Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Механика»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ПРАКТИКУМ
по дисциплине «Теоретическая механика»
для студентов специальностей
1-36 01 07 «Гидропневмосистемы
мобильных и технологических машин»
и 1-36 12 01 «Проектирование и производство
сельскохозяйственной техники»
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2018

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Р47

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 10 от 19.06.2017 г.*)

Составитель С. Ф. Андреев

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Р47 **Решение** задач динамических систем методами аналитической механики : практикум по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» и 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» днев. и заоч. форм обучения / сост. С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О Сухого, 2018. – 54 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-369-1

Содержит краткие теоретические сведения, методические указания к решению задач, примеры решения задач, вопросы для самопроверки знаний.

Для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» и 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-985-535-369-1

ВВЕДЕНИЕ

В 1788 г. в книге «Аналитическая механика», изданной в Париже, Жозеф Луи Лагранж подвел итог всему, что было сделано в механике в 18 в., и сформулировал новый подход к решению проблем динамики. В настоящее время аналитическая механика является частью курса теоретической механики, в которой изучается равновесие и движение механической системы. В данном практикуме изложены основные теоретические сведения из аналитической механики, приведены примеры решения задач динамики механической системы и даны методические рекомендации к их решению [1]–[11].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Свободные и несвободные механические системы

Объектом изучения аналитической механики является механическая система.

Механической системой, или системой материальных точек, называется выделенное по какому-либо признаку множество конечного или бесконечного числа материальных точек, движение и положение каждой из которых зависит от движения и положения остальных точек системы. В механической системе, состоящей из N материальных точек M_k ($k = 1, 2, ..., N$), положение этих точек в декартовой системе координат $OXYZ$ определяется $3N$ взаимозависимыми координатами x_k, y_k, z_k.

Механическая система называется свободной, если материальные точки M_k могут занимать произвольные положения x_k, y_k, z_k и иметь произвольные скорости $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$. Классическим примером свободной механической системы может служить Солнечная система, в которой движение небесных тел не ограничивается другими телами.

Точки M_k **несвободной механической системы** в результате каких-либо ограничений (условий) не могут занимать произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости. Например, **абсолютно твердое тело** – это несвободная система материальных точек, в которой точки могут располагаться только так, чтобы расстояние между ними оставалось неизменным (рис. 1.1). Любой механизм, состоящий из множества взаимодействующих между собой звеньев (материальных тел) также является несвободной механической системой, так как положение и движение каждого звена зависит от положения и движения остальных звеньев механизма (рис. 1.2).

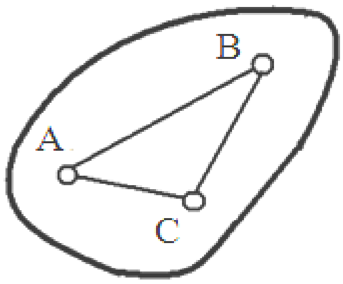


Рис. 1.1

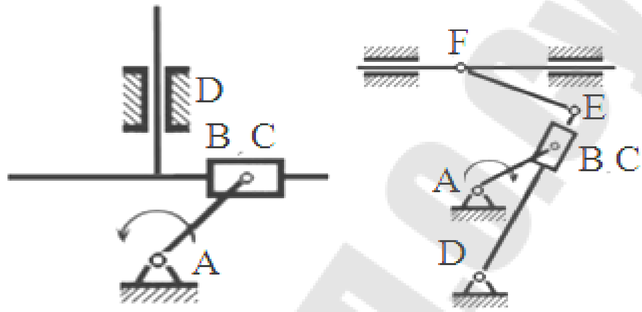


Рис. 1.2

1.2. Связи и их классификация

Связями называются любого вида ограничения (условия), которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют силы. Эти ограничения не позволяют точкам материальной системы занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости. Как известно из раздела «Статика», связями могут быть любые материальные тела, осуществляющие эти ограничения.

В аналитической механике, как и в геометрической статике, считают, что действие связи на механическую систему можно заменить **реакцией связи**, т. е. силой, с которой данная связь действует на тело.

В дальнейшем будем схематически представлять связи в виде точек, геометрических линий и поверхностей, которые можно выразить математическими уравнениями, называемыми уравнениями связей. В эти уравнения входят время, координаты точек и производные от координат по времени. Мы будем рассматривать только те связи, в уравнения которых входят производные по времени от координат не выше первого порядка: $f\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) = 0$.

Материальная точка совершает несвободное движение, если благодаря связям, наложенным на точку, она вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности (рис. 1.3) или по заданной кривой (рис. 1.4).

В первом случае уравнение связи записывается как уравнение поверхности: $f(x, y, z) = 0$. Например, если поверхностью, по которой движется точка, является сфера радиусом *R*, то уравнение связи будет уравнением сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \qquad (1.1)$$

Во втором случае на точку наложены две связи в виде двух пересекающихся поверхностей, траектория точки представлена как линия пересечения двух поверхностей. Здесь необходимо записать два уравнения связи: $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$.

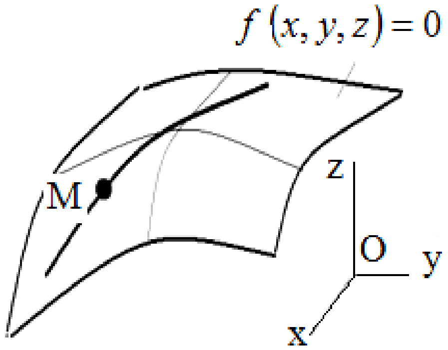


Рис. 1.3

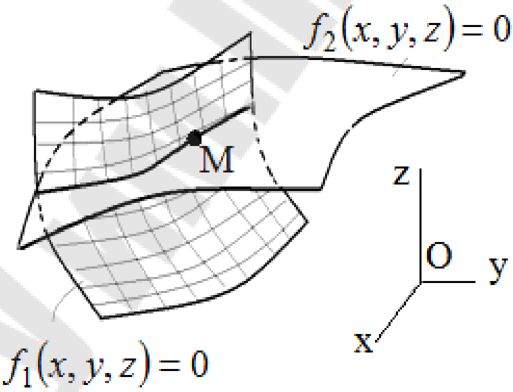


Рис. 1.4

Пример 1.1. Материальная точка совершает несвободное движение по окружности радиусом *r*. Необходимо записать уравнения связей, наложенных на точку.

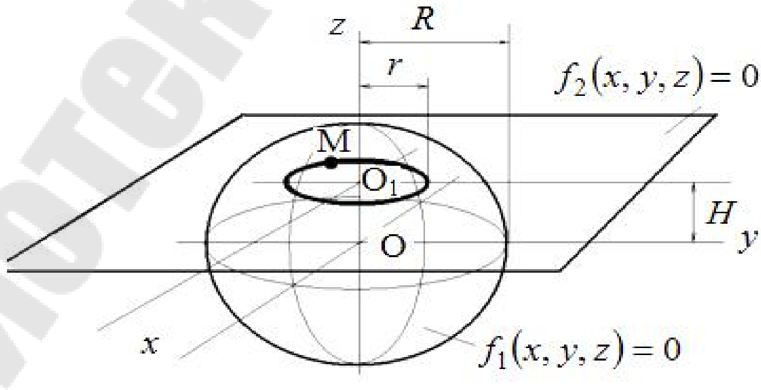


Рис. 1.5

Решение. Заданная траектория может быть получена пересечением двух поверхностей (рис. 1.5). Уравнение первой поверхности

$f_1(x, y, z) = 0$ записывается как уравнение сферы (1.1). Уравнение второй поверхности $f_2(x, y, z) = 0$ записывается как уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости *xOy* и отстоящей от нее на расстоянии *H*:

$$z - H = 0. \qquad (1.2)$$

Решая систему двух уравнений (1.1) и (1.2), получаем уравнение заданной траектории точки:

$$x^2 + y^2 + r^2 = 0.$$

Если на материальную систему, состоящую из *N* материальных точек, будет наложено *L* связей, то в общем случае аналитически это условие можно записать в виде системы уравнений или неравенств

$$f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ ..., x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) \le 0 . \qquad (1.3)$$

Здесь: $m = 1, 2, ..., L$ – индекс, определяющий номер связи; $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k \ (i = 1, 2, ..., N)$ – проекции скорости точки M_k на оси декартовой системы координат; t – время. Выражение (1.3) удобно записывать в краткой форме

$$f_m(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) \le 0.$$

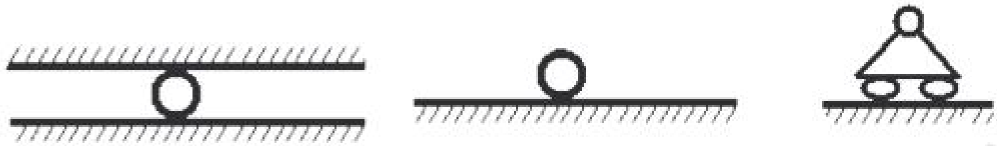
Различают связи удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние). **Удерживающие связи** сохраняют налагаемые на механическую систему ограничения при любом положении системы. **Неудерживающие связи** этим свойством не обладают.

Примером двусторонней (удерживающей) связи могут быть две горизонтальные плоскости (рис. 1.6, *а*), которые препятствуют перемещению шарика как вниз, так и вверх по вертикали. В этом случае в уравнении связей сохраняется знак равенства:

$$f_m(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0.$$

Примером односторонней (неудерживающей) связи может быть горизонтальная плоскость (рис. 1.6, *б*), которая препятствует перемещению шарика вертикально вниз, но не мешает его движению вертикально вверх. В этом случае уравнение связи записывается неравенством $f_m(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \ge 0.$

К односторонней (неудерживающей) связи относится, например, шарнирно-подвижная опора (рис. 1.6, *в*).



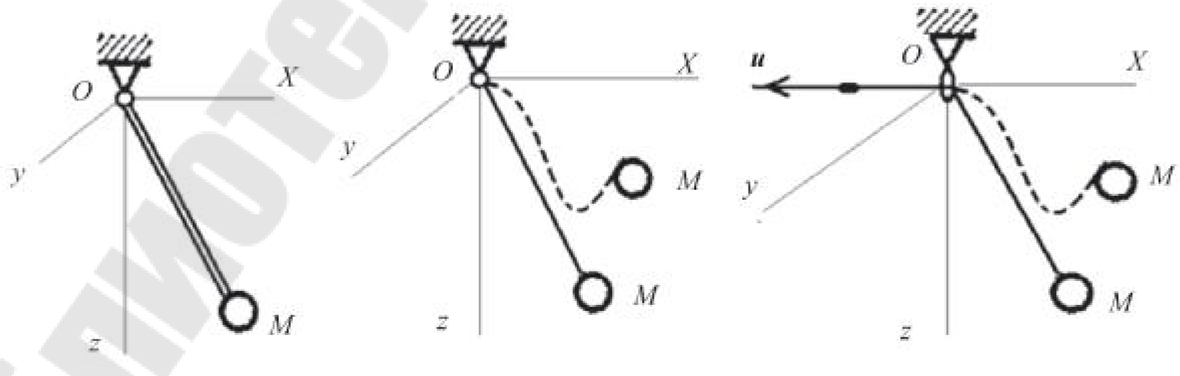
а) *б)* *в)*

Рис. 1.6

Если уравнение удерживающей связи содержит явно время t, $f_m(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0$, то связь называется **реономной** или **нестационарной**. Если связь не изменяется со временем и в ее уравнение время явно не входит, $f_m(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0$, то такая связь называется **склерономной** или **стационарной**. Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. Для стационарной геометрической связи уравнение связи для одной точки имеет вид $f(x_i, y_i, z_i) = 0$. Если поверхность, по которой движется точка, изменяется, то связь нестационарная и ее уравнение будет $f(x_i, y_i, z_i, t) = 0$.

Связь, налагающая ограничения только на координаты точек системы (на положение точек), т. е. связь, уравнение которой не содержит производных от координат, называется **геометрической** или **голономной**. Механическая система в этом случае называется **голономной системой**.

Например, для точки *M* жесткого стержня *OM*, закрепленного шарнирно в неподвижной точке *O*, связь является геометрической, неосвобождающей, стационарной (рис. 1.7, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 1.7

Точка M может перемещаться только по поверхности сферы радиусом OM. Уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - OM^2 = 0.$$

Если стержень заменить нитью такой же длины OM то связь будет геометрической, освобождающей, стационарной. Точка M в этом случае может перемещаться как по поверхности сферы, так и внутри сферы (рис. 1.7, *б*). Находясь внутри сферы, точка M совершает свободное движение, уравнение связи в этом случае имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - OM^2 \le 0.$$

Предположим теперь, что в точке O помещено кольцо (рис. 1.7, *в*), через которое нить втягивается с какой-то постоянной скоростью u. Так как длина нити с течением времени изменяется, то радиус сферы будет изменяться по формуле $R(t) = OM - ut$. Уравнение этой связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - R(t)^2 \le 0$. Это пример геометрической освобождающей нестационарной связи.

Связи, уравнения которых содержат проекции скоростей точек $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, называются **кинематическими** или дифференциальными. Такие связи можно получить из геометрических связей дифференцированием переменных координат. И наоборот, интегрирование дифференциальных уравнений связей позволяет получить геометрические (голономные) связи.

Если уравнение кинематической связи не интегрируется, то такая связь называется неинтегрируемой (неголономной). Механическая система с неголономными связями называется **неголономной системой**. Такие системы в нашем дальнейшем изложении рассматриваться не будут.

