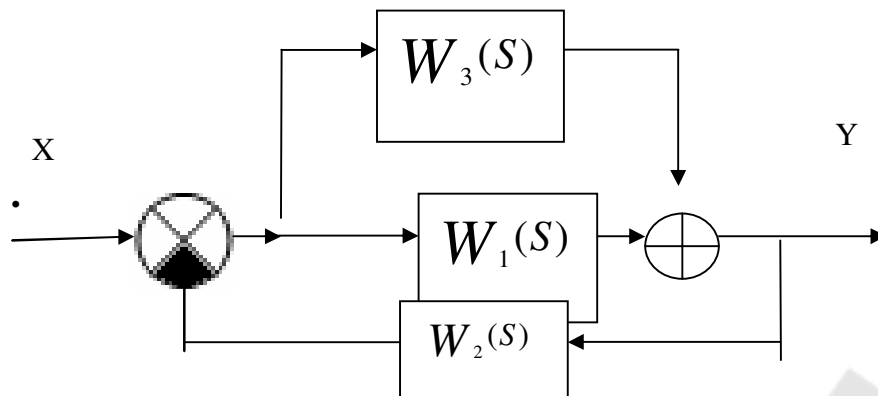
**Схема 4.**



$$W_1(S) = \frac{K_1}{(T_2 S + 1)^n} ; W_2(S) = \frac{1}{T_2^m S^m} ; W_3(S) = \frac{K_3 (T_3 S + 1)^p}{(T_4 S + 1)^q}$$

№ варианта	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	n	m	p	q
1	1	1	2	0,1	0,2	3	1	1	1	1	1
2	2	0,8	1	0,2	0,3	2	1	2	2	0	1
3	3	0,6	3	0,3	0,4	1	2	1	2	0	1
4	4	0,4	4	0,1	0,1	4	2	1	1	0	1
5	5	0,2	3	0,2	0,4	3	3	1	3	0	1
6	6	2	4	0,3	0,5	4	5	2	1	1	1
7	7	1,5	5	0,4	0,6	5	4	1	2	1	2
8	8	1,2	6	0,5	0,7	6	3	2	2	0	2
9	9	1,4	5	0,6	0,4	3	4	2	1	1	2
10	10	0,1	6	0,4	0,6	1	5	1	0	1	2
11	9	0,2	7	0,6	0,2	2	4	1	1	1	2
12	8	0,3	8	0,3	0,3	4	6	0	1	2	1
13	6	0,5	7	0,8	0,1	7	8	1	1	2	2
14	4	0,7	9	0,3	0,2	6	5	1	2	0	2

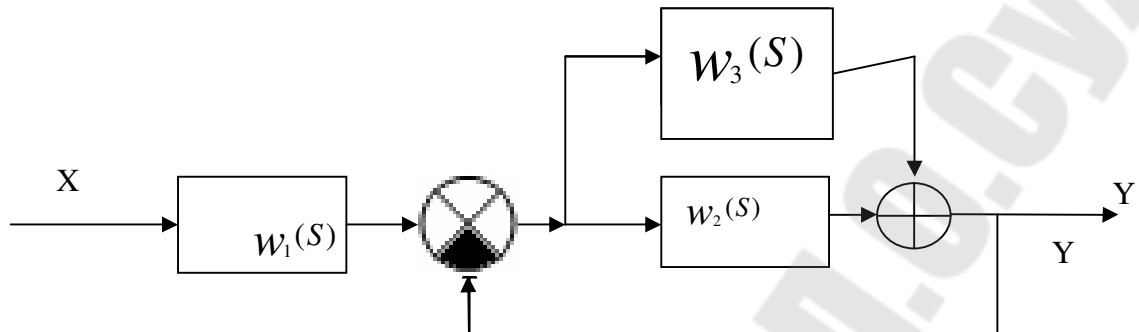
Схема 5.



$$W_1(s) = \frac{k_1(T_1s+1)^n}{T_2^m s^m (T_3s+1)^p}; \quad W_2(s) = \frac{K_2}{(T_4+1)^q}; \quad W_3(s) = k_3$$

