Гарантированная оценка точности для модельной задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями

Емельянченко Н.С.
Кафедра информатики
Гомельский государственный технический университет имени Павла Осиповича Сухого
Гомель, Республика Беларусь
e-mail: natashait@gstu.by

***Аннотация*—Рассмотрена задача дискретной оптимизации – модельная задача о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями. Найдена гарантированная оценка точности градиентного алгоритма, реализованного на аппроксимационной решетке.**

Ключевые слова: гарантированная оценка; градиентный алгоритм; у-множество; порядково-выпуклая функция

V. Введение

Модельная задача о рюкзаке в классическом ее представлении относится к числу широко известных задач дискретной оптимизации. Основными сферами применения являются области планирования и управления экономическими, производственными и транспортными системами. В частности, следует отметить задачи объемного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства и задачи загрузки транспортных средств. Начиная с 60-70-х гг. XX века стали рассматриваться различные модификации задачи о рюкзаке. В частности, была изучена модель с дробимыми предметами и модель в многомерной постановке. Одновременно исследовались модели, где требование булевозначности переменных заменено требованием принадлежности их некоторому множеству неотрицательных целых чисел в ограниченном диапазоне [1]. Наиболее существенным шагом на пути расширения практической применимости ранцевых моделей стало исследование задачи о рюкзаке с нелинейными критериями, в частности, сепарабельными. Актуальность исследования предопределена широкой распространенностью и важностью прикладных проблем, формулируемых в рамках задач ранцевого типа.

Проблемой решения задач данного типа является отыскание гарантированных оценок точности алгоритмов решений.

VI. Постановка задачи

Введём некоторые обозначения. Под *гарантированной оценкой* погрешности градиентного алгоритма решения задачи понимают такое $\varepsilon \geq 0$, что

$$\frac{f(X^*) - f(X^g)}{f(X^*) - f(0)} \leq \varepsilon \qquad (1)$$

или, если $f(0) = 0$, то

$$\frac{f(X^g)}{f(X^*)} \geq 1 - \varepsilon. \qquad (2)$$

Гарантированную оценку точности называют достижимой, если неравенство (1) обращается в равенство.

$(D, \prec)$ – множество D с заданным на нём частичным порядком $\prec$ (бинарное отношение) называется упорядоченным (сокращённо у-множеством) [2].

Пусть H – у-множество, функция $f\colon H \to R$ называется порядково-выпуклой на H, если

$$f(y) \leq \frac{f(x) + f(z)}{2} \ \forall x, y, z \in H, x \prec y \prec z. \qquad (3)$$

Для вывода оценок качества градиентных решений в [2] предложена следующая методика. Пусть f^* - оптимальное значение целевой функции. В силу соотношения

$$f(x^g) = \sum_{t=1}^{k} \Delta_t$$

нахождение гарантированной оценки погрешности градиентного решения сводится к вычислению

$$\min \sum_{t=1}^{k} \Delta'_t, \ \Delta'_t = \frac{\Delta_t}{f^*}.$$

Величины Δ'_t относительных приращений целевой функции (по отношению к оптимальному её значению) на каждой итерации алгоритма решения удовлетворяют некоторым условиям-неравенствам (как правило, становятся ограничениями в задаче).

Предлагается вывод гарантированных оценок градиентных алгоритмов для задачи о рюкзаке с монотонными сепарабельными функциями:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(X_i) \to \max, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i) \leq B, \qquad (5)$$

$$0 \leq X_i \leq H_i. \qquad (6)$$

Основная идея подхода состоит в том, что приближённое решение строится на аппроксимационной решетке $Z(\alpha^i)$, которая строится по формуле

$$a_{i+1} = \max\{[\alpha \cdot a_i], a_i + 1\}. \qquad (7)$$

Узлами такой решетки являются числа $[\alpha^i]$, $\alpha \geq 1$, где $[x]$ обозначает целую часть числа X, i – целые неотрицательные степени числа α.