1.3. Действительные и возможные перемещения точек механической системы

Действительное перемещение точки – это элементарное (бесконечно малое) перемещение $d\vec{r}$ под действием заданных сил, которое точка может совершить за время dt при заданных наложенных связях. За время dt точка может совершить только одно действительное перемещение.

Возможное перемещение материальной точки – это такое бесконечно малое воображаемое (виртуальное) перемещение $\delta\vec{r}$, которое точка могла бы совершить при наложенных на нее связях в рассматриваемый момент времени. В отличие от действительного перемещения, возможных перемещений у точки в момент времени t может быть бесконечно много.

Действительное перемещение $d\vec{r}$ и возможное перемещение $\delta\vec{r}$ являются векторными величинами и потому на схемах при решении задач они изображаются направленными прямолинейными отрезками.

Если связью для точки является движущаяся поверхность, то действительное перемещение точки $d\vec{r}$ за время dt является векторной суммой относительного перемещения $d\vec{r}_r$ точки по поверхности и переносного перемещения $d\vec{r}_e$ вместе с поверхностью:

$$d\vec{r} = \delta\vec{r}_r + d\vec{r}_e.$$

Так как положение точки в момент времени t определяется радиус-вектором $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то возможное перемещение точки будет равно приращению (вариации) радиус-вектора $\delta\vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k}$. Координаты нового положения точки будут определяться по формулам $x' = x + \delta x$, $y' = y + \delta y$, $z' = z + \delta z$, где $\delta x, \delta y, \delta z$ – проекции вектора $\delta\vec{r}$ (вариации координат).

Для системы материальных точек (механической системы) с голономными связями **возможным перемещением** называется любая совокупность элементарных перемещений всех точек (или тел) этой системы, которые допускаются наложенными на систему связями.

Пример 1.2. Возможным перемещением рычага AB (рис. 1.8) является его поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки O. Требуется найти возможные перемещения точек A и B.

Решение. Рычаг AB рассматривается как механическая система, на которую наложена связь – шарнирно-неподвижная опора в точке O. Координатой, определяющей положение рычага, совершающего вращательное движение, является угол φ поворота тела.

Зададим углу φ бесконечно малое перемещение $\delta\varphi$, которое называют возможным угловым перемещением рычага или приращением угловой координаты. При повороте рычага на угол $\delta\varphi$ точки A и B переместятся по дугам окружностей с радиусами OA и OB.

Возможные перемещения точек A и B рассматривают как величины первого порядка малости, поэтому криволинейные перемещения точек замещают направленными прямолинейными отрезками $\delta\vec{r}_A$ и $\delta\vec{r}_B$. Вариации координат точек A и B равны: $\delta x_A = 0$, $\delta y_A = -OA\delta\varphi$, $\delta x_B = 0$, $\delta y_B = OB\delta\varphi$. Модули возможных перемещений точек A и B определяют по формулам:

$$\delta r_A = \delta y_A = OB\,\delta\varphi \text{ и } \delta r_B = \delta y_A = OB\,\delta\varphi.$$

Пример 1.3. Кривошипно-шатунный механизм (рис. 1.9) состоит из кривошипа OA и шатуна AB, причем $OA = AB = L$. Зная угловую координату φ кривошипа OA, определить возможные перемещения точек A и B.

Решение. Сначала рассмотрим геометрическую задачу для равнобедренного треугольника OAB и прямоугольного треугольника OPB. Здесь точка P – мгновенный центр скоростей звена AB.

Запишем координаты точек A и B:

$x_A = OA\cdot\cos\varphi$, $y_A = OA\sin\varphi$, и $x_B = x_A + AB\cdot\cos\varphi$, $y_B = 0$.

Вычислим вариации координат и найдем возможные перемещения точек A и B:

$$\delta x_A = -OA\sin\varphi\delta\varphi,\ \delta x_A = OAc\cos\varphi\delta\varphi,$$

$$\delta x_B = -OA\sin\varphi\delta\varphi - AB\sin\varphi\delta\varphi,\ \delta y_B = 0.$$

$$\delta r_A = \sqrt{\delta x_A^2 + \delta y_A^2} = OA\delta\varphi\sqrt{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2} = OA\delta\varphi,$$

$$\left|\delta r\right|_B = \left|\delta x_B\right| = \left|-OA\sin\varphi\delta\varphi - AB\sin\varphi\delta\varphi\right| = (OA + AB)\sin\varphi\delta\varphi.$$

Возможное перемещение точки B можно также вычислить с помощью мгновенного центра скоростей P шатуна AB. Так как $\delta r_B = PB\cdot\delta\varphi$, $PB = (OA + AB)\sin\varphi$, то $\left|\delta r_B\right| = (OA + AB)\sin\varphi\cdot\delta\varphi$.

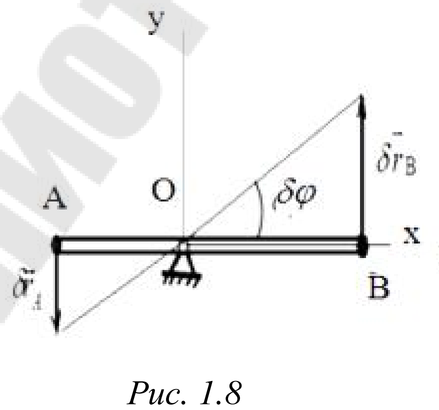


Рис. 1.8

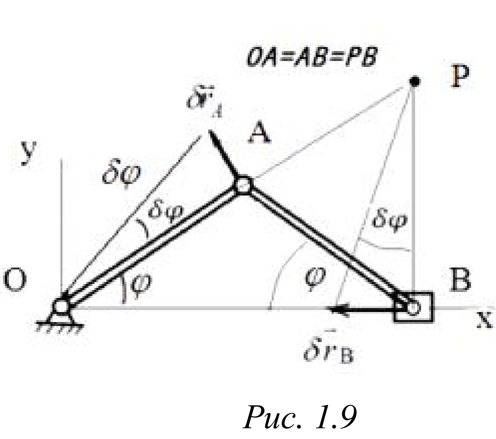


Рис. 1.9

1.4. Обобщенные координаты и число степеней свободы механической системы

Предположим, что на систему, состоящую из N материальных точек, наложено L голономных удерживающих связей:

$$f_m(x_k, y_k, z_k, t) = 0,\ m = 1, 2, ..., L,\ k = 1, 2, ..., N. \qquad (1.4)$$

Здесь $3N$ координат точек входят в систему L уравнений связей, и поэтому не все координаты могут быть независимыми. В этом случае положение точек механической системы определяется заданием независимых координат, которые называются **обобщенными координатами**. Будем обозначать обобщенные координаты буквой q_j, где индекс $j = 1, 2, ..., S$. Здесь S – число независимых координат. Решение L уравнений (1.4) позволяет выразить зависимые координаты точек механической системы через S независимых координат q_j.

Число независимых координат (параметров системы) будет определяться по формуле $S = 3N - L$. Это число S зависит от количества точек (тел), входящих в систему и от числа L наложенных связей.

Все декартовые координаты точек системы можно определить как многопараметрические функции:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_s, t),\ y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_s, t),\ z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_s, t).$$

При наличии стационарных связей функции координат точек не содержат явно времени. Положение точек может быть определено также в векторной форме: радиус-векторы точек также будут функциями обобщенных координат:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s, t) \text{ и } \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s).$$

Будем в дальнейшем рассматривать только системы с геометрическими связями (голономные системы). Для таких систем число независимых координат q_j, определяющих положение системы, совпадает с числом S ее степеней свободы: $S = 3N - L$.

Разность $L = 3N - S$ определяет число координат q_m, на которые действуют ограничения, где $m = 1, 2, ..., L$.

При выборе обобщенной координаты $q_1, q_2, ..., q_s$ можно использовать любые независимые друг от друга параметры, которые в общем случае могут иметь различный геометрический и механический смысл. Ими могут быть линейные ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$) и угловые величины ($q_1 = \varphi$, $q_2 = \alpha$), а также параметры, имеющие размерность площади, объема и т. д.

Пример 1.4. Движение конического маятника описывается двумя угловыми координатами φ_1 и φ_2 (рис. 1.10).

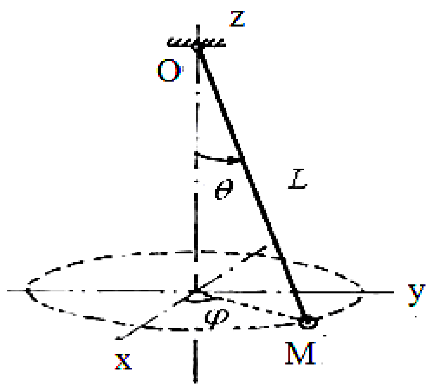


Рис. 1.10

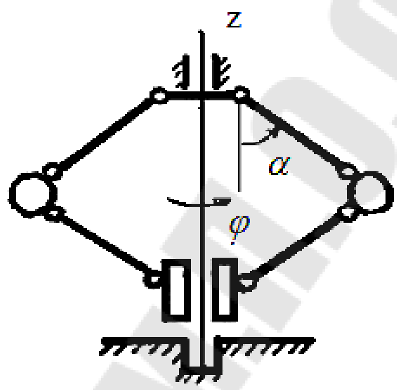


Рис. 1.11

Пример 1.5. Положение всех точек центробежного регулятора (рис. 1.11), вращающегося вокруг вертикальной оси, определяется заданием угла поворота регулятора φ и угла α, образованного каждым из стержней с вертикалью. Независимые друг от друга углы и можно принять за обобщенные координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \alpha$.

1.5. Элементарная работа силы на возможном перемещении. Обобщенная сила

Возможную (элементарную) работу силы $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$ на возможном перемещении точки M вычисляют по обычным формулам для элементарной работы, например, формулой скалярного произведения вектора силы $\vec{P}$ на вектор возможного перемещения $\delta\vec{r}$ точки M:

$$\delta A = \vec{P}\delta\vec{r} = P_x\delta x + P_y\delta y + P_z\delta z\,. \qquad (1.5)$$

Для системы N материальных точек M_k, находящихся под действием системы сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_N$, возможная работа δA, вычисляется по формуле как сумма элементарных работ

$$\delta A=\sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k\delta\vec{r}_k=\sum_{k=1}^{N}(P_{xk}\delta x_k+P_{y_k}\delta y_k+P_{zk}\delta z_k). \qquad (1.6)$$

Запишем формулы для определения вариаций декартовых координат произвольной точки M_k:

$$\delta x_k=\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}\delta q_j,\ \delta y_k=\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}\delta q_j,\ \delta z_k=\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\delta q_j. \qquad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.8), после преобразований получим

$$\delta A=\sum_{j=1}^{S}\ \sum_{k=1}^{N}\left(P_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}+P_{y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}+P_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \qquad (1.8)$$

Здесь выражение в скобках называется обобщенной силой:

$$Q_j=\sum_{k=1}^{N}\left(P_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial q_j}+P_{y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j}+P_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}. \qquad (1.9)$$

Число обобщенных сил, как и число обобщенных координат, равно числу *S* степеней свободы механической системы.

При возможном перемещении системы, когда изменяются сразу все обобщенные координаты, виртуальная работа сил определяется из выражения

$$\delta A=\sum_{j=1}^{S}Q_j\delta q_j=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+...+Q_S\delta q_S. \qquad (1.10)$$

Из (1.10) видим, что каждой обобщенной координате q_j соответствует своя обобщенная сила Q_j.

Выражение (1.10) позволяет дать следующее определение обобщенных сил: **обобщенными силами** называются коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы $\delta A_j=Q_j\cdot\delta q_j$, т. е.

$$Q_j=\frac{\delta A_j}{\delta q_j}. \qquad (1.11)$$

В случае консервативной механической системы потенциальные силы определяются по формулам:

$$F_{xk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k},\ F_{yk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}\ ,\ F_{zk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \tag{1.12}$$

где П – потенциальная энергия механической системы.

Используя выражения (1.9) и (1.12), получим формулу для определения обобщенной силы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ j = 1, 2, \ldots, S. \tag{1.13}$$

Таким образом, обобщенная сила консервативной механической системы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, взятой с обратным знаком. Если на точки системы действуют консервативные (потенциальные) и неконсервативные силы, то удобно решать задачу, комбинируя указанные способы вычисления обобщенных сил.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления возможной работы и обобщенных сил для голономных механических систем.

Пример 1.6. Рассмотрим случай, при котором под действием силы $\vec{P}$ тело совершает вращательное движение относительно оси Oz (рис. 1.12).

Решение. При вращении тела возможную работу силы $\vec{P}$ на возможном угловом перемещении $\delta\varphi$ в общем случае определяют по формуле

$$\delta A(\vec{P}) = \pm(M_{Oz}(\vec{P}))\delta\varphi = \pm(P \cdot h)\delta\varphi,$$

где $M_{Oz}(\vec{P})$ – момент силы $\vec{P}$ относительно оси Oz вращения; h – плечо силы $\vec{P}$.

При совпадении направления $M_{Oz}(\vec{P})$ и $\delta\varphi$ возможная работа $\delta A(\vec{P}) > 0$. Если направления $M_{Oz}(\vec{P})$ и $\delta\varphi$ противоположны, то $\delta A(\vec{P}) < 0$. Учитывая формулу (1.10), вычисляем обобщенную силу, равную моменту силы, приложенной к твердому телу $Q = M_{Oz}(\vec{P})$.