№ варианта	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	n	m	p	q
1	0,01	0,2	10	0,1	0,2	0,3	0,4	0	1	1	1
2	0,02	0,1	9	0,2	0,3	0,4	0,6	1	1	1	1
3	0,03	0,3	8	0,3	0,8	0,5	0,7	1	2	0	1
4	0,04	0,4	6	0,4	0,5	0,6	0,9	1	2	1	1
5	0,05	0,5	7	0,5	0,6	0,9	0,8	1	1	2	1
6	0,06	0,8	5	0,6	0,7	0,8	0,5	1	1	1	2
7	0,07	0,6	4	0,7	0,1	0,2	0,3	1	1	2	2
8	0,08	0,7	3	0,8	0,4	0,7	0,9	1	2	0	1
9	0,09	0,9	2	0,9	1,2	1	2	2	2	0	1
10	0,1	2	3	4	5	6	7	1	3	1	1
11	0,2	1	3	1	2	5	4	2	2	1	1
12	0,3	2	1	3	4	1	3	1	1	0	1
13	0,4	3	5	1	0,5	2	5	1	0	2	1
14	0,5	4	1	2	4	3	1	1	2	2	1

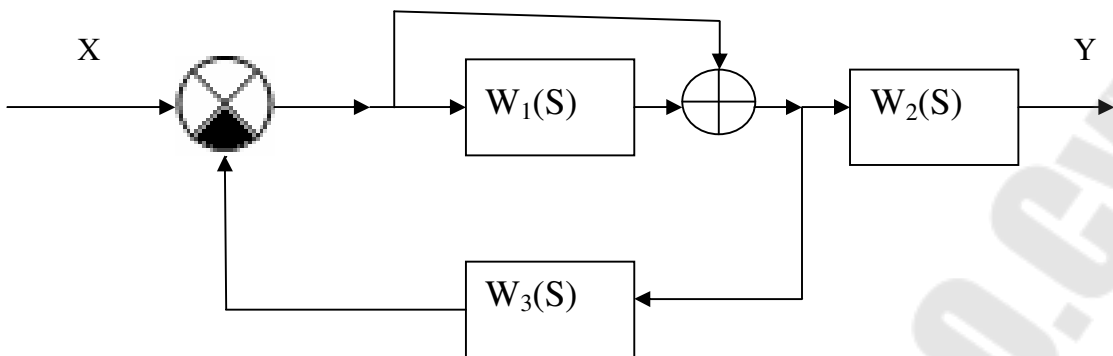
### Схема 6



$$W_1(S) = \frac{K_1}{(T_1+1)^n}; \quad W_2(S) = \frac{k_2(T_2S+1)^m}{T_3^p S^p (T_4S+1)^q}; \quad W_3(S) = k_3$$

№	K1	K2	K3	T1	T2	T3	T4	n	m	p	q
1	10	100	20	5	15	5	8	1	0	1	1
2	20	90	18	4	12	4	9	1	1	1	1
3	30	80	16	3	10	6	10	1	1	0	1
4	40	70	12	2	5	7	6	1	1	1	0
5	50	60	10	1	3	8	4	1	1	1	0
6	60	50	5	6	2	9	2	1	1	2	0
7	70	40	6	3	4	1	3	1	1	2	1
8	80	30	7	8	1	2	1	1	0	2	1
9	90	20	8	7	6	3	5	1	0	3	1
10	1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	2
11	2	1	2	3	4	3	2	2	1	1	1
12	3	4	6	8	7	4	3	2	0	1	1
13	4	3	5	2	1	2	4	2	0	2	1
14	5	4	8	9	6	4	3	2	1	1	0