VII. Вывод гарантированной оценки точности

В случае $\alpha = 1$ решетка $Z(\alpha^i)$ совпадает с решеткой Z^n и тогда предлагается реализация градиентного алгоритма с известной гарантированной оценкой $\frac{1}{2}$ [2].

Исследуется поведение градиентных алгоритмов при $\alpha > 1$, реализованных на решетке $Z(2^i)$, для задачи (4) – (6), где $f_i(0) = 0$, $f_i(X_i)$ – неубывающие функции, и $\alpha_i(X_i)$ – линейные функции. Таким образом, градиенты вычисляются только для значений X_i, которые являются степенями двойки. Алгоритм, строящий вектор градиентного типа полиномиальный.

Определим для каждой переменной $x_i = 1, 2, \ldots, n$ различные возможные значения:

$$S_i^{k_i} = \begin{cases} 0, \ k_i = 0; \\ 2^{k_i - 1}, \ k_i = 1, 2, \ldots, [\log_2 H_i]; \\ H_i, \ k_i \geq [\log_2 H_i] + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Будем считать, что $f_i(X_i)$ – порядково-выпуклые функции для $1 \leq i \leq n$. Следующий алгоритм является градиентным с коэффициентом растяжения $\frac{1}{\beta_i}$. Введём обобщённый градиент:

$$\Delta_i(x) = \begin{cases} \nabla_i^+ f(x) / \beta_i, \ \text{если } 1 \leq i \leq n, \ x_i \leq 1_i; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Алгоритм:

1. Полагаем $b^0 = b$, $x^0 = (0, \ldots, 0)$, $k = 1$. Шаг 1. Находим индекс i_k, отвечающий большей величине $\Delta_i(x^k)$. Если $\Delta_i(x^k) \leq 0$, то переходим к п. 2. Иначе полагаем, $x^k = x^{k-1} + e_{i_k}$ $b^k = b^{k-1} - e_{i_k}$. Если $b^k > 0$, то $k = k + 1$. Повторить шаг k.

2. Если $b^{k-1} \geq 0$, то $x^g = x^{k-1}$. Иначе в качестве x^g выбрать тот из векторов $x' = x^k - x^{k-1}$, $x'' = x^{k-1}$, на котором достигается $max\{f(x'), f(x'')\}$.

Лемма. Точка x^k, полученная на шаге k алгоритма, является решением в задаче (4) – (6) при условии, что $ax^k = b$ [2].

Поскольку приближённое решение строится на аппроксимационной решётке (7), то гарантированная оценка алгоритма для задачи (4) – (6) равна $\frac{1}{2\alpha}$.

Пусть s – последний шаг итерационного процесса п.1 алгоритма, тогда по лемме либо в полосе $\alpha \leq ax \leq b$, $\alpha = ax^s$, нет целых точек, либо $\Delta_{i_s}(x^s) \leq 0$, то x^s – решение задачи (4) – (6). Если эти условия не выполнены, то $ax^s \geq b$, и поэтому x^s – допустимый элемент в задаче (4) – (6) при $b = ax^s$. Тогда в силу леммы справедливо неравенство $f(x^s) \geq f(x^*)$, из которого следует, что

$$f(x') + f(x'') = f(x^s - x^{s-1}) + f(x^{s-1}) = \nabla_{i_s}^+ f(x^{s-1}) + f(x^{s-1}) \geq$$
$$\geq f(x^s) - f(x^{s-1}) + f(x^{s-1}) = f(x^s) \geq f(x^*).$$

Отсюда и из (7) получаем, что

$$f(x^g) \geq (f(x') + f(x''))/2\alpha \geq f(x^*)/2\alpha.$$

Следовательно, при $\alpha > 1$ гарантированная оценка точности алгоритма равна $\frac{1}{2\alpha}$.

Принцип вывода гарантированной оценки точности может быть использован при построении и обосновании новых субоптимальных алгоритмов для модельных задач дискретной оптимизации.

[1] Ф. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / В.С. Зарубин, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, С. 70 – 83.

[2] М. М. Ковалев. Матроиды в дискретной оптимизации. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – С. 107 – 130.