Пример 1.7. В механической системе с двумя степенями свободы груз B весом P при помощи троса поднимается лебедкой, развивающей постоянный осевой момент M (рис. 1.13). Заданы радиус барабана лебедки R и начальная длина свешивающейся части троса, равная l_0. Принимая за обобщенные координаты угол $q_1 = \varphi$ поворота лебедки и угол $q_2 = \Psi$ отклонения части AB троса от вертикали, найти обобщенные силы Q_φ и Q_ψ. Размерами блока A и массой барабана пренебречь.

Решение. На тела механической системы действуют момент M, сила тяжести груза P и реакции неподвижных опор. Возможные перемещения опор равны нулю, и поэтому возможная работа опорных реакций также равна нулю.

Запишем возможную работу силы P и момента M:

$$\delta A = M\delta\varphi + Py_B = Q_\varphi \delta\varphi + Q_\Psi \delta\psi.$$

Выразим координату груза B через обобщенные координаты

$$y_B = AB\cos\varphi - (l_0 - r\varphi)\cos\psi.$$

Вариация координаты груза равна :

$$\delta y_B = -r\cos\varphi \cdot \delta\varphi - (l_0 - r\varphi)\sin\psi \cdot \delta\varphi.$$

Обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях $\delta\varphi$ и $\delta\psi$:

$$Q_\varphi = M - mg\cos\psi,\ Q_\psi = -mg(l_0 - r\varphi)\sin\psi.$$

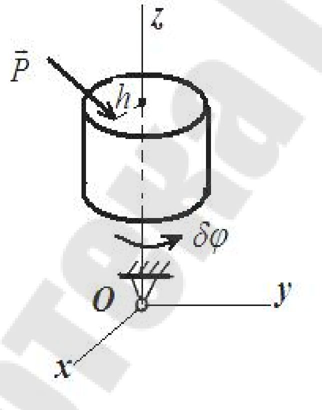


Рис. 1.12

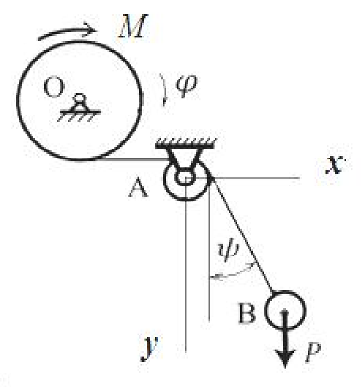


Рис. 1.13

Пример 1.8. На шарнире O закреплен однородный стержень OA длиной $2l_1$ и весом P_1. В точке A со стержнем OA шарнирно соединен второй однородный стержень AB длиной $2l_2$ и весом P_2. К концу B этого стержня приложена горизонтальная сила P_3. Принимая за обобщенные координаты углы φ_1 и φ_2, определить обобщенные силы Q_1 и Q_2 (рис. 1.14).

Решение. Выберем систему координат, как указано на рисунке.

Координаты точек $C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2)$ и $B(x_3, y_3)$, в которых приложены заданные силы, выражаются через углы φ_1 и φ_2 следующим образом:

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1, \qquad y_1 = l_1 \sin\varphi_1,$$

$$x_2 = 2l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2, \qquad y_2 = 2l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2,$$

$$x_3 = 3l_1 \cos\varphi_1 + 2l_2 \cos\varphi_2, \qquad y_3 = 2l_1 \sin\varphi_1 + 2l_2 \sin\varphi_2.$$

Проекции заданных сил на координатные оси равны: $P_{1x} = P_x$, $P_{2x} = P_2$, $P_{3x} = 0$, $P_{1y} = 0$, $P_{2y} = 0$, $P_{3y} = P_3$.

Обобщенные силы определим по формулам:

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{3}(p_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial\varphi_1} + P_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial\varphi_1}) = P_1\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} + P_2\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_1} + P_3\frac{\partial y_3}{\partial\varphi_1},$$

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{3}(p_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial\varphi_2} + P_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial\varphi_2}) = P_1\frac{\partial x_1}{\partial\varphi_2} + P_2\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_2} + P_3\frac{\partial y_3}{\partial\varphi_2}.$$

В результате получим

$$Q_1 = l_1\left[2P_3\cos\varphi_1 - (P_1 + 2P_2)\sin\varphi_1\right],$$

$$Q_2 = l_2(2P_3\cos\varphi_2 - P_2\sin\varphi_2).$$

Пример 1.9. По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит кольцо *M* весом $\vec{P}$ (рис. 1.15). Считая стержень невесомым, определить обобщенные силы.

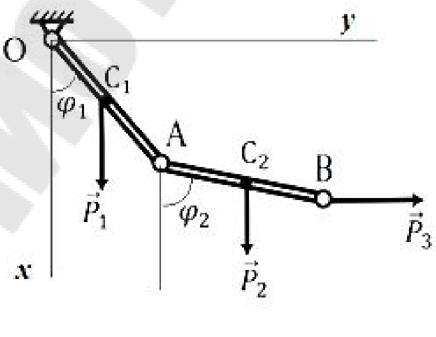


Рис. 1.14

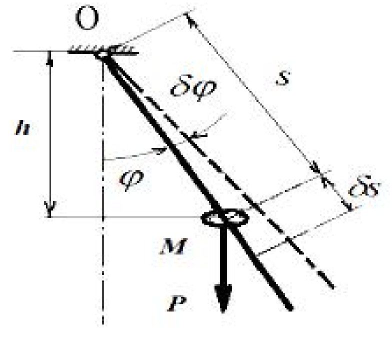


Рис. 1.15

Решение. Система имеет две степени свободы. Выбираем две обобщенные координаты $q_1 = s$ и $q_2 = \varphi$.

1. Найдем обобщенную силу, соответствующую координате *s*.

Сообщим кольцу возможное перемещение δs, оставляя координату φ неизменной. Вычислим работу силы $\vec{P}$ на этом перемещении $\delta A^{(s)} = P \cdot \delta s \cdot \cos\varphi$.

Обобщенная сила равна отношению

$$Q_s = \frac{\delta A^{(s)}}{\delta s} = \frac{1}{\delta s}(P \cdot \delta s \cdot \cos\varphi) = P \cdot \cos\varphi.$$

Задаем теперь возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ стержню, полагая $s = \text{const}$. При повороте стержня на угол $\delta\varphi$ сила совершит возможную работу $\delta A^{(\varphi)} = M_O(P) \cdot \delta\varphi$. Здесь $M_O(P) = P \cdot s \cdot \sin\varphi$ – момент силы $\vec{P}$ относительно точки *O*.

2. Найдем обобщенную силу, соответствующую координате φ:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A^{(\varphi)}}{\delta\varphi} = \frac{1}{\delta\varphi}(P \cdot s \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi) = P \cdot s \cdot \sin\varphi.$$

Так как система консервативная, обобщенные силы можно найти с помощь формул

$$Q_\varphi = -\frac{\delta \Pi}{\delta\varphi} \text{ и } Q_s = -\frac{\delta \Pi}{\delta s},$$

где $\Pi = -P \cdot h = -P \cdot s \cdot \cos\varphi$ – потенциальная энергия кольца.

В результате искомые обобщенные силы будут равны:

$$Q_\varphi = -P \cdot s \cdot \sin\varphi,\; Q_s = P \cdot \cos\varphi.$$

1.6. Идеальные связи. Признак идеальности связей

Все связи можно разделить на реальные и идеальные.

Идеальными связями называются такие связи, для которых виртуальная работа реакций связей на любом возможном перемещении равна нулю.

Чтобы получить аналитическое определение идеальных связей, обозначим реакцию связей для каждой точки M_k системы

$$\vec{R}_k = R_{xk}\vec{i} + R_{yk}\vec{j} + R_{zk}\vec{k}.$$

Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если для любого возможного перемещения точки M_k выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta\vec{r}_k = 0 = \sum_{k=1}^{N} \left(R_{xk}\delta x_k + R_{yk}\delta y_k + R_{zk}\delta z_k \right) = 0. \qquad (1.14)$$

Из формулы (1.14) видно, что для идеальных связей сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении механической системы равна нулю. Условия (1.14) являются аналитическим определением идеальных связей. Это условие должно выполняться для всех возможных перемещений $\delta\vec{r}_k$ системы.

Аналогично определению обобщенных сил введем понятие обобщенных реакций

$$Q_i^{(R)} = \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \frac{\partial\vec{r}_k}{2q_i} \qquad (1.15)$$

и запишем условие идеальности связей

$$\sum_{i=1}^{S} Q_i^{(R)} \delta q_i = 0. \qquad (1.16)$$

Так как в случае голономных связей все вариации δq_i независимы, то из условия (1.16) получим $Q_i^{(R)} = 0$, т. е. обобщенные реакции идеальных голономных связей равны нулю.

Приведем примеры идеальных связей:

1. В абсолютно твердом теле точки связаны идеальными связями. Силами реакций связей в этом случае являются внутренние силы, для которых было доказано, что сумма элементарных работ этих сил на любых элементарных перемещениях точек тела равна нулю.

2. Абсолютно гладкая поверхность или абсолютно гладкая линия является идеальной связью. Возможные перемещения точки с такими связями направлены по касательным к поверхности или линии. Силы реакций в этих случаях направлены по нормалям к ним, т. е. перпендикулярны силам. Так, например, все шарниры без трения, подвижные и неподвижные, являются связями, идеальными для тел, соединенных такими связями.

3. Гибкие нерастяжимые связи типа нитей, канатов, тросов и т. п., соединяющих точки системы, являются связями идеальными. В каждом сечении такой связи силы реакций (силы натяжения) равны по модулю и противоположны по направлению, а возможные перемещения у их точек приложения одни и те же. Сумма элементарных работ сил натяжений для всех мыслимых сечений таких связей равна нулю.

4. Закрепленные точки системы по отдельности являются связями идеальными, так как их возможные перемещения равны нулю.

1.7. Выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из N материальных точек, как известно, определяется по формуле

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \vec{v}_k. \qquad (1.17)$$

Здесь $\vec{v}_k = \dfrac{d\vec{r}_k}{dt}$ – вектор скорости точки M_k.

Пусть механическая система имеет S степеней свободы. В случае голономных нестационарных связей радиус-вектор $\vec{r}_k$ любой точки M_k этой системы является функцией обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и времени t: $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$.

Так как обобщенные координаты системы являются функциями времени, то радиус-вектор $\vec{r}_k$ является сложной функцией и, следовательно, вектор скорости $\vec{v}_k$ определяется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \qquad (1.18)$$

Здесь: $\dot{q}_s = dq_j/dt = \dot{q}$ – обобщенная скорость.

Подставив (1.18) в (1.17), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{S} \sum_{i=1}^{S} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{S} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \right)^2.$$

Из последней формулы видно, что кинетическая энергия складывается из квадратичной и линейной форм по обобщенным скоростям $\dot{q}_j$ и формы, не зависящей явно от обобщенных скоростей:

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}.$$

Здесь:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S}\sum_{i=1}^{S}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) q_j q_i \text{ – квадратичная форма;}$$

$$T^{(1)} = \sum_{j=1}^{S}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\right)\dot{q}_j \text{ – линейная форма;}$$

$$T^{(0)} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\right)^2 \text{ – форма нулевого порядка.}$$

Запишем квадратичную и линейную форму кинетической энергии в виде:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S}\sum_{i=1}^{S} a_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i \text{ и } T^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S}\left(b_j \dot{q}_j\right).$$

Здесь выражения

$$a_{ji} = \sum_{k=1}^{N}\left(m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) \text{ и } b_j = \sum_{k=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right)\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

называются массовыми (инерционными) коэффициентами.

Так как для стационарных связей $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = 0$, то $T^{(0)} = 0$ и $T^{(1)} = 0$.

Следовательно, кинетическая энергия механической системы со стационарными связями определяется квадратичной формой:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S}\sum_{i=1}^{S} a_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i.$$

Например:

– для системы с одной степенью свободы:

$$S = 1, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{1}\sum_{i=1}^{1} a_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2);$$

– для системы с двумя степенями свободы:

$$S = 2, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} a_{ji}\dot q_j \dot q_i = \frac{1}{2}a_{11}\dot q_1^2 + a_{12}\dot q_1 \dot q_2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot q_2^2.$$

Пример 1.10. Для заданного на рисунке механизма с одной степенью свободы записать выражение кинетической энергии.

Зубчатое колесо *1* электрической лебедки (рис. 1.16) весом P_1 находится в зацеплении с колесом *2*. Зубчатое колесо *2* радиусом R_2 находится в зацеплении с колесом *1* и образует с цилиндрическим барабаном радиусом r_2, на который намотана нить, цилиндрический блок весом P_2. К концу нити привязан груз *3* весом P_3, который при включении электромотора должен подниматься вверх. Считать зубчатое колесо *1* сплошным круглым цилиндром радиусом R_2. Для составного цилиндрического барабана задается величина радиуса инерции ρ_2. Массой нити пренебречь.