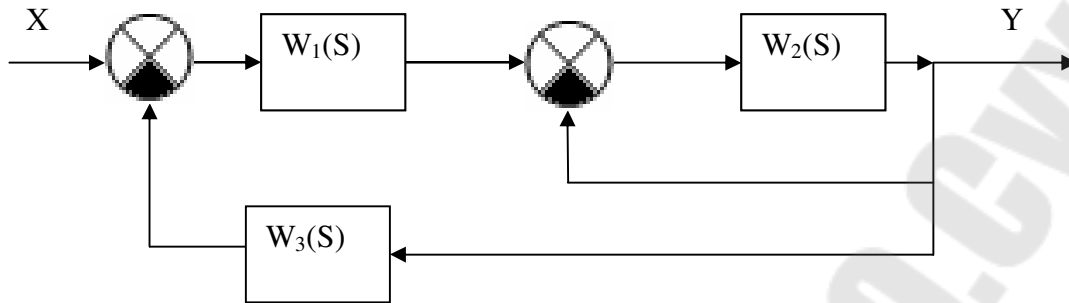
Схема 7



$$W_1(S) = \frac{K_1}{T_1^n S^n (T_2 S + 1)^m}; \quad W_2(S) = K_2; \quad W_3(S) = \frac{K_3 (T_3 S + 1)^n}{(T_4 S + 1)^q}$$

№	K1	K2	K3	T1	T2	T3	T4	n	m	p	q
1	0,1	1	10	0,1	2	1	4	1	0	0	1
2	0,2	4	9	0,2	1	2	3	1	1	0	1
3	0,3	2	8	0,3	3	3	2	1	0	1	1
4	0,4	3	7	0,4	6	5	7	1	2	0	1
5	0,5	4	6	0,8	5	7	4	2	1	0	1
6	0,6	5	5	0,9	4	6	3	2	1	1	1
7	0,7	2	3	0,6	7	4	1	2	1	2	2
8	0,8	5	2	0,7	8	9	5	1	1	1	2
9	0,9	6	1	0,7	9	3	2	2	2	0	1
10	1	3	2	0,1	5	7	3	1	2	1	1
11	1,2	4	1	0,5	2	6	6	1	1	0	2
12	1,5	6	8	0,8	7	3	9	1	1	1	1
13	2	4	6	1	4	8	2	2	1	2	1
14	3	1	5	0,4	3	2	7	1	2	1	2

Схема 8

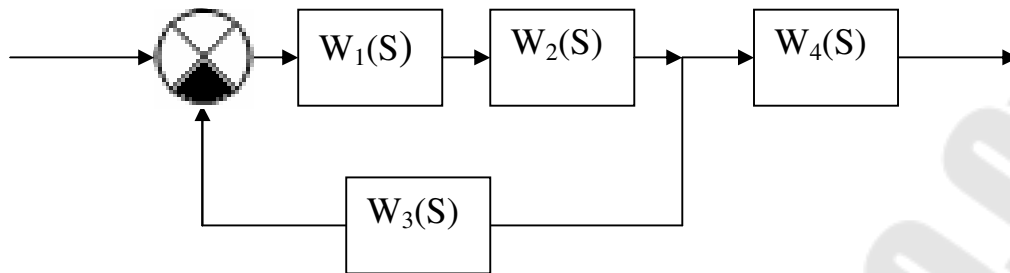


$$W_1(S) = \frac{k_1(T_1S+1)^n}{T_2^m S^m}; \quad W_2 = \frac{K_2(T_2S+1)^p}{(T_4S+1)^q}; \quad W_3(S) = K_3$$

№	K1	K2	K3	T1	T2	T3	T4	n	m	p	q
1	1	0,1	2	0.1	1	0.3	10	0	1	1	1
2	2	0,4	1	0.7	8	0.2	5	1	1	1	1
3	3	0,6	5	0.4	9	0.1	7	1	1	0	1
4	4	0,5	3	0.6	5	0.3	4	1	1	1	0
5	5	0,2	4	0.2	2	0.4	1	1	0	1	1
6	6	0,3	7	0.9	3	0.5	3	1	2	0	1
7	7	0,4	8	0.3	4	0.7	4	1	2	1	1
8	8	0,5	3	0.1	6	0.5	8	0	2	1	1
9	9	0,3	1	0.2	5	0.2	2	2	2	0	1
10	5	0,6	4	0.5	9	0.6	9	2	2	1	1
11	4	0,1	2	0.4	8	0.3	1	2	3	0	1
12	2	0,8	7	0.6	6	0.2	4	1	3	0	1
13	1	0,6	6	0.4	7	0.1	3	1	3	1	1
14	3	0,1	8	0.5	4	0.4	4	2	3	1	1