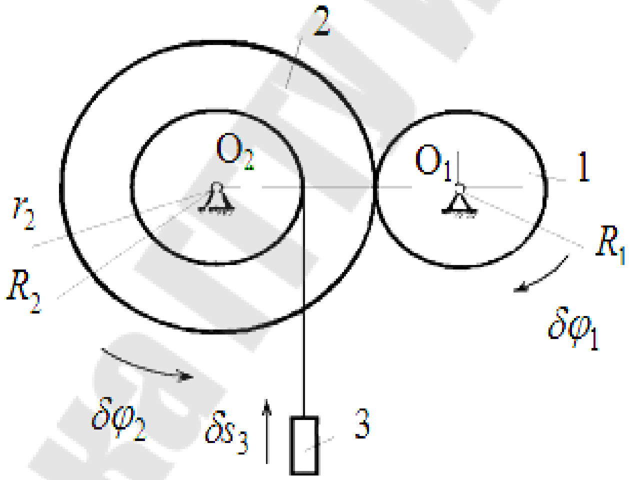


Рис. 1.16

Решение. Кинетическая энергия системы, состоящей из трех тел, равна:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad \text{(a)}$$

Кинетическая энергия каждого тела определятся по формулам:

$T_1 = \frac{1}{2}J_{O_1}\cdot\dot\varphi_1^2$ – для зубчатого колеса *1*;

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{O_2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 \text{ – для цилиндрического блока } 2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{s}_3^2 \text{ – груза } 3.$$

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ_1 зубчатого колеса *1*, считая φ_1 положительным в направлении по часовой стрелке.

По кинематической схеме механизма (см. рис. 1.16) получаем уравнения связи: $\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2}\varphi_1$ и $s_3 = r_2 \frac{R_1}{R_2}\varphi_1$.

Вычислив производные по времени, найдем выражения скоростей тел через обобщенную скорость:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}_1, \; \dot{s}_3 = r_2 \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}_1. \qquad (б)$$

Учитывая (а), суммируем кинетическую энергию тел:

$$T = \frac{1}{2} J_{O_1} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{s}_3^2. \qquad (в)$$

Подставляя в (в) формулы (б), получим выражение кинетической энергии заданного механизма системы трех тел:

$$T = \frac{1}{2}\left(J_{O_1} + J_{O_2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + m_3\left(r_2 \frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right)\dot{\varphi}_1^2. \qquad (г)$$

Здесь: $J_{O_1} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}R_1^2$ – момент инерции колеса *1* относительно оси вращения, проходящей через точку O_1; $J_{O_2} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\rho_2^2$ – момент инерции цилиндрического блока *2*, состоящего из зубчатого колеса радиусом R_2 и барабана для намотки троса радиусом r_2, относительно оси вращения, проходящей через точку O_2.

После подстановки формул моментов инерции в формулу (г) получим

$$T = \frac{1}{4g}\left(P_1 R_1^2 + \left(P_2 \rho_2^2 + 2P_3 r_2^2\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right)\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} J_{O_1}^* \dot{\varphi}_1^2.$$

Величина $J^*_{O_1}$ называется приведенным моментом инерции

$$J^*_{O_1}=\frac{1}{2g}\left(P_1R_1^2+\left(P_2\rho_2^2+2P_3r_2^2\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right).$$

Теперь выражение для кинетической энергии системы трех тел с одной степенью свободы можно представить в виде кинетической энергии тела, совершающего вращательное движение

$$T=\frac{1}{2}J^*_{O_1}\dot{\varphi}_1^2.$$

Пример 1.11. Для заданного на рис. 1.17 механизма с двумя степенями свободы записать выражение для кинетической энергии вычислить инерционные коэффициенты.

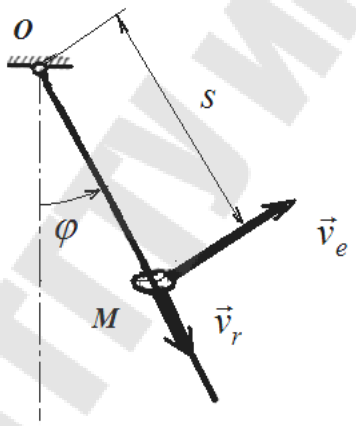


Рис. 1.17

Решение. Выберем обобщенные координаты $q_1=s$ и $q_2=\varphi$. Тогда обобщенные скорости будут, соответственно, $\dot{q}_1=\dot{s}$ и $\dot{q}_2=\dot{\varphi}$.

Абсолютная скорость точки определяется векторной суммой относительной и переносной скоростей $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e$.

В нашем примере имеем: $v_r=\dot{s}$ – модуль относительной скорости; $v_e=\dot{\varphi}s$ – модуль переносной скорости.

Так как векторы $\vec{v}_r\perp\vec{v}_e$, то $v^2=v_r^2+v_e^2=\dot{s}^2+\dot{\varphi}^2s^2$.

Получаем кинетическую энергию кольца:

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}(\dot{s}^2+\dot{\varphi}^2s^2).$$

Найдем инерционные коэффициенты, используя формулу кинетической энергии механической системы с двумя степенями свободы:

$$T = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}a_{11}\dot{s}^2 + a_{12}\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}a_{22}\dot{\varphi}^2,$$

$$a_{11} = \frac{P}{g},\ a_{12} = 0,\ a_{22} = \frac{P}{g}s^2.$$

2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. Принципы в механике

Под принципами механики понимаются методы решения задач, основанные на введении в расчеты сил инерции, анализе возможных перемещений механических систем в заданном состоянии и исключения из расчетов неизвестных реакций внешних связей.

Принцип освобождения от связей. Руководствуясь этим принципом (аксиома о связях) мысленно отбрасывают связи, заменяя их действие динамически эквивалентным действием реакций связей. Эти реакции входят в уравнения движения точек механической системы:

$$m_k\vec{a}_k = \vec{P}_k + \vec{R}_k \quad (k = \overline{1,N}), \tag{2.1}$$

из которых видно, что несвободную механическую систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием активных сил и реакций связей.

Принцип Даламбера – метод решения задач, основанный на введении в расчеты сил инерции. Этот метод иначе называют кинетостатикой (греч. *kinetos* – движимый, *statike* – равновесие).

Используют принцип Даламбера, как правило, для определения сил реакций внешних или внутренних связей движущейся системы тел.

Обозначив в (2.1) $\left(-m_k\vec{a}_k\right) = \vec{\Phi}_k$, можно получить новую запись уравнений движения:

$$\vec{P}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \tag{2.2}$$

являющейся математической формулировкой принципа Даламбера. Силу $\vec{\Phi}_k = \left(-m_k\vec{a}_k\right)$ принято называть **даламберовой силой инерции**.

Для системы материальных точек принцип Даламбера получается суммированием уравнения (2.2) по всем точкам M_k:

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{P}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k) = 0. \tag{2.3}$$

Выполним для уравнения (2.3) векторное умножение каждой силы, приложенной к точке M_k системы, на радиус вектор $\vec{r}_k$ этой точки:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k(\vec{P}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k) = 0. \tag{2.4}$$

Выделив в системе сил главные векторы заданных сил $\vec{P}^*$, сил реакций связей $\vec{R}^*$ и сил инерции $\vec{\Phi}$, а также главные моменты $\vec{M}_0^*(\vec{F})$, $\vec{M}_0^*(\vec{R})$, $\vec{M}_0^*(\vec{\Phi})$ указанных сил относительно произвольного центра *O*, получим условия равновесия всех рассматриваемых сил в векторном виде:

$$\vec{F}^* + \vec{R}^* + \vec{\Phi}^* = 0; \qquad \vec{M}_0^*(\vec{F}) + \vec{M}_0^*(\vec{R}) + \vec{M}_0^*(\vec{\Phi}) = 0.$$

Принцип Даламбера для системы материальных точек может быть сформулирован следующим образом: в любой момент движения механической системы геометрическая сумма главных векторов, а также главных моментов заданных сил, сил реакций связей и приложенных к точкам системы сил инерции равна нулю.

2.2. Принцип возможных перемещений

Так как в положении равновесия материальной системы ускорения всех ее точек равны нулю, то из уравнений (2.1) получаем, что $\vec{P}_k + \vec{R}_k = 0$. Умножив обе части этого равенства скалярно на вектор возможного перемещения точки $\delta\vec{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, запишем сумму возможных работ активных сил и реакций связей

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{P}_k\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0.$$

По условию идеальности связей работа реакций связей на возможных перемещениях равна нулю, т. е. $\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0$, поэтому получаем уравнение $\sum_{k=1}^{N} \vec{P}_k \delta \vec{r}_k = 0$, которое определяет необходимое и достаточное условие равновесия голономной материальной системы, подчиненной только идеальным связям – равенство нулю работы всех активных сил на любом виртуальном перемещении точек материальной системы. Это условие называется принципом возможных перемещений (ПВП), который называют также принципом Лагранжа.

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом: для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k (\vec{P}_k) = 0. \tag{2.5}$$

Этот принцип является основополагающим принципом аналитической механики.

В обобщенных координатах условие (2.5) имеет вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_S \delta q_S = 0.$$

Так как вариации обобщенных координат $\delta q_1,\ \delta q_2, ..., \delta q_S$ могут принимать любые значения независимо друг от друга, то полученное соотношение может быть выполнено, если все обобщенные силы, одновременно будут равны нулю.

Совокупность равенств

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ Q_S = 0$$

является аналитической формулировкой принципа возможных перемещений в обобщенных координатах.

Следовательно**, для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы по каждой из обобщенных координат были равны нулю**.

Если силы, действующие на точки голономной стационарной системы, консервативные, то выполняются соотношения

$$P_{xk} = -\frac{\partial П}{\partial x_k}, \quad P_{yk} = -\frac{\partial П}{\partial y_k}, \quad P_{zk} = -\frac{\partial П}{\partial z_k},$$

где $\Pi = \Pi\left(x_1,\ y_1,\ z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N\right)$ – потенциальная энергия.

В этом случае обобщенная сила вычисляется по формуле

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Условие равновесия механической системы в случае консервативных сил запишется в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0,\ (j = 1, 2, ..., S).$$

Отсюда следует, что в положении равновесия потенциальная энергия консервативной механической системы имеет экстремальное значение. Следовательно, с помощью принципа возможных перемещений можно определять положение равновесия несвободной материальной системы.

Принцип возможных перемещений может быть применен и для нахождения реакций идеальных связей. Для этого, в соответствии с **принципом освобождаемости**, следует отбросить связь и заменить ее действие реакцией, а затем включить эту реакцию в число активных сил. При этом следует помнить, что при отбрасывании связи увеличивается число степеней свободы механической системы.

Пример 2.1. Если связью для тела является шероховатая поверхность, то ее можно заменить гладкой поверхностью, добавляя к активным силам силу трения скольжения, а в более общем случае – еще и пару сил, препятствующую качению. При движении точки по негладкой поверхности, вектор реакции следует разложить на нормальную составляющую и силу трения (рис. 2.1). Далее надо принять, что связь идеальная, и силу трения считать активной силой.

Пример 2.2. Связь в виде жесткой заделки *A* (рис. 2.2, *а*) для твердого тела можно заменить неподвижным шарниром (рис. 2.2, *б*), или ползуном (рис. 2.2, *в*). В первом случае в расчеты вводится момент заделки M_A, во втором случае добавляется реакция $\vec{R}_A$.

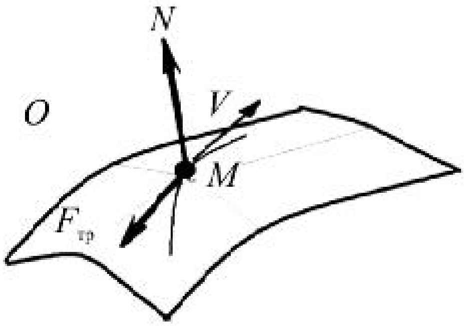


Рис. 2.1

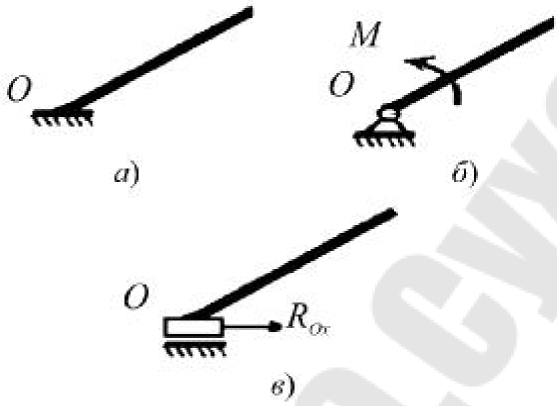


Рис. 2.2

2.3. Применение принципа возможных перемещений к решению задачи о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы

В приведенных ниже примерах рассмотрим с помощью принципа возможных перемещений способы определения какого-нибудь параметра (геометрический размер, сила, момент и т. д.), характеризующего состояние равновесия механической системы (механизма).

Пример 2.3. К кривошипу OA (рис. 2.3) кривошипно-шатунного механизма приложен вращающий момент M. Пренебрегая весом стержней, определить величину силы F, которую необходимо приложить к ползуну B, чтобы механизм находился в равновесии. В расчетах принять: $OA = AB = L$ и $\varphi = 30°$.

Решение. Механизм имеет одну степень свободы. Положение механизма определяется величиной угла φ, который кривошип образует с осью Ox. Сообщим кривошипу возможное перемещение, при котором угол φ получит приращение $\delta\varphi$. При этом, точка B, к которой приложена сила F, переместиться на величину δS_B.

Составим уравнение возможных работ:

$$M \cdot \delta\varphi - F \cdot \delta S_B = 0.$$

Определим вид движения каждого из звеньев механизма и рассмотрим возможные перемещения точек A и B. Кривошип OA, вращаясь вокруг неподвижной оси Ox, повернется на угол $\delta\varphi$. Шатун AB, совершая плоскопараллельное движение, повернется на угол $\delta\varphi_2$ вокруг мгновенного центра скоростей P.

Виртуальные скорости и возможные перемещения точек A и B пропорциональны их расстояниям до точки P .

Выразим перемещения точек через $\delta\varphi$. Так как

$$\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi = AP \cdot \delta\varphi_2 = L \cdot \delta\varphi,$$

то $\dfrac{\delta S_B}{\delta S_A} = \dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{BP}{AP}$, $\delta\varphi_2 = \delta\varphi$; $BP = AP$, $\delta S_B = \delta S_A$.

После подстановки значения $\delta S_B = L \cdot \delta\varphi$ в уравнение работ получаем ответ задачи

$$M \cdot \delta\varphi - F \cdot L \cdot \delta\varphi = 0 \text{ и } F = M / L.$$

Пример 2.4. В механизме (рис. 2.3) кривошип *OA* вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *O*. Вдоль кривошипа *OA* движется ползун *B*, шарнирно соединенный со стержнем *BC*, который скользит вдоль вертикальных направляющих. К кривошипу *OA* приложена пара сил с моментом *M*. Требуется определить зависимость вертикальной силы *F*, приложенную к стержню *BC*, от угла поворота φ кривошипа при условии, что механизм уравновешен. Силами трения и тяжести звеньев механизма пренебречь. В расчетах применить обозначение *OD* = *L*.

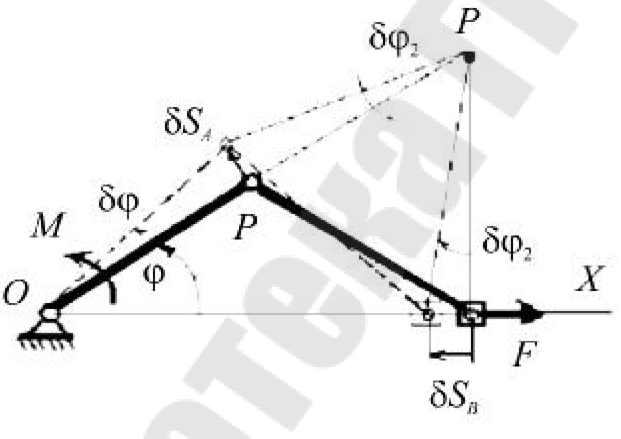


Рис. 2.3

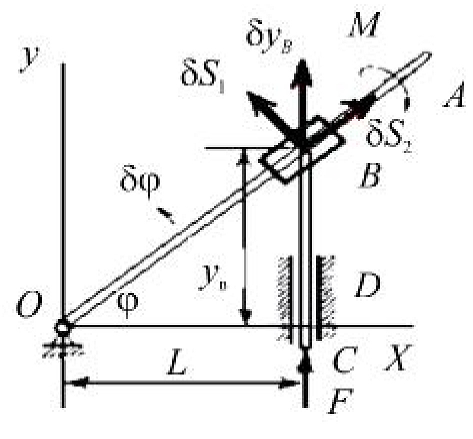


Рис. 2.4

Решение. Связи в механизме не имеют трения и потому являются идеальными. Активными силами являются пара сил с моментом *M* и сила *F*.

Сообщим механизму возможное перемещение, повернув мысленно кривошип *OA* на элементарный угол δφ в сторону возрастания угла φ, против действия момента *M*. При этом точки *B* и *C* совершат возможные перемещения δy_B и δy_C. Механизм имеет одну степень свободы, следовательно, $\delta\varphi$, δy_C и δy_B зависят друг от друга.

Запишем уравнение работ:

$$-M\delta\varphi + F\delta y_C = 0. \qquad \text{(а)}$$

Здесь δy_C – возможное перемещение точки C.

Так как точка B принадлежит стержню CB, то возможное перемещение точки B равно $\delta y_B = \delta y_C$. Потому уравнение (а) перепишется как

$$-M\delta\varphi + F\delta y_B = 0. \qquad \text{(б)}$$

Установим зависимость линейной координаты y_B от угловой координаты φ: $y_B = L \cdot \mathrm{tg}\varphi$.

Теперь установим зависимость между перемещениями $\delta\varphi$ и δy_B. При повороте стержня OA на угол $\delta\varphi$ точка B перпендикулярно стержню совершит переносное перемещение вместе с точкой B^* стержня $\delta s_1 = OB \cdot \delta\varphi$.

Кроме того, ползун B, совершая относительное движение по кривошипу, передвинется вдоль стержня на δs_2. Вектор абсолютного возможного перемещения точки B изобразится диагональю прямоугольника, построенного на перемещениях δs_1 и δs_2: $\delta\vec{y}_B = \delta\vec{s}_1 + \delta\vec{s}_2$.

Из векторного прямоугольника для его диагонали имеем возможное перемещение точки B:

$$\delta y_B = \frac{\delta s_1}{\cos\varphi} = \frac{OB \cdot \delta\varphi}{\cos\varphi}.$$

Так как $OB = \dfrac{L}{\cos\varphi}$, то $\delta y_B = \dfrac{L}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$.

Подставляя это значение δy_B в уравнение (б) и вынося $\delta\varphi$ за скобки, получим выражения для вычисления искомой силы.

$$-M\delta\varphi + FL\frac{1}{\cos^2\varphi}\delta\varphi = 0, \left(-M\ \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\delta\varphi = 0.$$

Возможное перемещение $\delta\varphi$ не может быть равным нулю, поэтому приравняем к нулю выражение в скобках $\dfrac{FL}{\cos^2\varphi} - M = 0$.

Отсюда получаем искомую зависимость

$$F = \frac{M}{L} \cos^2 \varphi.$$

Пример 2.5. Через блок *2* весом P_2 переброшена нить, к концам которой привязаны груз *1* весом P_1 и каток *3* весом P_3, лежащий на идеально гладкой наклонной плоскости (рис. 2.5). Через каток *3* в свою очередь переброшена наматывающаяся на него нить, к концу которой привязан и груз *4* весом P_4, лежащий на параллельной идеально гладкой плоскости. Определить вес P_1 груза *1*, если система тел находится в равновесии. Весом нитей пренебречь. При расчете учесть трение в подшипниках блока *2*, трение качения катка *3* и трение качения груза *4*.

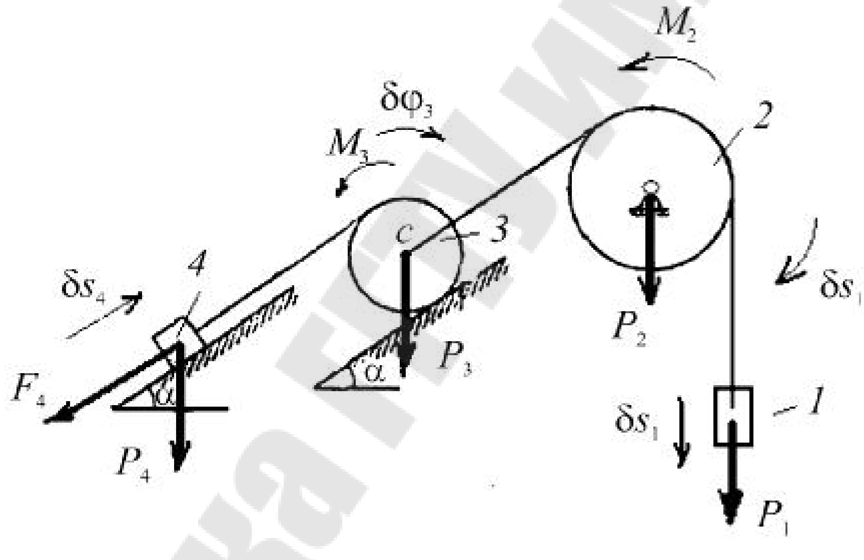


Рис. 2.5

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Для определения положения всех ее точек надо задать один независимый параметр. Пусть этот параметр должен определяет положение груза *1*: $q = s_1$.

Изобразим задаваемые силы: P_1 – искомый вес груза *1*; P_2 – вес блока *2*; P_3 – вес катка *3*; P_4 – вес груза *4*.

При составлении уравнения работ будем учитывать: M – момент трения в подшипниках блока; f – коэффициент трения скольжения груза *4*; δ – коэффициент трения качения катка *3*; α – угол, образуемый наклонными плоскостями с горизонтом.

Силы реакций связей изображать не будем, так как все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нити натянуты и нерастяжимы, наклонные плоскости идеально гладкие).

Для данной системы составим одно уравнение равновесия.

Дадим системе независимое возможное перемещение δs_1 – возможное перемещение груза *1*, направленное по вертикали вниз. Тогда: блок *2* повернется на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{R_2}$, центр масс катка *C* переместится вдоль наклонной плоскости на $\delta s_C = \delta s_1$, каток *3* повернется на угол $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta s_1}{R_3}$, груз *4* переместится вдоль наклонной плоскости на $\delta s_4 = 2\cdot\delta s_C = 2\cdot\delta s_1$.

Определим работу сил и моментов на возможных перемещениях тел заданной механической системы:

$$A_1 = P_1\cdot\delta s_1,\ A_2 = -M_2\cdot\delta\varphi_2,\ A_3 = -M_3\cdot\delta\varphi_3 - P_3\cdot\delta s_3\cdot\sin\alpha,$$

$$A_4 = -F_4\cdot\delta s_4 - P_4\cdot\delta s_4\cdot\sin\alpha.$$

Применяя принцип возможных перемещений, получим:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0,$$

$$P_1\delta s_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3 - P_3\delta s_C\sin\alpha - F_4\delta s_4 - P_4\delta s_4\sin\alpha = 0,$$

$$P_1\delta s_1 - M_2\frac{\delta s_1}{R_2} - M_3\frac{\delta s_1}{R_3} - P_3\delta s_1\sin\alpha - 2F_4\delta s_1 - 2P_4\delta s_1\sin\alpha = 0.$$

Вынесем возможное (виртуальное) перемещение δs_1 за скобки

$$\left(P_1 - \frac{M_2}{R_2} - \frac{M_3}{R_3} - P_3\sin\alpha - 2F_4 - 2P_4\sin\alpha\right)\delta s_1 = 0.$$

Так как виртуальное перемещение $\delta s_1 \neq 0$, то приравниваем к нулю выражение, стоящее в скобках:

$$P_1 - \frac{M_2}{R_2} - \frac{M_3}{R_3} - P_3\cdot\sin\alpha - F_4\cdot 2 - P_4\cdot 2\cdot\sin\alpha = 0.$$

Отсюда получим $P_1 = \dfrac{M_2}{R_2} + \dfrac{M_3}{R_3} + P_3\cdot\sin\alpha + 2F_4 + 2P_4\sin\alpha$.

Так как сила трения $F_4 = P_4 f \cos\alpha$ и момент трения качения $M_3 = P_3\delta\cos\alpha$, то запишем окончательный ответ:

$$P_1 = \frac{M_2}{R_2} + \left(\frac{\delta}{R_3}\cos\alpha + \sin\alpha\right)P_3 + 2(f\cos\alpha + \sin\alpha)P_4.$$

2.4. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей составных конструкций

На приведенных ниже примерах рассмотрим способы определения реакции опор конструкций, которые не имеют ни одной степени свободы.

Пример 2.6. Две балки *BC* и *CD* шарнирно соединены в точке *C* цилиндрическим шарниром. Вертикальная стойка *AB* защемлена в сечении *A*, а вертикальная балка *CD* цилиндрическим шарниром *D* соединена с полом. К балкам приложены горизонтальные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (рис. 2.6). Требуется определить составляющие реакции R_{Ax} в защемленном сечении *A* и реактивный момент M_A пары, возникающей в этом сечении.

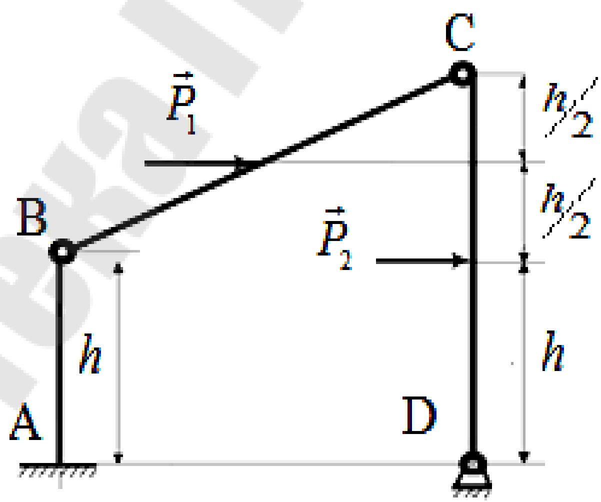


Рис. 2.6

Решение. 1. Определим горизонтальную составляющую реакции заделки. Мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению точки *A*, превратив жесткую заделку в ползун в горизонтальных направляющих, жестко соединенный со стойкой AB (рис. 2.7). Действие отброшенной связи заменим реакцией R_{Ax}. Получим механизм с одной степенью свободы.

Сообщим новому механизму возможное перемещение, переместив ползун A вправо на величину δx. Тогда точки приложения сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ получат перемещения $\delta x_1 = \delta x,\ \delta x_2 = 0{,}5\delta x$.

Составим уравнение возможных работ для определения величины горизонтальной составляющей заделки R_{Ax}: $P_1\delta x_1 + P_2\delta x_2 - R_{Ax}\delta_x = 0$. В результате получим: $R_{Ax} = P_1 + 0{,}5P_2$.

2. Определим момент M_A жесткой заделки.