### Пример расчёта структурной схемы.

Для заданной структурной схемы:



При известных передаточных функциях элементарных звеньев:

$$W_1(s) = \frac{K_1}{T_1s + 1}; \quad W_2(s) = \frac{K_2}{T_2s}; \quad W_3(s) = \frac{K_3}{T_3s + 1}; \quad W_4(s) = K_4$$

необходимо :

1. Получить передаточную функцию системы.
2. Получить АФЧХ, АЧХ, ФЧХ системы.
3. Получить характеристическое уравнение.
4. Составить определитель Гурвица.

-----  
-

1. Передаточная функция данной системы:

$$W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)} W_4(s) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_4}{T_2s(T_1s + 1) \left( 1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{T_2s(T_1s + 1)(T_3s + 1)} \right)} =$$
$$= \frac{K_1 K_2 K_4 (T_3s + 1)}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 + T_3) T_2 s^2 + T_2 s + K_1 K_2 K_3}.$$

2. Амплитудно – фазовая частотная характеристика (АФЧХ) системы:



$$\begin{aligned}
W_{(iw)} &= \frac{K_1 K_2 K_4 (1 + iwT_3)}{T_1 T_2 T_3 i^3 w^3 + (T_1 + T_3) T_2 i^2 w^2 + T_2 iw + K_1 K_2 K_3} = \\
&= \frac{K_1 K_2 K_4 (1 + iwT_3)}{\left[ K_1 K_2 K_3 - (T_1 + T_3) T_2 w^2 \right] + i \left[ wT_2 - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]} = \\
&= \frac{K_1 K_2 K_4 (1 + iwT_3)}{T_1 T_2 T_3 i^3 w^3 + (T_1 + T_3) T_2 i^2 w^2 + T_2 iw + K_1 K_2 K_3} = \\
&= \frac{K_1 K_2 K_4 (1 + iwT_3)}{\left[ K_1 K_2 K_3 - (T_1 + T_3) T_2 w^2 \right] + i \left[ wT_2 - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}.
\end{aligned}$$

Чтобы избавиться от мнимой единицы в знаменателе, умножаем числитель и знаменатель выражения на сопряженное знаменателю комплексное число. После сокращений и выделения действительной и мнимой частей получаем:

$$\begin{aligned}
W(i\omega) &= \frac{k_1 k_2 k_4 \left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 + \omega T_3 (\omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3) \right]}{\left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right]^2 + \left[ \omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]^2} + \\
&+ i \frac{k_1 k_2 k_4 \left\{ \omega T_3 \left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right] - (\omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3) \right\}}{\left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right]^2 + \left[ \omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]^2}
\end{aligned}$$

Вещественная частотная характеристика :

$$P(\omega) = \frac{\left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 + \omega T_3 (\omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3) \right]}{\left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right]^2 + \left[ \omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]^2}$$

Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega) = \frac{k_1 k_2 k_4 \left\{ \omega T_3 \left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right] - (\omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3) \right\}}{\left[ k_1 k_2 k_3 - (T_1 + T_3) T_2 \omega^2 \right]^2 + \left[ \omega T_2 - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) :

$$A(\omega) = \sqrt{\left[ P(\omega) \right]^2 + \left[ Q(\omega) \right]^2}$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

3. Характеристическое уравнение можно получить из условия:

$$\frac{1}{W(s)} = 0$$

Таким образом характеристическое уравнение получаем в виде:

$$D(S) = T_1 T_2 T_3 S^3 + (T_1 + T_3) T_2 S^2 + T_2 S + k_1 k_2 k_3 = a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0 = 0$$

где  $a_3 = T_1 T_2 T_3$ ;  $a_2 = (T_1 + T_3) T_2$ ;  $a_1 = T_2$ ;  $a_0 = k_1 k_2 k_3$ .