Заменим связь, препятствующую повороту стойки AB, шарнирно-неподвижной опорой, приложив к стойке реактивный момент M_A (рис. 2.8). Механизму с одной степенью свободы сообщим возможное перемещение, повернув стойку AB по часовой стрелке на угол $\delta\varphi$. При этом точки приложения сил P_1 и P_2 получат перемещения

$$\delta x_1 = h\delta\varphi, \quad \delta x_2 = 0{,}5h\delta\varphi.$$

Уравнение возможных работ для определения момента M_A в заделке имеет вид: $-M_A\delta\varphi + P_1\delta x_2 = 0$.

Отсюда получим $M_A = (P_1 + 0{,}5P_2)h$.

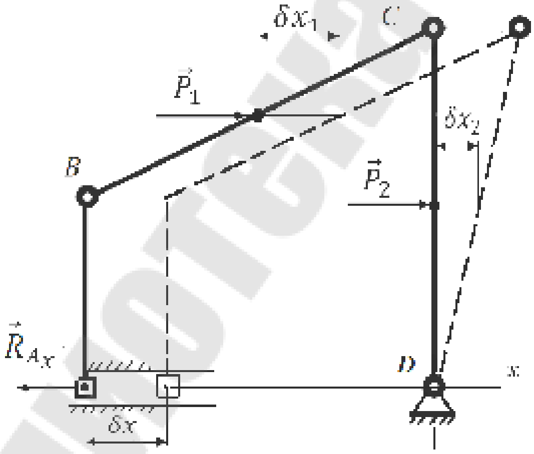


Рис. 2.7

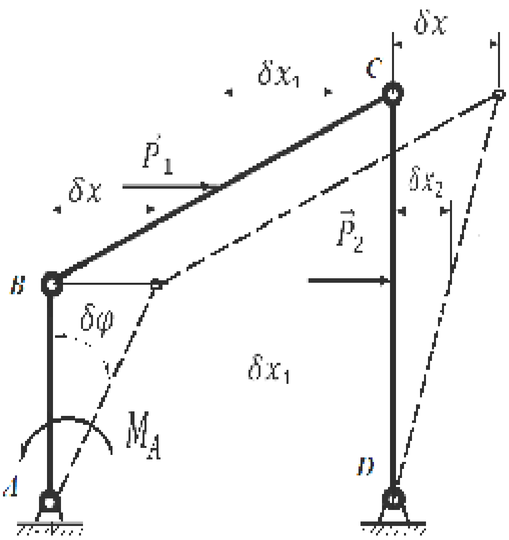
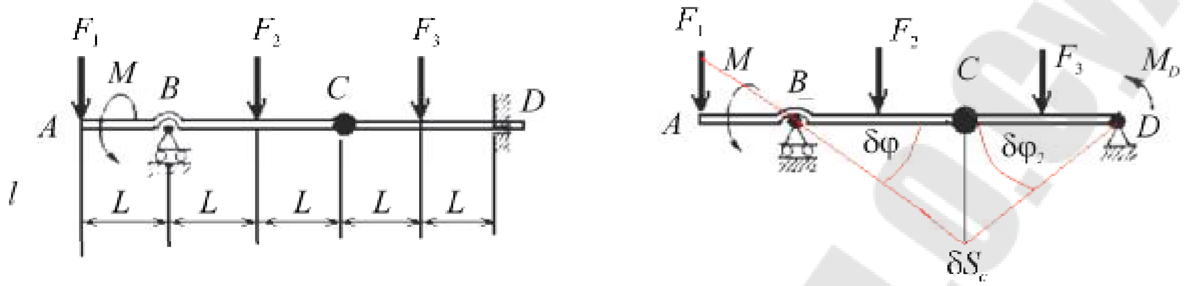


Рис. 2.8

Пример 2.7. Составная балка AD состоит из двух балок AC и CD, шарнирно соединенных в точке C. Конец балки D жестко заделан в стену (рис. 2.9). На балку действуют равные вертикальные силы $F_1 = F_2 = F_3 = F$, а также момент M пары сил. Требуется определить зависимость момента заделки M_D от F и M. Размеры указаны на рисунке. Силами тяжести балок пренебречь.



а) *б*)

Рис. 2.9

Решение. В точке D к конструкции при освобождении от связи действуют реакции жесткой заделки: главный вектор $\vec{R}_D = \vec{R}_{Dx} + \vec{R}_{Dy}$ сил, момент заделки M_D. В точке B при освобождении от связи на балку действует вертикальная реакция $\vec{R}_B$ подвижной цилиндрической опоры.

Заменим жесткую заделку в точке D неподвижным цилиндрическим шарниром, при этом момент заделки M_D будем считать вместе с моментом M и заданными силами F_1, F_2, F_3 активной нагрузкой (см. рис. 2.9).

Так как трением в шарнире D и в подвижной опоре B пренебрегаем, оставшиеся связи $\vec{R}_D = \vec{R}_{Dx} + \vec{R}_{Dy}$ и $\vec{R}_B$ считаем идеальными.

Сообщим системе возможное перемещение, мысленно повернув балку AC на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг точки B. Составная балка займет положение, показанное на рисунке пунктиром. Подвижная опора при этом сместится в горизонтальном направлении, а балка CD повернется на угол $\delta\varphi_1$.

Согласно принципу возможных перемещений запишем уравнение возможных работ

$$-F_1\delta s_1 - M\delta\varphi + F_2\delta s_2 + F_3\delta s_3 + M_D\delta\varphi_1 = 0. \qquad \text{(а)}$$

Возможные перемещения $\delta\check{s}_1$, $\delta\check{s}_2$, $\delta\check{s}_3$ следует изображать как прямолинейные отрезки, направленные по касательным к дугам окружностей, т. е. по линиям действия сил.

Элементарная работа тех сил, для которых возможные перемещения точек приложения противоположны направлению действия сил, является отрицательной. Аналогично определяются знаки элементарной работы моментов пар сил.

Новый механизм имеет одну степень свободы, и поэтому он имеет одно произвольное возможное перемещение, например $\delta\varphi$.

Для остальных возможных перемещений точек приложения сил имеем:

$$\delta s_1 = L \cdot \delta\varphi,\ \delta s_2 = L \cdot \delta\varphi,\ \delta s_3 = L \cdot \delta\varphi_1.$$

Возможное перемещение точки C выражается через углы $\delta\varphi$ и $\delta\varphi_1$. Так как $\delta s_C = 2L \cdot \delta\varphi$, и $\delta s_C = 2L \cdot \delta\varphi_1$, то $\delta\varphi_1 = \delta\varphi$.

Подставим полученные значения возможных перемещений в (а):

$$\left(-F_1L - M + F_2L + F_3L_3 + M_D\right)\delta\varphi = 0.$$

Учитывая, что $F_1 = F_2 = F_3 = F$, получим

$$\left(-M + FL + M_D\right)\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то получаем искомое выражение для момента жесткой заделки:

$$\left(-M + FL + M_D\right) = 0,\ M_D = M - FL.$$

2.5. Методические указания к решению задач по теме «Принцип возможных перемещений»

Принцип возможных перемещений позволяет:

– определять параметры, характеризующие равновесие голономной системы с идеальными, стационарными связями и находить соотношение между активными силами при равновесии без нахождения реакций связей;

– определять реакции связей составной конструкции, не разделяя ее на части.

I. Для механической системы с одной степенью свободы такие задачи рекомендуется решать в следующем порядке:

1. Изобразить на рисунке активные силы.

2. При наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения).

3. Определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты.

4. Сообщить возможное перемещение системе, соответствующее какой-либо обобщенной координате.

5. Записать уравнения связей, определяющие положение тел системы по выбранной обобщенной координате.

6. Составить уравнение возможных работ.

7. Учитывая уравнения связей, выразить все возможные перемещения точек (тел) системы через одно из них, приняв его за независимое.

8. Вынести независимое возможное перемещение как общий множитель в уравнении возможной работы за скобки.

9. По уравнению работ определить обобщенную силу.

10. Приравняв к нулю сумму возможных работ или обобщенную силу, определить искомую величину, решив полученное уравнение.

II. Решение задач статики конструкций требует выполнения следующих правил:

1. Связи системы, которые имеют две или три неизвестные реакции (в задачах статики это шарнирно-неподвижная опора и жесткая защемляющая заделка) не отбрасываются, а видоизменяются.

2. Для определения реакции целой составной конструкции мысленно заменить соответствующую связь такой, чтобы система получила одну степень свободы в направлении искомой реакции, и приложить эту реакцию.

3. После преобразования неподвижной конструкции в подвижную систему с одной степенью свободы сообщить точкам (телам) системы возможные перемещения.

4. Неподвижную опору в этих задачах целесообразно изображать не в привычном при решении задач статики виде, а в виде двух невесомых стержней (см. рисунок к следующей задаче), препятствующих рассматриваемой опоре перемещаться по горизонтали и по вертикали.

5. При отбрасывании горизонтального стержня разрешается перемещение рассматриваемой точки балки по горизонтали.

Из уравнения работ определяется горизонтальная реакция опоры.

6. При отбрасывании вертикального стержня эта же точка балки получает возможность перемещения по вертикали. Определяется соответственно вертикальная составляющая реакции опоры.

7. При определении момента в жесткой заделке вместо заделки изображается неподвижная опора, позволяющая балке угловое перемещение, а к балке прикладывается неизвестная пара сил с моментом,

равным неизвестному моменту заделки, который и определяется из уравнения работ.

8. Для определения вертикальной и горизонтальной реакции заделки заделанная часть конструкции изображается в виде ползуна, который позволяет балке, не поворачиваясь в точке заделки, перемещаться поступательно либо по горизонтали, либо по вертикали.

9. Составить уравнение, выражающее принцип возможных перемещений для рассматриваемой задачи, т. е. записать уравнение возможной работы всех приложенных сил на соответствующих возможных перемещениях точек их приложения, и приравнять эту работу к нулю.

10. При составлении уравнения возможных работ надо к активным силам добавить реакцию видоизмененной связи.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Общее уравнение динамики

В соответствии с принципом Даламбера и с принципом возможных перемещений для уравновешенной системы сил сумма виртуальных работ сил на любом возможном перемещении системы должна быть равна нулю, т. е. $\delta A = \sum_{k=1}^{N} (\vec{P}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k)\delta\vec{r}_k = 0.$

Раскрывая скобки в полученном равенстве при условии идеальности связей системы, получаем далее суммы работ от каждой силы в отдельности:

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{P}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k)\delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{P}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{\Phi}_k \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Так как для идеальных связей выполняется условие $\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$, то получим $\sum_{k=1}^{N} \vec{P}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{\Phi}_k \cdot \delta\vec{r} = 0.$

Или иначе,
$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k^{(P)} + \sum_{k=1}^{N} \delta A_k^{(\Phi)} = 0. \qquad (3.1)$$

Следовательно, в любой момент движения механической системы с идеальными связями сумма виртуальных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю. Равенство (3.1) принято называть **общим уравнением динамики**, или **принципом Лагранжа–Даламбера**.

Равенство нулю суммы виртуальных работ активных сил и сил инерции можно записать в разных формах. Формула (3.3) – наиболее краткая запись. Кроме этой записи при решении задач довольно часто используется уравнение работ, представленное в аналитической форме

$$\sum_{k=1}^{N}\left[(P_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(P_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k+(P_{kz}+\Phi_{kz})\cdot\delta z_k\right]=0 \qquad (3.2)$$

или в векторном виде

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{P}_k+\vec{\Phi}_k\right)\delta\vec{r}_k=0. \qquad (3.3)$$

Если использовать обобщенные активные силы Q_j и обобщенные силы инерции $Q_j^{(\Phi)}$, то будем иметь другое уравнение суммы возможных работ:

$$\sum_{j=1}^{S}(Q_j+Q_j^{(\Phi)})\delta q_i=0, \qquad (3.4)$$

где S – число обобщенных координат (число степеней свободы механической системы. При независимых $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_s$ равенство (3.4) выполняется, когда: $Q_1+Q_1^{\Phi}=0; Q_2+Q_2^{\Phi}=0; Q_S+Q_S^{\Phi}=0.$

Уравнением (3.4) записывается общее уравнение динамики в обобщенных силах. Здесь обобщенная сила инерции $Q_j^{(\Phi)}$ определяется по правилам вычисления обобщенных сил

$$Q_j^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}.$$

Уравнения (3.1)–(3.4) в случае равновесия механической системы переходит в уравнение виртуальных работ для принципа возможных перемещений.

3.2. Примеры решения задач по теме «Общее уравнение динамики»

Пример 3.1. Дифференциальный планетарный механизм состоит из двух шестерен радиусами r_1, r_2 и кривошипа OA (рис. 3.1). К кривошипу приложена пара сил с моментом M, а к шестерням *1* и *2* – пары сил с моментами M_1 и M_2. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить моменты пар сил M и M_1, которые следует приложить к шестерне *1* и кривошипу OA для равновесия механизма. Трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Связи данной механической системы являются идеальными, голономными, стационарными и неосвобождающими. Система имеет две степени свободы.

Выберем в качестве обобщенных координат угол φ_1 поворота шестерни *1* и угол φ поворота кривошипа OA, отсчитываемые от каких-либо фиксированных положений этих тел. По условиям равновесия системы обобщенные силы, отнесенные к этим координатам, равны нулю, т. е. $Q_\varphi = 0$ и $Q_{\varphi 1} = 0$.

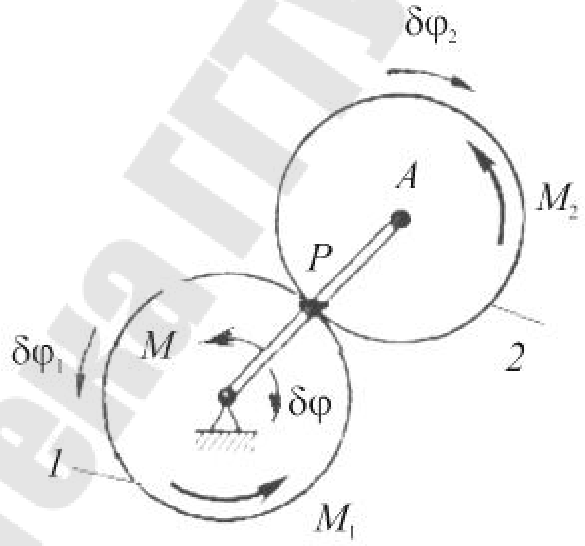


Рис. 3.1

К числу активных сил следует отнести пары сил с моментами M, M_1 и M_2, силы тяжести шестерен и кривошипа. Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то элементарные работы сил тяжести его звеньев равны нулю.

Сообщим шестерне *1* возможное перемещение $\delta\varphi_1$ в сторону возрастания угла φ_1 (при этом $\varphi = \text{const}$).

Тогда обобщенная сила будет равна:

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{2} \delta A_k^{(P)}\right)_{\varphi_1}}{\delta\varphi_1} = \frac{M_1 \cdot \delta\varphi_1 - M_2 \cdot \delta\varphi_2}{\delta\varphi_1}. \qquad \text{(а)}$$

Элементарная работа пары сил с моментом M_2 отрицательна, так как M_2 и $\delta\varphi_2$ направлены в противоположные стороны. При φ = const углы поворота шестерен $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ также направлены в противоположные стороны.

Перемещение точки P соприкосновения шестерен находим по формулам $\delta s_P = r_1 \cdot \delta\varphi_1 = r_2 \cdot \delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_2 = \frac{r_2}{r_1}\delta\varphi_1$.

Подставляя значение $\delta\varphi_2$ в (а) и сокращая на $\delta\varphi_1$, находим выражение для первой обобщенной силы,

$$Q_{\varphi_1} = \left(M_1 \cdot \delta\varphi_1 - M_2 \frac{r_2}{r_1}\delta\varphi_1\right)\Big/\delta\varphi_1 = M_1 - M_2 \frac{r_2}{r_1}. \qquad \text{(б)}$$

Сообщим теперь кривошипу OA возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении момента пары сил M, считая угол φ_1 постоянным. Тогда вторая обобщенная сила будет равна

$$Q_{\varphi} = \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k\right)_{\varphi}\Big/\delta\varphi = \frac{M \cdot \delta\varphi - M_2 \cdot \delta\varphi_2}{\delta\varphi}. \qquad \text{(в)}$$

Так как точка соприкосновения шестерен P является мгновенным центром скоростей для шестерни *2*, то возможное перемещение точки A будет определяться по формуле

$$\delta s_A = (r_1 + r_2)\delta\varphi = r_2 \cdot \delta\varphi_2.$$

Отсюда получаем угол поворота второй шестерни

$$\delta\varphi_2 = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2}\delta\varphi.$$

Подставляя это значение угла $\delta\varphi_2$ в формулу (в) и сокращая на $\delta\varphi$, получаем первую обощенную силу:

$$Q_\varphi = M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}. \tag{г}$$

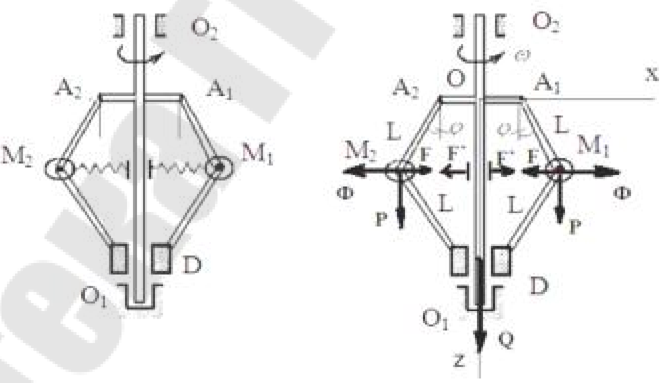
По условиям равновесия системы $Q_\varphi = 0$ и $Q_{\varphi 1} = 0$.

Учитывая формулы (б) и (г), получаем искомые моменты сил:

$$M_1 = M_2 \frac{r_1}{r_2} \text{ и } M = M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Пример 3.2. Центробежный регулятор вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω (рис. 3.2, *а*). Коэффициенты жесткости пружин одинаковы и равны c. Силы тяжести точечных грузов M_1 и M_2 одинаковы и равны P. Вес ползуна D равен Q. Вес ползуна E в расчетах не учитывается. Заданы длины стержней $A_1M_1 = A_2M_2 = M_1B_1 = M_2B_2 = L$. Длины пружин в недеформированном состоянии (когда $\varphi = 0$) равны $OA_1 = OA_2 = L_1$. Требуется определить зависимость между угловой скоростью ω вращения регулятора и углом φ.

Решение. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и силы натяжения пружин $\vec{F}^*$ и $\vec{F}$, причем по третьему закону Ньютона $\vec{F}^* = -\vec{F}$.



а) *б*)

Рис. 3.2

Так как касательные силы инерции $\vec{\Phi}_1^\tau$ и $\vec{\Phi}_2^\tau$ при вращении регулятора с постоянной угловой скоростью равны нулю, то на грузы M_1 и M_2 действуют только центробежные (нормальные) силы инерции $\vec{\Phi}_1^n$ и $\vec{\Phi}_2^n$ (рис. 3.2, *б*).

Связи, наложенные на регулятор, идеальные, так как трение не учитывается.

Для составления уравнения работ сил на возможных перемещениях определим сначала координаты точек приложения сил:

– для грузов – M_1 (x_1, z_1) и M_2 (x_2, z_2);

– для ползуна – D (0, z_D).

Тогда общее уравнение динамики запишется в виде

$$(\Phi_1^n - F_1)\delta x_1 + P_1\delta z_1 + (\Phi_2^n - F_2)\delta x_2 + P_2\delta z_2 + Q\delta z_D = 0.$$

Так как сила $\vec{F}$ упругости пружин перпендикулярна возможному перемещению $\delta z_E = \delta z_D$ ползуна E, то работа этих сил на возможном перемещении ползуна равна нулю.

Учитывая симметричность конструкции относительно оси Oz, можем записать условия:

$$\Phi_1^n = \Phi_2^n = \Phi^n,\ F_1 = F_2 = F,\ P_1 = P_2 = P$$

и $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x$, $\delta z_1 = \delta z_2 = \delta z$.

Из уравнения (а) получим

$$2(\Phi^n - F)\delta x + 2P\delta z + Q\cdot\delta z_D = 0. \tag{б}$$

Модули сил инерции и сил упругости вычисляем по формулам,

$$\Phi^n = \frac{P}{g}(L_1 + L\sin\varphi)\omega^2,\ F = c\cdot\lambda = c\cdot L\sin\varphi, \tag{в}$$

где $\lambda = L\sin\varphi$ – удлинение пружины.

Так как система имеет одну степень свободы, то определим зависимости между координатами точек M и D от угла φ, который примем за обобщенную координату: $x_1 = x_2 = x$, $x = L_1 + L\sin\varphi$, $z_1 = z_2 = z$, $z = L\cos\varphi$, $z_D = 2L\cos\varphi$.

Определяем приращения координат точек M и D (возможные перемещения) при приращении угла φ на величину δφ:

$$\delta x = L\cos\varphi\cdot\delta\varphi,\ \delta z = -L\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\ \delta z_D = -2L\sin\varphi\cdot\delta\varphi.$$

Подставляя эти значения в уравнение (б) и учитывая формулы (в), получим

$$2(\Phi^n - F)L\cos\varphi\cdot\delta\varphi - 2P\cdot L\sin\varphi\cdot\delta\varphi - 2Q\cdot L\sin\varphi\cdot\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то вынося за скобки величину $\delta\varphi$ и сокращая на $2L$, получаем $(\Phi^n - F)\cos\varphi - P\sin\varphi - Q\cdot\sin\varphi = 0.$

Подставим сюда формулы (в):

$$\left(\frac{P}{g}(L_1 + L\sin\varphi)\omega^2 - cL\sin\varphi\right)\cos\varphi - P\sin\varphi - Q\sin\varphi = 0.$$

Найдем теперь угловую скорость регулятора:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{cL\sin\varphi + (P+Q)\mathrm{tg}\varphi}{P(L_1 + L\sin\varphi)}g\right)}.$$

Пример 3.3. Два зубчатых колеса *1* и *2* с радиусами r_1 и r_2 находятся во внешнем зацеплении. Моменты инерции колес относительно их осей вращения соответственно равны J_1 и J_2. Определить угловое ускорение колеса *1*, если к нему приложен вращающий момент M_1, а к колесу *2* – момент сопротивления M_2 (рис. 3.3).

Решение. Пара зубчатых колес является голономной системой с одной степенью свободы и с идеальными связями. При вращении колес силы инерции точек колес приводятся к парам сил инерции с моментами

$$M_1^{(\phi)} = J_1\varepsilon_1 \text{ и } M_2^{(\phi)} = J_2\varepsilon_2. \qquad \text{(а)}$$

Величины угловых перемещений и угловых ускорений колес связаны уравнениями связей:

$$r_1\delta\varphi_1 = r_2\delta\varphi_2 \text{ и } r_1\varepsilon_1 = r_2\varepsilon_2. \qquad \text{(б)}$$

Составим сумму возможных работ активных сил и сил инерции:

$$(M_1 - M_1^{(\phi)})\delta\varphi_1 - (M_2 + M_2^{(\phi)})\delta\varphi_2 = 0. \qquad \text{(в)}$$

Выберем обощенную координату $q = \varphi_1$, тогда обобщенное ускорение будет равно ускорению колеса *1*: $\ddot{q} = \varepsilon_1$. Из формул (б) получим $\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1$ и $r_2\varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1$.

Используя выражения (а)–(в), получим ускорение первого колеса $\varepsilon_1 = \left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2\right)\Big/\left(J_1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 J_2\right).$

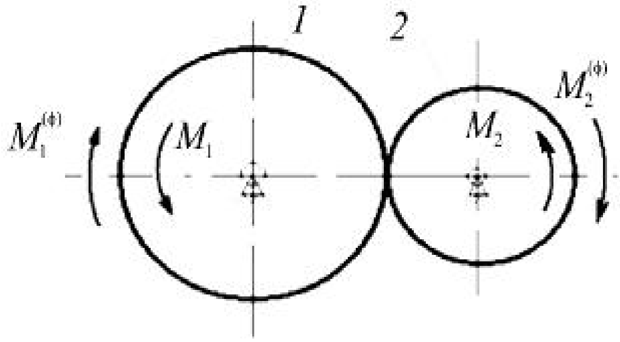


Рис. 3.3

Пример 3.4. Треугольный кулачок *1* массы m_1 скользит по горизонтальной плоскости вдоль оси Ox под действием силы $\vec{F}_1$ и перемещает толкатель *2* массы m_2. Толкатель движется в вертикальных направляющих вдоль оси Oy. Пружина *3*, коэффициент жесткости которой c, прижимает толкатель к кулачку (рис. 3.4). В начальный момент времени система находилась в покое и пружина была не деформирована. Определить закон движения толкателя $y = y(t)$, полагая $y(0) = 0$.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Запишем уравнение голономной связи $y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha$, описывающее зависимость перемещения толкателя от перемещения кулачка. Из этого уравнения имеем: $\delta y = \delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha$, $\dot{y} = \dot{x} \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

Составим общее уравнение динамики для данной системы:

$$(F_1 - \Phi_1)\delta x - (P_2 + \Phi_2 + F_3)\delta y = 0. \qquad \text{(а)}$$

Здесь: $\Phi_1 = m_1\ddot{x}$, $\Phi_2 = m_2\ddot{y}$ – модули сил инерции тел *1* и *2*; $F_3 = cy$ – сила упругости пружины; $P_2 = m_2 g$ – сила тяжести толкателя.

Уравнение (а) с учетом уравнений связи приведем к дифференциальному виду:

$$\ddot{y} + k^2 y = Ak^2, \qquad \text{(б)}$$

где $k^2 = c\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{m_1 + m_2\mathrm{tg}^2\alpha}$, $A = \dfrac{F_1 - m_2 g\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$.