4. Определитель Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

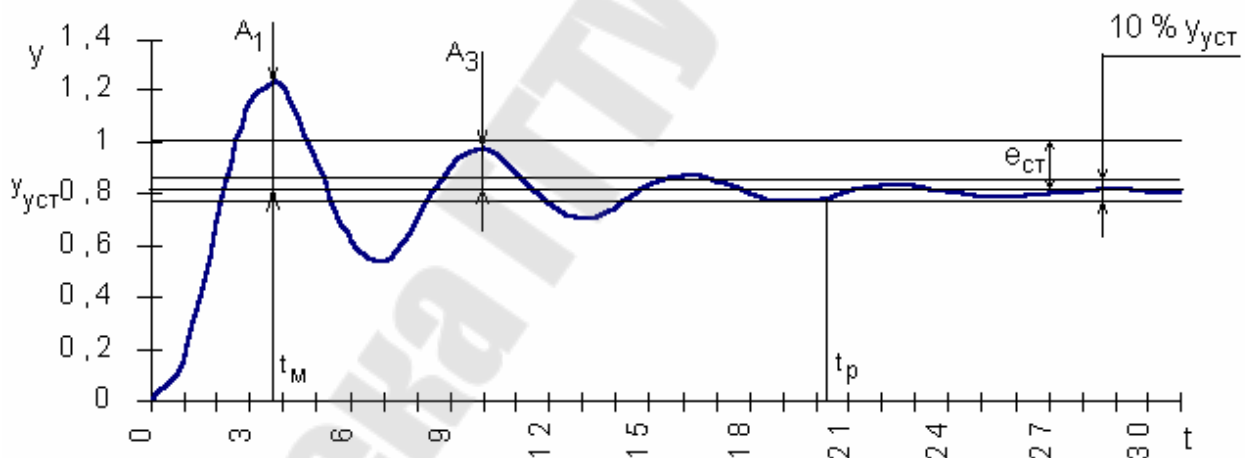
5. Показатели качества регулирования.

Реакция выходной величины  $y(t)$  элемента или системы на единичное ступенчатое входное воздействие называется переходной функцией.

Ее обозначают –  $h(t)$ .

$$h(t) = \int_0^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(W) \cos \omega t d\omega \right] dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(W)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

Предположим, переходная кривая, имеет колебательный вид (см. рис.).



Сразу по ней определяется установившееся значение выходной величины  $y_{уст}$ .

Степень затухания  $\psi$  определяется по формуле

$$\psi = 1 - \frac{A_3}{A_1},$$

где  $A_1$  и  $A_3$  - соответственно 1-я и 3-я амплитуды переходной кривой.

Перерегулирование  $\sigma = \frac{A_1}{y_{уст}} = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}}$ , где  $y_{max}$  - максимум

переходной кривой.

**Статическая ошибка**  $e_{ст} = x - y_{уст}$ , где  $x$  - входная величина.

**Время максимального перерегулирования**  $t_m$  определяется по графику.

**Время регулирования**  $t_p$  определяется следующим образом: Находится допустимое отклонение  $\Delta = 5\% y_{уст}$  и строится «трубка» толщиной  $2\Delta$ . Время  $t_p$  соответствует последней точке пересечения  $y(t)$  с данной границей. То есть время, когда колебания регулируемой величины перестают превышать 5 % от установившегося значения.

**Стасенко Дмитрий Леонидович**

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Практикум**

**по одноименной дисциплине  
для студентов специальности 1-36 01 07  
«Гидропневмосистемы мобильных  
и технологических машин»  
дневной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку  
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного  
учебно-методического документа 06.06.18.

Рег. № 73Е.

<http://www.gstu.by>