С учетом начальных условий $y(o) = 0$, $\dot{y}(\mathrm{o}) = 0$ найдем общее решение неоднородного дифференциального уравнения (б):

$$y = A(1 - \cos kt).$$

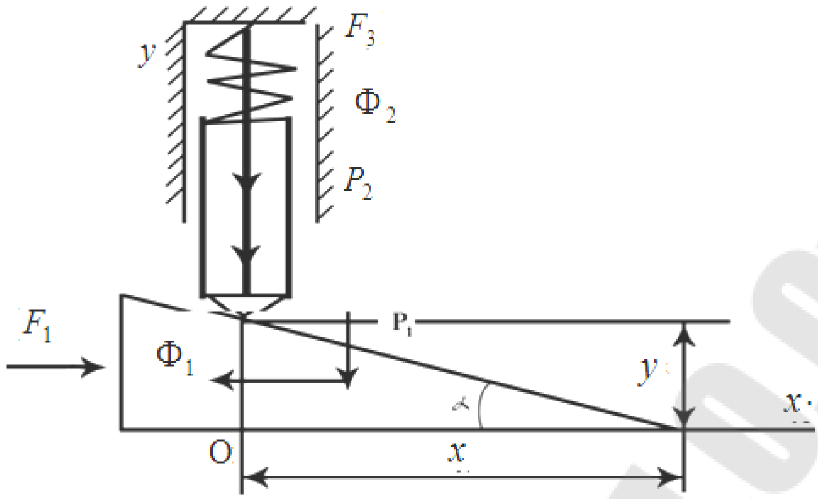


Рис. 3.4

3.3. Методические указания к решению задач по теме «Общее уравнение динамики»

При решении задач общее уравнение динамики используется для определения ускорений точек системы тел. Преимущество общего уравнения динамики заключается в том, что в его формулировке отсутствуют реакции идеальных связей. Если не все связи являются идеальными, то следует к активным силам добавлять реакции таких связей.

1. При исследовании движения механической системы с одной степенью свободы, применяя общее уравнение динамики, задачи рекомендуется решать в следующем порядке:

– изобразить на рисунке активные силы и реакции, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения);

– определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы;

– сообщить возможное перемещение δg одной из точек системы и выразить возможные перемещения δr_k точек приложения всех сил через это возможное перемещение δg, считая его независимым;

– составить общее уравнение динамики, т. е. записать уравнение элементарной работы всех активных сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы и приравнять его к нулю;

– после сокращения полученного уравнения на независимое возможное перемещение определить искомую величину или выполнить интегрирование дифференциального уравнения движения.

2. При исследовании движения механической системы с несколькими степенями свободы после выполнения рисунков и определения сил надо:

– выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу $S = 2$ степеней свободы этой системы;

– сообщить точкам системы возможные перемещения $\delta r_k(q_1)$, соответствующие вариации обобщенной координаты δg_1, условно приравняв возможные перемещения, соответствующие вариации обобщенной координаты δg_2 к нулю;

– учитывая наложенные на систему связи, выразить возможные перемещения $\delta r_k(q_1)$ через перемещение δg_1;

– записать первое уравнение суммы работ для первого независимого возможного перемещения на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения и приравнять его к нулю;

– мысленно приравнять к нулю возможные перемещения $\delta r_k(q_1)$ и сообщить точкам системы возможные перемещения $\delta r_k(q_2)$, соответствующие вариации обобщенной координаты δg_2;

– учитывая связи, определить возможные перемещения $\delta r_k(q_2)$, через перемещение δg_2;

– записать второе уравнение суммы возможных работ на возможных перемещениях $\delta r_k(q_2)$;

– решить систему двух уравнений возможных работ $\delta A(\delta q_1) = 0$, $\delta A(\delta q_2) = 0$ и определить искомые величины.

3.4. Уравнения Лагранжа второго рода

В некоторых задачах динамики использование общего уравнения динамики приводит к сложным преобразованиям. Поэтому значительно удобнее пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_j}\right) - \frac{dT}{dq_j} = Q_j, \; (j = 1, 2, \; ..., S), \qquad (3.5)$$

представляющих собой систему S дифференциальных уравнений движения механической системы в обобщенных координатах $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_S$.

Уравнения движения несвободной голономной системы в обобщенных координатах (3.5) получают из общего уравнения динамики.

Вывод этих уравнений хорошо известен из традиционного курса теоретической механики. Эти уравнения применяются только для голономных систем с конечным числом степеней свободы. При нахождении обобщенных сил Q_j нужно исходить из того, что связи считаются мгновенно остановленными.

Интегрируя полученные из уравнений (3.5) дифференциальные уравнения и определяя по начальным условиям постоянные интегрирования, получаем систему S уравнений движения механической системы в обобщенных координатах $q_j = q_j(t)$.

При применении уравнений Лагранжа второго рода к задачам на относительное движение, а также к задачам с нестационарными связями кинетическую энергию материальной системы следует вычислять в ее абсолютном движении.

3.5. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы

Предположим, что на рассматриваемую механическую систему наряду с силами, имеющими потенциал (консервативными силами), действуют силы, не имеющие потенциала (неконсервативные силы). При этом условии обобщенную силу Q_j удобно представить в виде суммы обобщенной силы Q_j^P, соответствующей консервативным силам $\vec{P}_k$, и обобщенной силы Q_j^F, соответствующей неконсервативным силам $\vec{F}_k$: $Q_j = Q_j^P + Q_j^F$.

Если на рассматриваемую систему действуют только консервативные силы, то обобщенная сила определяется формулой –:

$$Q_j = Q_j^P - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \ (j = 1, 2, \ldots, S).$$

Здесь $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$ – потенциальная энергия системы, являющаяся функцией обобщенных координат.

В этом случае уравнения Лагранжа второго рода (3.5) принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, S). \tag{3.6}$$

Уравнения (3.6) можно преобразовать путем введения функции Лагранжа $L = T - \Pi$, называемой кинетическим потенциалом. Подставив в уравнения (3.6) кинетическую энергию, определенную по формуле $T = L + \Pi$, получим другую запись уравнения (3.5):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ S). \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.7) называются уравнениями Лагранжа второго рода для консервативной системы.

3.6. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы

Пример 3.5. На рис. 3.5 изображена механическая система с двумя степенями свободы. Заданы соотношения масс тел: $m_1 = 2m$; $m_2 = 6m$; $m_3 = m_4 = m$. Требуется найти уравнения движения системы в обобщенных координатах $q_1 = x$, $q_2 = \xi$ при заданных начальных условиях: $q_{10} = 0$, $q_{20} = 0$, $\dot{q}_{10} = 0$, $\dot{q}_{20} = 0$.

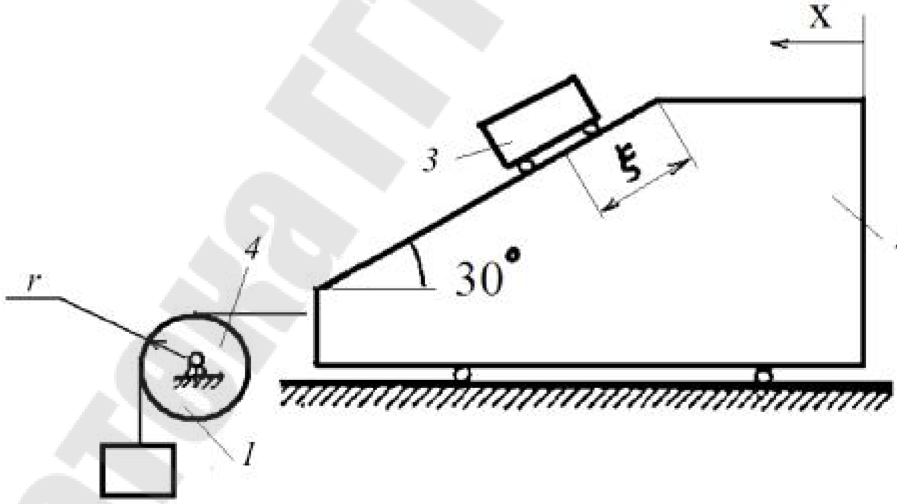


Рис. 3.5

Для решения задачи применим два уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_1 \ \text{и} \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + Q_2. \qquad (a)$$

Здесь $T=\sum_{i=1}^{4}T_i$ – кинетическая энергия; П – потенциальная энергия; Q_1 и Q_2 – обобщенные силы.

Выразим скорости тел системы через обобщенные скорости:

$$v_1=v_2=\dot{x};\ \omega_4=\frac{\dot{x}}{r}.$$

Так как тело *3* совершает сложное движение, то $\vec{v}_3=\vec{v}_e+\vec{v}_r$.

Здесь:

$v_e=\dot{x}$ – переносная скорость тела *3*;

$v_r=\dot{\xi}$ – относительная скорость тела *3*;

$v_3=\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{x}^2+2\cdot\dot{\xi}\cdot\dot{x}\cdot\cos 30^\circ}$ – абсолютная скорость тела *3*.

Момент инерции тела *4* определяется по формуле $J=\frac{mr^2}{2}$.

Определим кинетическую энергию тел 1–4:

$$T_1=\frac{m_1v_1^2}{2}=m\dot{x}^2;\ T_2=\frac{m_2v_2^2}{2}=3m\dot{x}^2;$$

$$T_3=\frac{m_3v_3^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{x}^2+2\dot{\xi}\dot{x}\cos 30^\circ);\ T_4=\frac{J\omega_4^2}{2}=\frac{m\dot{x}^2}{4}.$$

Суммируя кинетические энергии тел, получим

$$T=\frac{19}{4}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+m\cos 30^\circ\,\dot{x}\dot{\xi}=\frac{1}{2}a_{11}\dot{x}^2+a_{12}\dot{x}\dot{\xi}+\frac{1}{2}a_{22}\dot{\xi}^2.$$

Здесь $a_{11}=9{,}5m$, $a_{12}=m\cos 30^\circ$, $a_{22}=m$ – инерционные коэффициенты.

Вычислим частные производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=a_{11}\dot{x}+a_{12}\dot{\xi};\ \frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}=a_{12}\dot{x}+a_{22}\dot{\xi};\ \frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial T}{\partial\xi}=0.$$

Вычислим левые части уравнений (а):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=a_{11}\ddot{x}+a_{12}\ddot{\xi};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}-\frac{\partial T}{\partial\xi}=a_{12}\ddot{x}+a_{22}\ddot{\xi}.$$

Находим потенциальную энергию твердых тел *1*:

$$\Pi_1 = -m_1 g x = -2mgx,\ \Pi_2 = 0,\ \Pi_3 = -m_3 g \xi \cos 30°,\ \Pi_4 = 0,$$

$$\Pi = \sum_{k=1}^{4} \Pi_k = -m_1 g x - m_3 g \xi \cos 30° = -mg\left(2x + \xi \cos 30°\right).$$

Находим обобщенные силы:

$$Q_1^P = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2mg \text{ и } Q_2^P = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = mg \cos 30°.$$

Решаем систему двух дифференциальных уравнений движения:

$$a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\xi} = Q_1^P \text{ и } a_{12}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\xi} = Q_2^P.$$

относительно обобщенных ускорений:

$$\ddot{\xi} = \left(\frac{Q_2^P - Q_1^P \left({a_{12}}/{a_{11}} \right)}{a_{22} - \left({a_{12}^2}/{a_{11}} \right)} \right),\ \ddot{x} = \frac{Q_1^P}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \left(\frac{Q_2^P - Q_1^P \left({a_{12}}/{a_{11}} \right)}{a_{22} - \left({a_{12}^2}/{a_{11}} \right)} \right). \qquad (б)$$

Подставив в решения (б) вычисленные значения обобщенных сил и инерционных коэффициентов, получаем обобщенные ускорения:

$$\ddot{x} = 0{,}143g \quad \ddot{\xi} = 0{,}796g. \qquad (в)$$

Интегрируем дважды ускорения (в), с учетом начальных условий получаем уравнения движения в обобщенных координатах:

$$x(t) = \frac{2}{17} g t^2,\ \xi(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} g t.$$

3.7. Методические указания к решению задач по теме «Уравнения Лагранжа второго рода»

Основная задача динамики механической системы состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ и начальные условия, найти уравнения движения системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа дают единый метод решения этой задачи, число этих определяется числом степеней свободы механической системы.

Для составления дифференциальных уравнений движения голономной механической системы с помощью уравнений Лагранжа второго рода надо:

1) изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все активные силы, действующие на систему; реакции идеальных связей изображать не следует; если имеются силы трения, то их следует присоединить к активным силам;

2) определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты, предположив, что система движется так, что все обобщенные координаты увеличиваются;

4) определить кинетическую энергию системы в ее абсолютном движении и выразить ее через обобщенные скорости;

5) для составления левой части уравнений Лагранжа следует определить вид частных производных от кинетической энергии по обобщенной скорости и по обобщенной координате и вычислить производную по времени для первого члена уравнения Лагранжа второго рода;

6) для составления правых частей уравнений надо найти обобщенные силы;

7) из полученной системы дифференциальных уравнений можно, интегрируя эти уравнения, найти уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Литература

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : учеб. для студентов втузов : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1979. – Т. 1: Статика и кинематика. – 271 с.

2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : учеб. для студентов втузов : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1979. – Т. 2: Динамика. – 543 с.

3. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М. : Высш. шк., 1983. – 576 с.

4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высш. шк., 1986. – 415 с.

5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1984. – Ч. 1: Статика. Кинематика. – 343 с.

6. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1984. – Ч. 2: Динамика. – 423 с.

7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для вузов /А. А. Яблонский [и др.] ; под ред. А. А. Яблонского. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 382 с.

8. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов втузов : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – Т. 1: Статика и кинематика. – 670 с.

9. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов вузов : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1991. – Т. 2: Динамика. – 639 с.

10. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики : в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – Т. 1: Статика и кинематика. – 352 с.

11. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики : в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1983. – Т. 2: Динамика. – 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Практикум по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 1-36 01 07 «Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин» и 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники» дневной и заочной форм обучения

Составитель **Андреев** Сергей Филиппович

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 10.05.18.
Формат 60х84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,58.
Изд. № 34.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель